

Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuares

le 16 Septembre 2026

Par : MARIKO Hamed Mondesir

Titre : Analyse de la dynamique de la mortalité en France entre 1962 et 2023 : les détections de changements de tendance

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Entreprise :

Prim'Act

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA : Directeur de mémoire en entreprise :

Juliette LEGRAND

Catherine RAINER

Frédéric PLANCHET

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

La mortalité occupe une place essentielle dans les métiers de l'assurance, conditionnant notamment la tarification et le provisionnement des engagements de long terme en assurance vie. De plus, elle influence l'équilibre financier des systèmes de retraite et reflète partiellement les transformations sanitaires, sociales et économiques de la population française dans le temps. En France, la mortalité a connu une amélioration continue depuis les années 1960, se traduisant une nette augmentation des espérances de vie.

Toutefois, cette amélioration n'adopte pas un rythme uniforme, et depuis les années 2010 est sujette à un ralentissement lent et durable selon de récentes études. Dans ce contexte, ce mémoire a pour objectif d'objectiver les changements de tendance dans la mortalité française entre 1962 et 2023, et d'en analyser les impacts sur l'évolution de la mortalité. Pour cela, la procédure statistique de détection de rupture de Bai-Perron est mobilisée pour répondre à cette problématique, en l'appliquant à la série de composante temporelle d'un modèle log-Poisson calibré sur l'ensemble des données par sexe.

Les analyses menées mettent en évidence trois ruptures du rythme d'amélioration de la mortalité pour chaque sexe, dont un décrochage majeur observé en 2013 aussi bien chez les hommes que chez les femmes. Par la suite, une étude prospective montre que l'intégration de cette rupture conduit à des espérances de vie générationnelles inférieures à celles qu'offre une extraction des tendances historiques. Pour les générations atteignant 65 ans en 2025, l'écart dépasse 5 %, soit environ deux années d'espérance de vie chez les femmes et un an et demi chez les hommes. Ces résultats soulignent l'intérêt des méthodes de détection de rupture pour améliorer les projections de mortalité et le suivi des hypothèses utilisées en assurance et en retraite.

Mots clefs: Détection de rupture, Changements structurels, Dynamique de la mortalité

Abstract

Mortality plays a central role in the insurance industry, particularly in the pricing and reserving of long-term life insurance liabilities. It also affects the financial sustainability of pension systems and partly reflects the health, social, and economic transformations experienced by the French population over time. In France, mortality has steadily improved since the 1960s, resulting in a significant increase in life expectancy.

However, this improvement has not occurred at a constant pace and, according to recent studies, has been characterized by a gradual and persistent slowdown since the early 2010s. In this context, the objective of this dissertation is to identify and date changes in the trend of French mortality over the period 1962-2023 and to assess their impact on mortality dynamics. To address this question, the Bai-Perron structural break detection procedure is applied to the time component of a log-Poisson mortality model calibrated separately for each sex using the full dataset.

The results reveal three significant changes in the pace of mortality improvement for each sex, including a major structural break around 2013 affecting both men and women. A prospective analysis further shows that incorporating this break leads to lower cohort life expectancies than those obtained by simply extrapolating historical mortality trends. For generations reaching age 65 in 2025, the difference exceeds 5%, corresponding to approximately two years of life expectancy for women and one and a half years for men. These findings highlight the value of structural break detection methods for improving mortality projections and monitoring the assumptions used in insurance and pension applications.

Keywords: Changepoint detection, Structural breaks , Mortality dynamics

Note de synthèse

Problématique et objectifs

La mortalité constitue une variable centrale de l'actuariat vie, conditionnant la tarification des contrats de prévoyance, le provisionnement des rentes viagères et le calibrage du capital réglementaire sous Solvabilité II. En France, elle recule fortement depuis les années 1960, l'espérance de vie à la naissance ayant gagné plus de douze années sur la période. Cette évolution demeure toutefois irrégulière, marquée par des chocs ponctuels comme la canicule de 2003 [Desesquelles et Richet-Mastain, 2004], mais aussi par un ralentissement plus durable de la baisse de la mortalité observé entre 2013 et 2019 [COR, 2021], dont les déterminants restent débattus.

La nature de ces changements de régime, structurelle ou conjoncturelle, n'est pas sans conséquence pour l'actuaire. Les provisions Best Estimate, le capital au titre du risque de longévité et les tables réglementaires TGH05 et TGF05, calibrées sur les projections de l'INSEE [Planchet, 2007], reposent sur des hypothèses de mortalité future qu'un changement de régime non détecté vient biaiser. La révision à la baisse des projections de l'INSEE en 2021, de 2,6 ans chez les hommes et 3,0 ans chez les femmes à l'horizon 2070 [Blanpain et Algava, 2021], illustre concrètement ce risque.

Les méthodes de détection de rupture, issues du contrôle statistique de procédés et transposées au champ actuariel [Croix *et al.*, 2015], répondent à ce besoin, mais leur application à des portefeuilles d'assurance se heurte à un horizon trop court pour distinguer fluctuation et changement structurel [Le Louarne, 2023]. Leur extension à la mortalité nationale sur longue période lève cette contrainte : [Ngong Engoulou, 2023] applique ainsi la méthode de Bai et Perron à l'indice temporel de Lee-Carter, sur des données de 2000 à 2020, mais ses résultats restent tributaires d'une fenêtre limitée de données.

Ce mémoire s'inscrit dans le prolongement de cette démarche, en l'étendant à la période 1962-2023. Il vise à déterminer si l'amélioration de la mortalité française procède d'une tendance régulière ou de régimes successifs séparés par des ruptures identifiables, puis à mesurer les conséquences du régime le plus récent sur l'espérance de vie prospective et l'évaluation des engagements viagers.

Description des données

Les données de décès et de population vivante utilisée dans cette étude sont fournies par l'INSEE, et se restreint au périmètre de la France métropolitaine pour éviter que l'introduction de Mayotte dans les données de la France entière en 2014 n'occasionne d'éventuelles dérives fictives.

Evolution de des décès et vieillissement de la population

Le nombre annuel de décès présente une évolution contrastée. Après une relative stabilité entre les années 1960 et la fin des années 1980, les décès diminuent jusqu'au début des années 2000 avant d'augmenter à nouveau pour atteindre près de 650 000 décès annuels en fin de période. Cette hausse récente s'explique principalement par le vieillissement de la population et l'arrivée aux grands âges des générations du baby-boom.

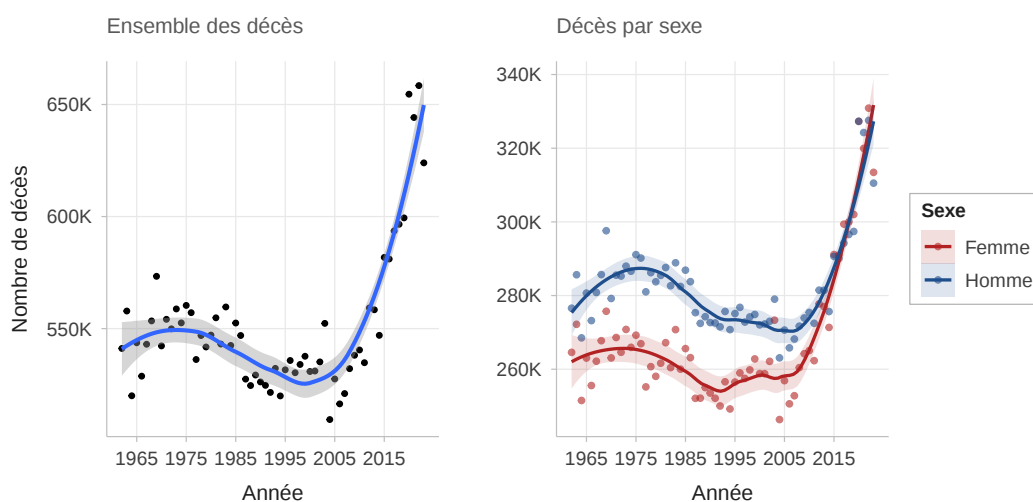


FIGURE 1 – Evolution du nombre de décès annuels

De plus, l'analyse par âge révèle que cette apparente stabilité masque en réalité un transfert progressif de la mortalité vers les âges élevés. Les décès diminuent fortement aux jeunes âges et chez les adultes, tandis qu'ils augmentent continuellement chez les personnes âgées de plus de 80 ans. En cohérence avec ce phénomène, l'âge moyen au décès progresse régulièrement pour les deux sexes sur l'ensemble de la période (figure 8).

Évolution de la mortalité et signes de ralentissement

Le taux brut de mortalité diminue globalement jusqu'au début des années 2000 avant d'amorcer une remontée progressive. Parallèlement, l'étude des améliorations annuelles

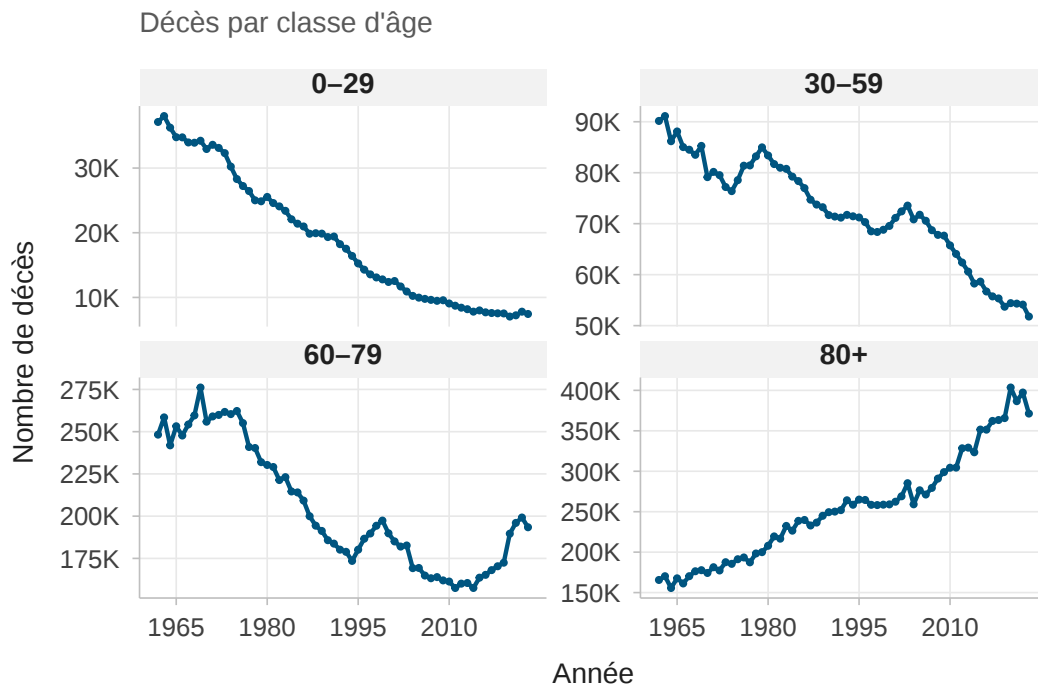


FIGURE 2 – Evolution du nombre de décès par classe d'âge

de mortalité montre que les gains de longévité ne suivent pas une trajectoire régulière. Plusieurs effets de période sont visibles, notamment la surmortalité liée à la canicule de 2003 et celle observée lors de la crise sanitaire de 2020. Aussi, l'analyse des surfaces d'amélioration de la mortalité laisse paraître l'existence d'un effet cohorte ainsi qu'un ralentissement progressif des gains de mortalité au cours des récentes.

Modélisation et résultats

Modèle log-Poisson de la mortalité

Le nombre de décès observé à l'âge x et à l'année t est supposé suivre une loi de Poisson $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t}\mu_{x,t})$, le modèle de la mortalité est formulée comme suit : $\log \mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}$, où :

- $D_{x,t}$ désigne le nombre de décès observés ;
- $E_{x,t}$ l'exposition au risque ;
- $\mu_{x,t}$ la force de mortalité ;
- $\epsilon_{x,t}$ le terme d'erreur résiduel supposé i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\iota, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$
- α_x le profil moyen de la mortalité selon l'âge ;
- β_x la sensibilité de chaque âge aux évolutions temporelles ;

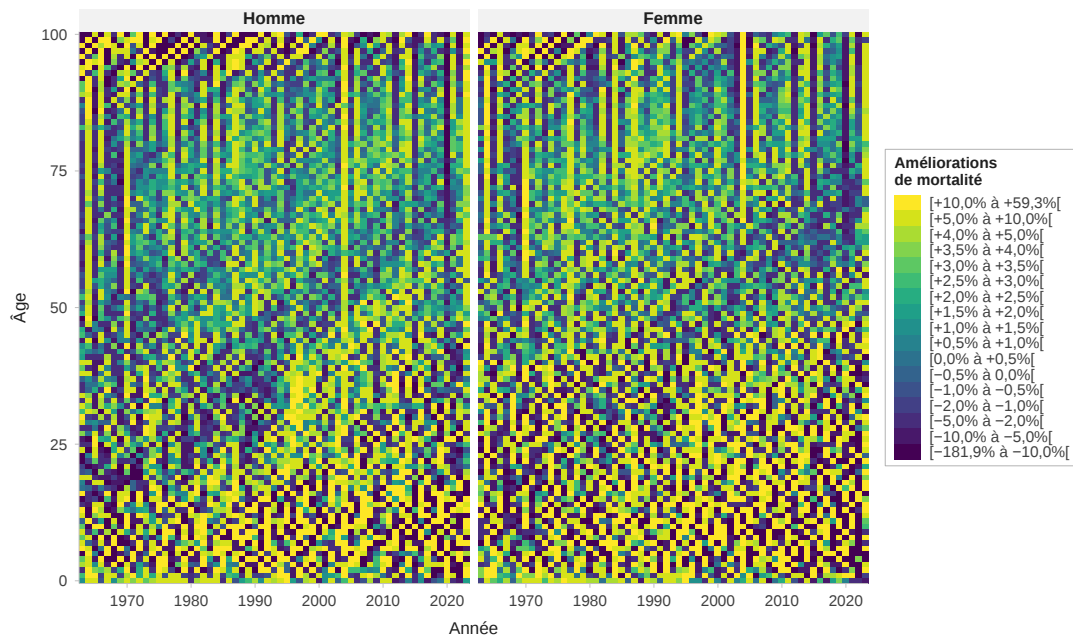


FIGURE 3 – Surface d’amélioration de la mortalité par âge, année, et sexe

— κ_t l’indice temporel résumant l’évolution général de la mortalité dans le temps.

Le modèle log-Poisson reproduit les principales caractéristiques de la mortalité française sur la période 1962-2023 (figure 10). L’effet d’âge met en évidence le profil classique de la mortalité, caractérisé par une forte mortalité infantile, un minimum autour de l’enfance puis une augmentation progressive avec l’âge. Le coefficient de sensibilité β_x montre que l’amélioration de la mortalité bénéficie à l’ensemble des âges, avec une intensité plus marquée aux jeunes âges qu’aux âges élevés. Enfin, l’indice temporel κ_t présente une tendance globalement décroissante, traduisant l’amélioration continue de la mortalité française depuis les années 1960. Toutefois, cette décroissance n’est pas régulière et laisse apparaître plusieurs modifications de pente, suggérant l’existence de changements de régime dans le rythme d’amélioration de la mortalité. L’étude des résidus de déviance confirme par ailleurs une qualité d’ajustement globalement satisfaisante du modèle, malgré la présence de certains effets de cohorte et d’événements exceptionnels que la structure du modèle ne capture pas entièrement.

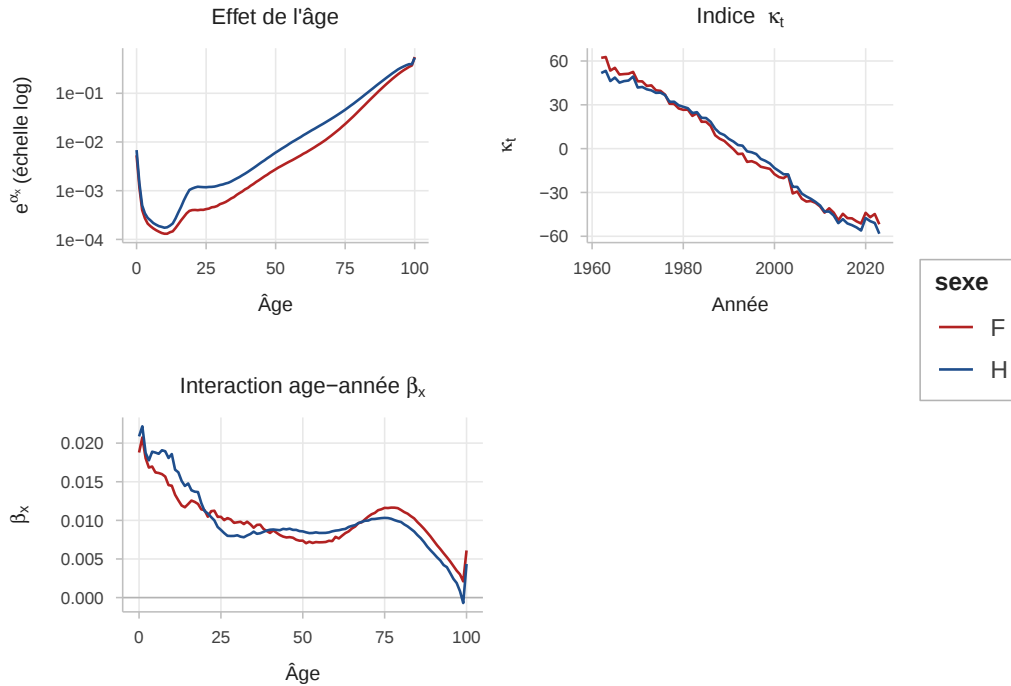


FIGURE 4 – Les composantes du modèle log-Poisson

Détection de rupture de tendance sur l'indice temporel

La détection de ruptures est réalisée sur l'indice temporel κ_t issu du modèle log-Poisson. Pour ce faire, l'indicateur d'intérêt est modélisée par une régression linéaire simple. La procédure de Bai et Perron est alors appliquée afin d'identifier simultanément le nombre optimal de ruptures et leurs dates, en recherchant la segmentation qui minimise la somme des carrés des résidus sous une contrainte de longueur minimale des segments. Chaque rupture détectée correspond ainsi à une modification significative du rythme d'évolution de la mortalité française.

La méthode identifie trois ruptures pour chaque sexe. Chez les femmes, elles se situent en 1986, 2003 et 2013 ; chez les hommes, en 1975, 2003 et 2013. Les deux dernières, en 2003 et 2013, sont communes aux deux sexes.

La rupture de 2013 constitue le résultat central. Elle marque un effondrement du rythme d'amélioration : la pente de l'indice temporel passe, sur le dernier régime, de $-1,56$ à $-0,08$ chez les femmes et de $-2,29$ à $-0,38$ chez les hommes, soit une division par près de vingt et par cinq respectivement. L'amélioration de la mortalité se réduit ainsi à une quasi-stagnation sur la dernière décennie, pour les deux sexes (figure 11). L'analyse de sensibilité au paramètre de trimming laisse ces dates inchangées sur une large plage de valeurs, ce qui atteste la robustesse des ruptures identifiées.

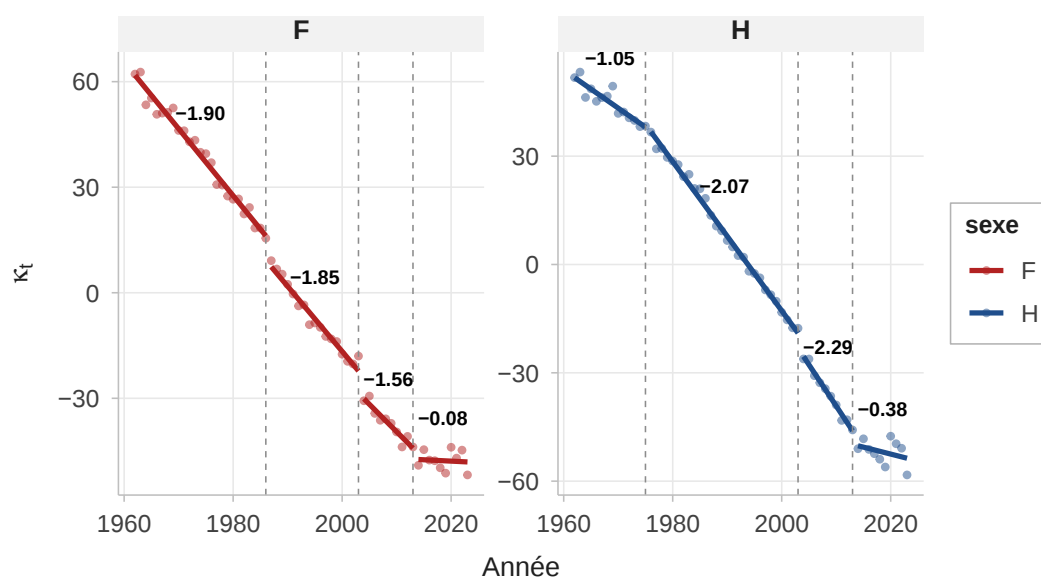


FIGURE 5 – Ruptures de tendances sur κ_t par sexe et les pentes par régime

Impact des ruptures sur l'espérance de vie

Afin d'évaluer les conséquences pratiques des ruptures détectées, deux scénarios prospectifs ont été comparés : un scénario fondé sur la prolongation de la tendance historique de la mortalité et un scénario intégrant le ralentissement récent mis en évidence par la détection de rupture. Les résultats montrent que la prise en compte de ce changement de régime conduit à des espérances de vie prospectives sensiblement plus faibles. Pour les générations atteignant 65 ans en 2025, l'écart dépasse 5 %, soit environ deux années d'espérance de vie chez les femmes et une année et demie chez les hommes. Ces résultats illustrent l'impact potentiel d'une rupture non prise en compte sur les projections de longévité et, par conséquent, sur l'évaluation des engagements viagers (figure 12).

Par ailleurs, les projections obtenues demeurent par ailleurs cohérentes avec les projections démographiques de l'INSEE sur la période observée, les divergences n'apparaissant qu'à l'horizon prospectif.

Conclusion

En définitive, on pourra retenir que l'analyse de la mortalité française sur la période 1962-2023 met en évidence trois ruptures du rythme d'amélioration par sexe, dont un décrochage majeur en 2013, commun aux hommes et aux femmes, au terme duquel l'amélioration se réduit à une quasi-stagnation. Par la suite, la prise en compte de cette dérive abaisse sensiblement la tendance d'évolution de la longévité de la population, d'environ

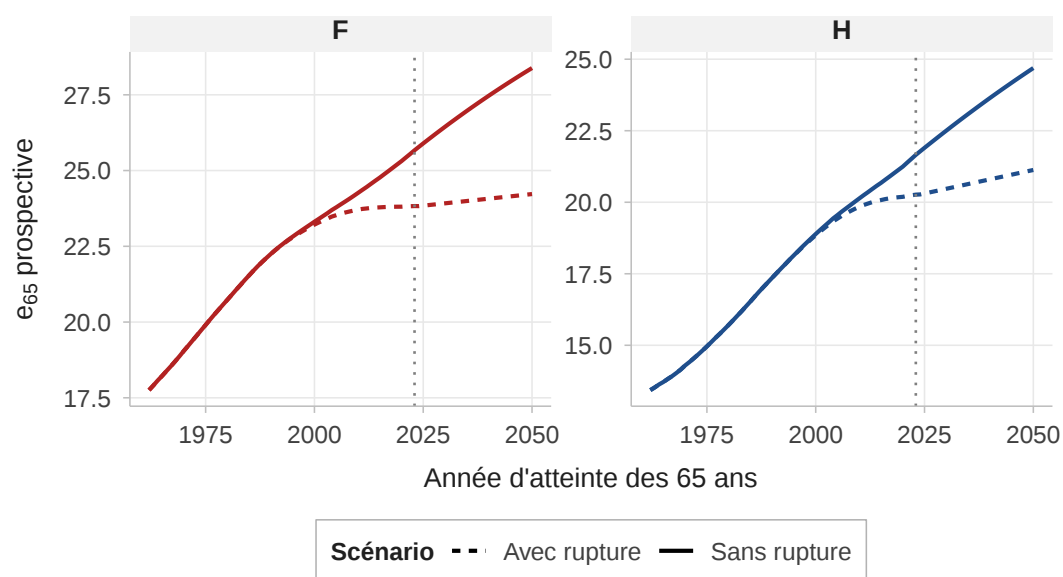


FIGURE 6 – Espérance de vie prospectives à 65 ans selon le scénario

deux années d'espérances de vie à 65 ans en 2025. Ceci pourrait avoir un effet direct direct sur les hypothèses de longévité utilisées dans l'évaluation des engagements viagers, notamment de la retraite. La démarche demeure toutefois rétrospective. De ce fait, la détection des changements au fil de leur survenance en constituerait un prolongement considérable.

Executive summary

Problem statement and objectives

Mortality is a central variable in life actuarial work, driving the pricing of protection contracts, the reserving of life annuities and the calibration of regulatory capital under Solvency II. In France, it has declined sharply since the 1960s, life expectancy at birth having gained more than twelve years over the period. This evolution nonetheless remains irregular, marked by isolated shocks such as the 2003 heatwave [Desesquelles et Richet-Mastain, 2004], but also by a more lasting slowdown in the decline of mortality observed between 2013 and 2019 [COR, 2021], whose determinants remain debated.

The nature of these changes in regime, whether structural or cyclical, is not without consequence for the actuary. Best Estimate provisions, capital for longevity risk and the regulatory prospective tables TGH05 and TGF05, calibrated on INSEE projections [Planchet, 2007], all rest on future mortality assumptions that an undetected change in regime distorts. The downward revision of the INSEE projections in 2021, by 2.6 years for men and 3.0 years for women at the 2070 horizon [Blanpain et Algava, 2021], concretely illustrates this risk.

Change-point detection methods, originating in statistical process control and transposed to the actuarial field [Croix *et al.*, 2015], address this need, but their application to insurance portfolios comes up against a horizon too short to distinguish random fluctuation from structural change [Le Louarne, 2023]. Their extension to national mortality over a long period lifts this constraint : [Ngong Engoulou, 2023] thus applies the Bai and Perron method to the time index of the Lee-Carter model, on data from 2000 to 2020, though its results remain dependent on a limited data window.

This thesis follows in the wake of this approach, extending it to the period 1962-2023. It aims to determine whether the improvement in French mortality stems from a regular trend or from successive regimes separated by identifiable breaks, then to measure the consequences of the most recent regime on prospective life expectancy and on the valuation of annuity commitments.

Data description

The death and living-population data used in this study are provided by INSEE, and are restricted to metropolitan France so that the introduction of Mayotte into the data for the whole of France in 2014 does not give rise to spurious drifts.

Evolution of deaths and ageing of the population

The annual number of deaths displays a contrasted evolution. After relative stability between the 1960s and the late 1980s, deaths decline until the early 2000s before rising again to reach nearly 650,000 annual deaths at the end of the period. This recent increase is mainly explained by the ageing of the population and the arrival at advanced ages of the baby-boom generations.

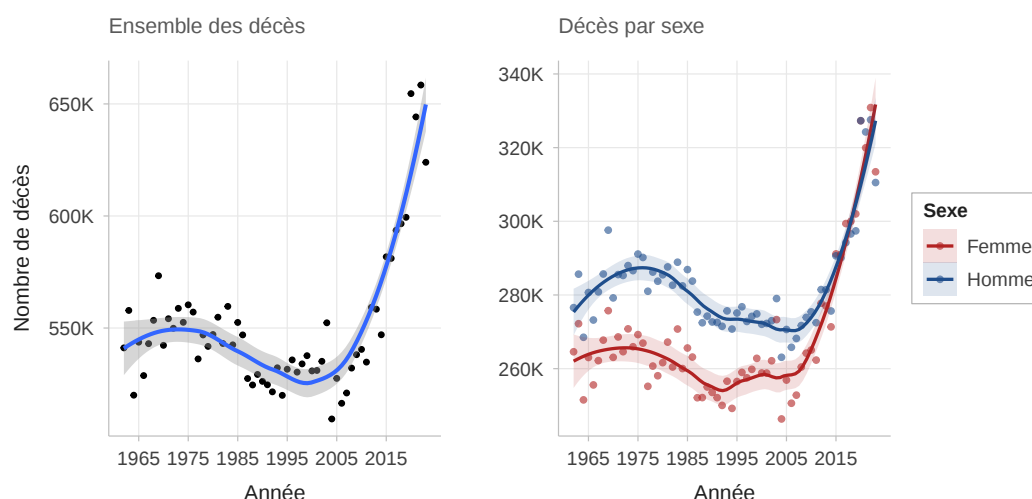


FIGURE 7 – Evolution of the annual number of deaths

Furthermore, the analysis by age reveals that this apparent stability in fact conceals a gradual transfer of mortality towards the higher ages. Deaths fall sharply at young ages and among adults, while they rise continuously among people over 80. Consistent with this phenomenon, the mean age at death rises steadily for both sexes over the whole period (figure 8).

Evolution of mortality and signs of slowdown

The crude mortality rate declines overall until the early 2000s before beginning a gradual upturn. In parallel, the study of annual mortality improvements shows that longevity gains do not follow a regular trajectory. Several period effects are visible, notably the excess mortality linked to the 2003 heatwave and that observed during the 2020

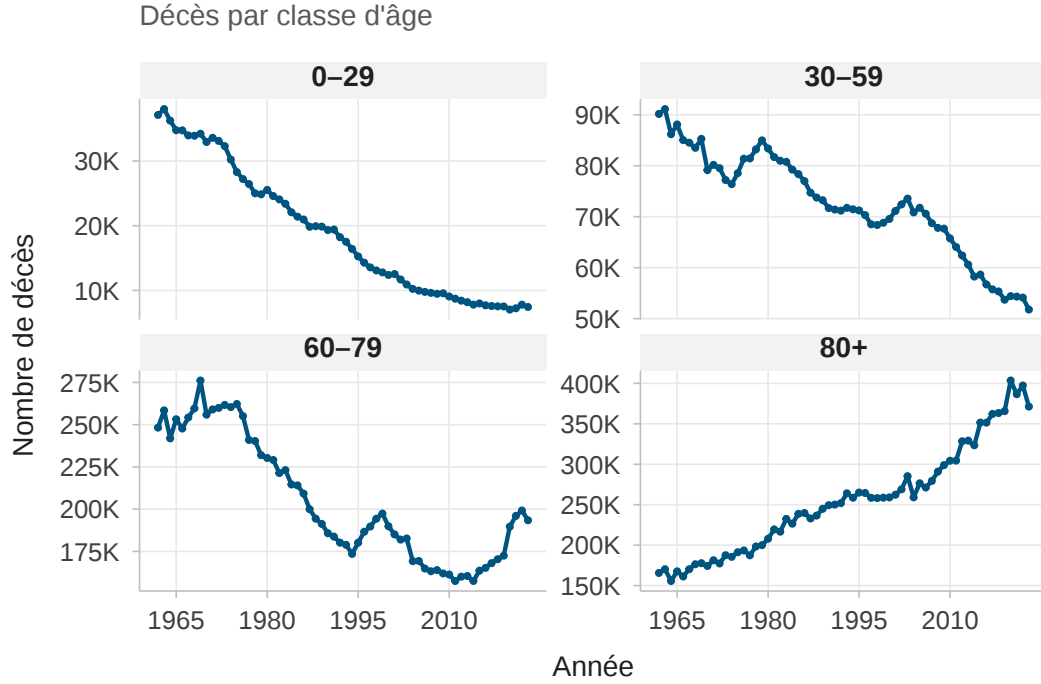


FIGURE 8 – Evolution of the number of deaths by age group

health crisis. In addition, the analysis of the mortality improvement surfaces reveals the existence of a cohort effect as well as a gradual slowdown in mortality gains in recent years.

Modelling and results

Log-Poisson mortality model

The number of deaths observed at age x and year t is assumed to follow a Poisson distribution $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t}\mu_{x,t})$, and the mortality model is formulated as follows : $\log \mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}$, where :

- $D_{x,t}$ denotes the number of observed deaths ;
- $E_{x,t}$ the exposure to risk ;
- $\mu_{x,t}$ the force of mortality ;
- $\epsilon_{x,t}$ the residual error term assumed i.i.d. with distribution $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, with $\sigma > 0$;
- α_x the average mortality profile by age ;
- β_x the sensitivity of each age to temporal changes ;
- κ_t the time index summarising the general evolution of mortality over time.

The log-Poisson model reproduces the main features of French mortality over the

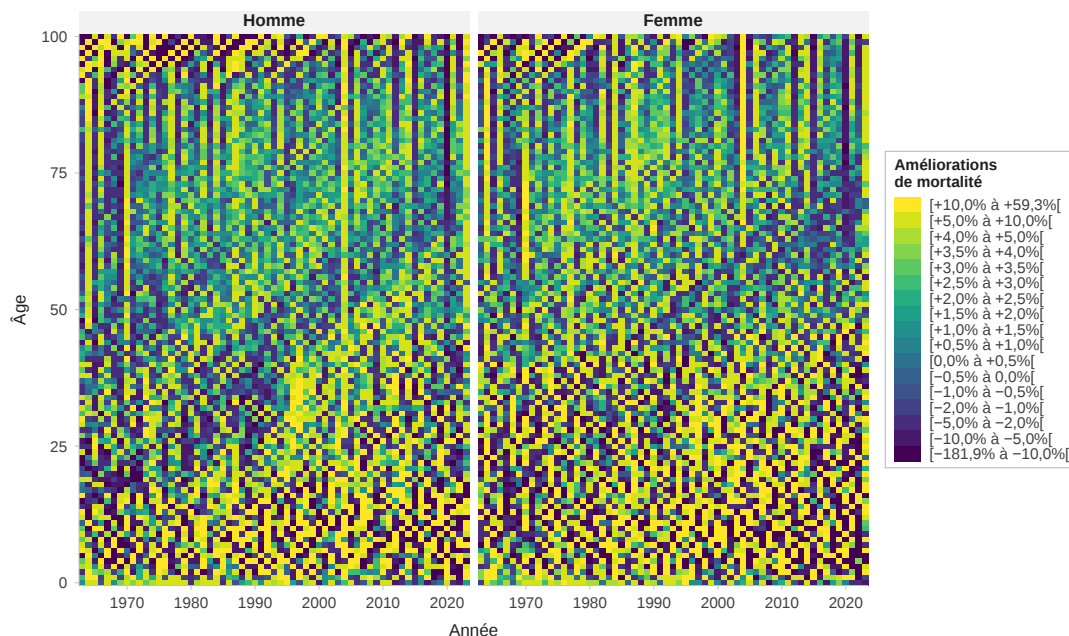


FIGURE 9 – Mortality improvement surface by age, year and sex

period 1962-2023 (figure 10). The age effect highlights the classic mortality profile, characterised by high infant mortality, a minimum around childhood, then a gradual increase with age. The sensitivity coefficient β_x shows that the improvement in mortality benefits all ages, with a more pronounced intensity at young ages than at older ages. Finally, the time index κ_t displays a broadly decreasing trend, reflecting the continuous improvement of French mortality since the 1960s. This decrease is not regular, however, and reveals several changes in slope, suggesting the existence of changes in regime in the pace of mortality improvement. The study of the deviance residuals further confirms a broadly satisfactory goodness of fit of the model, despite the presence of certain cohort effects and exceptional events that the structure of the model does not fully capture.

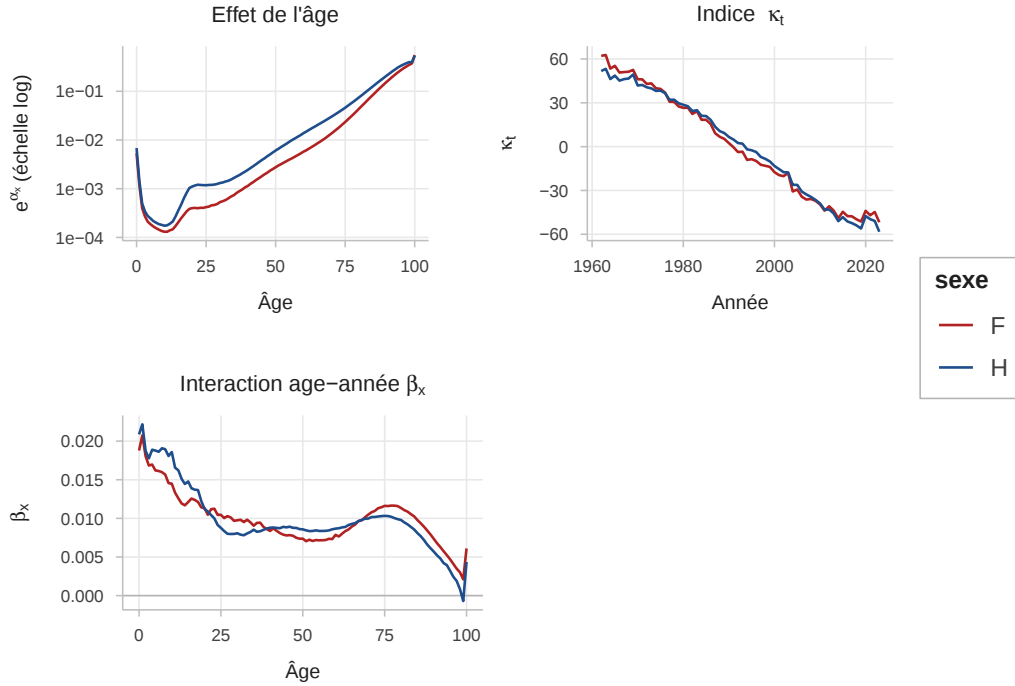


FIGURE 10 – The components of the log-Poisson model

Trend break detection on the time index

Break detection is carried out on the time index κ_t derived from the log-Poisson model. To this end, the indicator of interest is modelled by a simple linear regression. The Bai and Perron procedure is then applied in order to identify simultaneously the optimal number of breaks and their dates, by searching for the segmentation that minimises the residual sum of squares under a constraint of minimum segment length. Each detected break thus corresponds to a significant change in the pace of evolution of French mortality.

The method identifies three breaks for each sex. For women, they are located in 1986, 2003 and 2013; for men, in 1975, 2003 and 2013. The last two, in 2003 and 2013, are common to both sexes.

The 2013 break is the central result. It marks a collapse in the pace of improvement : the slope of the time index falls, over the last regime, from $-1,56$ to $-0,08$ for women and from $-2,29$ to $-0,38$ for men, that is a division by nearly twenty and by five respectively. The improvement in mortality thus narrows to a near-stagnation over the last decade, for both sexes (figure 11). The sensitivity analysis on the trimming parameter leaves these dates unchanged over a wide range of values, which attests to the robustness of the identified breaks.

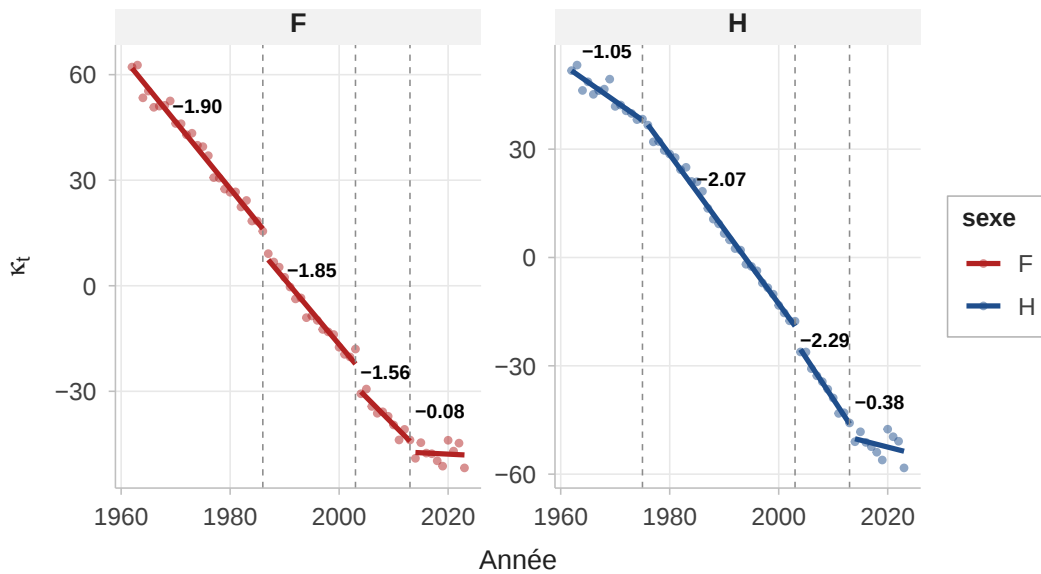


FIGURE 11 – Trend breaks on κ_t by sex and the slopes by regime

Impact of the breaks on life expectancy

In order to assess the practical consequences of the detected breaks, two prospective scenarios were compared : a scenario based on the extension of the historical mortality trend and a scenario incorporating the recent slowdown brought to light by the break detection. The results show that taking this change in regime into account leads to appreciably lower prospective life expectancies. For the generations reaching age 65 in 2025, the gap exceeds 5%, that is about two years of life expectancy for women and one and a half years for men. These results illustrate the potential impact of an unaccounted break on longevity projections and, consequently, on the valuation of annuity commitments (figure 12).

Moreover, the projections obtained remain consistent with the demographic projections of INSEE over the observed period, the divergences appearing only at the prospective horizon.

Conclusion

Ultimately, it can be retained that the analysis of French mortality over the period 1962-2023 highlights three breaks in the pace of improvement per sex, including a major downturn in 2013, common to both men and women, at the end of which the improvement narrows to a near-stagnation. Subsequently, taking this drift into account appreciably lowers the trend in the evolution of the population's longevity, by about two

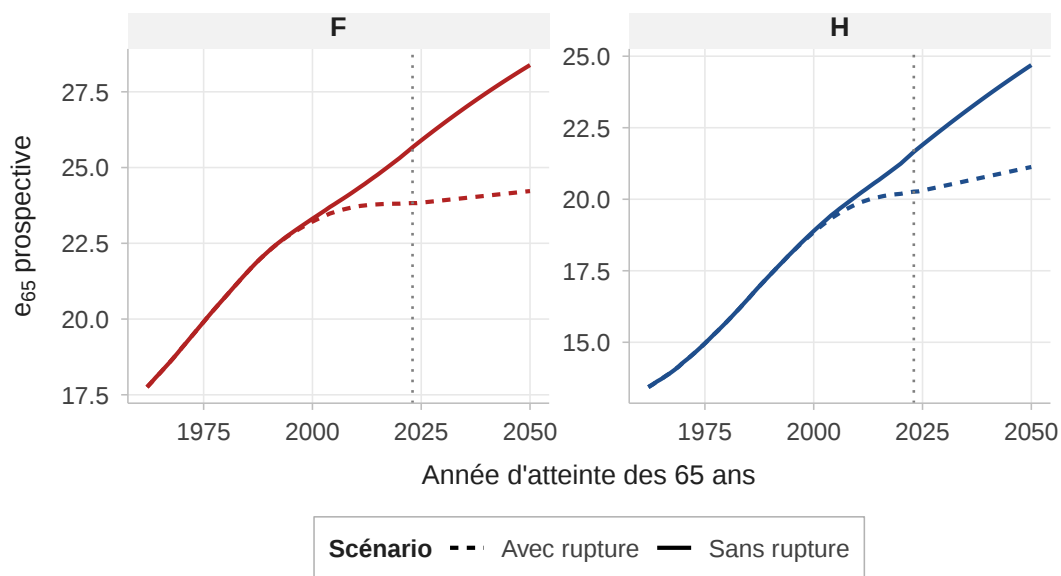


FIGURE 12 – Prospective life expectancy at age 65 by scenario

years of life expectancy at age 65 in 2025. This could have a direct effect on the longevity assumptions used in the valuation of annuity commitments, notably in pensions. The approach nonetheless remains retrospective. As a result, the detection of changes as they occur would constitute a substantial extension of it.

Remerciements

Ce mémoire a été réalisé grâce au soutien de plusieurs personnes en partant de l'école à l'entreprise d'accueil en passant par la famille, qu'il me revient de remercier.

De prime abord, je tiens à remercier M. Frédéric Planchet mon directeur de mémoire et actuaire-associé chez Prim'Act , sans lequel ce sujet n'aurait été pas correctement dénoué. Il a su par ses propositions directives m'ouvrir des champs de réflexions sur le sujet. Je remercie avec lui mes collègues du cabinet et plus particulièrement M. Oleksandr Sorochynskyi pour ses avis constructifs. Mes remerciements vont aussi à l'endroit de la présidence de Prim'Act qui m'a permis d'effectuer ces travaux au sein de l'équipe.

Je remercie également Mme Cathérine Rainer et M. Dominique Abgrall, mes référents au niveau de l'EURIA, pour leurs disponibilités et leurs soutiens. Je profite de cette occasion pour remercier également tout le corps professoral de l'EURIA, dirigé par M. Franck Vermet, pour toutes les connaissances partagées durant ces trois années de formations.

Pour finir, je remercie tous les membres de ma famille, pour leurs encouragements dans cette exercice de rédaction de mémoire. Parce qu'ils ont été d'un soutien émotionnel remarquable.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Note de synthèse	iii
Executive summary	x
Remerciements	xvii
Introduction	1
1 Contexte de l'étude	3
1.1 Le risque de mortalité	3
1.1.1 La mortalité, un risque central de l'assurance	3
1.1.2 Les tables de mortalité	4
1.2 Généralités sur la mortalité en France	5
1.2.1 La mortalité et le développement économique	6
1.2.2 Les évolutions récentes de la mortalité en France	6
1.2.3 La nécessité de surveiller la mortalité	7
1.3 Les méthodes de détection de rupture	9
1.3.1 Aperçu historique des techniques de détection de rupture	9
1.3.2 Distinction entre les méthodes offline et méthodes online	12
1.3.3 La détection de changement de rupture en actuariat	13
1.3.4 Plan d'action de l'étude	14
2 Présentation des données et analyse descriptive	15
2.1 Présentation des données	15
2.1.1 Données de décès	16
2.1.2 Données d'exposition au risque de décès	16
2.2 Analyse descriptive des données	18
2.2.1 Evolution des décès observés	19
2.2.2 Structure de la population exposée	20
2.2.3 Niveau et dynamique de la mortalité	23

Synthèse du chapitre	26
3 Méthode de détection de rupture rétrospective	27
3.1 Test de détection d'une rupture à une date connue	27
3.1.1 Formulation du test	27
3.1.2 Limite et motivation de l'extension	29
3.2 Tests de détection de changements structurels multiples	29
3.2.1 Formulation générale du modèle	29
3.2.2 Critère d'estimation	29
3.2.3 Résolution par programmation dynamique	30
3.2.4 Détermination du nombre de ruptures	30
3.2.5 Intervalles de confiance des dates de rupture	32
3.3 Exemple d'application sur une série de SMR	32
3.3.1 La variable observée	32
3.3.2 Sélection du nombre de ruptures	33
3.3.3 Dates de rupture et régimes estimés	34
3.3.4 Lecture des résultats	35
4 Modélisation de la mortalité	36
4.1 Concepts probabilistes des modèles de durée	36
4.2 Le modèle de Lee-Carter	37
4.3 Le modèle de log-Poisson	39
4.4 Qualité d'ajustement des modèles	41
5 Etude rétrospective de la dynamique de la mortalité	42
5.1 Cadre de l'étude	42
5.2 Calibration du modèle de log-Poisson	43
5.2.1 Analyse des effets de l'âge et de l'interaction	44
5.2.2 Analyse de l'indice temporel	44
5.2.3 Qualité d'ajustement du modèle	45
5.3 Les ruptures de tendance dans κ_t	47
5.3.1 Démarche adoptée	47
5.3.2 Les ruptures détectées	48
5.3.3 Sensibilité au paramètre de trimming	49
5.4 Analyse d'impact sur l'espérance de vie	51
5.4.1 Recalibration et construction des tables prospectives	51
5.4.2 Espérance de vie prospective et coût de la dérive	52
5.4.3 Positionnement par rapport à la projection INSEE	55
Synthèse du chapitre	57
Conclusion générale	59

A Annexes	62
A.1 Les critères de choix du nombre de ruptures de tendance	62
A.2 Comparaison d'espérances de vie prospectives	62
A.3 Calibration du modèle sur le dernier régime	64
A.4 Voie A : recalibration de la seule dérive	65
B Déclaration d'utilisation de l'IA générative	66
Table des figures	68
Liste des tableaux	69
Bibliographie	72

Introduction

La mortalité constitue une variable centrale de l'actuariat vie. Elle conditionne la tarification des contrats de prévoyance décès, le provisionnement des rentes viagères, le calibrage du capital réglementaire sous Solvabilité II. En France, le niveau de mortalité a considérablement reculé depuis les années 1960. L'espérance de vie à la naissance a gagné plus de douze ans depuis 1962, passant de 67 ans pour les hommes et 74 ans pour les femmes à respectivement 79 et 85 ans en 2019. Cependant, cette évolution à l'allure irrégulière de la mortalité est marquée par une volatilité du taux de mortalité qui affiche une chronique de changements brusques, comme la surmortalité de la canicule d'août 2003 estimée à 15 000 par l'INSERM¹ [Desesquelles et Richet-Mastain, 2004] et la pandémie de Covid-19. Un ralentissement de la baisse de la mortalité nationale est par ailleurs observable entre 2013 et 2019 [COR, 2021], infléchissement documenté mais dont les déterminants restent débattus. En clair, le rapport du COR [COR, 2021] relate que le gain d'espérance de vie résiduelle décennale à 60 ans perd 0,7 an chez les femmes et 0,8 an de la période 2000-2013 à 2013-2019.

La nature – structurelle ou conjoncturelle – de ces changements de régime qui ont temporairement inversé la tendance de la mortalité en France, reste à établir rigoureusement. Pour un démographe, la question pourrait se limiter à l'identification des déterminants sanitaires et sociaux de ces changements, tandis que l'actuaire chercherait à dater ces inflexions, à en évaluer la persistance et à mesurer les conséquences sur les hypothèses de mortalité qui régissent l'évaluation des engagements de long terme des assureurs. Les provisions Best Estimate, le capital réglementaire au titre du risque de longévité sous Solvabilité 2, et les scénarios prospectifs dans les exercices ORSA reposent tous sur ces hypothèses de mortalité futures. De ce fait, si les changements de régime dans la mortalité en France ne sont pas datés, les projections qui en découlent seraient biaisées. Parce que les tables réglementaires prospectives TGH05 et TGF05, utilisées pour la tarification et le provisionnement de produits d'assurance de rentes viagères, ont été calibrées sur des tables INSEE comme référence de mortalité générale [Planchet, 2007].

Identifier la nature de ces fluctuations – variation aléatoire ou changement structurel et durable – à partir des seules inflexions observables ne suffit pas. Cette question est assimilable à la problématique de détection d'inadéquation dans les lois d'expérience. À ce titre, [Croix *et al.*, 2015] montre que des méthodes de détection de rupture telles que le CUSUM, issues du contrôle statistique de procédés industriels [Best et Neuhauser, 2006]

1. Institut national de la santé et de la recherche médicale

et progressivement transposées au champ actuariel, sont utiles pour l'identification des inadéquations des lois d'expérience par rapport aux événements observés. Appliquées par [Le Louarne, 2023] à une chronique de décès infra-annuels d'un portefeuille d'assurance emprunteur, elles confirment leur utilité opérationnelle mais se heurtent à une même contrainte d'horizon : quelques années de données ne suffisent pas à distinguer fluctuation aléatoire et changement structurel. De récents travaux ont dès lors étendu ces méthodes à des données pluriannuelles de mortalité nationale étalées sur plus de 20 ans, pour l'étude de la sensibilité des approches [Abgrall, 2021] comme pour l'analyse de la vitesse de mortalité [Ngong Engoulou, 2023]. Ce dernier étudie la nature du ralentissement des gains de mortalité en France en appliquant les tests de Bai et Perron à l'indice temporel de Lee-Carter sur des données nationales de 2000 à 2020 ; bien qu'il identifie des ruptures significatives en 2003 et autour de 2013-2017, ses résultats restent tributaires de la fenêtre d'observation, limitée à 20 ans.

Les projections de population publiées par l'INSEE en 2021 [Blanpain et Algava, 2021] illustrent concrètement les conséquences d'un changement de régime non détecté : entre les exercices de 2016 et de 2021, l'espérance de vie projetée à l'horizon 2070 a été révisée à la baisse de 2,6 ans pour les hommes et de 3,0 ans pour les femmes, en raison d'un ralentissement des gains observés depuis 2014 que les projections précédentes n'avaient pas anticipé. En 2019, l'espérance de vie observée se situait déjà au niveau de l'hypothèse basse des projections de 2016, signe que la tendance sur laquelle elles avaient été calibrées avait changé de régime sans être formellement détectée. La composante mortalité de ces projections repose en effet sur la prolongation des tendances observées au cours des dix dernières années hors pandémie, soit sur une datation empirique du ralentissement des gains depuis 2014 et sur une appréciation à dire d'experts de l'incertitude future [Blanpain et Algava, 2021].

Dans ce cadre, quelle analyse peut-on faire de la dynamique de la mortalité en France sur la période 1962-2023 en s'appuyant sur ses récents changements de tendances ?

Pour résoudre ce problème, ce mémoire est organisé en cinq (5) chapitres. Le premier pose le contexte de l'étude et les notions de généralité qu'il convient de préciser dans ce genre d'étude autour du risque de mortalité. Le deuxième présente les données retenues pour les analyses et en propose une lecture descriptive. Par la suite, une description du modèle de mortalité employé est présentée dans le troisième chapitre, ainsi que la métrique servant à en mesurer la qualité d'ajustement. Le quatrième chapitre développe la méthode de détection de ruptures de Bai et Perron sur laquelle repose l'analyse. Pour fini, cette méthode est appliquée à la dynamique de la mortalité française dans le cinquième chapitre. Il date les ruptures du rythme d'amélioration et en mesure l'impact sur l'espérance de vie prospective.

Chapitre 1

Contexte de l'étude

Ce mémoire traite de la détection des changements de comportement dans la mortalité. Avant d'entrer dans le vif du sujet, ce premier chapitre présentera le contexte de l'étude. Premièrement, les généralités autour du risque de mortalité seront précisées, puis les spécificités du profil de la mortalité en France. Enfin, la dernière section servira à passer en revue les techniques de détection de rupture et leurs applications en actuariat.

1.1 Le risque de mortalité

Cette section a pour objectif de présenter des généralités sur le risque de mortalité. Elle couvrira l'importance de ce risque dans l'assurance et les outils d'estimation des probabilités de survenance des décès.

1.1.1 La mortalité, un risque central de l'assurance

La mortalité est l'un des phénomènes démographiques les plus fondamentaux, aux côtés de la natalité et de la migration, qui décrivent le mouvement d'une population au cours des années. Fortement liée à la durée de vie humaine, elle peut être définie comme le phénomène par lequel une population se réduit sous l'effet des décès survenus au cours d'une période donnée. Loin d'être figée, la mortalité varie selon le sexe, les âges, les régions ou selon les comportements des populations, ce qui en fait un sujet d'observation vaste et riche. En effet, son étude peut s'étendre sur plusieurs champs : l'analyse des causes de décès, son analyse rétrospective, prospective ou encore l'impact de son évolution sur une population.

Comme elle affecte plusieurs sphères de la société, la mortalité demeure une problématique centrale de l'industrie de l'assurance. Il est évident qu'une part importante des produits d'assurance [France Assureurs, 2025] repose sur la condition de survie des assurés : les garanties en cas de décès, qui versent une prestation aux bénéficiaires quand survient le décès, et les garanties en cas de vie, telles que les rentes et les pensions, dont le service se prolonge aussi longtemps que l'assuré demeure en vie. Ces contrats exposent

les assureurs à des risques de surmortalité et de longévité qui alourdissent les prestations à verser.

De ce fait, il semble primordial pour les assureurs et organismes de retraite de pouvoir estimer la durée de vie des assurés. Or, par nature, le décès et la survie revêtent un caractère aléatoire qui empêche quiconque de prédire avec certitude la date d'un décès individuel. Pour pallier ce problème, la pratique actuarielle utilise les probabilités de décès ou de survie en s'appuyant sur des tables de mortalité. Ces tables servent à l'évaluation des tarifs des contrats ainsi qu'au provisionnement des engagements.

1.1.2 Les tables de mortalité

Une table de mortalité est un outil statistique d'étude prospective de la mortalité, qui tente de prédire les probabilités de décès dans une population par âge, par année ou par sexe. Elle est construite à partir de modèles de mortalité connus, comme celui de Lee-Carter ou de Thatcher, etc. . . D'un point de vue technique, on peut distinguer deux types de tables de mortalité.

Les tables périodiques

Les tables périodiques ou du moment : elles reflètent le niveau de mortalité par âge observé sur une période donnée, toutes générations confondues. Figeant les conditions de mortalité du moment, elles servent à décrire l'état de la mortalité à un instant donné et à évaluer les engagements de court terme. Mais les tables générationnelles se prêtent bien à la projection des engagements de long terme.

Les tables prospectives

Les tables prospectives ou générationnelles intègrent l'aspect dynamique de la mortalité et fournissent une projection des taux de mortalité par âge dans le futur pour un grand nombre de générations. Elles fournissent une lecture longitudinale de la mortalité, et sont de ce fait indispensables à l'évaluation engagements de long terme comme les rentes viagères et les régimes de retraites.

Par ailleurs, en vertu de l'Article A132-18 du Code des Assurances, les assureurs disposent de deux options de tables pour l'évaluation du risque de mortalité : les tables réglementaires et les tables d'expérience.

Les tables réglementaires

Elles sont préconisées par le régulateur du secteur de l'assurance pour la tarification et le provisionnement de certains contrats. Elles servent à garantir un niveau minimal de prudence des assureurs et à uniformiser les pratique entre assureurs. Il en existe trois types dans l'usage actuariel actuel en France.

- Les tables transversales genrées TH/TF 00-02 utilisées pour les assurances en cas de décès. Présentant les quotients de mortalité par âge, elles sont établies

par l'INSEE à partir des données de mortalité nationale française, observées de 2000 à 2002. A l'exclusion des rentes viagères, ces tables peuvent également servir à l'évaluation des garanties en cas de vie après un décalage d'âge, qui décroît progressivement ;

- Les tables générationnelles TGH/TGF 05 servent à l'évaluation des rentes viagères. Elles se basent sur le niveau de mortalité de bénéficiaires de contrats de rentes observés de 1993 à 2005 en tenant compte des données de population de l'INSEE entre 1962 et 2000 ;
- Et la table générationnelle unique TGHF05, dite non-genrée, qui s'applique aux contrats collectifs de retraite supplémentaire. Introduite par la loi « industrie verte » du 24 octobre 2024 et l'arrêté du 18 novembre 2024 dans le cadre d'une mise en conformité avec le droit européen, elle impose une seule table de mortalité pour les hommes et les femmes. Elle est construite à partir des deux tables genrées antérieures, TGH05 et TGF05, pondérées à raison de 60 % d'hommes et 40 % de femmes.

Ces tables réglementaires ne reflètent pas nécessairement le profil de risque couvert, soit à cause du comportement particulier des portefeuilles assurés, soit par l'historique lointain de ces tables. Certains assureurs se dotent de tables de mortalité propres à leurs profils de risque, appelées tables d'expérience.

Les tables d'expérience

Les tables d'expérience sont ainsi construites par les assureurs sur la base des données suffisantes de leurs portefeuilles. Elles fournissent un paysage plus précis du profil de risque couvert. Cependant, leur utilisation est conditionnée par une certification initiale de la table par un actuair indépendant habilité à le faire et par un suivi annuel régulier. Ce suivi permet d'assurer la conformité entre les prévisions et les événements observés. L'objectif est que la table de mortalité représente aussi fidèlement que possible le risque effectivement observé dans le portefeuille.

Cependant, il arrive que ces lois prévisionnelles de la mortalité surestiment ou sous-estiment le risque de mortalité. Plus clairement, une mortalité observée supérieure aux prévisions dégrade les portefeuilles adossés à des garanties en cas de décès, tandis que l'inverse pénalise les engagements viagers.

Ainsi, le risque de mortalité constitue un sujet central du monde de l'assurance, et de l'assurance vie en particulier, qui mérite d'être suivi de plus près par les acteurs du secteur.

1.2 Généralités sur la mortalité en France

La précédente section permet de comprendre l'importance de la mortalité dans le monde de l'assurance. Or, la mortalité des groupes dans les portefeuilles est souvent plus faible que celle de la population générale. Limiter l'étude de la mortalité à l'assurance serait très restrictif, car toutes les couches de la société ne souscrivent pas à des assurances

en cas de décès ou d'autres faisant appel au risque de mortalité. Il est ainsi important de s'intéresser à la mortalité nationale, qui constitue un sujet d'intérêt pour les actuaires, les démographes, les économistes et les décideurs politiques. Dans cette section, la lumière sera mise sur l'importance de l'étude de la mortalité nationale et des caractéristiques du cas particulier de la France.

1.2.1 La mortalité et le développement économique

L'étude de la dynamique de la mortalité nationale est bien plus qu'un exercice statistique ou historique. C'est un acte fondamental pour comprendre l'évolution démographique afin de prévoir et d'agir sur les leviers de fonctionnement de la société. Son importance se déploie à plusieurs niveaux. L'étude de la mortalité peut constituer un baromètre du développement économique dans une nation. En clair, le niveau de mortalité ou l'espérance de vie sont des indicateurs universels de la santé d'une population.

La dynamique de la mortalité reflète donc la performance, et les améliorations du système de santé d'un pays. A titre d'exemple, selon des études de l'INED¹ sur la mortalité en France, [Meslé, 2006] la diminution de la mortalité cardiovasculaire aux âges élevés est attribuée aux avancées médicales telles que les campagnes de vaccination et la découverte des antibiotiques.

Outre cela, l'étude de la mortalité est un pilier de la planification des systèmes de protection sociale et des régimes de retraite. A l'échelle nationale, elle permet d'établir les projections fiables de population, et donc de prévoir le nombre de cotisants, de retraités ou de personnes en perte d'autonomie qui dépendront de la solidarité nationale plus tard. En effet, les rapports annuels du COR détaillant les projections financières du système de retraite s'appuient sur les hypothèses d'évolution de la mortalité fournies par l'INSEE [COR, 2026]. C'est également sur la base de ces données que l'Etat dimensionnera l'offre médico-sociale, du nombre de places en EHPAD² aux effectifs de services requis.

1.2.2 Les évolutions récentes de la mortalité en France

L'évolution de la mortalité en France sur le dernier siècle se lit plus comme une succession de phases contrastées, ponctuées de chocs et d'inflexions que comme un déclin régulier. En effet, le taux de mortalité nationale n'a pas cessé de diminuer progressivement. Du XIX^e siècle à la veille de la première guerre mondiale, la mortalité recule sous l'effet des progrès de l'hygiène, de la vaccination et de l'alimentation, l'espérance de vie passant de 37 ans en 1810 à 45 ans en 1900 ([Institut national d'études démographiques, 2026]).

Cette amélioration est toutefois compromise par la saignée de la période 1914-1918, de la première guerre mondiale, qui a entraîné près de 1,5 million de décès [Héran, 2014].

1. Institut national d'études démographiques

2. Établissement d'Hébergement pour Personnes Âgées Dépendantes

Il s'ensuit la pandémie grippale de 1918, qui dégrade davantage le niveau de mortalité, et viendra rappeler que le recul des maladies infectieuses n'est pas totalement acquis. Ces événements meurtriers creusent un déficit démographique brutal, mais transitoire. Parce que l'espérance de vie à la naissance reprendra son cours fidèlement à sa tendance de croissance d'avant-guerre. Dans l'entre-deux-guerres, la mortalité renoue avec sa tendance à la baisse, portée par le reflux des grandes maladies infectieuses comme la tuberculose.

Par ailleurs, la période d'après-guerre ouvre une ère de progrès sanitaire accéléré. Sous l'effet conjugué des antibiotiques, de la généralisation de la Sécurité sociale et de la chute de la mortalité infantile, l'espérance de vie augmente rapidement durant les Trente Glorieuses entre 1945 et 1973. Les maladies infectieuses cèdent la première place aux maladies chroniques, tandis que le baby-boom rajeunit provisoirement la pyramide des âges. À partir des années 1970, un nouveau front de progrès s'ouvre avec le recul spectaculaire des maladies cardiovasculaires, qui vaut à la France une réputation flatteuse mais n'efface pas la montée des cancers liés au tabac, notamment chez les femmes.

Depuis le début du XXI^e siècle, les gains d'espérance de vie ralentissent et les inégalités sociales de mortalité se maintiennent. La canicule de 2003 et, plus encore, la pandémie de Covid-19 en 2020-2021 constituent des chocs brutaux qui interrompent temporairement la progression de la longévité. La France se singularise toutefois par un rebond rapide de son espérance de vie après la crise sanitaire. Malgré cela, bon nombre d'études s'accordent sur le fait qu'un ralentissement récent des gains d'espérance de vie en France ([COR, 2026], [SwissRe Institute, 2018]) est survenu depuis les années 2010, au vu des courbes d'évolution des espérances de vie ou des taux de mortalité annuels. Certains localisent le début de cette dérive en 2011 parce qu'il s'agit de l'année à partir de laquelle, pour la première fois, l'espérance de vie à la naissance est surestimée par son scénario de projection (Figure 1.1).

Ce paysage contrasté, où alternent crises aiguës, changements de régime épidémiologique et ralentissements tendanciels, montre que le recul de la mortalité ne saurait être tenu pour un mouvement régulier. Anticiper son évolution suppose dès lors de repérer les moments où sa dynamique se modifie. Cela appelle à la fois à une surveillance continue et à des outils statistiques adaptés à la détection de telles ruptures.

1.2.3 La nécessité de surveiller la mortalité

La précédente section montre que la mortalité française présente une dynamique contrastée, marquée à la fois par des progrès à long terme, des ruptures historiques et un ralentissement récent de l'amélioration de la mortalité.

La question centrale pour les assureurs, démographes et actuaires est de savoir si cette détérioration de la mortalité est temporaire ou durable. Plus elle perdure dans le temps et plus il est probable que la dérive influence la tendance de fond de la mortalité de la population concernée (portefeuille d'assurance ou population française). On distingue

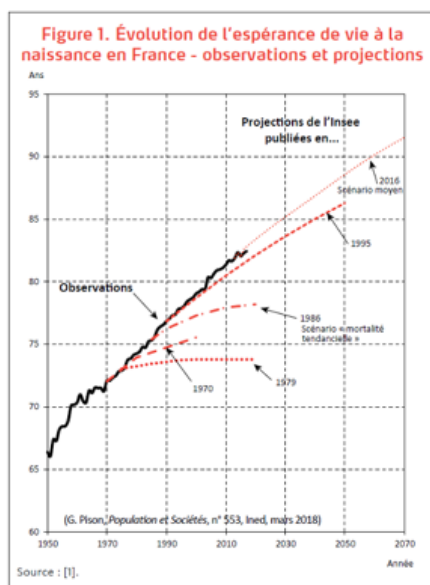


FIGURE 1.1 – Évolution des projections de l'espérance de vie ([Pison, 2018])

alors deux types de variabilité de la mortalité :

- La variabilité à court terme, qui correspond aux fluctuations temporaires des taux de mortalité d'une année à l'autre, causées par des épidémies saisonnières, des canicules ou un hasard statistique ;
- Le changement de la tendance sous-jacente, qui traduit une modification durable de l'évolution de la mortalité, se manifeste par un ralentissement/accélération de l'espérance de vie.

Il faut admettre que les changements de tendance de la mortalité constituent un enjeu majeur dans l'ensemble de la société. Elles influencent aussi bien la durée de vie des populations que les besoins de financement des systèmes de retraite et de santé, ainsi que les engagements financiers des organismes d'assurance. En effet, toute évolution durable des taux de mortalité peut avoir un impact significatif sur les hypothèses retenues pour la tarification et le provisionnement de leurs produits. Ce changement de tendance dans la population française est un risque agrégé difficile à diversifier, et il est important de le surveiller dans la mesure du possible.

Surveiller la mortalité, encore faut-il savoir en lire les inflexions. Cela suppose des instruments capables d'en signaler objectivement les changements de comportement. Qu'il s'agisse d'un portefeuille d'assureurs ou de la population générale, des tests séquentiels et des techniques de détection de ruptures se prêtent au jeu.

Ces techniques statistiques pourront aider à l'identification des changements de com-

portement du risque de mortalité. La prochaine section sera consacrée à cette thématique qui a fait l'objet des travaux de ce mémoire.

1.3 Les méthodes de détection de rupture

À l'instar de toute théorie mathématique, les méthodes de détection de ruptures possèdent une genèse qu'il convient de retracer. Ces instruments d'aide à la décision, initialement conçus pour le contrôle des procédés, ont ensuite été généralisés à de nombreux champs d'application, en particulier à la statistique. Cette section propose une revue de littérature succincte du concept de détection de rupture, d'abord dans un cadre général, puis recentrée sur ses usages actuariels.

1.3.1 Aperçu historique des techniques de détection de rupture

La genèse : la carte de contrôle de Shewhart

Les techniques de détection de ruptures ne naissent pas de travaux de recherches en mathématiques fondamentales, mais d'un atelier industriel. *Western Electric Company*³ y fabrique en série des microphones à charbon, le composant qui capte la voix dans les combinés téléphoniques. D'un exemplaire à l'autre, la qualité de transmission vocale des microphones n'est jamais identique, car elle fluctue autour d'une cible. Cette variation étant inévitable, la difficulté n'est pas de la supprimer, mais de l'interpréter pour sélectionner les bonnes pièces. A cet effet, les fabricants cherchent toujours à savoir si un écart mesuré relève des fluctuations ordinaires de la fabrication, ou s'il trahit un défaut réel sur la pièce qu'il faut corriger ou jeter.

C'est en 1924 que le physicien Walter Shewhart apporte à cette question, qui avait toujours été résolue par l'avis des experts, une réponse avec une approche statistique qui fonde la maîtrise statistique des procédés. Il distingue deux origines à la variation précédemment évoquée : la cause commune, bruit de fond inhérent au procédé et irréductible, et la cause spéciale qui signale un changement réel nécessitant une intervention. Il matérialise cette distinction par la carte de contrôle dite de *Shewhart* [Best et Neuhauser, 2006], qui borne le régime normal par des limites statistiques. Et le procédé est jugé sous contrôle tant que les mesures de qualité de transmission demeurent à l'intérieur de ces limites, et une rupture est présumée dès qu'une observation les franchit.

Approche séquentielle : du SPRT au CUSUM

La carte de Shewhart jette les fondements des techniques modernes de détection de ruptures, mais elle porte en elle sa propre limite. Elle teste singulièrement chacune des observations, sans mémoire de celles qui la précèdent. Ainsi, un décrochage brutal est

3. Western Electric Company (WE ou WECO) est une compagnie d'ingénierie électrique américaine fondée en 1872 à Chicago

aussitôt repéré, tandis qu'une dérive lente et modérée peut se prolonger sans qu'aucune mesure ne franchisse l'intervalle de confiance. C'est à cette insuffisance que répond Erwan Stafford Page [Page, 1954]. Plutôt que de juger chaque observation isolément, il propose un procédé qui accumule les écarts successifs à la valeur de référence, la somme cumulée ou CUSUM⁴. Cette approche permet d'identifier un changement de faible amplitude mais persistant, car il finit par s'accumuler jusqu'à déclencher l'alerte en franchissant les limites. Dès lors, la détection cesse d'être ponctuelle pour devenir séquentielle, sensible non plus à l'ampleur d'un écart isolé, mais à la persistance dans le temps.

Il est également important de noter que le CUSUM de Page vient apporter un plus au test séquentiel de rapport de probabilité (SPRT⁵) introduit par la publication [Wald, 1945] d'Abraham Wald. Ce test avait été introduit pour l'inspection des lots de munitions durant la seconde guerre mondiale, où le caractère destructif des essais imposait de conclure les tests sur le plus petit échantillon possible. En effet, le bon fonctionnement d'une munition n'est vérifié que lorsqu'elle est tirée. Donc, le contrôle d'un lot en éprouvant un nombre fixe de munitions choisies au hasard, revient à en sacrifier autant, y compris lorsque les premiers tirs suffisent déjà à conclure. Le SPRT répond à ce gaspillage en arrêtant le test dès qu'assez de tirs établissent que le lot est bon ou défectueux, réduisant ainsi le nombre de munitions gaspillées après une conclusion unique et définitive. C'est ce caractère de décision définitive que Page améliore en transposant la procédure de test à une surveillance continue. Le CUSUM peut être perçu comme une suite de SPRT répétés [Basseville et Nikiforov, 1993] tant que rien d'anormal n'apparaît dans les observations surveillées.

Construit sur le rapport de vraisemblance Λ_n à n observations et deux seuils réels A et B tels que $n \in \mathbb{N}$, $A \leq B$, le test SPRT se définit comme suit [Croix *et al.*, 2015] :

$$\begin{cases} \text{rejeter } H_0, & \text{si } \Lambda_n \geq A \\ \text{accepter } H_0, & \text{si } \Lambda_n \leq B \\ \text{continuer,} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

Autrement dit, le test s'arrête la première fois que le rapport de vraisemblance quitte l'intervalle $[A, B]$. Le nombre d'observations correspondant, appelé taille d'échantillon N , est donc une variable aléatoire. Les propriétés d'optimalité et de clôture sont discutées dans [Wald, 1947].

Consolidation théorique et extensions modernes

Les avancées des méthodes de détection de ruptures ne s'arrêtent pas au CUSUM de Page, mais ce dernier ouvre la voie à toute une lignée de procédures séquentielles de détection de ruptures. Roberts [Roberts, 1959] en propose une variante centrée sur

4. Cumulative Sum

5. Sequential Probability Ratio Test

la moyenne mobile à pondération exponentielle, qui répond au même problème que le CUSUM par un mécanisme distinct. En clair, cette approche surveille une moyenne pondérée glissante des observations, actualisée à chaque nouvelle mesure. Les pondérations décroissent vers le passé, c'est à dire que le poids d'une observation est d'autant plus faible qu'elle est ancienne. Cette récursion permet à la procédure de garder en mémoire les informations les plus récentes dans la surveillance de la série d'intérêt et de rester réactive aux changements durables. Ces méthodes visent à détecter les changements durables le plus tôt possible.

Si ces procédures reposent chacune sur une justification propre, elles ne s'inscrivent d'abord dans aucun cadre commun permettant de comparer leurs performances ni de définir précisément ce que signifie *détecter au plus tôt* une rupture. Ce cadre est établi dans les décennies suivantes. Par exemple, Shiryaev [Shiryaev, 1963] parvient à formuler le problème de détection au plus tôt comme un problème d'optimisation sous contrainte. Plus précisément, il s'agissait de déclencher une alerte de rupture au plus tôt, sous la contrainte de fausses alertes. Shiryaev résout ce problème dans un cadre bayésien où il suppose une loi a priori sur l'instant de rupture.

A sa suite, Lorden [Lorden, 1971] écarte l'hypothèse sur l'instant de rupture et reformule le problème en cherchant à garantir la détection la plus rapide dans la configuration la plus défavorable : le critère de Lorden. C'est dans ce cadre que Moustakides [Moustakides, 1986] arrive à démontrer l'optimalité du temps d'arrêt du CUSUM de Page pour la détection de changement de distribution. De ces travaux naissent les grandeurs qui mesurent aujourd'hui toute procédure de surveillance, telles que le temps moyen avant fausse alerte et le délai moyen de détection après rupture.

Cette théorie révèle toutefois une contrainte commune à ces méthodes. En effet, elles supposent connue l'ampleur du changement à détecter, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Le test du rapport de vraisemblance généralisé (GLR), introduit par Willsky et Jones [Willsky et Jones, 1976], lève cette exigence en estimant cette ampleur par le maximum de vraisemblance.

La période récente déplace l'enjeu vers la surveillance en temps réel, que la croissance du volume de données rend nécessaire. L'approche bayésienne, déjà présente chez Shiryaev, y trouve une forme algorithmique. La détection bayésienne en ligne d'Adams et MacKay [Adams et MacKay, 2007] suit à chaque instant la probabilité qu'une rupture survient, et fournit ainsi non plus une simple alerte, mais une mesure d'incertitude sur la date du changement. Des méthodes ultérieures telles que le FOCuS⁶ [Romano *et al.*, 2022] affinent cette surveillance pour la mener à mesure que les observations arrivent.

De la carte de contrôle de Shewhart aux algorithmes récents, cet aperçu ne retrace

6. Fast Online Changeoint detection via Fonctional Pruning CUSUM Statistics

qu'une partie des méthodes de détection de ruptures, et elles s'appliquent aujourd'hui à des domaines variés. Une distinction demeure toutefois essentielle à préciser : celle qui sépare les méthodes séquentielles des méthodes rétrospectives. Cette distinction entre détection séquentielle et détection rétrospective est présentée dans les paragraphes suivants.

1.3.2 Distinction entre les méthodes offline et méthodes online

La détection de ruptures se scinde en deux approches, selon la manière dont les données sont disponibles et dont la décision doit être prise. Cette distinction ne tient pas aux ruptures elles-mêmes, mais à la situation dans laquelle on cherche à les repérer.

La détection *hors ligne* (*offline*), ou rétrospective, opère sur une série entièrement observée. L'ensemble des données est connu au moment de l'analyse, et l'on cherche à segmenter la série en régimes homogènes, en déterminant combien de ruptures elle contient et où elles se situent. Dans ce cadre, la décision est prise une fois, a posteriori, en exploitant toute l'information disponible, y compris celle postérieure à chaque rupture. À titre d'illustration, la procédure de Bai et Perron [Bai et Perron, 1998, Bai et Perron, 2003] relève de cette approche.

La détection *en ligne* (*online*), ou séquentielle, opère au contraire sur une série qui s'observe au fil du temps. À chaque nouvelle donnée, il faut décider, sans connaître l'avenir, si une rupture vient de se produire. L'enjeu n'est plus de localiser toutes les ruptures d'une série close, mais d'en signaler une au plus tôt, en arbitrant entre la rapidité de la détection et le risque de fausse alerte.

Ces deux approches ne s'opposent pas toujours, mais répondent certainement à des questions distinctes. Dans ce sens, [Basseville et Nikiforov, 1993] montre que le changement de distribution d'une série d'observations indépendantes $y_1, \dots, y_N$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$) peut être interprété dans les deux sens sur la base d'une même statistique de test, à savoir la somme cumulée des log-rapports de vraisemblance $S_k = \sum_{i=1}^k \log\left(\frac{p_{\theta_1}(y_i)}{p_{\theta_0}(y_i)}\right)$ avec $1 \leq k \leq N$, θ_0 et θ_1 les paramètres de la distribution de la série avant et après la rupture, respectivement :

- *Rétrospectivement*, pour estimer la date d'une rupture de distribution, en cherchant le minimum global de la statistique ;
- *Séquentiellement*, pour donner une alerte de rupture au constat d'une baisse de la statistique au delà d'un seuil d'alerte prédéfini selon des critères d'optimalité précis.

En résumé, l'approche *online* décide sans connaître le futur en arbitrant délai/fausses alarmes, là où le cadre *offline* dispose de toute la série et vise la précision de localisation. Un récapitulatif comparatif entre les deux approches est consigné dans le tableau 1.1. Par ailleurs, elles peuvent être complémentaires : une même série peut être segmentée rétrospectivement pour établir les régimes passés, puis surveillée séquentiellement pour

anticiper le suivant.

	Offline (rétrospectif)	Online (séquentiel)
Données	Série complète $y_1, \dots, y_N$ observée	Données reçues au fil du temps
Question	Où se situe la rupture ?	Une rupture vient-elle de se produire ?
Objectif	Localiser précisément la rupture	Détecter au plus vite
Nature	Estimation	Surveillance / décision
Usage de S_k	Minimum global de S_k	Chute depuis le maximum courant
Critères	Précision de localisation, taux de bonne détection	Délai moyen de détection, ARL ⁷ (fausses alarmes)

TABLE 1.1 – Comparaison des cadres de détection *offline* et *online*.

1.3.3 La détection de changement de rupture en actuariat

La transposition de ces méthodes à l'actuariat est récente. Elle répond à une question de métier : une variation observée dans les données traduit-elle un vrai changement de régime, ou une simple fluctuation ?

Le cadre appliqué est posé par [Croix *et al.*, 2015], qui montrent que le CUSUM et le test du rapport de vraisemblance généralisé permettent de surveiller les hypothèses techniques d'un assureur avec un taux de fausses alertes maîtrisé. [El Karoui *et al.*, 2017] en fournissent le fondement théorique, en établissant l'optimalité de cette surveillance pour les processus de comptage - cadre naturel des sinistres comme des décès -, résultat que [Barigou *et al.*, 2022] appliquent à la gestion des risques.

Les applications se déploient dans des branches variées. En assurance automobile, [Do Huu et Lopez, 2011] recourt à un test du rapport de vraisemblance pour éprouver la stabilité temporelle des modèles fréquence-coût. En prévoyance collective, [Mossabo Issa, 2016] associe le CUSUM à des méthodes paramétriques pour surveiller les tables d'arrêts de travail temporaires. En assurance emprunteur, [Le Louarne, 2023] applique le CUSUM à une chronique de décès infra-annuels et confirme l'utilité opérationnelle de ces dispositifs. En mortalité nationale, enfin, [Abgrall, 2021] en éprouve la sensibilité et [Ngong Engoulou, 2023] détecte des ruptures dans le rythme d'amélioration par la procédure de Bai et Perron.

Ces travaux partagent une même limite : la brièveté des séries disponibles, qui borne la fiabilité de toute détection. [Vigneron, 2025] y échappe partiellement en surveillant la mortalité de plusieurs populations par un CUSUM multivarié couplé à un processus

gaussien. Sa thèse constitue l'état de l'art de la détection en ligne appliquée à la mortalité, et un point d'ancrage d'une nouvelle approche que pourrait exploiter la suite de ce mémoire.

1.3.4 Plan d'action de l'étude

Parmi cette panoplie d'études actuarielles qui mobilisent des techniques de détection de changement, ce mémoire s'inscrit dans le prolongement des travaux de [Ngong Engoulou, 2023], dont il s'inspire du point de vue méthodologique. En revanche, il s'en distingue à deux niveaux. Premièrement, ce mémoire se distingue par la période d'observation de la mortalité, qui est plus large pour réduire la sensibilité des ruptures estimées. Deuxièmement, les ruptures identifiées servent à une recalibration des projections de mortalité, dont on quantifie l'écart par rapport à l'extrapolation de la tendance longue, mesuré sur l'espérance de vie prospective. Ce mémoire articule de la sorte la détection des changements de régime à leurs implications sur les engagements de long terme, ce qui constitue un prolongement de la littérature actuarielle.

Chapitre 2

Présentation des données et analyse descriptive

Ce mémoire ne se veut pas seulement théorique. Pour répondre à la problématique posée, il s'appuie sur des données réelles, dont la nature et la qualité conditionnent l'ensemble de l'analyse. Dans ce sens, le présent chapitre sera consacré à la présentation des données qui serviront à l'élaboration de cette étude. Il décrit les sources mobilisées, en précise le périmètre et les choix retenus pour en assurer la cohérence. Une analyse descriptive vient ensuite dégager les principales caractéristiques et éclairer les grandes tendances de la mortalité française sur la période étudiée.

2.1 Présentation des données

L'ensemble des données mobilisées dans ce travail provient de l'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) et se compose de deux ensembles de données, déclinés par sexe. Il s'agit d'une part des données de décès annuels observés en France selon les statistiques de l'état civil, d'autre part des données de populations vivantes en France entre 1962 et 2023.

Le périmètre géographique retenu pour cette étude est la France métropolitaine. Ce choix se justifie par un impératif d'homogénéité temporelle des données, afin d'éviter d'introduire dans les séries des variations de comportement imputables à un réaménagement administratif plutôt qu'à une évolution réelle de la mortalité. A titre d'exemple, la série de données de décès et de populations vivantes de la France entière connaît en effet une rupture de champ liée à l'intégration de Mayotte. Devenue un département français en 2011, cette collectivité n'est prise en compte dans les statistiques de l'institut qu'à partir de 2014.

2.1.1 Données de décès

Source et description des données

Les effectifs de décès sont issus des séries longues sur les décès en France publiées par l'INSEE¹, qui constituent une exploitation des statistiques de l'état civil agrégées par l'INSEE à partir des bulletins transmis par les communes. Le fichier brut se présente sous la forme d'un ensemble de feuilles de calcul croisant l'année calendaire et l'âge au décès. Une feuille est dédiée à chaque combinaison de sexe et de périmètre géographique, avec deux périmètres proposés : la France métropolitaine (FM) et la France entière (FE). Les décès y sont ventilés par âge atteint dans l'année, c'est-à-dire par différence de millésime entre l'année d'observation et l'année de naissance, et ils couvrent l'ensemble des âges allant de la naissance (0 an) jusqu'à une classe d'âge terminale regroupant les centenaires (100 ans ou plus). Les données disponibles s'étendent sur une soixante d'années consécutives, de 1962 à 2023, offrant ainsi un recul temporel étendu pour l'analyse de la dynamique de la mortalité.

Construction de la base des décès

Les données brutes se présentent sous la forme de feuilles de calcul distinctes, séparées par sexe et par périmètre géographique. Après sélection des feuilles correspondant à la France métropolitaine, la constitution de la base finale a consisté à réunir l'information dispersée entre ces différentes sources en une structure unique et homogène, adaptée aux traitements ultérieurs.

Les feuilles relatives aux hommes et aux femmes ayant une structure identique ont été fusionnées par empilement, une variable de sexe étant introduite afin de conserver la distinction entre les deux populations. Les données ont par ailleurs été organisées au format long, chaque ligne correspondant à une combinaison unique d'année, d'âge et de sexe, à laquelle est associé l'effectif de décès observé. Ce format, dans lequel chaque observation occupe une ligne distincte, est le mieux adapté aux manipulations statistiques et aux représentations graphiques mobilisées dans la suite de l'étude.

La base finale des décès ainsi obtenue rassemble quatre variables : l'année d'observation, l'âge atteint dans l'année, le sexe et le nombre de décès correspondant. Elle couvre l'ensemble des combinaisons d'âge, de sexe et d'année sur la période 1962-2023 pour la France métropolitaine.

2.1.2 Données d'exposition au risque de décès

Source et description des données

La base de données d'exposition au risque de mortalité exploitée dans ce mémoire est construite à partir d'une série de données de populations totales en France. Ces données proviennent des bases ouvertes de l'INSEE, plus précisément des tableaux de population

1. Données Décès observés : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/8233806>.

issus des séries longues sur la situation démographique² en France. Le tableau retenu fournit les effectifs de population totale au 1^{er} janvier de chaque année, ventilés par sexe et par âge.

Le fichier brut est organisé en feuilles de calcul, une par année calendaire de 1901 à 2023. Au sein de chaque feuille, les effectifs sont déclinés par âge, par sexe et par périmètre géographique, deux champs étant disponibles comme pour les données de décès : la France métropolitaine et la France entière. Conformément au choix retenu pour les décès, et pour les mêmes raisons d’homogénéité du périmètre sur l’ensemble de la période, seules les données relatives à la France métropolitaine sont conservées. Pour la suite seules les informations couvrant la période d’étude, de 1962 à 2024, sont conservées pour faciliter le calcul des expositions.

Une particularité de cette source mérite d’être soulignée, car elle joue un rôle déterminant dans la suite des traitements. Les effectifs sont fournis selon l’âge au 1^{er} janvier de l’année, c’est-à-dire l’âge en années révolues, et chaque effectif est de surcroît associé à son année de naissance. Cette information sur la génération d’appartenance se révélera essentielle pour réconcilier la classification de la population, exprimée en âge révolu, avec celle des décès, exprimée en âge atteint dans l’année.

Construction de la base des expositions

La structure du fichier source, où chaque année calendaire occupe une feuille distincte, a d’abord imposé une étape de consolidation. Les feuilles ont été importées successivement puis empilées en une table unique, l’année calendaire, identifiée par le nom de la feuille, étant reportée dans une variable dédiée afin de préserver le repère temporel de chaque effectif. À l’issue de cette opération, l’ensemble des effectifs de population au 1^{er} janvier se trouve réuni dans une base unique couvrant la période 1962-2023.

Cette base a ensuite été restreinte au périmètre de la France métropolitaine et organisée au format long, chaque ligne associant à une combinaison d’année, d’âge, de sexe et d’année de naissance l’effectif de population correspondant. Le codage du sexe a été harmonisé avec celui de la base des décès afin de garantir la cohérence des deux sources lors de leur mise en correspondance ultérieure.

Ces effectifs ne constituent pas encore l’exposition au risque. Comme indiqué précédemment, la population est observée en âge révolu au 1^{er} janvier, tandis que les décès sont classés par âge atteint dans l’année. De ce fait, la transformation des effectifs en exposition doit donc à la fois mesurer le temps vécu sous risque et réconcilier ces deux conventions d’âge. La présence de l’année de naissance dans la source permet de réaliser cette double opération en raisonnant par génération.

L’exposition au risque pour l’âge atteint x au cours de l’année calendaire t correspond au temps vécu durant cette année par la génération née en $g = t - x$. Sur le diagramme de Lexis (Figure 2.1), cette génération occupe le carré délimité entre deux 1^{er} janvier successifs, qu’elle traverse à l’âge révolu x puis $x - 1$ au 1^{er} janvier de l’année $t + 1$. En notant $P_a(\tau)$ l’effectif de la génération observé à l’âge révolu a au 1^{er} janvier de l’année

2. Données Populations : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/8233806>.

τ , il est possible d'approximer l'exposition au risque durant l'année τ . En considérant que le temps vécu correspond à l'aire sous la courbe de l'effectif décroissant de cette génération au cours de l'année (figure 2.1, à droite). Sous l'hypothèse d'une décroissance linéaire, cette aire est celle d'un trapèze, égale à la moyenne des deux effectifs observés :

$$E_{x,t} = \frac{1}{2} (P_{x-1}(t) + P_x(t+1)), \quad (2.1)$$

où $P_x(t)$ désigne l'effectif de la population totale d'âge x en années révolues durant l'année calendaire t .

Selon la formule (2.1) une situation nécessite un traitement spécifique concernant l'âge nul. Les nouveau-nés n'étant pas tous présents au 1^{er} janvier de leur année de naissance, leur exposition est approchée par l'effectif observé au 1^{er} janvier suivant, $E_{0,t} \approx P_0(t+1)$.

L'exposition ainsi obtenue, indexée par âge atteint et donc directement compatible avec les décès, est calculée séparément pour chaque sexe puis réunie en une base unique couvrant la période d'étude, de 1962 à 2023. Ces deux bases de données conjuguées, fournissent le matériau nécessaire pour une analyse descriptive de la mortalité en France, présentée dans la section suivante.

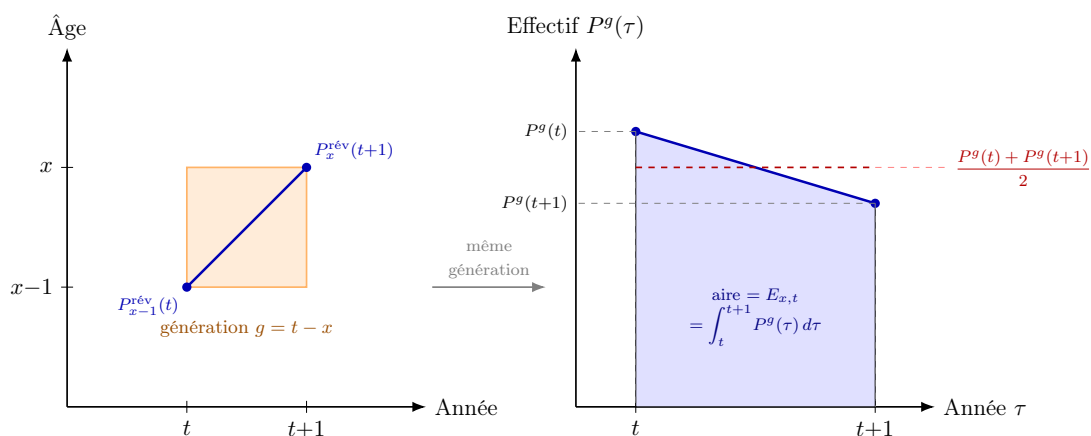


FIGURE 2.1 – Gauche : Diagramme de Lexis ; Droite : Exposition au risque par génération (figure générée par IA)

2.2 Analyse descriptive des données

Avant d'analyser la dynamique de la mortalité, il convient d'en dresser un panorama descriptif sur la période d'étude. Cette section présente l'évolution de la mortalité et des expositions en France métropolitaine de 1962 à 2023, afin de mieux cerner la population étudiée et de mettre en évidence les régularités et les inflexions qui caractérisent le rythme d'évolution de la mortalité.

2.2.1 Evolution des décès observés

Volume annuel des décès

Le nombre de décès annuels en France métropolitaine présente une allure irrégulière, qu'il est possible de sectionner en trois périodes sur la fenêtre de 1962-2023 (Figure 2.2). Après une première phase de fluctuation en cloche entre 1962 et 1986 autour de 550 000 décès en moyenne par an, le niveau de mortalité diminue jusqu'au début du XXI^e siècle. Il s'ensuit une remontée de plus en plus rapide de la mortalité, brièvement brouillée par les effets de la canicule de 2003, totalisant environ 650 000 décès en fin de période. Cette dernière progression est imputable au vieillissement de la population et à l'arrivée aux grands âges des générations du baby-boom (générations 1946-1974). Outre cela, la répartition selon le sexe de la série montre une supériorité marquée de la mortalité masculine jusqu'en 2005. Cette surmortalité masculine est par la suite résorbée progressivement jusqu'à la fin de la période.

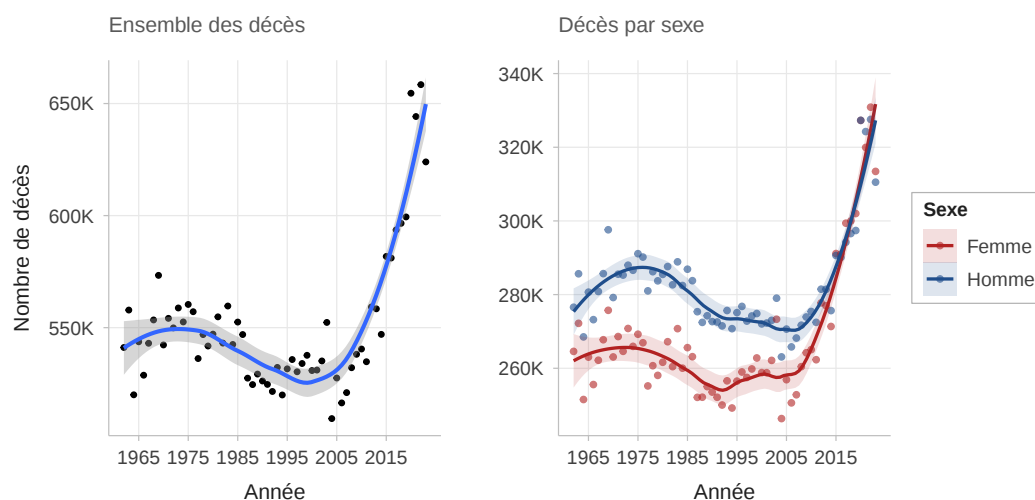


FIGURE 2.2 – Evolution du nombre de décès annuels

Répartition par classes d'âge et âge moyen au décès

La décomposition par classe d'âge du nombre de décès annuels présente des configurations différentes d'une tranche d'âge à l'autre (Figure 2.3). En effet, aux jeunes âges où sont enregistrés les plus faibles niveaux de mortalité, les décès reculent fortement sur toute la période. Aussi, le nombre de décès des adultes de la tranche 30-59 ans connaît une tendance baissière, avec quelques points de rehaussement. A l'opposé, les niveaux de mortalité chez les personnes de plus de 80 ans n'ont pas cessé de s'accroître, avec un rythme de croissance plus soutenu à partir de 2003. Ces analyses du niveau de mortalité par classe d'âge montrent que la stabilité apparente du volume global de décès recouvre

des évolutions différentes, marquées par un report aux âges plus élevés. Ce qui pourrait influencer des changements de régime conséquents dans la dynamique de la mortalité nationale.

Ce report de la mortalité vers les âges élevés est visible dans l'évolution des âges moyens au décès (Figure 2.4). La moyenne d'âge au décès croît régulièrement avec une tendance presque linéaire sur la période de l'étude, indépendamment du sexe. Le profilage genré de cette variable montre que les femmes meurent à des âges plus élevés que les hommes. Et l'écart d'âge moyen au décès demeure presque constant, autour de 8 ans entre 1962 et 2023.

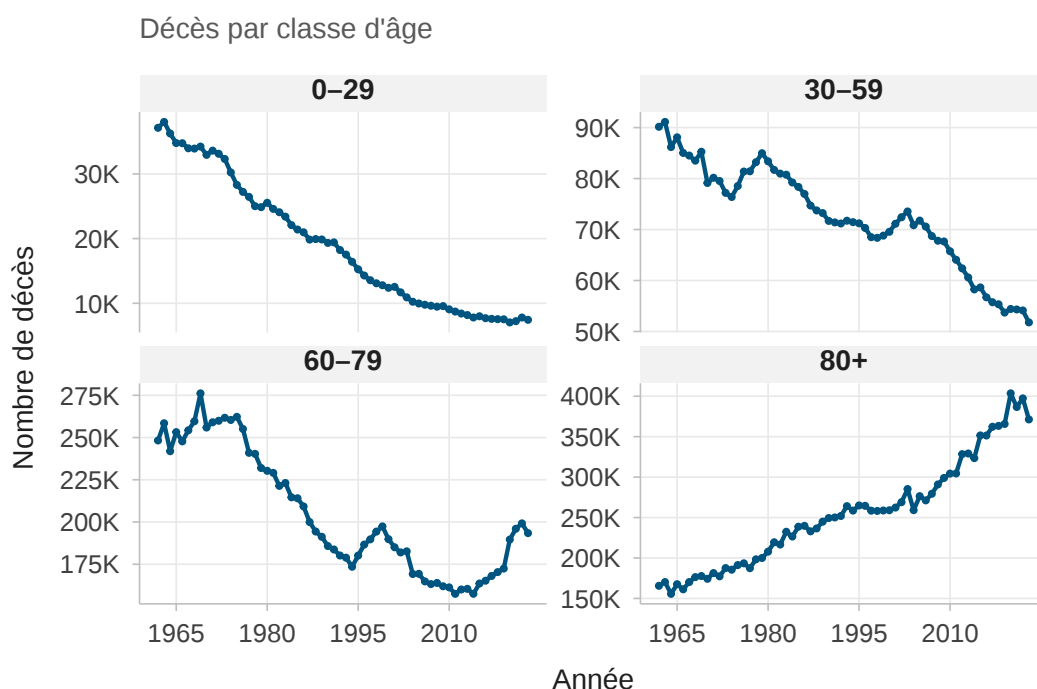


FIGURE 2.3 – Evolution du nombre de décès par classe d'âge

2.2.2 Structure de la population exposée

Évolution des effectifs exposés

La population exposée au risque croît de façon continue tout au long de la période, pour les deux sexes (Figure 2.5). L'effectif féminin progresse d'environ 24 millions au début des années 1960 à près de 34 millions en 2021, l'effectif masculin suivant une trajectoire parallèle d'environ 23 à 32 millions. La population féminine demeure constamment supérieure à la population masculine, reflet de la plus grande longévité des femmes, et l'écart entre les deux séries tend à s'accroître légèrement en valeur absolue sur la période.

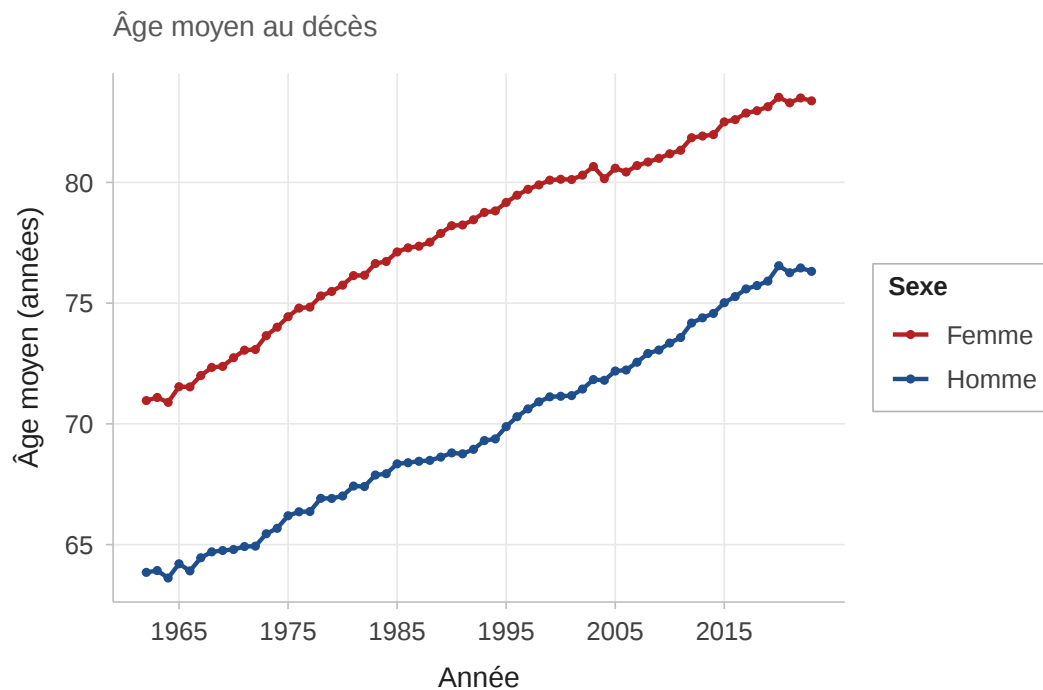


FIGURE 2.4 – Evolution de l'âge moyen au décès par sexe

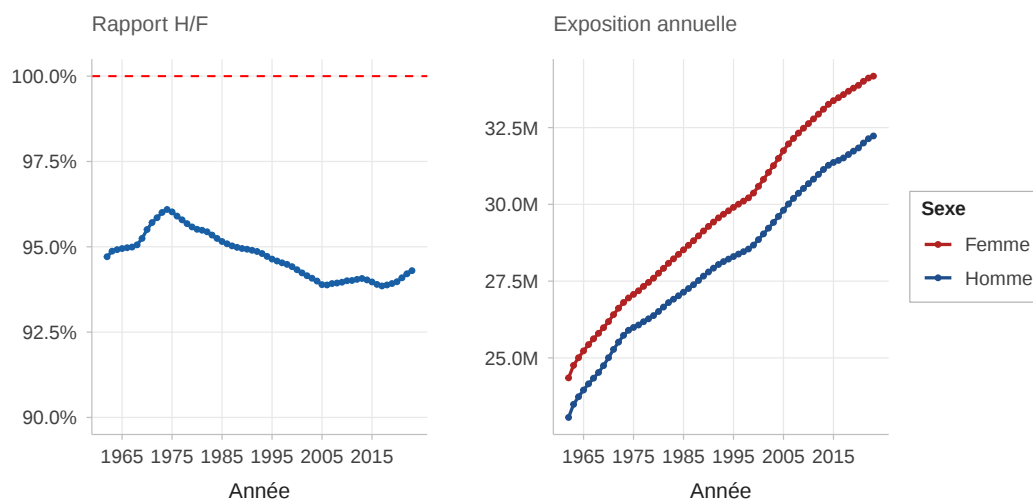


FIGURE 2.5 – Evolutions de la population exposée et du rapport Homme/Femme

Le rapport de la population masculine à la population féminine, rapporté à l'ensemble

des âges, demeure inférieur à la parité sur toute la période, confirmant l'excédent féminin de la population française. Son évolution n'est toutefois pas monotone : le rapport s'élève d'abord jusqu'à un maximum proche de 96% au milieu des années 1970, avant de décroître régulièrement pour se stabiliser autour de 94% sur la période récente. Cette évolution en deux temps traduit la combinaison de plusieurs effets démographiques, parmi lesquels l'extinction progressive des générations masculines décimées par les conflits du XX^e siècle et l'évolution du différentiel de mortalité entre sexes.

Déformation de la structure par âge

La comparaison des pyramides des âges de 1962 et de 2021 résume en une image les transformations structurelles de la population (Figure 2.6). La pyramide des âges de 1962 porte les stigmates de l'histoire démographique nationale. En effet, elle présente des creux marqués liés aux générations déficitaires des deux guerres mondiales, une base large témoignant d'une natalité encore soutenue, ainsi qu'un sommet étroit. Celle de 2021 témoigne d'un profond vieillissement : la base s'est resserrée sous l'effet de la baisse de la fécondité, le corps de la pyramide s'est élargi avec la progression des générations du baby-boom vers les âges élevés, et le sommet s'est nettement étoffé, marqué par une forte asymétrie en faveur des femmes aux grands âges. Cette déformation structurelle, distincte de la dynamique de mortalité proprement dite, constitue l'arrière-plan démographique dans lequel celle-ci s'inscrit.

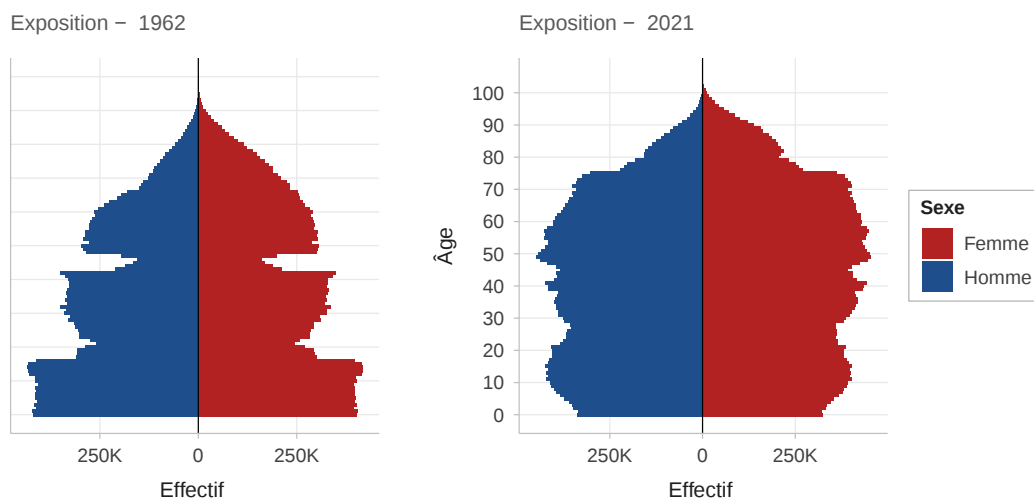


FIGURE 2.6 – Pyramides des âges 1962 et 2021

2.2.3 Niveau et dynamique de la mortalité

Le taux brut de mortalité

Le taux brut de mortalité présente une allure décroissante sur l'ensemble de la population de 1962 à 2000 à rythmes différents par période : une baisse plus accélérée de 1962 à 1991 suivi d'une période de baisse modérée de 1992 à 2002. Suite à la surmortalité enregistrée en 2003 due à la canicule et de l'effet de moisson de 2004, le taux brut en France métropolitaine débute une croissance accélérée jusqu'en fin de période. L'observation du taux de mortalité approuve encore une fois la surmortalité masculine qui est reconnue de tous, et cela dans toute les classes d'âges.

L'analyse de la structure par âge du taux brut de mortalité montre que l'âge est un facteur important dans l'analyse de la dynamique de la mortalité. La figure 2.8 montre un effet par âge des taux bruts de mortalité. On n'a pas les mêmes niveaux d'intensité de mortalité selon la tranche d'âge. Dans la tranche des moins de 29 ans, le taux suit une tendance baissière qui ralentit au fil des années. Ce ralentissement se fait ressentir dans toutes les classes d'âge, mais avec une particularité aux âges élevés, où la bosse de 2003 est fortement prononcée.

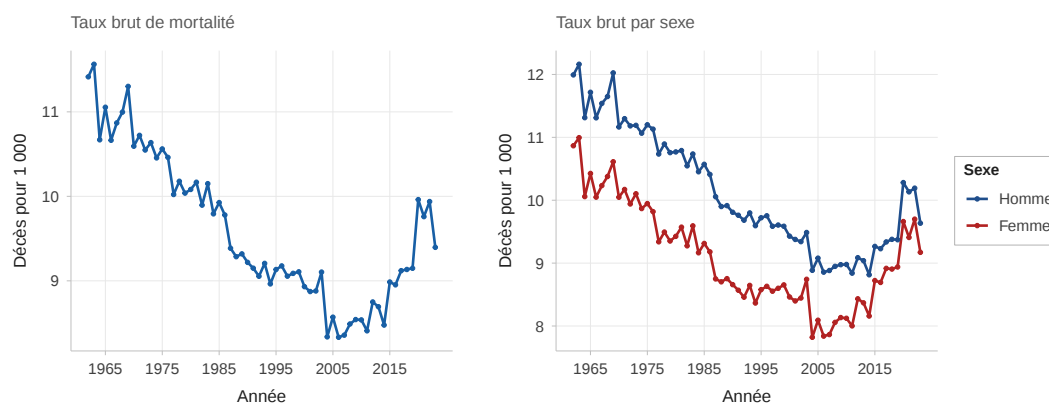


FIGURE 2.7 – Evolution du taux brut de mortalité

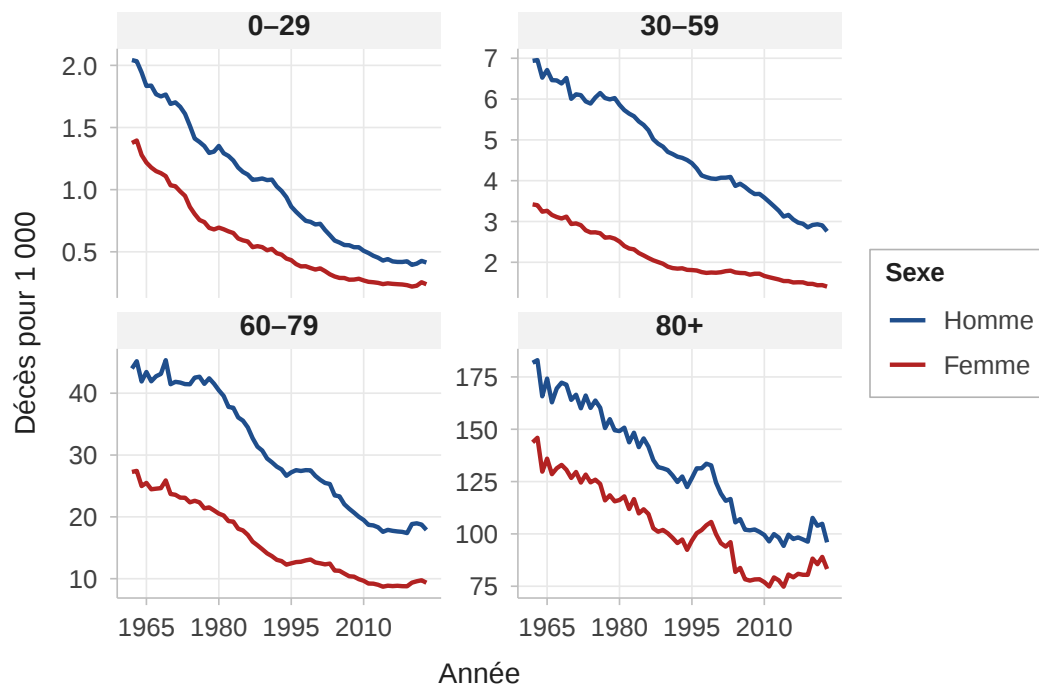


FIGURE 2.8 – Evolution du taux brut de mortalité par classe d'âge

Amélioration de la mortalité

Dans le cadre actuariel et démographique, l'amélioration de la mortalité³ désigne la diminution du niveau de mortalité observée au sein d'une population au cours du temps. Elle mesure le gain de survie dont bénéficie une population d'une année à l'autre, grâce notamment aux progrès médicaux, à l'amélioration des conditions de vie, à la prévention des maladies ou à l'évolution des comportements sanitaires. Plus formellement, l'amélioration de la mortalité à l'âge x entre les années $t - 1$ et t correspond à la variation relative du taux de mortalité brut :

$$MI_{x,t} = 1 - \frac{m_{x,t}}{m_{x,t-1}}$$

Elle s'interprète comme suit :

- $MI_{x,t} > 0$: le taux de mortalité diminue entre $t - 1$ et t . Il s'agit d'une amélioration de la mortalité, associée à une augmentation de l'espérance de vie, toutes choses égales par ailleurs.
- $MI_{x,t} = 0$: le taux de mortalité reste inchangé entre $t - 1$ et t . La mortalité est alors stable.

3. MI : Mortality Improvement

- $MI_{x,t} < 0$: le taux de mortalité augmente entre $t - 1$ et t . Il s'agit d'une détérioration de la mortalité.

Pour faciliter l'interprétation bi-dimensionnelle de cet indicateur, ses valeurs sont représentées en une matrice de chaleur (Figure 2.9). La surface des améliorations de mortalité ne fait apparaître aucune structure par âge nettement prononcée. Il est important de noter toutefois qu'aux âges les plus jeunes, en deçà de 25 ans, un motif en mosaïque se dessine, où prédominent des améliorations positives supérieures à 10%, reflet de la forte volatilité des taux à ces âges où les décès sont peu nombreux. Certains effets de cohorte se distinguent en revanche plus nettement. Chez les hommes, la génération née autour de 1955 présente une amélioration négative, donc une détérioration de la mortalité sur l'ensemble de la période, tandis que les générations antérieures à 1930 connaissent une amélioration modérée, comprise en moyenne entre 1% et 5%. Chez les femmes, ces effets de génération apparaissent plus atténués. De plus, plusieurs effets d'année calendaire ressortent sous la forme de bandes verticales traversant l'ensemble des âges, ce qui suggère un effet d'année calendaire. Par exemple, l'année 2004 se signale par une amélioration particulièrement favorable à tous les âges, attribuable à un effet de moisson consécutif à la surmortalité de la canicule de 2003. À l'inverse, l'année 2020 affiche une dégradation généralisée, conséquence de la surmortalité brutale provoquée par la crise sanitaire de la Covid-19.

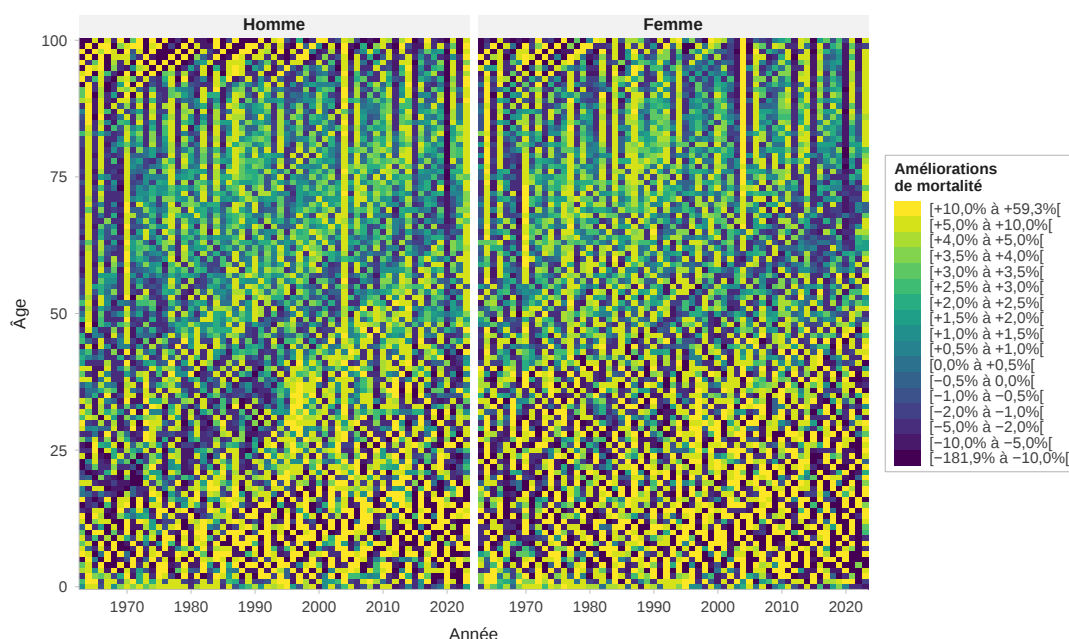


FIGURE 2.9 – Surface d'amélioration de la mortalité par âge, année, et sexe

Synthèse du chapitre

L'analyse descriptive des données de mortalité française entre 1962 et 2023 met en évidence de profondes transformations démographiques et sanitaires. Si le nombre annuel de décès apparaît relativement stable sur une grande partie de la période, cette stabilité masque en réalité un déplacement progressif de la mortalité vers les âges les plus élevés, conséquence directe de l'allongement de la durée de vie et du vieillissement de la population. Les décès diminuent fortement aux jeunes âges tandis qu'ils augmentent chez les plus de 80 ans, et l'âge moyen au décès progresse continûment pour les deux sexes. Parallèlement, la structure de la population française s'est considérablement modifiée, avec une part croissante de personnes âgées et une présence plus marquée des femmes aux grands âges. L'étude du taux brut de mortalité et des améliorations annuelles montre également que la baisse historique de la mortalité n'a pas suivi une trajectoire régulière. Des épisodes exceptionnels, tels que la canicule de 2003 ou la pandémie de Covid-19, ont provoqué des perturbations visibles, tandis que plusieurs indices suggèrent un ralentissement récent des gains de mortalité. Enfin, la présence d'effets de génération et d'effets calendaires met en évidence une dynamique complexe de la mortalité française, caractérisée à la fois par des tendances de long terme et par des inflexions potentiellement durables, justifiant ainsi l'étude approfondie des ruptures de régime menée dans les chapitres suivants.

Chapitre 3

Méthode de détection de rupture rétrospective

Ce chapitre expose la formulation théorique de la détection rétrospective de rupture retenue dans ce mémoire. La première section en pose le socle statistique avec le test d'une rupture unique, dont le principe se généralise ensuite au cas de ruptures multiples. La deuxième section traite précisément de ce cas à travers la procédure de Bai-Perron, laquelle sert à estimer les dates de rupture, et fournit ainsi l'outil appliqué par la suite à l'indice κ_t . La dernière section illustre enfin la démarche sur une série de SMR pour une première analyse des ruptures de tendance dans la mortalité française.

3.1 Test de détection d'une rupture à une date connue

Le cas le plus simple de la théorie des changements structurels est celui d'une rupture unique survenant à une date T_1 supposée *connue a priori*. Ce cadre, introduit par [Chow, 1960], constitue le fondement conceptuel sur lequel se construisent les procédures de détection plus sophistiquées développées ultérieurement par [Bai et Perron, 1998].

3.1.1 Formulation du test

Considérons le modèle de régression linéaire admettant une rupture à la date T_1 :

$$Y_t = \begin{cases} X_t' \beta_1 + \varepsilon_t & \text{si } t = 1, \dots, T_1, \\ X_t' \beta_2 + \varepsilon_t & \text{si } t = T_1 + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- $Y_t \in \mathbb{R}$ désigne la variable à expliquer à l'instant t ;
- $X_t \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des variables explicatives à l'instant t ;
- $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^p$ les vecteurs de paramètres respectivement avant et après la rupture ;

- ε_t le terme d'erreur supposé indépendant et identiquement distribué selon une loi normale centrée de variance σ^2 ($\sigma^2 > 0$).

La stabilité paramétrique du modèle se teste à travers l'hypothèse nulle :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 \quad (3.2)$$

contre l'hypothèse alternative de présence d'une rupture :

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2. \quad (3.3)$$

Sous H_0 , le modèle (3.1) se réduit à une régression linéaire unique estimée sur l'ensemble de la période $\{1, \dots, n\}$. Sous H_1 , le modèle admet deux régimes distincts séparés par la date T_1 .

Statistique de test

La statistique du test de Chow se construit à partir de la comparaison des sommes des carrés des résidus (*Residual Sum of Squares*, RSS) obtenues sous chacune des deux hypothèses :

$$F(T_1) = \frac{(\text{RSS}_0 - \text{RSS}_1)/p}{\text{RSS}_1/(n - 2p)}, \quad (3.4)$$

où :

- RSS_0 est la somme des carrés des résidus du modèle restreint (sans rupture), obtenue par estimation des moindres carrés ordinaires (MCO) sur l'ensemble de la période ;
- $\text{RSS}_1 = \text{RSS}_1^{(1)} + \text{RSS}_1^{(2)}$ est la somme des carrés des résidus du modèle non restreint (avec rupture), agrégeant les RSS estimées séparément sur les deux sous-périodes $[1, T_1]$ et $[T_1 + 1, n]$;
- p est le nombre de paramètres estimés dans chaque segment.

Distribution et règle de décision

Sous l'hypothèse nulle H_0 et sous l'hypothèse de normalité des erreurs, la statistique $F(T_1)$ suit une distribution de Fisher–Snedecor à $(p, n - 2p)$ degrés de liberté :

$$F(T_1) \underset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(p, n - 2p). \quad (3.5)$$

La règle de décision au niveau de signification α consiste à rejeter l'hypothèse nulle de stabilité dès lors que :

$$F(T_1) > \mathcal{F}_{1-\alpha}(p, n - 2p), \quad (3.6)$$

où $\mathcal{F}_{1-\alpha}(p, n - 2p)$ désigne le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution de Fisher–Snedecor correspondante.

3.1.2 Limite et motivation de l'extension

Bien que théoriquement satisfaisant, le test de Chow présente une limitation majeure dans la pratique : il exige la connaissance *préalable* de la date de rupture T_1 . Or, dans la quasi-totalité des applications empiriques, et en particulier dans l'analyse de la dynamique de mortalité, cette date est elle-même inconnue et constitue précisément l'objet de l'estimation.

Cette difficulté a deux conséquences. D'une part, on ne peut pas appliquer directement le test de Chow sans introduire un biais de sélection lié au choix de T_1 . D'autre part, tester toutes les dates possibles et retenir la plus significative invalide la distribution de Fisher sous H_0 , puisque la statistique retenue est alors un maximum sur l'ensemble des dates candidates. Ces considérations motivent le passage aux tests à date inconnue, fondés sur la statistique du supremum $\sup_{T_1} F(T_1)$, qui constituent le centre de la méthodologie de [Bai et Perron, 1998] présentée dans la section suivante.

3.2 Tests de détection de changements structurels multiples

La méthodologie de [Bai et Perron, 1998, Bai et Perron, 2003] étend le cadre de la rupture unique à la situation, plus générale et plus réaliste, où le nombre de ruptures et leurs dates sont simultanément inconnus. Cette extension constitue l'innovation majeure de l'approche par rapport aux procédures séquentielles antérieures, qui détectaient les ruptures une à une de manière gloutonne et donc sous-optimale.

3.2.1 Formulation générale du modèle

Le modèle postule l'existence de m ruptures structurelles survenant à des dates inconnues $T_1 < T_2 < \dots < T_m$, qui partitionnent la période d'observation en $m + 1$ segments de dynamiques distincts avec $m \in \mathbb{N}^*$. Sur le segment j , allant de la date $T_{j-1} + 1$ à la date T_j , la relation entre la variable dépendante et les régresseurs s'écrit :

$$Y_t = X_t' \beta_j + \varepsilon_t, \quad t = T_{j-1} + 1, \dots, T_j, \quad j = 1, \dots, m + 1, \quad (3.7)$$

avec $T_0 = 0$ et $T_{m+1} = n$, de sorte que le premier segment commence à la première observation et que le dernier se termine à la dernière. Le vecteur $\beta_j \in \mathbb{R}^p$ représente les paramètres spécifiques au régime j .

Pour que les points de rupture soient identifiables, on impose que les paramètres de deux segments adjacents diffèrent, c'est-à-dire $\beta_j \neq \beta_{j+1}$ pour tout j . Si cette condition n'était pas vérifiée, deux segments consécutifs seraient gouvernés par la même relation, et la rupture qui les sépare serait fictive.

3.2.2 Critère d'estimation

Pour un nombre de ruptures m fixé, l'estimation conjointe des dates de rupture et des paramètres de chaque segment procède par minimisation de la somme globale des

carrés des résidus :

$$(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m) = \underset{(T_1, \dots, T_m)}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_j} (Y_t - X'_t \hat{\beta}_j)^2, \quad (3.8)$$

où, pour des dates de rupture fixées, $\hat{\beta}_j$ est l'estimateur des moindres carrés ordinaires obtenu dans le segment j :

$$\hat{\beta}_j = \left(\sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_j} X_t X'_t \right)^{-1} \sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_j} X_t Y_t. \quad (3.9)$$

Cette minimisation est soumise à une contrainte de longueur minimale, dite contrainte de **trimming**, qui exige que chaque segment contienne un nombre minimal d'observations :

$$T_j - T_{j-1} \geq \lfloor h n \rfloor, \quad \forall j = 1, \dots, m+1, \quad (3.10)$$

où $h \in [0, \frac{1}{2}]$ est un paramètre fixé a priori. Cette contrainte garantit que chaque segment dispose de suffisamment d'observations pour une estimation fiable des paramètres, et empêche la détection de ruptures fictives situées trop près des bornes de la série ou trop rapprochées les unes des autres.

3.2.3 Résolution par programmation dynamique

La recherche directe de la configuration optimale de m dates de rupture parmi n observations conduit à une complexité combinatoire de l'ordre de n^m , infaisable dès que m dépasse l'unité. Pour surmonter cet obstacle, [Bai et Perron, 2003] proposent un algorithme de programmation dynamique dont la complexité est réduite à $\mathcal{O}(n^2)$, indépendamment du nombre recherché de ruptures.

Le principe repose sur l'additivité de la somme des carrés des résidus. On note $\text{RSS}(i, j)$ la somme des carrés des résidus de la régression estimée sur les observations $\{i, \dots, j\}$. La récurrence de la programmation dynamique s'écrit :

$$V_k(j) = \min_{k \lfloor h n \rfloor \leq r \leq j - \lfloor h n \rfloor} \left[V_{k-1}(r) + \text{RSS}(r+1, j) \right], \quad (3.11)$$

initialisée par $V_1(j) = \text{RSS}(1, j)$, où $V_k(j)$ désigne la somme totale minimale des carrés des résidus pour une partition en k segments s'achevant à l'observation j . Les dates de rupture optimales sont ensuite reconstituées par un parcours rétrograde de la table des minima obtenue par la formule (3.11).

3.2.4 Détermination du nombre de ruptures

La localisation des ruptures suppose connu leur nombre m . Or ce nombre est lui-même inconnu et doit être déterminé à partir des données. Deux approches sont disponibles : une procédure de test séquentiel et un critère d'information.

Tests SupF séquentiels

La statistique permettant de tester l'hypothèse de m ruptures contre $m + 1$ ruptures est le maximum, sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des configurations admissibles, de la statistique de Fisher comparant ces deux modèles :

$$\text{SupF}(m + 1 \mid m) = \max_{(T_1, \dots, T_{m+1}) \in \mathcal{T}} F(T_1, \dots, T_{m+1}), \text{ avec} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{T} = \left\{ (T_1, \dots, T_m) : T_j - T_{j-1} \geq \lfloor hn \rfloor, j = 1, \dots, m + 1, \text{ où } T_0 = 0 \text{ et } T_{m+1} = n \right\}. \quad (3.13)$$

On teste itérativement, pour $m = 0, 1, 2, \dots$, en s'arrêtant au premier m pour lequel l'hypothèse nulle (Il y a eu m ruptures) n'est plus rejetée. Contrairement à la sélection par critère d'information, cette approche contrôle le niveau de signification à chaque étape. Le nombre de ruptures retenu est :

$$\hat{m} = \min \{ m \geq 0 : \text{SupF}(m + 1 \mid m) < c(h, p, \alpha) \}, \quad (3.14)$$

où $c(h, p, \alpha)$ est le seuil de rejet associé au niveau de significativité α .

Critère d'information bayésien.

Une approche alternative sélectionne le nombre de ruptures minimisant le critère :

$$\text{BIC}(m) = n \ln \left(\frac{\text{RSS}^*(m)}{n} \right) + [(m + 1)p + m] \ln(n), \quad (3.15)$$

où $\text{RSS}^*(m) = \sum_{j=1}^{m+1} \text{RSS}(\hat{T}_{j-1} + 1, \hat{T}_j)$ est la somme des carrés des résidus de la segmentation optimale à m ruptures. Plus précisément, le premier terme décroît avec m , traduisant l'amélioration mécanique de l'ajustement, tandis que la pénalité $[(m + 1)p + m] \ln(n)$ croît avec le nombre de paramètres estimés : $(m + 1)p$ coefficients de régression et m dates de rupture. Le nombre optimal est :

$$\hat{m} = \underset{0 \leq m \leq M}{\text{argmin}} \text{BIC}(m), \quad (3.16)$$

avec $M = \lfloor \frac{1}{h} \rfloor - 1$ le nombre maximal de ruptures compatible avec la contrainte de trimming.

Choix retenu.

Dans l'analyse comparative de ces deux approches de sélection de nombre de ruptures, [Bai et Perron, 2003] observent que la procédure séquentielle tend à surpasser le critère bayésien, notamment en présence d'autocorrélation des résidus, ce dernier pouvant suggérer un nombre excessif de ruptures. De ce fait le critère bayésien, implémenté par défaut dans le package **strucchange** [Zeileis *et al.*, 2002], sera retenu comme la méthode de sélection principale du nombre de ruptures dont les conclusions pourront être confrontées à celles de l'approche séquentielle à titre de validation.

3.2.5 Intervalles de confiance des dates de rupture

Une fois le nombre de ruptures déterminé et leurs dates estimées, ces dates peuvent être traitées comme des paramètres dont l'incertitude est quantifiable. [Bai, 1997] établit la distribution asymptotique de l'estimateur de chaque date de rupture. Pour le modèle à tendance linéaire segmentée, qui correspond à notre application, [Perron et Zhu, 2005] montrent que :

$$\frac{\hat{T}_j - T_j^0}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{2\sigma^2}{15\gamma_j^2}\right), \quad (3.17)$$

où T_j^0 désigne la vraie date de rupture, $\gamma_j = \beta_{j+1} - \beta_j$ l'ampleur du changement de pente, et σ^2 la variance de long terme des résidus, estimée par une méthode robuste à l'autocorrélation et à l'hétéroscédasticité telle que l'estimateur de [Newey et West, 1987].

La relation (3.17) révèle que plus le changement de pente γ_j est marqué, plus l'intervalle de confiance est resserré, car une transition franche est plus facile à localiser précisément. Inversement, un changement de pente faible relativement au bruit conduit à un intervalle de confiance large. Dans les applications à des données annuelles, cette largeur s'étend typiquement sur plusieurs années. Cette précision limitée doit être gardée à l'esprit lors de l'interprétation : une date de rupture estimée ne doit jamais être présentée comme un millésime exact, mais comme la meilleure estimation ponctuelle au sein d'un intervalle de plausibilité.

3.3 Exemple d'application sur une série de SMR

3.3.1 La variable observée

L'analyse porte sur le logarithme du *Standardized Mortality Ratio* (SMR), indicateur mesurant l'écart de la mortalité observée à une mortalité de référence. Le SMR est calculé séparément par sexe, à partir des décès et des expositions présentés précédemment.

Définition. Pour chaque année t et chaque sexe s , le SMR est le rapport de la somme des décès observés à la somme des décès attendus :

$$\text{SMR}_{s,t} = \frac{\sum_x D_{x,s,t}}{\sum_x q_{x,s}^{\text{ref}} E_{x,s,t}}, \quad (3.18)$$

où $D_{x,s,t}$ est le nombre de décès à l'âge x , $E_{x,s,t}$ l'exposition au risque correspondante, et $q_{x,s}^{\text{ref}}$ le quotient de mortalité de référence à l'âge x . La table de référence retenue est la table du moment de l'INSEE pour l'année 2019¹, fournie par sexe, ce qui justifie le calcul distinct du SMR pour les hommes et les femmes.

1. Quotients de mortalité par âge pour 100 000 survivants, déclinés par sexe (table T69QMORT), *La situation démographique en 2022 et en séries longues*, INSEE. <https://www.insee.fr/fr/statistiques/8210111>

Traitement de la classe d'âge terminale. La base des décès regroupe l'ensemble des centenaires dans une unique classe d'âge 100, qui couvre les âges de 100 ans et plus, tandis que les expositions sont disponibles par âge détaillé de 0 à 105 ans et que la table de référence s'arrête à 100 ans. Afin d'aligner les trois sources sur une borne commune, les expositions des âges de 100 ans et plus ont été agrégées en une seule modalité 100 :

$$E_{100,s,t} = \sum_{x \geq 100} E_{x,s,t}. \quad (3.19)$$

Le SMR est ainsi calculé sur les âges de 0 à 100 ans, cette dernière classe étant ouverte et regroupant l'ensemble des survivants au-delà de cet âge, en cohérence avec la structure de la base des décès et de la table de référence.

3.3.2 Sélection du nombre de ruptures

Le paramètre de *trimming* est fixé à sa valeur conventionnelle $h = 0,15$, imposant une longueur minimale de segment de neuf ans. La sélection du nombre de ruptures repose sur le critère d'information bayésien, dont l'évolution en fonction du nombre de ruptures est représentée à la figure 3.1, conjointement à la somme des carrés des résidus.

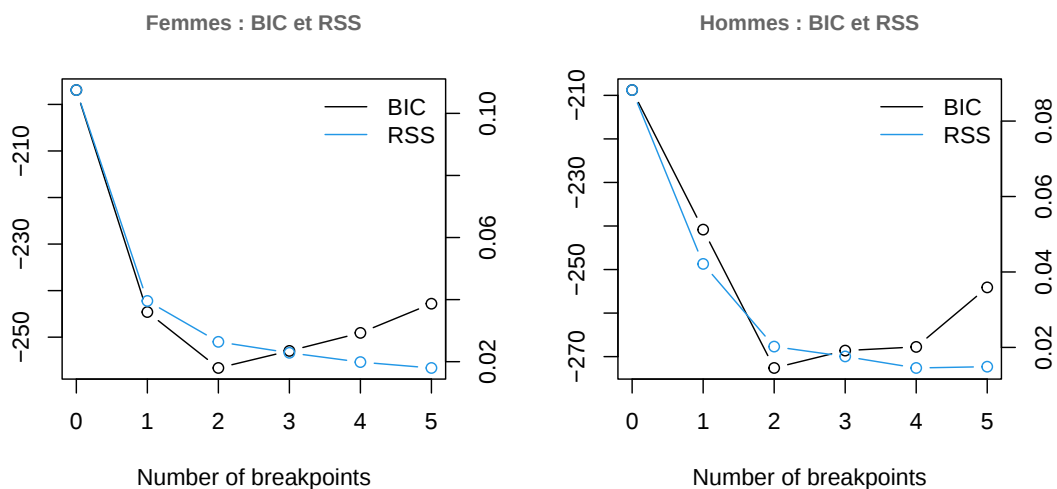


FIGURE 3.1 – Critère de sélection du nombre de rupture

Pour les deux sexes, le critère bayésien atteint son minimum à deux ruptures, conduisant à retenir une partition en trois régimes successifs de mortalité. Au-delà de ce nombre, la réduction de la somme des carrés des résidus ne compense plus la pénalité associée à l'introduction de paramètres supplémentaires.

3.3.3 Dates de rupture et régimes estimés

Les dates de rupture estimées, leurs intervalles de confiance à 95 %, ainsi que les taux annuels d'amélioration de la mortalité propres à chaque régime, sont reportés dans les tableaux ?? et ?. La figure 3.2 superpose aux observations la tendance ajustée par morceaux, faisant apparaître les trois régimes pour chaque sexe.

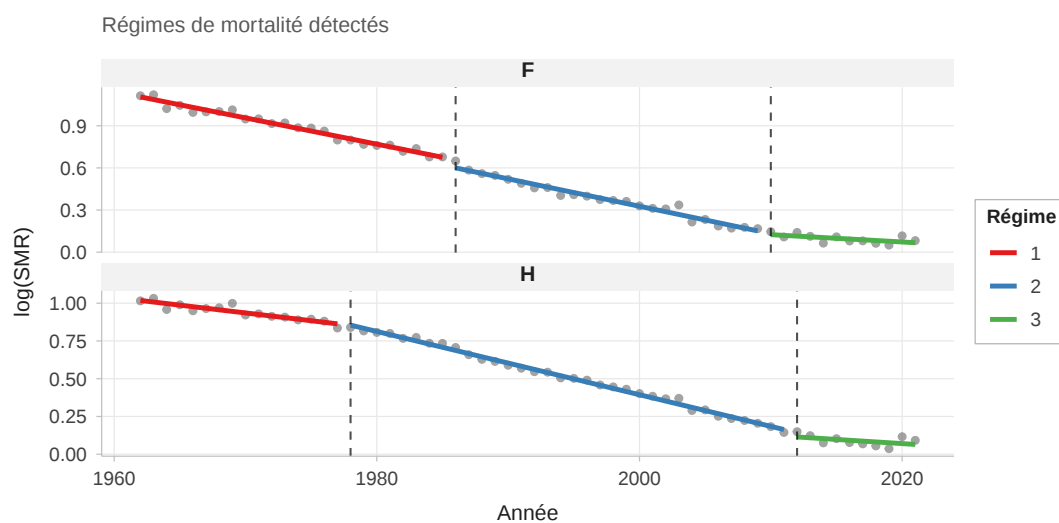


FIGURE 3.2 – Régimes de mortalité détectés par la procédure de Bai-Perron, $\log(\text{SMR})$ par sexe, 1962–2021. Les traits verticaux pointillés marquent les dates de rupture estimées.

Sexe	Rupture	Borne inf.	Estimation	Borne sup.
Femmes	1	1984	1986	1988
Femmes	2	2009	2010	2011
Hommes	1	1977	1978	1979
Hommes	2	2010	2012	2013

TABLE 3.1 – Dates de rupture et intervalles de confiance, par sexe

Segment	Période	Pente	SE pente	Amélioration (%/an)	SE amél.	Sexe
1	1962–1986	−0,0187	0,0007	1,87	0,07	Femme
2	1987–2010	−0,0195	0,0007	1,95	0,07	Femme
3	2011–2021	−0,0052	0,0020	0,52	0,20	Femme
1	1962–1978	−0,0103	0,0011	1,03	0,11	Homme
2	1979–2012	−0,0209	0,0004	2,09	0,04	Homme
3	2013–2021	−0,0055	0,0022	0,55	0,22	Homme

TABLE 3.2 – Pentes et taux d'amélioration par régime, par sexe

Chez les femmes, les ruptures sont datées de 1986 (intervalle [1984, 1988]) et de 2010 (intervalle [2009, 2011]). Le premier régime, de 1962 à 1986, se caractérise par une amélioration annuelle de la mortalité de 1,87 %. Cette amélioration s'accroît légèrement sur le deuxième régime, de 1987 à 2010, atteignant 1,95 % par an. Le troisième régime, à partir de 2011, marque une rupture franche : le rythme d'amélioration s'effondre à 0,52 % par an, soit une division par près de quatre.

Chez les hommes, les ruptures interviennent en 1978 (intervalle [1977, 1979]) et en 2012 (intervalle [2010, 2013]). Le premier régime, de 1962 à 1978, présente une amélioration modérée de 1,03 % par an, sensiblement inférieure à celle observée chez les femmes sur la même période. Le deuxième régime, de 1979 à 2012, est marqué par une accélération nette, l'amélioration atteignant 2,09 % par an. Comme pour les femmes, le dernier régime traduit un ralentissement prononcé, le rythme retombant à 0,55 % par an à partir de 2013.

3.3.4 Lecture des résultats

Deux constats se dégagent de ces estimations. D'une part, les intervalles de confiance, d'une largeur de deux à trois années seulement, attestent que les ruptures sont nettement localisées : l'ampleur des changements de pente, en particulier celle du ralentissement récent, autorise une datation précise, conformément à la relation (3.17). D'autre part, les deux sexes partagent une structure commune : une phase d'amélioration soutenue couvrant l'essentiel de la période, suivie d'un ralentissement prononcé au tournant des années 2010, dont l'amplitude est comparable pour les hommes et les femmes.

Les trajectoires se distinguent néanmoins par leur première rupture. Chez les hommes, la transition vers le régime d'amélioration rapide survient dès 1978, faisant passer le rythme de 1,03 % à 2,09 % par an. Chez les femmes, cette accélération est à la fois plus tardive et plus modérée, le rythme passant de 1,87 % à 1,95 % autour de 1986. Le régime initial féminin est ainsi nettement plus favorable que le régime initial masculin, traduisant la surmortalité masculine caractéristique de la seconde moitié du vingtième siècle.

Chapitre 4

Modélisation de la mortalité

Ce chapitre présente le cadre théorique retenu pour modéliser la mortalité et analyser l'évolution de son comportement au cours du temps. Dans un premier temps, nous introduirons les principaux concepts liés aux modèles de durée. Nous présenterons ensuite les modèles de mortalité retenus, notamment le modèle de Lee-Carter et sa formulation log-Poisson. Enfin, nous présenterons les métriques retenues pour évaluer la qualité d'ajustement des modèles.

4.1 Concepts probabilistes des modèles de durée

La mortalité d'un individu d'âge x peut être modélisée à l'aide d'un processus stochastique $\chi = \{X_t, t \geq 0\}$ à deux états qui prend la valeur e_0 si l'individu est vivant et e_1 s'il est décédé. Le processus évolue dans les états e_0 ou e_1 et en général, comme dans ce mémoire, l'intérêt se porte sur la durée de vie résiduelle de l'individu notée T_x qui représente le temps de séjour dans l'état e_0 . Plus clairement, l'événement " $X_t = e_0$ " signifie que l'individu est encore en vie à l'âge $x + t$, alors que " $X_t = e_1$ " traduit qu'il est décédé avant d'atteindre l'âge en question [Denuit et Robert, 2007]. L'objectif de cette section est de présenter les caractéristiques de la durée de vie résiduelle T_x en tant que variable aléatoire. La suite de cette sous-section s'inspire des notations et des définitions de [Vermet, 2026].

Fonction de répartition

Par définition des durées, la durée de vie résiduelle T_x prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et tant que variable aléatoire, elle est caractérisée par sa fonction de répartition définie par : $F(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t)$. On en déduit sa **fonction de survie** qui est décroissante et définie par : $S(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(T_x > t)$, avec $S(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$. La fonction de survie traduit la probabilité de survivre jusqu'à l'instant t .

La densité de probabilité

En supposant que la variable aléatoire T_x est absolument continue, elle admet donc une densité de probabilité f obtenue par la relation suivante :

$$f(t) = \frac{1}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}(t < T_x \leq t + u) = \frac{d}{dt} F(t) = -\frac{d}{dt} S(t). \quad (4.1)$$

La force de mortalité

La force de mortalité (notée $\mu(x, t)$) communément appelée la fonction de hasard (notée $h(x, t)$) ou le taux instantané de mortalité dans certains contextes ([Denuit et Robert, 2007]) est définie par la limite suivante :

$$\mu(x, t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < T_x \leq t + u)}{uS(t)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(T_x \leq t + u | T_x > t)}{u}. \quad (4.2)$$

On peut déduire des équations 4.1 et 4.2 une expression plus simplifiée de la force de mortalité :

$$\mu(x, t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \log(S(t)). \quad (4.3)$$

Cette fonction détermine entièrement la loi de la durée de vie résiduelle T_x , car on peut déduire de l'équation 4.3 la formulation suivante de la fonction de survie :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(x, s) ds\right). \quad (4.4)$$

Elle peut s'interpréter comme le risque qu'un individu décède dans un petit intervalle de temps $[t, t + u[$ après l'instant t sachant qu'il a survécu jusqu'à cet instant t .

4.2 Le modèle de Lee-Carter

Présentation du modèle

Le modèle de Lee-Carter est proposé pour la modélisation prospective de la mortalité. Il s'agit d'une méthode d'extrapolation des tendances globales de la mortalité dans les données. Cette méthode de projection de la mortalité proposée par Ronald Lee et Lawrence Carter est la première approche stochastique bidimensionnelle mettant en évidence les effets du temps et de l'âge dans la mortalité. Ce modèle suppose des taux de mortalité constants sur une année t pour chaque classe d'âge x . Cette hypothèse conduit à une expression simplifiée de la fonction de survie ainsi : $S_{x,t}(s) = \exp(-\mu_{x,t}(s))$ pour $s \in [0, 1]$. La formulation spécifique du modèle de Lee-Carter est la suivante :

$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t} \quad (4.5)$$

Avec :

- α_x représente la valeur moyenne des $\log(\mu_{x,t})$;
- κ_t est l'indice temporel qui module l'évolution générale dans le temps ;
- β_x représente la sensibilité du taux instantané par rapport à une variation de l'indice temporel ;
- $\epsilon_{x,t}$ le terme d'erreur résiduel supposé i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Bien qu'il soit un modèle classique de projection de la mortalité, le modèle de Lee-Carter a un problème d'identifiabilité lié à une infinité de solutions de l'équation 4.5. En effet pour tous réels $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$ les triplets de paramètres $(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$, $(\alpha_x + c_1, \beta_x, \kappa_t - c_1)$ et $(\alpha_x, \frac{1}{c_2}\beta_x, c_2\kappa_t)$ donnent le même modèle. Pour pallier à ces invariances, il est fréquent d'imposer des contraintes d'identifiabilité sur les paramètres β_x et κ_t :

$$\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t = 0.$$

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres se fait par la méthode des moindres carrés ordinaires, qui vise à minimiser l'écart entre les valeurs prédites des taux instantanés de décès et leurs valeurs observées. Il s'agit en particulier de résoudre le programme de minimisation suivant :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \underset{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (\log(\hat{\mu}_{x,t} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t))^2$$

Le paramètre α_x s'obtient rapidement en annulant la dérivée première de la fonction objective :

$$\begin{aligned} & \partial_{\alpha_y} \left(\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (\log \hat{\mu}_{x,t} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 \right) \\ &= \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \partial_{\alpha_y} \left(\alpha_x^2 - 2\alpha_x (\log \hat{\mu}_{x,t} - \beta_x \kappa_t) + (\log \hat{\mu}_{x,t} - \beta_x \kappa_t)^2 \right) \\ &= \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (2\alpha_y - 2(\log \hat{\mu}_{y,t} - \beta_y \kappa_t)) \\ &= 2(t_{\max} - t_{\min} + 1)\alpha_y - 2 \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (\log \hat{\mu}_{y,t} - \beta_y \kappa_t). \end{aligned}$$

En tenant compte de la contrainte $\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t = 0$, on obtient ainsi l'estimation de α_x suivante :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \ln \hat{\mu}_{x,t}.$$

Les facteurs β_x et κ_t sont estimés à partir d'une décomposition en valeurs singulières de la matrice réelle $Z = (z_{x,t})$ avec $z_{x,t} = \log(\hat{\mu}_{x,t}) - \hat{\alpha}_x$; $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ puis d'un réajustement par contrainte sur les nombres de décès observés à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson. Les détails de cette procédure sont disponibles dans les articles décrivant ce modèle, tel que [Vermet, 2026].

Au-delà de son aspect bidimensionnel, il faut noter que le modèle suppose implicitement que tous les taux observés sont mesurés avec la même précision, ce qui revient à ignorer le fait que les taux de mortalité aux grands âges, reposant sur des effectifs beaucoup plus faibles, sont naturellement plus volatils que ceux des âges intermédiaires. Pour pallier cette limite d'homoscédasticité et de choix arbitraire des critères d'identifiabilité, [Brouhns *et al.*, 2002] propose une approche poissonnienne du modèle.

4.3 Le modèle de log-Poisson

Présentation du modèle

Le modèle de log-Poisson est une formulation probabiliste de celui de Lee-Carter, proposé par [Brouhns *et al.*, 2002]. L'idée directrice est de modéliser directement le nombre de décès $D_{x,t}$ plutôt que le taux brut $\mu_{x,t}$. Pour chaque couple âge-année, le nombre de décès est supposé suivre une loi de Poisson dont le paramètre s'écrit comme le produit de l'exposition au risque et d'une force de mortalité ($E_{x,t}\mu_{x,t}$). La force de mortalité adopte la décomposition de Lee-Carter, c'est-à-dire $\log \mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$. Comme $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t}\mu_{x,t})$, on a pour $d \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(D_{x,t} = d) = \frac{(E_{x,t}\mu_{x,t})^d}{d!} \exp(-E_{x,t}\mu_{x,t}) \text{ avec } \mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$$

Estimation des paramètres

La connaissance de la loi du nombre de décès permet d'opter pour l'estimation par maximum de vraisemblance, qui permet de mieux gérer l'hétéroscédasticité dont souffre le modèle de Lee-Carter : $\text{var}(D_{x,t}) = E_{x,t}\mu_{x,t}$. La log-vraisemblance du modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t) &= \sum_{x,t} (d_{x,t} \ln \mu_{x,t} - E_{x,t}\mu_{x,t}) \\ &= \sum_{x,t} (d_{x,t}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)). \end{aligned}$$

L'estimation des paramètres du modèle répond au programme de maximisation suivant :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \underset{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t}{\operatorname{argmax}} \ln L(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t).$$

Ce programme de maximisation conduit aux conditions du premier ordre, obtenues en annulant les dérivées partielles de la log-vraisemblance par rapport aux paramètres. Ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{\alpha_x} \ln L(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \sum_t \left(d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t) \right), \\
0 &= \partial_{\beta_x} \ln L(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \sum_t \left(d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t) \right) \hat{k}_t, \\
0 &= \partial_{\kappa_t} \ln L(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \sum_x \left(d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t) \right) \hat{\beta}_x.
\end{aligned}$$

Toutefois, ce système d'équations est non linéaire et couplé en $(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$, en raison du terme exponentiel. Il ne permet donc pas d'obtenir une solution analytique explicite. Les estimateurs du maximum de vraisemblance doivent alors être calculés numériquement, par exemple à l'aide de l'algorithme itératif de Newton-Raphson. Cet algorithme repose sur une approximation quadratique locale de la log-vraisemblance et une mise à jour itérative des paramètres jusqu'à la convergence. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, une itération de Newton-Raphson est énoncée comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_x^{m+1} &= \hat{\alpha}_x^m - \frac{\sum_t \left(d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^m + \hat{\beta}_x^m k_t^m) \right)}{-\sum_t E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^m + \hat{\beta}_x^m k_t^m)}; \\
\hat{\beta}_x^{m+1} &= \hat{\beta}_x^m - \frac{\sum_t \left(d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{m+1} + \hat{\beta}_x^m k_t^m) \right) \hat{k}_t^m}{-\sum_t E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{m+1} + \hat{\beta}_x^m k_t^m) (\hat{k}_t^m)^2}; \\
\hat{k}_t^{m+1} &= \hat{k}_t^m - \frac{\sum_x \left(d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{m+1} + \hat{\beta}_x^{m+1} k_t^m) \right) \hat{\beta}_x^{m+1}}{-\sum_x E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{m+1} + \hat{\beta}_x^{m+1} k_t^m) (\hat{\beta}_x^{m+1})^2}.
\end{aligned}$$

Après la convergence de l'algorithme, on obtient les estimateurs $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t)$ des paramètres du modèle. Afin de respecter les contraintes d'identifiabilité du modèle de Lee-Carter, ils sont ensuite normalisés comme suit :

$$\begin{aligned}
k_t^* &= \left(\hat{k}_t - \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{s=t_{\min}}^{t_{\max}} \hat{k}_s \right) \sum_x \hat{\beta}_x; \\
\beta_x^* &= \frac{\hat{\beta}_x}{\sum_y \hat{\beta}_y}; \\
\alpha_x^* &= \hat{\alpha}_x + \frac{\hat{\beta}_x}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{s=t_{\min}}^{t_{\max}} \hat{k}_s.
\end{aligned}$$

4.4 Qualité d'ajustement des modèles

Dans ce mémoire, la qualité d'ajustement des modèles de mortalité calibrés, notamment le log-Poisson, s'apprécie à l'aide du résidu de déviance. Cette métrique mesure en effet, pour chaque âge et chaque année des données observées, l'écart entre le nombre de décès observé et celui que prédit le modèle. Généralement reportée dans une grille année-âge, elle permet de repérer les zones où l'ajustement s'écarte des données observées. Elle permet également de mettre en évidence d'éventuelles structures que le modèle ne capte pas.

Le modèle suppose que le nombre de décès $D_{x,t}$ à l'âge x et l'année t suit une loi de Poisson d'espérance $E_{x,t} \mu_{x,t}$, où $E_{x,t}$ est l'exposition au risque et $\mu_{x,t}$ la force de mortalité. Le nombre de décès ajusté par le modèle s'écrit alors

$$\hat{D}_{x,t} = E_{x,t} \hat{\mu}_{x,t} = E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t).$$

La contribution de la cellule (x, t) à la déviance mesure l'écart entre décès observés et décès ajustés :

$$d_{x,t} = 2 \left[D_{x,t} \ln \left(\frac{D_{x,t}}{\hat{D}_{x,t}} \right) - (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}) \right].$$

Elle est positive et s'annule lorsque le modèle reproduit exactement le nombre de décès observé. Le résidu de déviance en est la racine carrée, affectée du signe de l'écart :

$$r_{x,t} = \text{sign}(D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}) \sqrt{d_{x,t}}.$$

Le signe distingue les deux sens de l'écart : un résidu positif traduit une sous-estimation de la mortalité par le modèle, un résidu négatif une surestimation. Sous un bon ajustement, les résidus se répartissent autour de zéro, sans structure apparente.

Chapitre 5

Etude rétrospective de la dynamique de la mortalité

Ce chapitre met en évidence les ruptures de tendance survenues dans l'évolution de la mortalité en France. Sauf indication contraire, les résultats s'appuient sur les données limitées au périmètre de la France métropolitaine, présentées au chapitre 2. L'analyse repose sur le facteur temporel d'un modèle de Lee–Carter log-Poisson. Ce facteur concentre la dynamique temporelle de la mortalité ; il constitue le signal sur lequel porte la détection des ruptures, dans ce chapitre. Le chapitre présente d'abord l'approche adoptée et les résultats du modèle log-Poisson ajusté. Il expose ensuite l'analyse du facteur temporel, puis les ruptures détectées et leur datation. Il examine enfin la recalibration de la dérive sur le régime récent et ses conséquences sur les projections d'espérance de vie.

5.1 Cadre de l'étude

Périmètre et données

L'étude porte sur la France métropolitaine, sur la période 1962–2023, distinctement par sexe. Le périmètre exclut les départements d'outre-mer, et notamment Mayotte, intégré aux statistiques nationales à partir de 2014. Cette exclusion préserve l'homogénéité de la série : une modification du champ géographique en cours de période introduirait une discontinuité étrangère à la dynamique de mortalité, susceptible d'être confondue avec une rupture réelle. La distinction par sexe répond au même souci : les niveaux et les rythmes d'amélioration diffèrent sensiblement entre hommes et femmes, et leur agrégation masquerait des régimes propres à chacun. La construction des décès et des expositions au risque est détaillée au chapitre 2.

Le facteur temporel comme signal

L'analyse s'appuie sur le modèle de Lee–Carter log-Poisson, présenté au chapitre 4, qui décompose la mortalité en trois familles de paramètres aux rôles complémentaires.

Le terme α_x en fixe le niveau moyen à chaque âge, tandis que β_x mesure la sensibilité de chaque âge à l'évolution d'ensemble, ces deux composantes formant une structure d'âge que le temps ne modifie pas. La dynamique temporelle, elle, se trouve entièrement portée par le troisième terme, l'indice κ_t , qui suit le niveau général de mortalité année après année. C'est cette concentration qui confère à κ_t son statut particulier : puisque toute évolution de la mortalité au fil du temps transite par lui, un changement de tendance ne peut se manifester qu'à travers une inflexion de sa trajectoire. Analyser κ_t revient ainsi à observer directement le rythme d'amélioration de la mortalité, ce qui en fait la variable sur laquelle porte l'ensemble de l'étude de la dynamique de la mortalité dans ce chapitre.

Portée et limite de la détection

Cette concentration de la dynamique en un seul facteur a une contrepartie, qu'il convient d'énoncer d'emblée. Comme β_x est fixe dans le temps, une variation de κ_t se répercute sur tous les âges à la fois, dans des proportions déterminées par β_x . Une rupture détectée sur κ_t signale donc un changement du rythme *global* d'amélioration, commun à l'ensemble des âges. Elle ne renseigne pas sur d'éventuelles ruptures propres à une tranche d'âge. La détection répond à la question du rythme d'ensemble, non à celle de sa ventilation par âge. Cette dernière supposerait une modélisation multivariée des taux.

Approche retenue

La détection est conduite de façon rétrospective. La série complète est observée d'un seul tenant, et les changements de régime sont datés a posteriori, par la méthode de Bai et Perron. Cette posture se distingue de la surveillance séquentielle, qui suit la série au fil de son arrivée et cherche à signaler une rupture au plus tôt. La première convient à l'objectif de ce chapitre, qui vise à établir une cartographie fiable des régimes passés de la dynamique de la mortalité en France.

5.2 Calibration du modèle de log-Poisson

Le modèle de Lee-Carter log-Poisson, retenu ici et détaillé au chapitre 4, modélise les décès observés par une loi de Poisson dont la formulation a été rappelée plus haut à la section 4.3, s'écrit :

$$\log \mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}.$$

Il est important de souligner que l'objectif de cette calibration est d'obtenir une structuration de la dynamique de la mortalité. Nous sommes loin de la logique de comparaison de divers modèles de mortalité. À cet effet, le modèle log-Poisson a été calibré, dans un premier temps, sur l'ensemble des données de décès et d'exposition de l'INSEE, couvrant la période 1962-2023. Il convient également de rappeler que :

- α_x représente le profil moyen de la mortalité par âge, c'est-à-dire la forme générale de la courbe des taux, moyennée sur l'ensemble de la période ;

- β_x représente la sensibilité de chaque âge à l'évolution temporelle, indiquant dans quelle proportion chaque âge bénéficie de l'amélioration générale ;
- κ_t représente l'indice temporel, qui résume le niveau général de mortalité année après année et porte à lui seul la dynamique temporelle du modèle.

5.2.1 Analyse des effets de l'âge et de l'interaction

Les résultats des composantes du modèle log-Poisson sont représentés sur la figure 5.1. Le modèle dégage le profil attendu de la mortalité selon l'âge. Il retrace une mortalité infantile élevée sans distinction de sexe, qui s'atténue rapidement jusqu'à ce que la force de mortalité atteigne son minimum autour de 10 ans avant de remonter. Les jeunes adultes connaissent par la suite un ressaut du risque de mortalité entre 15 ans et 25 ans, qui se détache nettement de la remontée régulière de la courbe. Cette bosse traduit la surmortalité par causes externes à ces âges, au premier rang desquelles se trouvent les accidents de la route [INSEE, 2025] et d'autres causes accidentelles. Au sortir de ce creux s'installe une surmortalité masculine durable, qui persiste à tous les âges suivants.

Le paramètre β_x complète cette lecture en indiquant comment l'amélioration temporelle se répartit selon l'âge. Il demeure positif à la quasi-totalité des âges, ce qui signifie qu'à ces âges aucune tranche n'évolue à contre-courant de la tendance générale. Seul l'âge de 99 ans présente un β_x légèrement négatif : la mortalité y évoluerait en sens inverse de la tendance d'ensemble. Cette valeur isolée, à un âge extrême et faiblement peuplé, reste marginale et n'affecte pas la lecture générale. En clair, une amélioration de la mortalité générale profite à tous les âges simultanément ; seule son ampleur varie, plus forte là où β_x est élevé et plus faible là où il est faible.

Par ailleurs, le profil du coefficient d'interaction age-année décroît avec l'âge. Les valeurs les plus élevées se concentrent aux jeunes âges, où la sensibilité à l'amélioration est évidemment la plus forte. Cela reflète des progrès considérables réalisés sur la mortalité infantile et juvénile. Aux grands âges, la baisse rapide de β_x prouve qu'une baisse tendancielle de la mortalité s'y transmettrait plus facilement. La distinction par sexe révèle une alternance de la sensibilité. Selon la tranche d'âge, ce sont tantôt les hommes, tantôt les femmes qui profitent le plus de l'amélioration. En revanche, l'écart reste faible et le profil décroissant demeure le même, quel que soit le sexe.

5.2.2 Analyse de l'indice temporel

Le facteur κ_t résume l'évolution du niveau général de mortalité au cours du temps. Il affiche une trajectoire décroissante sur l'ensemble de la période de l'étude. Cette décroissance, qui caractérise un recul soutenu de la mortalité française sur plus d'une soixantaine d'années, est imputable à plusieurs efforts longtemps consentis par La France pour l'amélioration de son système sanitaire. Puisque la mortalité suit κ_t dans le même sens, chaque baisse du facteur traduit un recul de la mortalité à tous les âges. Alors, il importe de s'intéresser au rythme de descente du facteur, non au niveau absolu, fixé par la contrainte

d'identifiabilité qui centre le facteur.

En effet, cette décroissance, aussi évidente soit-elle, laisse apparaître des dérives du rythme d'évolution du facteur. On observe notamment que la courbe des femmes, initialement au-dessus de celle des hommes, viendra à passer en dessous de cette dernière sur une longue période (1970-2010). A plusieurs reprises, le rythme de décroissance se modifie, sur des durées tantôt longues, tantôt plus brèves. Les changements les plus visibles, à l'observation des courbes, pourraient se localiser autour des années 1970 et au début des années 2010, où les courbes semblent s'aplatir avant le choc du Covid-19, par rapport au rythme précédent. Ce constat rejoint les remarques du COR au sujet du ralentissement de l'espérance de vie en France [COR, 2021], qu'ils localisent autour de 2010. Ces changements apparents de rythme laissent présager une rupture dans la dynamique d'amélioration, dont la section suivante donnera les précisions.

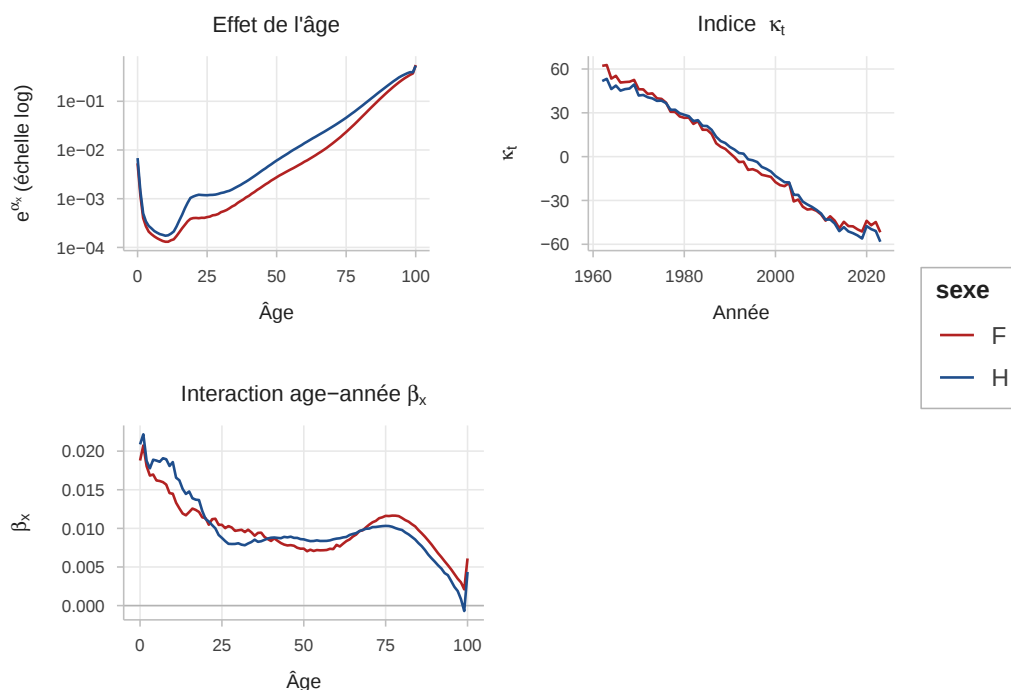


FIGURE 5.1 – Les composantes du modèle log-Poisson

5.2.3 Qualité d'ajustement du modèle

La qualité de l'ajustement du modèle s'apprécie à travers les résidus de déviance, représentés dans le plan âge-année (figure 5.2). Un ajustement idéal produirait un se-

mis sans organisation, réparti autour de zéro. La carte fait toutefois apparaître plusieurs structures résiduelles. Les plus visibles sont les diagonales, orientées des âges jeunes des premières années vers les âges élevés des années récentes. Elles suivent les lignes de vie des générations et signalent ainsi un effet cohorte, que le modèle n'arrive pas à capter. Ce défaut est inhérent à la structure à un facteur, dans laquelle le coefficient β_x est figé dans le temps et ne peut porter d'effet propre aux générations. Cet effet est plus marqué chez les hommes, dont les résidus diagonaux sont plus contrastés ; les générations 1960 (bande rouge) et 1940 (bande bleue) en témoignent.

Une seconde structure se détache autour des 20 ans sur la période de 1970-1995 où le modèle sous-estime nettement la mortalité observée, tant chez les femmes que chez les hommes. Cette zone correspond à la surmortalité des jeunes de ces années, que le lissage temporel du modèle ne restitue pas. Enfin, certaines années de manière isolée présentent des résidus plus élevés, en l'occurrence 2003 aux âges supérieurs à 80 ans chez les femmes.

Ces structures ne remettent pas en cause l'usage du modèle dans le présent. L'objectif de ce chapitre, en particulier, n'est pas de restituer finement la mortalité par âge, mais d'isoler sa dynamique temporelle d'ensemble à travers κ_t pour en détecter les changements de tendance.

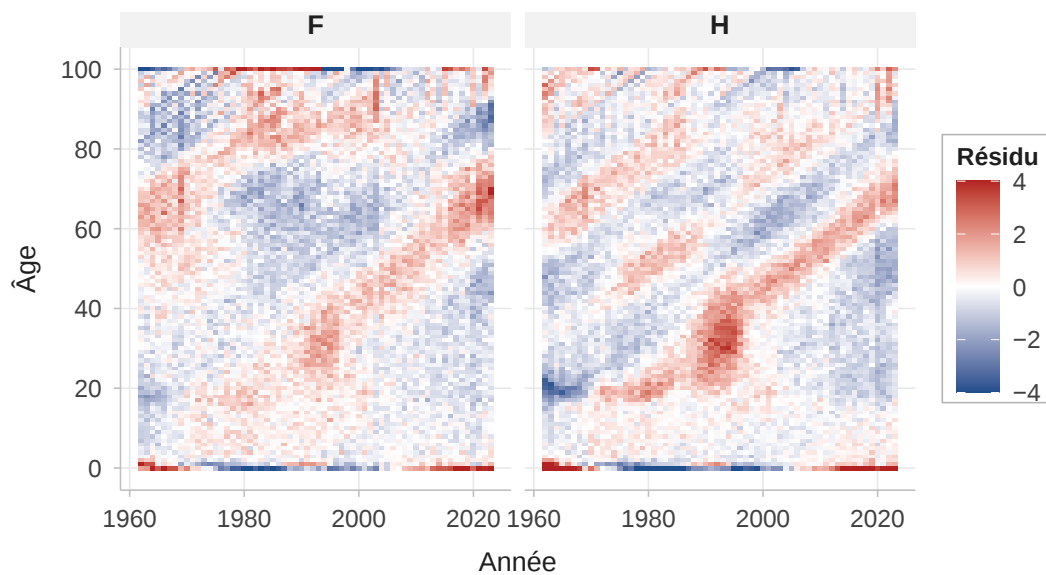


FIGURE 5.2 – Résidus de déviance du modèle log-Poisson

5.3 Les ruptures de tendance dans κ_t

Dans la section précédente, l'analyse du facteur κ_t a mis en évidence une trajectoire globalement décroissante, mais de pente irrégulière au cours du temps. Une allure caractérisée par une longue baisse soutenue, suivie d'un infléchissement récent. Il reste à déterminer si ces changements de rythme apparents correspondent à de véritables ruptures durables, et à les dater. C'est l'objet de cette section. La méthode de Bai-Perron exposée au chapitre 3, est appliquée à la trajectoire de κ_t , séparément pour chaque sexe. Cette technique de détection de rupture rétrospective segmente en régimes de pentes distinctes et en précise les points de rupture. Chaque régime correspond à un rythme d'amélioration propre, et le passage d'un régime à l'autre marque un changement dans la dynamique de la mortalité en France entre 1962 et 2023. La méthode a été exécutée avec l'aide du package R `strucchange`.

5.3.1 Démarche adoptée

La détection des ruptures repose sur la modélisation de la trajectoire de κ_t comme une fonction linéaire par morceaux du temps. Sur chaque régime, l'indice est supposé suivre une droite, dont la pente mesure le rythme d'amélioration propre à la période. Une rupture correspond alors à un changement de pente entre deux régimes consécutifs.

Formellement, en présence de m ruptures aux dates $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, la série se modélise par une régression linéaire des moindres carrés ordinaires sur l'année, et s'écrit

$$\kappa_t = a_j + b_j t + \varepsilon_t, \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, m+1,$$

où a_j et b_j sont respectivement l'ordonnée à l'origine et la pente du régime j , et ε_t un terme d'erreur. Les $m+1$ segments partagent la même forme mais des pentes distinctes ; ce sont ces pentes b_j qui traduisent les rythmes d'amélioration successifs.

Le nombre de ruptures et leurs dates sont estimés par la méthode de Bai et Perron, exposée au chapitre 3. Elle recherche la configuration de ruptures qui minimise la somme des carrés des résidus, pénalisée pour éviter la multiplication des segments, le nombre optimal étant retenu par le critère d'information bayésien. La procédure est appliquée séparément à chaque sexe, sur la trajectoire de κ_t estimée de 1962 à 2023.

Pour rappel, l'estimation dépend d'un paramètre de trimming h introduit à l'équation 3.10, qui fixe la longueur minimale d'un régime, exprimée en fraction de la longueur totale de la série. Il empêche la méthode de placer des ruptures trop rapprochées, qui segmenteraient la série en régimes trop courts pour être interprétables. Un h trop faible autorise des micro-régimes sans portée démographique, tandis qu'un h trop élevé masque des inflexions réelles mais rapprochées. Sa valeur résulte donc d'un compromis entre finesse de détection et pertinence des régimes obtenus.

La valeur retenue pour les principaux résultats de ce chapitre est $h = 0,15$. Sur une série de 62 années, elle impose un minimum d'environ neuf ans par régime, durée

suffisante pour qu'un segment corresponde à une véritable phase de la dynamique de mortalité et non à une fluctuation passagère. Ce choix est confronté à d'autres valeurs de trimming dans la sous-section 5.3.3, afin de vérifier la stabilité des ruptures détectées.

5.3.2 Les ruptures détectées

La figure 5.3 superpose à la trajectoire de l'indice temporel κ_t du modèle log-Poisson les droites ajustées par régime, et le tableau 5.1 en rassemble les dates. La détection retient trois ruptures par sexe, sous l'hypothèse d'avoir au minimum 9 années calendaires dans un régime détecté, délimitant quatre régimes distincts. Deux de ces ruptures, en 2003 et en 2013, sont communes aux deux sexes, tandis que la première diffère. Elle est située en 1975 pour les hommes et en 1986 pour les femmes. Par ailleurs, les intervalles de confiance des années de ruptures estimées sont étroits, de l'ordre de deux à trois ans. Cela traduit des détections de changements de pente bien marqués, à l'exception de la deuxième rupture (2003) de tendance chez les hommes, qui est plus diffuse, ayant pour intervalle de confiance [2002, 2007].

Sexe	Rupture	Date estimée	IC à 95%
F	1	1986	[1985, 1987]
F	2	2003	[2002, 2004]
F	3	2013	[2011, 2014]
H	1	1975	[1974, 1976]
H	2	2003	[2002, 2007]
H	3	2013	[2011, 2014]

TABLE 5.1 – Ruptures détectées sur κ_t par sexe.

En outre, les pentes révèlent deux trajectoires de sexe distinctes, que réunit un même décrochage final sur le régime le plus récent. Chez les femmes, l'amélioration se maintient à un rythme élevé et stable sur près d'un demi-siècle : la pente de κ_t passe de $-1,90$ par an avant 1986 à $-1,85$ jusqu'en 2003, puis $-1,56$ jusqu'en 2013, sans rupture de rythme majeure. Chez les hommes, la dynamique est au contraire ascendante, l'amélioration s'accéléralant de régime en régime, de $-1,05$ avant 1975 à $-2,07$ sur la période 1976–2003, puis $-2,29$ entre 2004 et 2013.

Les ruptures détectées ouvrent la voie à des études plus approfondies des facteurs qui les déterminent. Dans ce contexte, l'un des épisodes de canicule les plus meurtriers qu'ait connus la France, enregistré en 2003, coïncide avec l'une des ruptures de tendance mises en évidence. Commune aux deux sexes, elle correspond à une inflexion de faible amplitude du rythme d'amélioration. Le changement demeure néanmoins bien réel selon la méthode de Bai-Perron, quand bien même certains y verraient un choc temporaire plutôt qu'une rupture durable. Retenue au même titre que les inflexions plus marquées, elle délimite, comme celles-ci, des régimes statistiquement distincts : la méthode consacre

ces changements, quelle que soit l'ampleur de la variation de pente. Dans ce contexte, la rupture de 2003 s'interprète avec prudence. Elle coïncide avec la canicule de l'été, épisode de forte surmortalité. Cependant, les pentes de part et d'autre varient peu : l'épisode a laissé dans la série une empreinte suffisante pour être détectée comme rupture, sans pour autant modifier en profondeur le rythme d'amélioration.

Aussi, une attention particulière doit être accordée à la rupture de 2013, qui est d'une portée différente. Elle fait basculer la mortalité française d'un régime d'amélioration soutenue vers une quasi-stagnation. La pente s'effondre à $-0,08$ par an chez les femmes, soit un rythme divisé par près de vingt, et à $-0,38$ chez les hommes, où le repli est tout aussi net même si le rythme résiduel reste supérieur. Ce décrochage récent, partagé par les deux sexes et concentré sur la dernière décennie, constitue le fait marquant de la période. C'est lui qui motive la recalibration du modèle sur ce dernier régime, et l'examen de ses conséquences sur les projections d'espérance de vie.

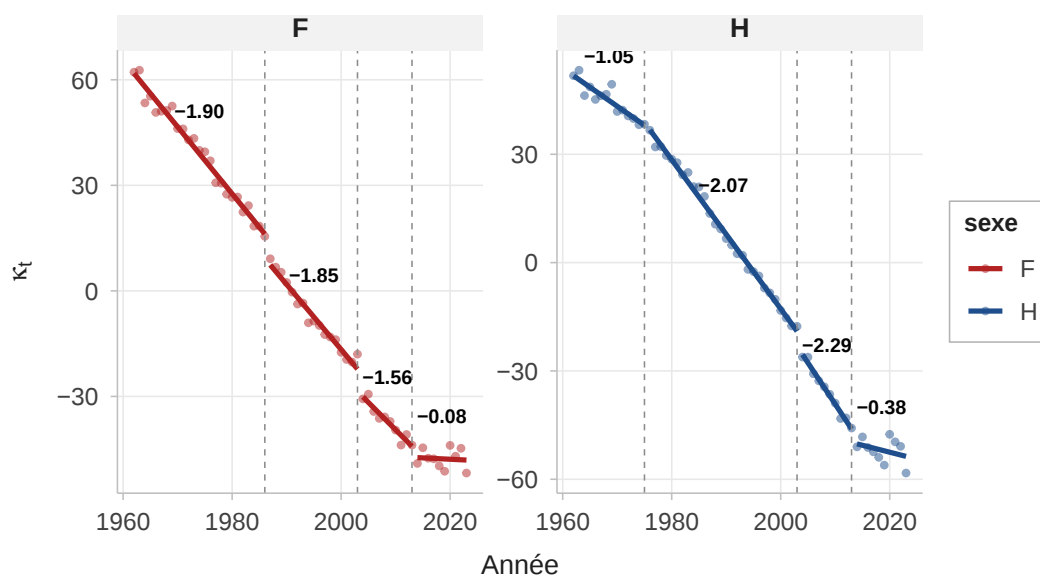


FIGURE 5.3 – Ruptures de tendances sur κ_t par sexe et les pentes par régime

5.3.3 Sensibilité au paramètre de trimming

La robustesse des ruptures détectées est examinée en faisant varier le paramètre h de 0,10 à 0,25 (tableau 5.2). Les résultats font apparaître un plateau de stabilité étendu entre $h = 0,12$ et $h = 0,17$. En effet, sur toute cette plage, la segmentation demeure inchangée, avec trois ruptures par sexe aux dates 1986, 2003 et 2013 pour les femmes ; 1975, 2003 et 2013 pour les hommes. C'est précisément là que se situe notre choix de

valeur du paramètre, pour nos analyses $h = 0,15$.

Pour les valeurs de h inférieures à 0,15, une rupture supplémentaire apparaît chez les hommes au début de la période, signe d'un découpage trop fin qui isole un régime de portée limitée. Tandis qu'au-delà de $h = 0,17$, la méthode ne retient plus que deux dates de ruptures de tendance. En clair, elle fusionne des régimes, et déplace la rupture récente vers l'amont, de 2013 à 2012, puis vers 2010 et au-delà, à mesure que la contrainte de longueur minimale s'accroît.

Le tableau 5.2 permet également de remarquer que deux ruptures se distinguent par leur stabilité. Les changements détectés en 2003 et en 2013, communs aux deux sexes, sont identifiés de façon identique sur l'ensemble de la plage de h couvrant $[0, 12; 0, 17]$. Cette stabilité conforte leur interprétation comme des inflexions marquées de la dynamique de la mortalité en France métropolitaine sur les six dernières décennies. Par ailleurs, la robustesse du décrochage de 2013, en particulier, renforce la portée du résultat central. Ce constat signifie que le ralentissement récent de l'amélioration ne dépend pas du réglage de la détection. Cela est une raison supplémentaire pour analyser les impacts des ruptures de tendance sur les projections de la mortalité nationale.

h	Nb (F)	Dates (F)	Nb (H)	Dates (H)
0.10	3	1986, 2003, 2013	4	1967, 1986, 2003, 2013
0.11	3	1986, 2003, 2013	4	1967, 1986, 2003, 2013
0.12	3	1986, 2003, 2013	3	1975, 2003, 2013
0.13	3	1986, 2003, 2013	3	1975, 2003, 2013
0.14	3	1986, 2003, 2013	3	1975, 2003, 2013
0.15	3	1986, 2003, 2013	3	1975, 2003, 2013
0.16	3	1986, 2003, 2013	3	1975, 2003, 2013
0.17	3	1986, 2003, 2013	3	1975, 2003, 2013
0.18	2	1986, 2012	2	1980, 2012
0.19	2	1986, 2012	2	1980, 2012
0.20	2	1986, 2010	2	1980, 2010
0.21	2	1986, 2010	2	1980, 2010
0.22	2	1986, 2010	2	1980, 2010
0.23	2	1986, 2009	2	1980, 2009
0.24	2	1986, 2009	2	1980, 2009
0.25	2	1986, 2005	2	1980, 2008

TABLE 5.2 – Sensibilité au trimming h : ruptures détectées par sexe.

5.4 Analyse d'impact sur l'espérance de vie

Le décrochage de 2013 modifie la lecture de la mortalité future. Tant que l'amélioration se poursuivait à son rythme historique, projeter la tendance longue donnait une approximation raisonnable. Le dernier régime détecté de κ_t , donc de la dynamique de la mortalité, à tendance persistante, invite à reconsidérer cette hypothèse, car le prolongement de la dérive du dernier régime conduit certainement à des projections moins optimistes. Et l'écart entre ces deux visions n'est pas neutre pour quiconque doit évaluer des engagements de long terme par exemple. Et la présente section mesure l'impact de cet écart sur l'espérance de vie. Pour ce faire, un nouveau modèle log-Poisson est calibré sur le régime récent, puis les espérances de vie prospectives qui en découlent sont comparées à celles issues de la tendance longue de la mortalité, qui ne tient pas compte des ruptures de tendance.

5.4.1 Recalibration et construction des tables prospectives

Réajustement sur le régime récent

Projeter la mortalité à partir du seul régime récent suppose de réajuster le modèle sur la fenêtre correspondante. Le log-Poisson est donc estimé à nouveau sur les années 2014 à 2023, ce qui fournit une structure d'âge propre à cette période, à travers les paramètres $\hat{\alpha}_x^C$ et $\hat{\beta}_x^C$, ainsi qu'un indice temporel $\hat{\kappa}_t^C$ dont la pente traduit le rythme d'amélioration désormais en vigueur. Cette pente, estimée par moindres carrés, fournit la dérive de projection :

$$\hat{d} = \frac{\sum_t (t - \bar{t})(\hat{\kappa}_t^C - \bar{\kappa}^C)}{\sum_t (t - \bar{t})^2}, \quad t \in \{2014, \dots, 2023\}.$$

Un obstacle se présente toutefois au moment de raccorder cette projection à la période observée. L'indice $\hat{\kappa}^C$ étant centré sur sa seule fenêtre de calibration, son niveau ne s'accorde pas d'emblée avec celui des années antérieures, si bien qu'un prolongement direct créerait une rupture artificielle à la jonction. Pour l'éviter, un niveau de raccord κ^* est déterminé de telle sorte que la structure du régime récent restitue au mieux la mortalité effectivement observée en 2023, ce qui revient à résoudre au sens des moindres carrés :

$$\kappa^* = \frac{\sum_x \hat{\beta}_x^C (\log \hat{\mu}_{x,2023} - \hat{\alpha}_x^C)}{\sum_x (\hat{\beta}_x^C)^2}.$$

La trajectoire future se déduit alors de ce point d'ancrage, selon $\kappa_{2023+h}^* = \kappa^* + h \hat{d}$, et les taux correspondants s'obtiennent par $\hat{\mu}_{x,2023+h} = \exp(\hat{\alpha}_x^C + \hat{\beta}_x^C \kappa_{2023+h}^*)$.

La surface ainsi constituée réunit la période observée, décrite par le modèle ajusté sur l'ensemble des données, et la période projetée, issue du régime récent recalé ; elle forme la table prospective. L'espérance de vie qui s'en déduit se lit en suivant chaque génération le long de sa ligne de vie, de sorte qu'à chaque âge, la génération rencontre le taux de l'année où elle atteint réellement cet âge. C'est cette lecture générationnelle qui sépare

l'espérance prospective de l'espérance périodique, laquelle fige au contraire les conditions d'une année unique.

Le réajustement du modèle sur une décennie seulement n'est pas sans risque, la sensibilité $\hat{\beta}_x^C$ étant d'autant moins bien identifiée que le régime est plat. Une variante conservant la structure d'âge du modèle long, et ne recalibrant que la dérive, est pour cette raison présentée en annexe A.4 ; la proximité des espérances de vie obtenues par les deux approches confirme que les résultats ne tiennent pas au mode de recalibration retenu.

5.4.2 Espérance de vie prospective et coût de la dérive

L'espérance de vie prospective à l'âge x mesure la durée de vie moyenne restante d'une génération atteignant cet âge à une année donnée, en tenant compte des améliorations de mortalité rencontrées au fil de son vieillissement. Pour une génération parvenant à l'âge x au cours de l'année s_0 , sous l'hypothèse d'une force de mortalité constante par cellule, elle s'écrit [Biessy, 2024] :

$$e_x^{\text{prosp}}(s_0) = \sum_{k \geq 0} \left(\prod_{j=0}^{k-1} e^{-\hat{\mu}_{x+j, s_0+j}} \right) \frac{1 - e^{-\hat{\mu}_{x+k, s_0+k}}}{\hat{\mu}_{x+k, s_0+k}},$$

où :

- x est l'âge de départ à partir duquel l'espérance est calculée ;
- s_0 est l'année civile au cours de laquelle la génération atteint l'âge x ;
- k est le nombre d'années écoulées depuis l'âge de départ, la génération ayant alors l'âge $x + k$ au cours de l'année $s_0 + k$;
- $\hat{\mu}_{x+k, s_0+k}$ est le taux de mortalité estimé par le modèle log-Poisson à l'âge $x + k$ pour l'année $s_0 + k$.

L'indexation conjointe de l'âge et de l'année, $(x + k, s_0 + k)$, traduit le suivi de la génération le long de sa ligne de vie. Les espérances présentées dans cette section sont calculées selon cette formule, à l'âge de départ de 65 ans. Il convient de noter que cette formule, fondée sur une force de mortalité constante par cellule, équivaut à la formulation usuelle en quotients via la relation $q_{x,t} = 1 - e^{-\hat{\mu}_{x,t}}$. En effet, les probabilités de survie sont identiques, seule diffère la mesure du temps vécu dans l'intervalle terminal. Cohérente avec l'estimation log-Poisson des taux, elle est retenue ici.

Divergence des scénarios : cas de l'espérance de vie à 65 ans

La figure 5.4 présente cette espérance selon l'année où la génération atteint 65 ans, sous les deux scénarios de projection, tous deux fondés sur le modèle log-Poisson. L'un est calibré sur toute la période longue de l'étude, et l'autre sur le seul régime récent de 2014-2023. Les espérances de vie prospectives à 65 ans se confondent jusqu'aux générations parvenues à cet âge autour de l'an 2000 (figure A.1). Cela peut s'expliquer par le fait que ces cohortes accomplissent l'essentiel de leur existence sur la période observée (1962-2023), commune aux deux scénarios, de sorte que le choix de projection y demeure sans

effet. Par exemple, pour la génération des 65 ans en 2050, la tendance longue surestime l'espérance de vie d'environ 17%, pour les deux sexes.

La divergence s'installe ensuite progressivement, à mesure que les générations passent une part croissante de leur vie au-delà de l'horizon d'observation, là où les rythmes d'amélioration projetés diffèrent. Globalement, le scénario de tendance longue poursuit une progression soutenue avec les meilleures espérances de vie, tandis que celui du régime récent s'infléchit nettement, jusqu'à devenir presque horizontal chez les femmes. Donc, le prolongement de la tendance longue de la mortalité sans tenir compte du décrochage récent surestime la longévité et conduit inévitablement à sur-provisionner des engagements viagers.

À titre d'illustration, la génération atteignant 65 ans en 2025 permet de fixer les ordres de grandeur. Sous le scénario du régime récent, son espérance de vie prospective résiduelle s'établit à 24 ans chez les femmes et 20 ans chez les hommes, contre 26 et 22 ans sous la tendance longue. Cette génération sert de point d'ancrage à l'analyse par âge menée ci-après, qui étend la comparaison à l'ensemble des âges.

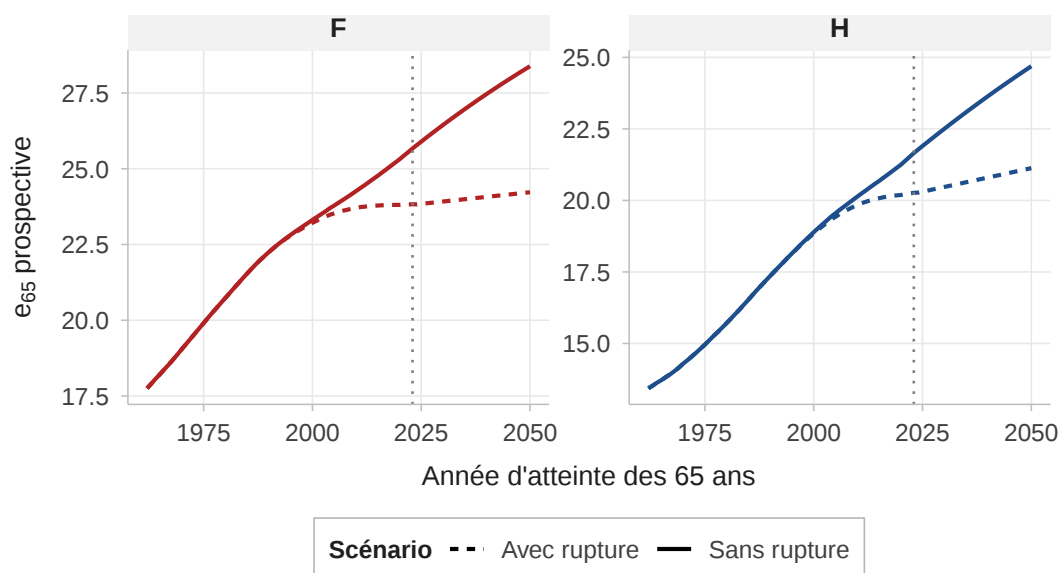


FIGURE 5.4 – Espérance de vie prospectives à 65 ans selon le scénario

Focus sur l'année 2025

Ce focus précise, âge par âge, l'impact de la rupture détectée sur les espérances de vie projetées pour l'année 2025. L'écart entre les deux scénarios, l'un prolongeant la tendance longue et ignorant le décrochage, l'autre l'intégrant à travers le régime récent, en donne la mesure directe à chaque âge.

Espérances par âge

Les espérances de vie prospectives décroissent régulièrement avec l'âge, sous les deux scénarios (figure 5.5), reflétant la réduction de la durée de vie restante. Sous la tendance longue, l'espérance à la naissance atteint 93 ans chez les femmes et 89 ans chez les hommes, contre respectivement 87 et 83 ans sous le régime récent, soit un écart voisin de 6 années. Cet écart, net aux âges jeunes, s'estompe progressivement pour devenir négligeable au-delà de quatre-vingts ans.

Un impact qui varie avec l'âge.

L'écart absolu entre les deux scénarios décroît continûment avec l'âge, de plus de 6 années à la naissance à moins d'une année à 24 ans (figure A.2). Le rapport des deux espérances (figure A.3) suit une allure différente : il croît depuis la naissance, où il vaut environ 1,07, jusqu'à un maximum proche de 1,09 situé autour de 40 à 50 ans, puis décroît aux âges élevés pour se rapprocher de l'unité au voisinage de cent ans. La tendance longue surestime ainsi l'espérance de près de 9 % aux âges moyens, contre 4 à 6% seulement aux grands âges.

L'impact de la rupture n'est donc pas uniforme. En valeur absolue, il est plus intense aux âges jeunes, où la longévité projetée dépend le plus étroitement du rythme d'amélioration retenu, et devient marginal au grand âge, où la faible durée de vie restante laisse peu de place à l'effet du décrochage. Alors que l'écart absolu d'espérance de vie décroît avec l'âge, son poids relatif peut augmenter temporairement, car une même différence en années est rapportée à une espérance résiduelle de plus en plus faible. Cette propriété explique la forme en cloche observée pour l'écart relatif. C'est ce qui déplace le maximum relatif vers les âges intermédiaires (40-50 ans). Aussi, faut-il noter que la surestimation demeure légèrement supérieure chez les femmes, car l'écart entre les sexes s'accroît aux grands âges, ce qui prolonge le constat d'un ralentissement récent plus marqué pour elles.

Illustration à 65 ans

Pour une personne atteignant 65 ans en 2025, l'espérance de vie prospective s'établit, sous le régime récent, à 23,8 ans chez les femmes et 20,3 ans chez les hommes, contre 25,9 et 21,9 ans sous la tendance longue. Cette dernière donne donc une espérance supérieure de 2,1 ans chez les femmes et de 1,6 an chez les hommes. Cet écart importe car une rente viagère est versée aussi longtemps que le bénéficiaire est en vie. Une espérance de vie plus élevée signifie une durée de versement plus longue, et donc un montant plus important à provisionner au moment de la liquidation. Retenir la tendance longue, alors que l'amélioration a ralenti, conduirait ainsi à fonder le provisionnement sur une longévité que le régime récent ne valide pas.

Synthèse

Ce focus établit que la rupture de 2013 pèse concrètement sur la longévité projetée, et non de façon marginale. Selon qu'on l'intègre ou non, l'espérance de vie d'une même génération diffère d'environ 2 ans à 65 ans, âge de référence pour l'évaluation des engagements viagers. L'effet se propage à l'ensemble des âges, avec une intensité que module la durée de vie restante. La détection de la rupture ne relève donc pas d'un raffinement statistique : elle modifie directement la longévité à retenir pour la projection des rentes viagères.

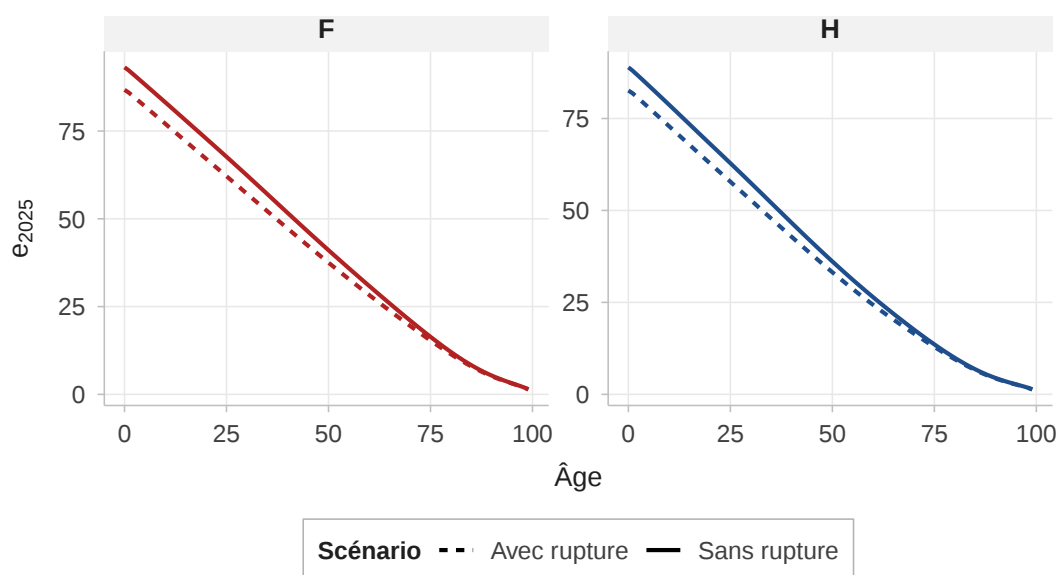


FIGURE 5.5 – Espérances de vie prospective par âge en 2025

5.4.3 Positionnement par rapport à la projection INSEE

Les espérances de vie prospectives issues du modèle gagnent à être situées par rapport à une référence extérieure. La projection démographique à l'horizon 2121 de l'INSEE [Blanpain et Algava, 2021], qui fait foi pour l'analyse démographique française, offre ce point de comparaison. Elle publie directement les espérances de vie par génération et par âge, de sorte que les valeurs à un âge précis s'en extraient sans retraitement et se confrontent immédiatement à celles du modèle. Cette mise en garde poursuit deux objectifs. Cette mise en regard répond à un double objectif. Elle vérifie que les espérances prospectives du modèle s'accordent avec la référence sur la période observée, gage de cohérence de la démarche, puis observe à partir de quand et dans quelle mesure les projections s'écartent de celles de l'INSEE.

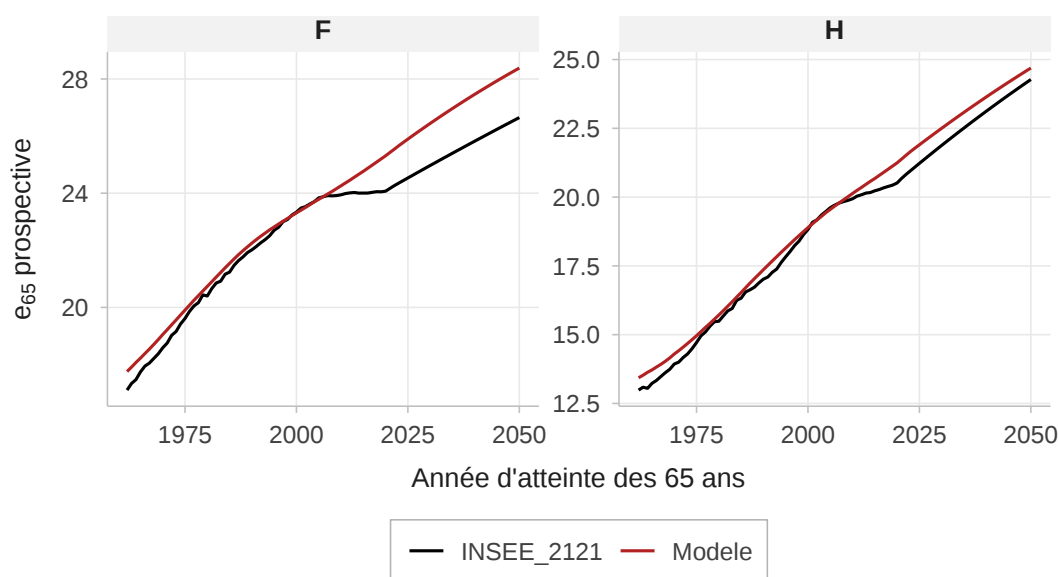


FIGURE 5.6 – Espérances de vie prospectives à 65 ans par année d’atteinte

Espérances de vie à 65 ans

La comparaison des espérances de vie du modèle à celles de l’INSEE pourrait porter sur plusieurs âges. Mais, pour rester cohérent avec les précédentes analyses, elle se concentre sur l’espérance de vie à 65 ans, âge d’entrée usuelle en rente viagère. Sur l’ensemble de la période observée, et jusqu’aux générations atteignant 65 ans autour de 2005, les espérances du modèle et de l’INSEE se confondent, pour les deux sexes (figure 5.6). Cette concordance confirme la cohérence de la démarche là où l’une et l’autre reposent sur des données constatées. Au-delà, les trajectoires s’écartent, le modèle se plaçant au-dessus de la référence. L’écart demeure toutefois modéré et très inégal selon le sexe sur toute la période de divergence.

Cette divergence tardive tient à la construction prospective des espérances. Les espérances de vie prospectives à 65 ans par année d’atteinte proviennent en effet de générations différentes, chacune suivie sur une trentaine d’années après 65 ans. L’espérance de vie à 65 ans suit chaque génération sur une trentaine d’années. De ce fait, pour les générations anciennes, cette trajectoire relève presque entièrement de la période observée, commune aux deux sources, tandis que pour les générations récentes, elle se prolonge dans la zone projetée où le modèle et l’INSEE diffèrent. L’écart croît ainsi avec la modernité des générations, à mesure que leur espérance de vie dépend davantage des projections que des données observées.

Comparaison par âge en 2025

Les espérances de vie prospectives par âge en 2025 (figure 5.7) confirment l'accord entre le modèle et les projections de l'INSEE sur l'ensemble de la structure par âge. Les deux se suivent de près jusqu'aux âges de la retraite et au-delà, le modèle demeurant légèrement au-dessus de la référence INSEE, dans le prolongement du constat établi par année d'atteinte.

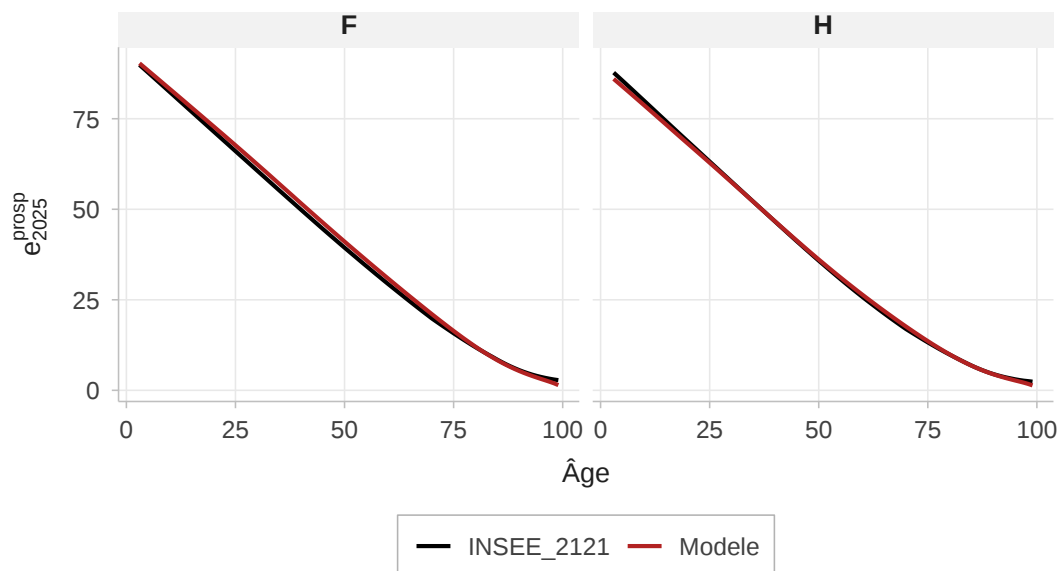


FIGURE 5.7 – Espérances de vie prospectives par âge en 2025

Synthèse du chapitre

L'étude rétrospective de la dynamique de mortalité française entre 1962 et 2023 fait ressortir un fait dominant, autour duquel s'organisent les autres résultats. En appliquant la méthode de Bai et Perron au facteur temporel du modèle log-Poisson, la détection identifie trois ruptures par sexe, mais l'une d'elles se détache nettement. En 2013, commune aux hommes et aux femmes, le rythme d'amélioration de la mortalité s'effondre au point de laisser place à une quasi-stagnation au cours de la dernière décennie. De plus, ce décrochage résiste au choix du paramètre de détection, ce qui en renforce la solidité. Par ailleurs, c'est ce même décrochage qui commande l'analyse prospective. En le considérant plutôt qu'en prolongeant la tendance longue, l'étude montre qu'ignorer la rupture revient à surestimer la longévité future de plusieurs années, et déjà d'environ deux années à 65 ans.

Enfin, la confrontation à la projection de référence de l'INSEE vient enfin asseoir

la démarche. Sur la période observée, les espérances du modèle rejoignent celles de la référence, et ne s'en éloignent que modérément par la suite.

Conclusion générale

L'étude de la mortalité se montre d'une importance capitale pour tous les acteurs du domaine de l'assurance. La mortalité se trouve être à l'épicentre des mécanismes de provisionnement et de tarification de la plupart des produits d'assurance vie, ou de décès.

Bien que les caractéristiques des populations des organismes d'assurance diffèrent d'une entité à l'autre, il serait important d'étudier la mortalité nationale. Dans une certaine mesure, une tendance générale de la mortalité à l'échelle nationale pourrait influencer considérablement les portefeuilles de ces organismes pris séparément. Dans ce contexte, ce mémoire se positionne pour étudier les différents changements de tendances durables qu'a connus la mortalité française, et cela en s'appuyant sur des méthodes statistiques de détection de ces changements.

L'analyse descriptive des données de mortalité de la France métropolitaine entre 1962 et 2023 a tout d'abord mis en évidence plusieurs transformations majeures. La mortalité française s'est globalement améliorée sur l'ensemble de la période étudiée, accompagné d'un déplacement progressif des décès vers les âges les plus élevés et d'un vieillissement de la population. Toutefois cette amélioration ne s'est pas produite à un rythme uniforme.

Afin d'objectiver ces observations, ce mémoire s'est appuyé sur une méthode de détection rétrospective de rupture de tendance, la procédure de Bai-Perron. Pour y associer un modèle log-Poisson a été calibré afin d'isoler la composante temporelle de la mortalité et d'étudier ses changements de régime. Les résultats de ces analyses mettent en évidence un constat remarquable.

Malgré quelques différences de trajectoire entre les femmes et les hommes entre 1962 et 2000, les deux populations présentent une rupture de tendance commune en 2003 et une autre particulièrement marquée en 2013. Cette dernière correspond à un changement brusque du rythme d'amélioration de la mortalité. Alors que les décennies précédentes étaient caractérisées par des gains de longévité soutenus de l'ordre d'une diminution de 2 unités par an de l'indice temporelle, le récent régime affiche une quasi-stagnation de ces progrès. Les analyses de sensibilité réalisées par la suite montrent que ce résultat demeure robuste au choix des paramètres de la procédure de détection.

L'étude prospective menée à partir de ce constat souligne toute l'importance de la prise en compte des ruptures de tendance dans les exercices de projection de la mortalité. Les résultats montrent que les projections fondées sur la seule extrapolation de la tendance historique conduisent à des espérances de vie sensiblement supérieures à celles obtenues lorsqu'est intégré le ralentissement observé depuis le début des années 2010.

Pour les générations atteignant 65 ans en 2025, l'espérance de vie prospective estimée sans prise en compte de la rupture est supérieure de plus de 5% à celle obtenue dans le scénario intégrant le changement de régime, soit un écart d'environ deux années chez les femmes et d'un an et demi chez les hommes. Ces résultats mettent en évidence le risque de surestimation de la longévité future lorsqu'un changement durable de la dynamique de mortalité n'est pas identifié dans les données observées. Cette question revêt une importance particulière aux âges de départ à la retraite, où les hypothèses de mortalité influencent directement l'évaluation des engagements viagers.

Au-delà des résultats empiriques obtenus, ce mémoire met en évidence l'intérêt des méthodes de détection de rupture pour l'étude de phénomènes démographiques de long terme. Initialement développées dans le cadre du contrôle statistique des procédés, puis progressivement adaptées au domaine actuariel, ces techniques offrent un cadre rigoureux permettant d'identifier des changements de régime susceptibles d'affecter durablement les hypothèses de mortalité. Elles constituent ainsi un complément particulièrement pertinent aux modèles prospectifs traditionnels, dont les projections reposent généralement sur l'hypothèse implicite de continuité des tendances passées.

Ce travail présente néanmoins plusieurs limites qu'il convient de souligner. Tout d'abord, les dates de rupture ont été estimées sur la base des données actuellement disponibles. L'allongement futur de la série d'observation pourrait conduire à réviser la localisation de certaines ruptures, en particulier la plus récente, dont la stabilité ne pourra être pleinement appréciée qu'avec davantage de recul temporel. Ensuite, la recalibration du modèle sur le dernier régime repose sur une fenêtre d'observation d'une dizaine d'années seulement. Une telle durée demeure relativement courte pour estimer avec précision certaines composantes du modèle, notamment les sensibilités par âge, qui peuvent être affectées par une variabilité accrue. Enfin, si les méthodes mobilisées permettent d'identifier et de dater des changements de régime dans la mortalité française, elles ne permettent pas d'établir un lien causal rigoureux entre ces ruptures et les événements sanitaires, sociaux ou économiques ayant marqué la période étudiée.

Plusieurs prolongements peuvent être envisagés à l'issue de ces travaux. Une première perspective consisterait à développer des dispositifs de surveillance en temps réel afin de détecter plus rapidement les futurs changements de régime dans la dynamique de la mortalité. Une deuxième voie de recherche pourrait porter sur l'analyse des effets de cohorte, afin de déterminer dans quelle mesure certaines ruptures sont liées au comportement spécifique de générations particulières. Enfin, les méthodes présentées pourraient être appliquées à des populations plus restreintes disposant d'un historique suffisamment long et homogène, telles que les portefeuilles d'assurance ou les populations couvertes par des tables d'expérience. Une telle extension permettrait d'évaluer l'intérêt opérationnel de ces techniques dans le suivi des hypothèses de mortalité utilisées par les organismes d'assurance et de retraite, et en quantifier l'impact financier réel.

En définitive, ce mémoire met en évidence l'existence de changements significatifs dans la dynamique récente de la mortalité française et souligne l'intérêt d'intégrer ces ruptures dans les exercices de projection prospective. Les résultats obtenus montrent que la prise en compte de ces changements peut modifier sensiblement les anticipations de

longévité et, par conséquent, l'évaluation des engagements de long terme. Ils rappellent ainsi que la surveillance régulière de la mortalité constitue un enjeu majeur pour les démographes comme pour les actuaires, dans un contexte où les tendances passées ne garantissent pas nécessairement les évolutions futures.

Annexe A

Annexes

A.1 Les critères de choix du nombre de ruptures de tendance

A.2 Comparaison d'espérances de vie prospectives

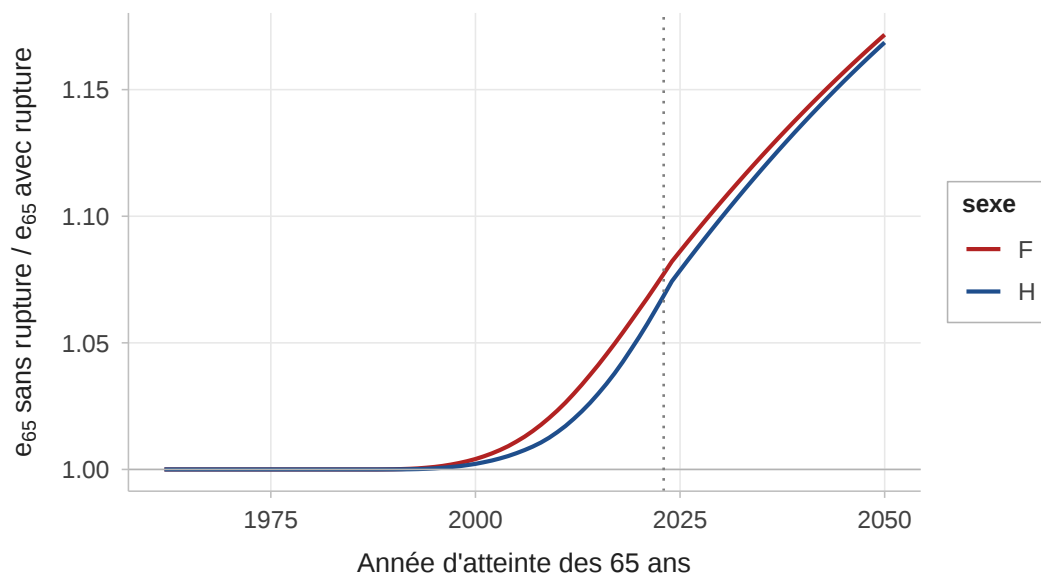


FIGURE A.1 – Ratio d'espérance de vie prospective à 65 ans (sans rupture/avec rupture)

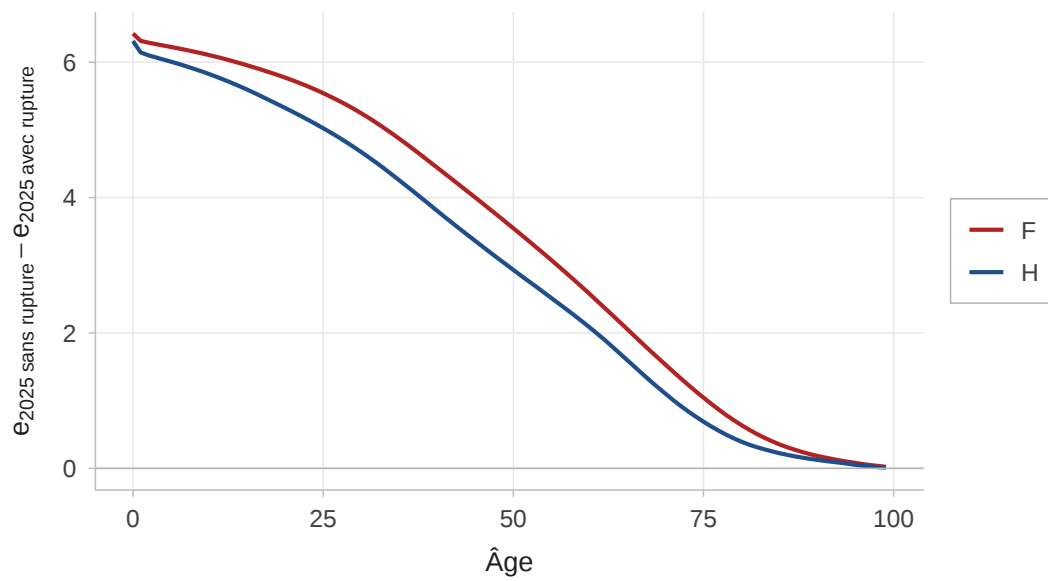


FIGURE A.2 – Ecart d'espérance de vie entre scénarios (sans-avec rupture)

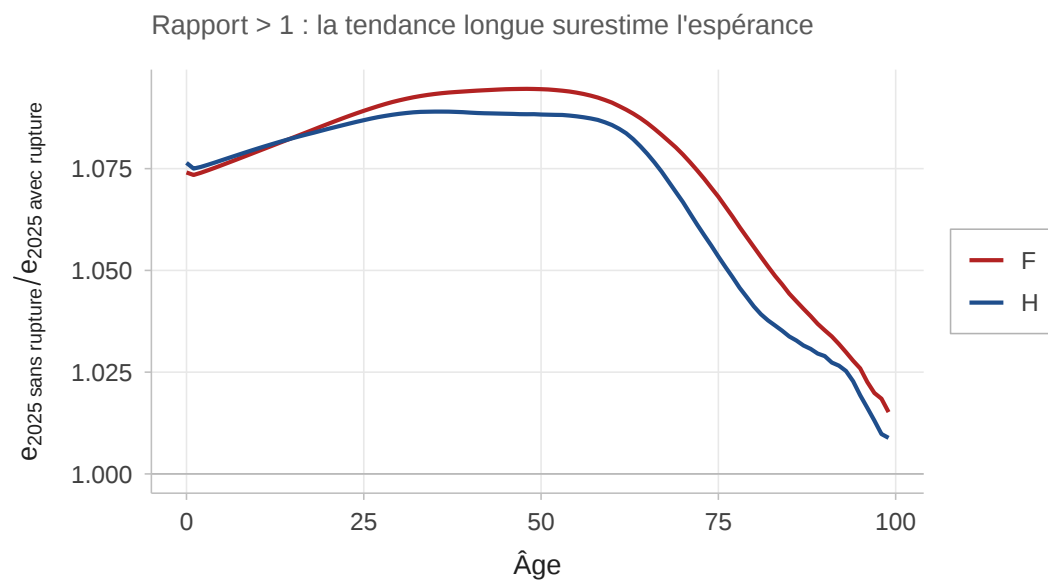


FIGURE A.3 – Rapport d'espérance de vie entre scénarios (sans/avec rupture)

A.3 Calibration du modèle sur le dernier régime

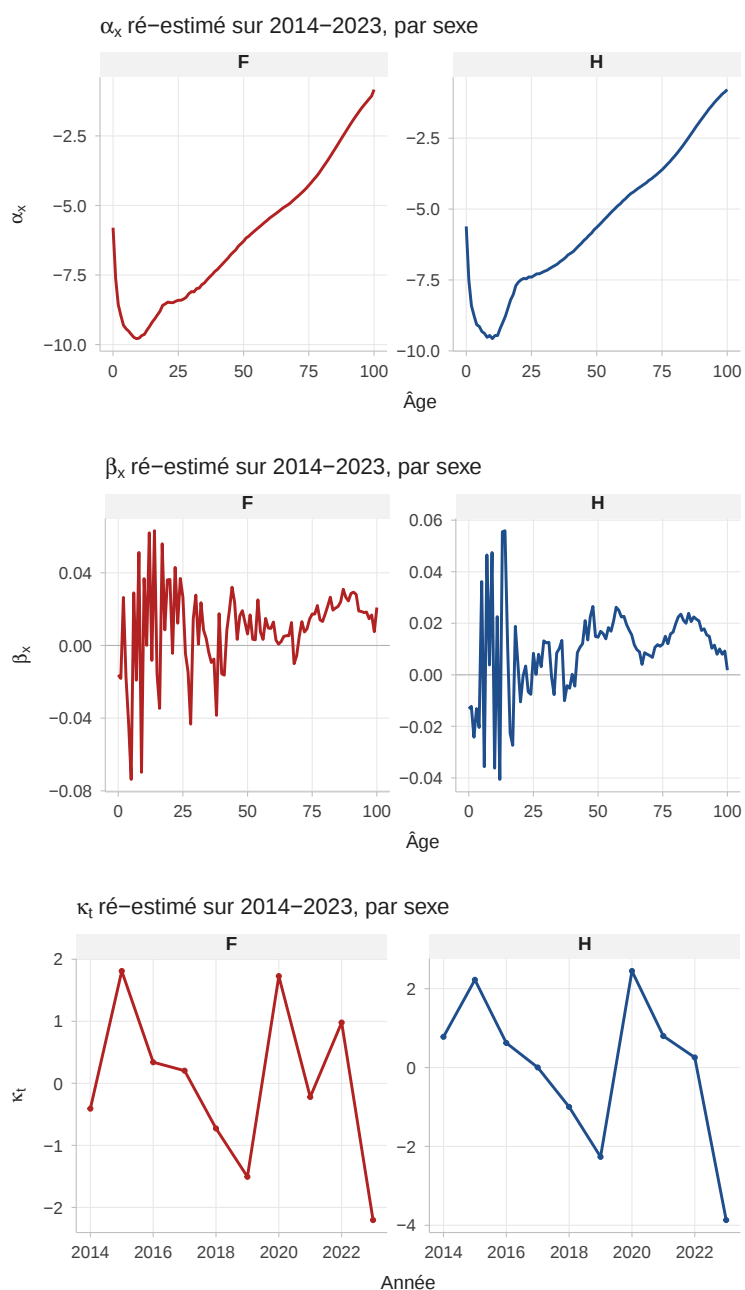


FIGURE A.4 – Les composantes du modèle log-Poisson restreint au dernier régime

A.4 Voie A : recalibration de la seule dérive

La voie A constitue une variante de la recalibration présentée au corps du mémoire. Là où la voie B réajuste l'ensemble du modèle sur le régime récent, la voie A conserve la structure d'âge estimée sur la période longue et ne recalibre que la dérive de projection.

Les paramètres $\hat{\alpha}_x$ et $\hat{\beta}_x$ issus de l'ajustement sur 1962–2023 sont ainsi maintenus. Seule la pente du facteur temporel est réestimée, par moindres carrés, sur le dernier régime :

$$\hat{d} = \frac{\sum_t (t - \bar{t})(\hat{\kappa}_t - \bar{\kappa})}{\sum_t (t - \bar{t})^2}, \quad t \in \{2014, \dots, 2023\}.$$

Le facteur temporel est prolongé à partir de sa dernière valeur observée selon cette dérive, $\hat{\kappa}_{2023+h} = \hat{\kappa}_{2023} + h\hat{d}$, et les taux projetés en découlent par $\hat{\mu}_{x,2023+h} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_{2023+h})$.

Cette approche évite le réajustement de la structure d'âge sur une décennie, dont l'estimation serait fragilisée par la faible variabilité du facteur temporel sur un régime plat. Les espérances de vie prospectives qui en résultent sont présentées ci-après (figure A.5)

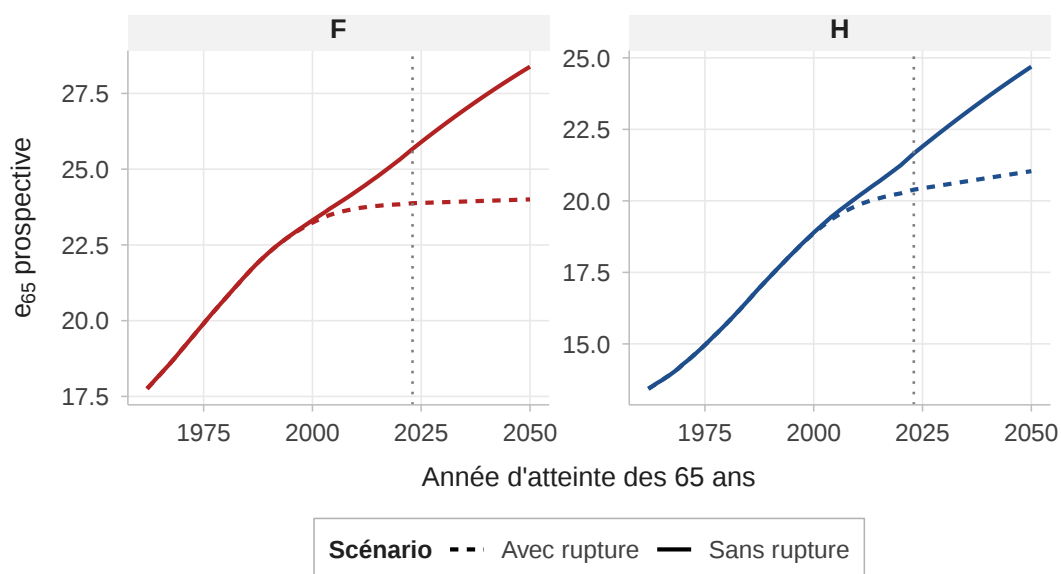


FIGURE A.5 – Espérances de vie prospectives à 65 ans selon le scénario - Voie A

Annexe B

Déclaration d'utilisation de l'IA générative

Dans le cadre de la réalisation de ce mémoire, j'ai eu recours de manière ponctuelle à des outils d'intelligence artificielle générative, notamment le modèle Sonnet 4.6 et Microsoft Copilot intégré au navigateur Microsoft Edge. Ces outils ont principalement été utilisés, dans les débuts de mes recherches (janvier - février 2026) comme assistance à la lecture et à la compréhension de documents scientifiques volumineux, afin de faciliter l'appropriation de certaines références bibliographiques mobilisées dans l'étude comme [Basseville et Nikiforov, 1993]. Ils ont également servi à explorer de manière préliminaire certaines méthodes de détection de rupture qui n'ont finalement pas été retenues dans la version finale du mémoire, ainsi qu'à accompagner le développement de scripts informatiques destinés à mieux comprendre ces approches.

Ces outils ont par ailleurs été utilisés comme aide ponctuelle à la rédaction, à la traduction de certains passages du français vers l'anglais, ainsi qu'à la programmation, notamment pour améliorer la clarté de certains textes, limiter les répétitions, corriger certaines formulations et adopter de bonnes pratiques d'organisation des projets sous R. Ils ont également contribué à la réalisation et à la mise en forme de certaines visualisations graphiques.

Toutefois, l'ensemble de la démarche scientifique présentée dans ce mémoire demeure le fruit de mon travail personnel. La revue de littérature a été rédigée à partir d'une lecture critique des sources consultées, tandis que les choix méthodologiques, les analyses statistiques, les interprétations actuarielles et les conclusions résultent de mes propres réflexions, enrichies par les échanges avec mon directeur de mémoire. Les outils d'intelligence artificielle n'ont ainsi joué qu'un rôle d'assistance technique, documentaire et rédactionnelle, sans intervenir dans la construction du raisonnement scientifique ni dans l'élaboration des résultats présentés.

Table des figures

1	Evolution du nombre de décès annuels	iv
2	Evolution du nombre de décès par classe d'âge	v
3	Surface d'amélioration de la mortalité par âge, année, et sexe	vi
4	Les composantes du modèle log-Poisson	vii
5	Ruptures de tendances sur κ_t par sexe et les pentes par régime	viii
6	Espérance de vie prospectives à 65 ans selon le scénario	ix
7	Evolution of the annual number of deaths	xi
8	Evolution of the number of deaths by age group	xii
9	Mortality improvement surface by age, year and sex	xiii
10	The components of the log-Poisson model	xiv
11	Trend breaks on κ_t by sex and the slopes by regime	xv
12	Prospective life expectancy at age 65 by scenario	xvi
1.1	Évolution des projections de l'espérance de vie ([Pison, 2018])	8
2.1	Gauche : Diagramme de Lexis ; Droite : Exposition au risque par génération (<i>figure générée par IA</i>)	18
2.2	Evolution du nombre de décès annuels	19
2.3	Evolution du nombre de décès par classe d'âge	20
2.4	Evolution de l'âge moyen au décès par sexe	21
2.5	Evolutions de la population exposée et du rapport Homme/Femme	21
2.6	Pyramides des âges 1962 et 2021	22
2.7	Evolution du taux brut de mortalité	23
2.8	Evolution du taux brut de mortalité par classe d'âge	24
2.9	Surface d'amélioration de la mortalité par âge, année, et sexe	25
3.1	Critère de sélection du nombre de rupture	33
3.2	Régimes de mortalité détectés par la procédure de Bai-Perron, $\log(\text{SMR})$ par sexe, 1962–2021. Les traits verticaux pointillés marquent les dates de rupture estimées.	34
5.1	Les composantes du modèle log-Poisson	45
5.2	Résidus de déviance du modèle log-Poisson	46
5.3	Ruptures de tendances sur κ_t par sexe et les pentes par régime	49

5.4	Espérance de vie prospectives à 65 ans selon le scénario	53
5.5	Espérances de vie prospective par âge en 2025	55
5.6	Espérances de vie prospectives à 65 ans par année d'atteinte	56
5.7	Espérances de vie prospectives par âge en 2025	57
A.1	Ratio d'espérance de vie prospective à 65 ans (sans rupture/avec rupture)	62
A.2	Ecart d'espérance de vie entre scenarios (sans-avec rupture)	63
A.3	Rapport d'espérance de vie entre scenarios (sans/avec rupture)	63
A.4	Les composantes du modèle log-Poisson restreint au dernier régime	64
A.5	Espérances de vie prospectives à 65 ans selon le scenario - Voie A	65

Liste des tableaux

1.1	Comparaison des cadres de détection <i>offline</i> et <i>online</i>	13
3.1	Dates de rupture et intervalles de confiance, par sexe	34
3.2	Pentes et taux d'amélioration par régime, par sexe	35
5.1	Ruptures détectées sur κ_t par sexe.	48
5.2	Sensibilité au trimming h : ruptures détectées par sexe.	50

Bibliographie

- [Abgrall, 2021] ABGRALL, D. (2021). *Studies of change detection : on-line scheme for discrete Poisson models and off-line test for parametric mixtures. Application to insurance problems*. Theses, Université de Bretagne occidentale - Brest.
- [Adams et MacKay, 2007] ADAMS, R. P. et MACKAY, D. J. C. (2007). Bayesian online changepoint detection. *arXiv preprint arXiv :0710.3742*.
- [Bai, 1997] BAI, J. (1997). Estimation of a change point in multiple regression models. *The Review of Economics and Statistics*, 79(4):551–563.
- [Bai et Perron, 1998] BAI, J. et PERRON, P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66(1):47–78.
- [Bai et Perron, 2003] BAI, J. et PERRON, P. (2003). Computation and analysis of multiple structural change models. *Journal of Applied Econometrics*, 18(1):1–22.
- [Barigou et al., 2022] BARIGOU, K., EL KAROUI, N., LOISEL, S. et SALHI, Y. (2022). Surveillance of actuarial assumptions in the enterprise risk management framework. Working paper.
- [Basseville et Nikiforov, 1993] BASSEVILLE, M. et NIKIFOROV, I. V. (1993). Detection of abrupt changes : theory and application. *Technometrics*, 36:550.
- [Best et Neuhauser, 2006] BEST, M. et NEUHAUSER, D. (2006). Walter a. shewhart, 1924, and the hawthorne factory. *Quality & Safety in Health Care*, 15(2):142–143.
- [Biessy, 2024] BIESSY, G. (2024). *Modèles de Durée : Concepts, Tables et Données*. EURIA.
- [Blanpain et Algava, 2021] BLANPAIN, N. et ALGAVA, (2021). Projections de population 2021-2070 - méthode et hypothèses. *INSEE*.
- [Brouhns et al., 2002] BROUHNS, N., MICHEL, D. et K., V. J. (2002). A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31:373–393.
- [Chow, 1960] CHOW, G. C. (1960). Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. *Econometrica*, 28(3):591–605.
- [COR, 2026] COR (2026). Evolution et perspectives des retraites en france. *Rapport annuel*.
- [COR, 2021] COR, S. g. (2021). Les gains d’espérance de vie ralentissent entre 2013 et 2019.

- [Croix *et al.*, 2015] CROIX, J.-C., PLANCHET, F. et THÉRON, P.-E. (2015). Mortality : a statistical approach to detect model misspecification. *Bulletin français d'actuariat*.
- [Denuit et Robert, 2007] DENUIT, M. et ROBERT, C. (2007). *Actuariat des assurances de personnes : Modélisation, tarification et provisionnement*. Economica.
- [Desesquelles et Richet-Mastain, 2004] DESESQUELLES, A. et RICHET-MASTAIN, L. (2004). Bilan démographique 2003 : Stabilité des naissances, augmentation des décès. *INSEE Première*, (948).
- [Do Huu et Lopez, 2011] DO HUU, D. et LOPEZ, O. (2011). Etude de stabilité et élaboration de procédures de détection de rupture dans le cadre de la modélisation de sinistres automobiles. Mémoire de master, Institut des Actuares.
- [El Karoui *et al.*, 2017] EL KAROUI, N., LOISEL, S. et SALHI, Y. (2017). Minimax optimality in robust detection of a disorder time in doubly-stochastic Poisson processes. *The Annals of Applied Probability*, 27(4):2515–2538.
- [France Assureurs, 2025] FRANCE ASSUREURS (2025). L'assurance française : données clés 2024. <https://www.franceassureurs.fr/actualites/les-donnees-cles-de-lassurance-francaise-en-2024/>.
- [Héran, 2014] HÉRAN, F. (2014). Générations sacrifiées : le bilan démographique de la grande guerre. *Population & Sociétés*, (510).
- [INSEE, 2025] INSEE (2025). Les décès en 2024. Insee Focus 364, Insee.
- [Institut national d'études démographiques, 2026] INSTITUT NATIONAL D'ÉTUDES DÉMOGRAPHIQUES (2026). La mortalité en France en chiffres : espérances de vie à la naissance, à 65 ans et table de mortalité. <https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres-graphiques-tableaux/mortalite-en-france-en-chiffres-esperances-vie>. consulté le 28 juillet 2026.
- [Le Louarne, 2023] LE LOUARNE, J.-F. (2023). Détection robuste des changements d'intensité. Mémoire de master, Institut des Actuares.
- [Lorden, 1971] LORDEN, G. (1971). Procedures for reacting to a change in distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(6):1897–1908.
- [Meslé, 2006] MESLÉ, F. (2006). Progrès récents de l'espérance de vie en France : Les hommes comblent une partie de leur retard. *Archimed*.
- [Mossabo Issa, 2016] MOSSABO ISSA, S. (2016). Suivi du risque incapacité en prévoyance collective : Détection de ruptures dans l'incidence et construction de loi de maintien. Mémoire d'actuariat, Institut des Actuares.
- [Moustakides, 1986] MOUSTAKIDES, G. V. (1986). Optimal stopping times for detecting changes in distributions. *The Annals of Statistics*, 14(4):1379–1387.
- [Newey et West, 1987] NEWHEY, W. K. et WEST, K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3):703–708.
- [Ngong Engoulou, 2023] NGONG ENGOULOU, D. (2023). Détection de rupture de tendance sur les taux de mortalité par âge. Mémoire de master, Institut des Actuares.

- [Page, 1954] PAGE, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41(1/2): 100–115.
- [Perron et Zhu, 2005] PERRON, P. et ZHU, X. (2005). Structural breaks with deterministic and stochastic trends. *Journal of Econometrics*, 129(1–2):65–119.
- [Pison, 2018] PISON, G. (2018). 1968-2018 : quatre surprises démographiques en France depuis cinquante ans. *Population & Sociétés*, (553).
- [Planchet, 2007] PLANCHET, F. (2007). Tables tgh / tgf 05 : Construction. *Institut des Actuaire*s.
- [Roberts, 1959] ROBERTS, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1(3):239–250.
- [Romano et al., 2022] ROMANO, G., ECKLEY, I., FEARNEHEAD, P. et RIGAILL, G. (2022). Fast online changepoint detection via functional pruning cusum statistics.
- [Shiryaev, 1963] SHIRYAEV, A. N. (1963). On optimum methods in quickest detection problems. *Theory of Probability and Its Applications*, 8(1):22–46.
- [SwissRe Institute, 2018] SWISSRE INSTITUTE (2018). Amélioration de la mortalité : comprendre le passé et anticiper le futur. *sigma*, (6).
- [Vermet, 2026] VERMET, F. (2026). *Cours sur les modèles de durées*. EURIA Master 2.
- [Vigneron, 2025] VIGNERON, R. (2025). *Modélisation, surveillance et projections de la mortalité dans l'assurance vie et santé*. Theses, Université Claude Bernard - Lyon I.
- [Wald, 1945] WALD, A. (1945). Sequential tests of statistical hypotheses. *Annals of Mathematical Statistics*, 16:256–298.
- [Wald, 1947] WALD, A. (1947). *Sequential Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- [Willsky et Jones, 1976] WILLSKY, A. et JONES, H. (1976). A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(1):108–112.
- [Zeileis et al., 2002] ZEILEIS, A., LEISCH, F., HORNIK, K. et KLEIBER, C. (2002). strucchange : An R package for testing for structural change in linear regression models. *Journal of Statistical Software*, 7(2):1–38.