



Lyon 1

Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 1^{er} juillet 2009

Par : M. SOUTIRAS Pierrick

Titre: COUVERTURE NATURELLE DES RISQUES DE MORTALITÉ ET DE LONGEVITÉ

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans 5 ans)

Membre du jury I.A.

M. PLANCHET Frédéric

Entreprise :

SECURA RE

Membres du jury I.S.F.A.

M. AUGROS Jean-Claude

M. BIENVENÛE Alexis

Mme EYRAUD-LOISEL Anne

M. LAURENT Jean-Paul

M. LEBOISNE Nicolas

M. LOISEL Stéphane

Mme MAUME-DESCHAMPS Véronique

M. QUITTARD-PINON François

Mme REY-FOURNIER Béatrice

M. RULLIERE Didier

M. SERANT Daniel

Directeur de mémoire en entreprise :

M. CHENUT Xavier

Secrétariat

Mme GARCIA Marie-José

Mme BARTHELEMY Diane

M. BRIAS Samy

Mme BRUNET Marie-Christine

Mme GHAZOUANI Sondès

M. HUET Jean-Daniel

Mme MOUCHON Marie-Claude

Invité :

Bibliothèque :

Mme SONNIER Michèle

Couverture naturelle des risques de mortalité et de longévité

Résumé

Mots-clés : risque systématique de longévité, risque systématique de mortalité, risque de modèle, modèle extrapolatif de mortalité, modèle stochastique de mortalité, assurance en cas de décès, rente.

Le risque de longévité est le risque de voir la durée de vie humaine s'allonger de manière non déterministe, et celui de mortalité son contraire. Les effets de ces deux risques systématiques ont donc des conséquences opposées en assurance vie. Notre objectif est d'analyser le fonctionnement de ce principe de couverture naturelle à travers des portefeuilles de rentes et d'assurances en cas de décès. Pour cela, nous construisons un outil de simulation de la distribution empirique de la somme totale des engagements de tels portefeuilles. Puis, nous définissons des indicateurs relatifs du risque lié aux engagements pour pouvoir comparer différentes situations de portefeuilles entre elles. Les simulations des engagements sont obtenues *via* des modèles stochastiques et extrapolatifs de mortalité, calibrés sur les données nationales françaises. Ils voient également l'ajout de risques supplémentaires : risque d'incertitude sur les paramètres des modèles de mortalité, risque d'erreur du choix d'un modèle de mortalité, et risque d'occurrence d'une pandémie dans l'année. Dans ce mémoire, nous concentrons notre attention sur l'étude de la composante systématique du risque, plus intéressante que le risque global incluant la part diversifiable. Les différentes analyses menées démontrent l'utilité de cette couverture naturelle. Pour un type de portefeuille d'assurances vie, il existe à chaque fois un ou des portefeuilles de rentes permettant de bénéficier d'un effet de couverture maximale. Néanmoins, la détermination de ces portefeuilles optimaux dépend fortement du choix de retenir ou non le risque de modèle.

Natural Hedging of mortality and longevity risks

Abstract

Keywords : systematic longevity risk, systematic mortality risk, model risk, extrapolative mortality model, stochastic mortality model, life insurance, annuity.

The longevity risk is the risk of seeing the human life expectancy lengthening in a non-determinist way, and that of mortality its opposite. The effects of these two systematic risks have opposite consequences in life insurance. Our aim is to analyze the functioning of this principle of natural hedging through portfolios of annuities and death insurances. For that purpose, we build a tool of simulation of the empirical distribution of the aggregate sum of the liabilities of such portfolios. Then, we define relative indicators of the risk connected to the commitments to be able to compare various situations of portfolios between them. The simulations of the liabilities are obtained through stochastic and extrapolative models of mortality, calibrated on the French national data. Supplementary risks are also added : risk of uncertainty on the parameters of the mortality models, risk of error in the choice of a mortality model, and risk of occurrence of a pandemic in the year. In this report, we concentrate our attention on the study of the systematic constituent of the risk, more interesting than the global risk including the diversifiable part. The various analyses demonstrate the utility of this natural hedging. For a type of portfolio of life insurance, there are in every case one or several portfolios of annuities allowing to benefit from an effect of maximal hedging. Nevertheless, the determination of these optimal portfolios depends strongly on the choice to retain or not the risk of model.

Remerciement

Je tiens à remercier l'ensemble des équipes de Secura Re pour leur accueil chaleureux, et plus particulièrement à l'équipe du R & D. Enfin, ma gratitude s'adresse bien entendu aux personnes qui m'ont suivi et aidé dans la réalisation de ce mémoire : Xavier, Sophie, Marc et Florent.

Sommaire

Introduction générale	1
I Modélisation de la longévité et de la mortalité	4
1 Le contexte actuel	6
1.1 Tendance à l'amélioration de la mortalité	6
1.2 Les débats académiques	8
1.3 Méthode de prédiction privilégiée	9
2 Rappels de mathématiques actuarielles	12
2.1 Diagramme de Lexis	12
2.2 Notations actuarielles	14
2.3 Rentes et capitaux décès	17
3 Présentation des modèles de mortalité	21
3.1 Hypothèse de Poisson	22
3.2 Les modèles de <i>LifeMetrics</i>	23
4 La couverture « naturelle »	28
4.1 Une revue de la recherche actuelle	28
4.2 Limites et critiques de la couverture naturelle	30
II Mise en œuvre pratique de la couverture naturelle	32
1 Les mesures du risque	34
1.1 Définitions et propriétés des mesures de risque	34
1.2 Quelques mesures de risque	36

2	Génération des tables prospectives de mortalité	39
2.1	Les données et travaux repris	40
2.2	Travaux effectués	42
3	Analyse des engagements	46
3.1	Les hypothèses employées	46
3.2	Simulation des engagements	48
3.3	Applications numériques	54
III	Analyse de l'impact de la couverture naturelle	60
1	Un premier exemple pratique	62
1.1	Méthodologie	63
1.2	Risques basiques	64
1.3	Risque d'incertitude des paramètres	68
1.4	Risque de modèle	73
1.5	Risque de pandémie	78
1.6	Synthèse	81
2	Analyses de sensibilité	84
2.1	Sensibilité par rapport aux niveaux des prestations	85
2.2	Sensibilité par rapport aux nombres d'hommes et de femmes rentiers	92
3	Pour aller plus loin	101
3.1	Améliorations possibles	101
3.2	Analyses supplémentaires	102
	Conclusion générale	104
	Bibliographie	107
	Annexe	110
	Modèle de Lee-Carter	111

Introduction Générale

es compagnies d'assurances vie ou de gestion de rentes sont couramment exposées aux risques de mortalité et de longévité. Leurs répercussions sur l'équilibre financier peuvent être potentiellement importantes. Savoir bien gérer ces risques ne date donc pas d'hier, et au fil du temps différentes méthodes sont apparues. Ce mémoire propose de s'intéresser à l'une d'entre elles en particulier. Son principe n'est certainement pas récent, mais son étude nous paraît faire défaut quand on regarde le nombre de parutions sur son sujet. Il s'agit de la « couverture naturelle » entre les risques de longévité et de mortalité. Avant de parler plus à propos de cet outil pratique, nous désirons expliciter d'avantage ce que représentent ces risques. Premièrement, nous définissons le risque de longévité comme celui de voir la mortalité humaine s'améliorer de manière non déterministe. En d'autres termes, cela revient à observer dans le futur une hausse de la longévité due à une baisse des taux de mortalité non prévisible. Secondement, le risque de mortalité est ici à prendre comme le complémentaire du précédent. Dans ce cas, c'est le risque que la mortalité humaine se déprécie de façon non déterministe.

La nature intrinsèque de ces risques est systématique, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de les éliminer par mutualisation. En effet, une évolution de la mortalité sous-jacente dans un sens, et c'est tout le portefeuille de la compagnie qui s'en trouve ressenti. Quelles possibilités s'ouvrent à l'assureur pour diminuer son exposition à ces risques ? Bien souvent dans ces cas, il peut avoir recours aux instruments financiers de la gestion actif/passif tels que les *mortality bonds*, obligations dont les flux sont adossés à la mortalité d'une population. Il peut également songer à acheter de la réassurance. Au lieu de chercher à transférer son risque aux marchés financiers ou à un réassureur, la société peut souhaiter le conserver mais en diminuant son exposition globale. Pour cela, la couverture naturelle semble être un excellent moyen. L'idée est simple : profiter des effets opposés des risques de longévité et de mortalité pour arriver à les compenser mutuellement. Pour illustrer nos propos, nous utilisons les rentes et les assurances vie pour capter les influences respectives du risque de longévité et de celui de mortalité. Un événement comme une innovation médicale va certainement améliorer la longévité humaine, et être en défaveur des engagements des rentes, mais en bénéfice de ceux des assurances. À l'opposé, la hausse de l'obésité va conduire à une augmentation de la mortalité à tout âge, cf. Swiss Re (2004) [24]. Or dans cette situation, l'effet sera bénéfique pour les rentes, et mauvais pour les assurances. Sur cet exemple, nous pouvons réellement saisir les opportunités qu'offre la couverture naturelle.

Ce mémoire est organisé en trois parties. La première est consacrée aux questions de modélisation de la longévité et de la mortalité. En prenant connaissance des débats actuels sur ce point, il paraît nécessaire de développer des méthodes

permettant de prendre en compte les risques liés aux dérives de ces notions. Les compagnies établissent ou emploient à ce titre des tables qui incorporent une tendance future de la mortalité. Néanmoins, on peut s'attendre à subir des déviations des taux réels par rapport à ceux prédits. Pour cette raison, nous faisons appel aux modèles stochastiques de *LifeMetrics*, développés par la société *JPMorgan*. Dans la seconde partie, nous décrivons les méthodes que nous suivons pour pouvoir détecter et étudier les effets de la couverture naturelle. Nous reprenons à cette fin les contrats de rentes et d'assurances en cas de décès utilisés précédemment pour illustrer le principe de cette couverture. Nous expliquons alors comment nous simulons de tels portefeuilles, et comment nous souhaitons les employer pour notre étude, à partir de modèles de mortalité calibrés sur des données françaises. Enfin dans la dernière partie, nous utilisons ces résultats pour tenter de disséquer l'impact de la couverture naturelle. Pour ce faire, nous menons différentes analyses de sensibilité, et nous nous interrogeons sur l'effet supplémentaire qu'apporte l'ajout de nouvelles composantes du risque, notamment comme la pandémie ou le risque de modèle.

Première partie

Modélisation de la longévité et de la mortalité

Dans cette première partie, nous présentons les deux notions centrales de ce mémoire que sont la longévité et la mortalité. La longévité est tout simplement à comprendre ici comme la durée de vie d'un individu ou d'un groupe. La mortalité est alors bien entendu l'expression de son contraire, c'est-à-dire le décès. Ces deux termes sont néanmoins d'usage courant, mais ceci est moins évident en ce qui concerne les risques liés à ces concepts. Nous avons préalablement donné des définitions associées à ces risques. Nous rappelons que par *risque de longévité* nous entendons le risque que la mortalité humaine diminue de manière non déterministe, et par *risque de mortalité* son contraire. Compte tenu de la problématique que pose ce mémoire, la partie préalable de notre travail a donc été d'étudier ces risques, et plus particulièrement leur évolution future ainsi que leur modélisation.

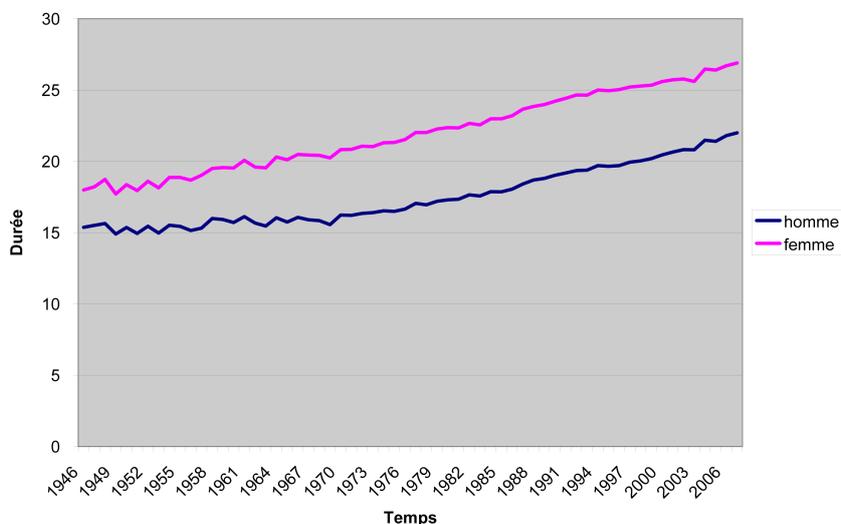
Cette première partie est construite en quatre chapitres. Tout d'abord, le premier offre un rappel général des débats actuels ayant traités aux notions de longévité et de mortalité dans la recherche scientifique. Nous nous intéressons alors à la mortalité humaine : notamment sur son éventuelle tendance, sur les méthodes possibles pour anticiper son évolution et les éventuels problèmes que cela pose. Dans un deuxième temps, nous donnons quelques rappels de mathématiques actuarielles et fixons les notations employées par la suite. Ces remarques formelles sont nécessaires à la bonne compréhension des modèles que nous présentons et employons ici. La troisième étape de description des dits modèles ne vise pas à donner une liste exhaustive, mais seulement ceux mis à notre disposition et rentrant également dans le type de modèles que nous souhaitons considérer. Enfin pour conclure cette première partie, nous présentons plus précisément le principe même de couverture naturelle entre les risques de longévité et de mortalité. Pour ce faire, nous offrons une revue la plus pertinente possible de l'état actuel de la recherche dans ce domaine, et les différentes critiques que l'on peut formuler.

Le contexte actuel

 our l'heure actuelle, un large nombre de recherches dont le sujet est axé sur la longévité et la mortalité futures est disponible. Si nous observons simplement les taux de mortalité passés en France, il semble se dégager une tendance à l'amélioration de la dite mortalité. Néanmoins, le sujet est plus complexe et donne lieu à un certain nombre de débats académiques. En effet, on peut citer par exemple Rogers (2002) [26] qui montre que la mortalité est difficile à appréhender car elle est à la fois influencée par des facteurs socio-économiques, des variables biologiques, la politique des gouvernements, les influences environnementales ainsi que les conditions et les comportements en santé. Pourtant, il nous est obligatoire de déduire une méthode de prévision idéalement à la fois efficace et simple pour pouvoir travailler sur ce sujet. Pour terminer cette première section, nous évoquons les risques liés à l'exposition à la longévité ainsi qu'à la mortalité.

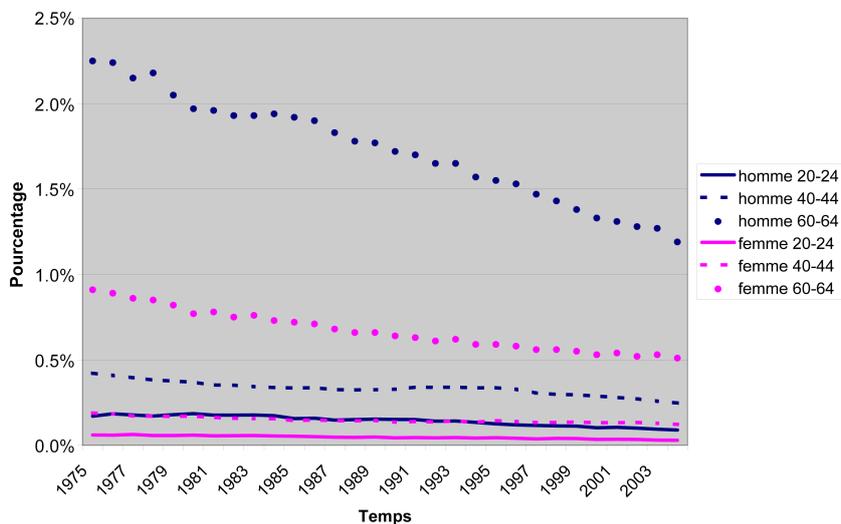
1.1 Tendances à l'amélioration de la mortalité

Un constat est très simple à faire. Au cours des dernières décennies, on a assisté à une hausse de l'espérance de vie et ce à n'importe quel âge. Pour illustrer ces propos, nous proposons de fournir un exemple somme toute bien particulier pour la France métropolitaine. Tout d'abord, la figure placée ci-après montre l'évolution de l'espérance de vie résiduelle à 60 ans de 1946 à 2007 en fonction du sexe. Nous notons au passage que les données pour l'année 2007 ne sont que provisoires.



Évolution de l'espérance de vie à 60 ans de 1946 à 2007 en France métropolitaine¹

Cette figure ainsi que la suivante montrent combien l'évolution de la mortalité dépend à la fois du sexe, de l'âge mais aussi de l'année calendaire. Le graphique suivant est une illustration de l'évolution des taux de mortalité de 1975 à 2004 en France métropolitaine pour différentes classes d'âge et en fonction du sexe. Un constat commun est notable : les taux de mortalités ont tous une tendance à la baisse.

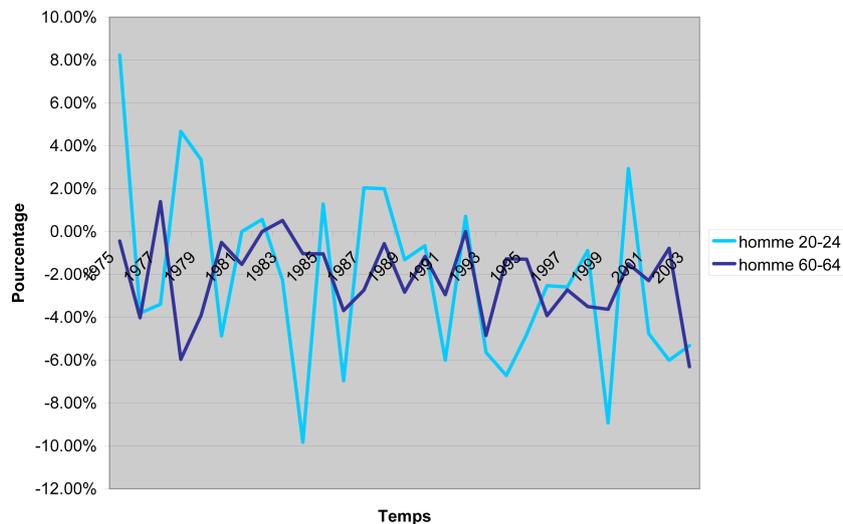


Évolution des taux de mortalité de 1975 à 2004 en France métropolitaine²

¹source des données : INED

²source des données : INED

Néanmoins comme le montre la dernière figure représentant les taux de variation relative, cette tendance n'est pas linéaire et *a priori* non déterministe. De plus, la volatilité semble être différente en fonction des classes d'âge.



Pourcentage de variation relative des taux de mortalité d'une année sur sa précédente

Ces illustrations en France métropolitaine révèlent effectivement l'existence de cette tendance à l'amélioration de la mortalité. Cette observation se généralise de même sur d'autres exemples de population. Pourtant, faut-il réellement considérer cette tendance comme un dogme absolu ?

1.2 Les débats académiques

L'exemple précédent sur la population française nous a montré l'existence d'une amélioration de la mortalité sur les dernières décades. Certains experts sont d'avis que dans le futur, l'espérance de vie va continuer à s'accroître de manière au moins aussi rapide que lors des dernières décennies. Néanmoins, d'autres pensent qu'elle va au contraire décélérer et même potentiellement décliner pour certains groupes.

Un document intéressant faisant état de toutes ces idées est celui de Watson Wyatt (2005) [29]. Nous pouvons citer comme exemple de sources de discussions entre experts les questions suivantes.

- i - Une diminution de la mortalité passée peut-elle se reproduire dans le futur ? Par exemple durant le XX^{ième} siècle, l'espérance de vie à

la naissance a augmenté principalement en raison de la diminution des taux de mortalité infantile. Il paraît raisonnable de penser que la longévité n'augmentera plus dans le futur pour une telle raison particulière, mais pour d'autres raisons au demeurant.

- ii - Existe t'il une limite biologique à la longévité humaine ou en d'autres termes un âge ultime absolu ? Cette question est sans aucun doute l'une des plus débattue dans les milieux académiques et ne suscite pour l'instant aucune réponse définitive quant à sa détermination.
- iii - Si oui, est-ce que l'être humain approche t'il de cette limite ? Là encore, il y a débat puisque l'on peut s'attendre avec les avancés génétiques probables de voir la longévité augmentée.

Ce dernier point nous ouvre les portes de la question des progrès de la médecine. Il est fatalement sensé de croire que ces avancés médicales ont un impact direct sur l'augmentation de la longévité. Mais dans l'optique de construire une méthode de prévision des taux futurs de mortalité, le problème qui se pose est de quelle manière les incorporer. Il est notamment très difficile de mesurer l'impact qu'ils ont, ou qu'ils auront. Toutes ces questions ne sont qu'une partie de l'ensemble des interrogations à prendre en compte avant de se lancer dans le choix d'une méthode pour prédire la longévité et la mortalité futures.

1.3 Méthode de prédiction privilégiée

Il existe un large panel d'approches différentes pour prédire la mortalité future. Nous pouvons citer l'exemple de modèles basés sur des processus biométriques. Dans ce mémoire nous n'avons pas voulu rentrer dans de telles considérations. Nous avons plutôt décidé de nous concentrer sur la part des méthodes dites « extrapolatives ». Ce type de méthodes cherche à estimer la mortalité future en utilisant la connaissance passée des taux de mortalité. En définitive, nous supposons que de l'historique passé découle toute l'information nécessaire pour prédire la mortalité. Voilà la raison de leur dénomination puisqu'ils extrapolent une tendance observée pour déterminer le futur. Mais là encore le choix reste grand et enclin à un certain nombre de critiques.

1.3.1 Modèle déterministe contre stochastique

Traditionnellement en actuariat nous pouvons dire que deux types d'approches existent. L'une se veut déterministe et va donc considérer les taux de mortalité comme fixés. Elle autorise un seul scénario ou une seule trajectoire pour la mortalité future. L'autre enfin est stochastique. Elle considère les différents taux de

mortalité comme des variables aléatoires. Plusieurs scénarios et plusieurs trajectoires de la mortalité future sont donc possibles.

Dans le premier cas, il faudrait avoir recours à des *stress tests* pour réellement tenir compte d'une dérive des taux due à une sous ou sur-mortalité. Il suffit pour cela d'augmenter ou de diminuer selon le besoin et le but les taux de mortalité déterministes. Dans le second cas, ces dérives sont finalement déjà incorporées *via* la variable aléatoire. Il faut simplement avoir recours à des simulations de ces variables.

1.3.2 Modèle à causes spécifiques

Ce type de modèles ne considère pas la mortalité dans son ensemble mais la sépare entre différentes sortes de causes. L'extrapolation est alors réalisée pour chacune de ces causes spécifiques. Ceci nécessite naturellement d'avoir à disposition des données bien adaptées au contexte de l'étude et des sources sélectionnées. Cette méthode peut donc offrir une meilleure prévision des changements de la mortalité future, mais souffre néanmoins d'un manque de compréhension des corrélations existantes entre les différentes causes spécifiques.

1.3.3 Modèle avec avis d'expert

Étudier l'historique de la mortalité ne demande certainement pas le recours à l'opinion d'un expert. Mais le passage à son extrapolation est un sujet plus délicat, et peut nécessiter l'appui d'un tel expert. Les modèles construits étant la plupart du temps de nature mathématique, il n'est pas dénué de sens d'obtenir sa validité par une opinion experte. Bien entendu, cet avis peut être plus ou moins pris en compte dans les modèles. Il peut par exemple simplement s'agir d'un jugement sur le niveau de l'âge ultime.

1.3.4 Critiques

On peut facilement reprocher aux méthodes extrapolatives leur part très objective. En effet, tout est basé sur le fait que la mortalité future va continuer d'évoluer de la même façon que par le passé, et plus particulièrement au même rythme. De plus selon la fenêtre historique des taux passés que l'on se fixe, on peut avoir des méthodes menant à des résultats différents. Une fois encore, une part d'objectivité est rajoutée dans ces modèles.

Pour finir, on peut citer Olshansky (1998) [20] qui fournit plusieurs raisons visant à mettre en garde les utilisateurs à ces méthodes. Parmi celles-ci, nous évoquons

brèvement les avancées médicales qui sont un facteur non négligeable sur l'évolution de la mortalité humaine. D'autre part, les facteurs environnementaux et l'incertitude sur l'impact d'un âge biologique ultime sont également des points dont les conséquences sont difficilement répercutable dans ce type de modèles.

Rappels de mathématiques actuarielles

Navant de rentrer dans la description détaillée des modèles mathématiques que nous allons utiliser pour prédire la mortalité future, il semble opportun de faire quelques rappels sur les mathématiques actuarielles. En effet, dans ce chapitre nous introduisons et établissons une fois pour toute des notions qui sont les éléments de base de toute la partie théorique de ce mémoire. Même si ces dernières sont couramment employées dans le monde de l'actuariat, il est quand même nécessaire de fixer leur notation pour éviter toute confusion.

2.1 Diagramme de Lexis

Dans ce mémoire, nous allons bien souvent travailler avec des données entières notamment en ce qui concerne les âges des individus et les dates d'observation. En particulier, nous allons exprimer les âges en années révolues, c'est-à-dire en valeur entière du nombre d'années au dernier anniversaire en date du 1^{er} janvier par exemple. Il est alors d'usage d'utiliser le diagramme de Lexis pour représenter la mesure du temps en démographie. De plus amples explications sur cet élément peuvent être trouvées dans Planchet & Thérond (2006) [21].

2.1.1 Présentation

Ce diagramme permet de représenter communément les trois mesures du temps qui apparaissent lors de toute étude ou analyse de la mortalité. Ces trois mesures qui influent sur la mortalité sont :

- i - l'âge des individus, influençant bien évidemment le risque de décéder,

- ii - la date d'observation qui influence le risque de mourir à un âge donné selon certaines circonstances telles qu'une épidémie ou une canicule variant annuellement par exemple,
- iii - la génération de naissance des individus qui peut influencer le risque décès indépendamment de tout effet annuel et simplement par le passé des individus.

L'exemple classique présenté pour l'effet de génération ou de cohorte est une épidémie touchant les individus d'une génération particulière et ayant pour conséquence d'avoir opéré une sélection sur ses individus les plus résistants par rapport aux générations n'ayant pas connu cette épidémie. Cette génération sera alors probablement plus robuste par la suite que les autres et cela se traduira par des taux de décès plus bas aux âges supérieurs.

Chacune des trois données décrites ci-avant sont importantes dans la détermination du niveau de mortalité, mais elles sont redondantes. En effet, deux d'entre elles suffisent à déterminer la troisième. Le diagramme de Lexis est alors un système d'axes rectangulaires permettant de représenter la vie d'un individu selon les trois coordonnées âge, date et génération. Cependant, cette figure privilégie l'âge et la date qui sont affectés d'un des deux axes du diagramme comme indiqué ci-après.

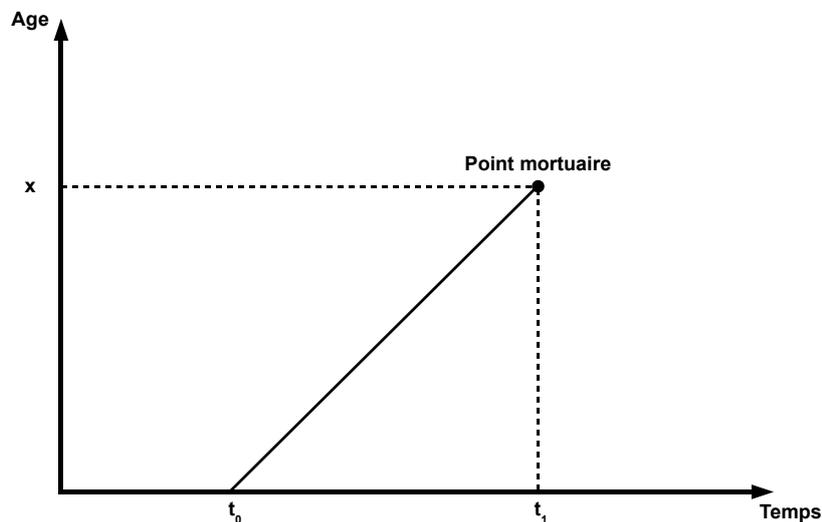


Diagramme de Lexis et vie d'un individu

Sur cette figure, le parcours d'un individu est représenté par le segment parallèle à la première bissectrice qui « débute » en t_0 sur l'axe du temps porté en abscisse, et « finit » en t_1 au « point mortuaire ». L'individu est donc né en t_0 et décédé en t_1 à l'âge x lu en ordonnée ou bien par $x = t_1 - t_0$.

2.1.2 Nombre de décès

Plus en avant dans ce mémoire, nous allons employer la notation D_{xt} qui représente le nombre de décès parmi tous les individus de x années révolues durant l'année t . Avec le diagramme de Lexis, nous pouvons localiser ces différents points mortuaires dans le carré hachuré, intersection des bandes horizontale pour l'âge x et verticale pour l'année t . La figure ci-dessous permet de visualiser nos propos.

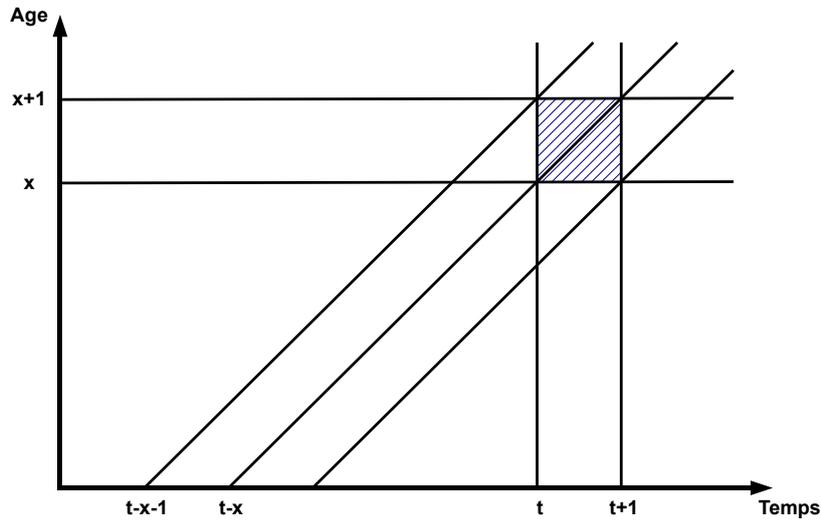


Diagramme de Lexis et nombre de décès

Il est intéressant de noter que les individus concernés appartenaient aux générations $t - x$ et $t - x - 1$. En d'autres termes, ils étaient nés en année entière entre le 1^{er} janvier de l'année calendaire $t - x - 1$ et le 31 décembre de l'année $t - x$, soit sur deux années ou générations.

2.2 Notations actuarielles

Nous notons dans toute la suite de ce rapport par $T_x(t)$ la durée de vie résiduelle au temps t pour un individu d'âge x . Dans un but de simplification des notions

présentées par la suite, les différentes durées et dates sont supposées prendre des valeurs entières.

2.2.1 Probabilité de survie

Nous notons par ${}_k p_x(t)$ la probabilité pour qu'un individu ayant atteint à la date t l'âge x survive au moins k années supplémentaires.

Définition 2.2.1. Avec les notations précédentes, il vient pour $x, k, t \geq 0$ que :

$${}_k p_x(t) = \mathbb{P}(T_x(t) > k \mid T_x(t) > 0).$$

S'il existe bien une relation fondamentale en mathématique actuarielle, alors elle est certainement la suivante.

Proposition 2.2.1. Nous avons la relation suivante pour $x, k, l, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} {}_{k+l} p_x(t) &= \mathbb{P}(T_x(t) > k+l \mid T_x(t) > 0) \\ &= {}_k p_x(t) \cdot {}_l p_{x+k}(t+k). \end{aligned}$$

2.2.2 Probabilité de décès

Bien entendu, la probabilité complémentaire à la probabilité de survie est celle pour qu'un individu ayant atteint l'âge x à la date t décède dans les k années suivantes. Nous la notons par ${}_k q_x(t) = 1 - {}_k p_x(t)$.

Définition 2.2.2. Avec les notations précédentes, il vient pour $x, k, t \geq 0$ que :

$${}_k q_x(t) = \mathbb{P}(T_x(t) \leq k \mid T_x(t) > 0).$$

2.2.3 Remarque

Remarquons au passage que bien souvent lorsque $k = 1$ ce dernier est alors omis dans les notations précédentes. Dans ce cas, $p_x(t)$ est la probabilité pour qu'un individu survive une année supplémentaire alors que ce dernier a un âge x à la date t . A contrario, $q_x(t)$ est la probabilité pour un individu d'âge x à la date t de mourir dans l'année suivante.

Dès lors, on peut exprimer la première probabilité en fonction des probabilités annuelles.

Proposition 2.2.2. Nous avons la relation suivante pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$${}_k p_x(t) = p_x(t) \cdot p_{x+1}(t+1) \cdots p_{x+k-1}(t+k-1).$$

Démonstration. En effet pour qu'un individu d'âge x à la date t survive k années supplémentaires, il faut que ce dernier survive :

- la première année, soit avec la probabilité $p_x(t)$,
- la deuxième année, ou de façon équivalente, en ayant atteint l'âge $x + 1$ à la date $t + 1$ qu'il survive encore une année de plus. La probabilité associée à cet événement est alors de $p_{x+1}(t + 1)$,
- ... ,
- la $k^{\text{ième}}$ année, soit en ayant atteint l'âge $x + k - 1$ à la date $t + k - 1$ qu'il survive encore une année supplémentaire. La probabilité qui est associée à ce dernier événement est de $p_{x+k-1}(t + k - 1)$.

□

2.2.4 Taux de mortalité¹

Commençons tout d'abord par parler du **taux central de mortalité annuel**. Ce taux à la date t et pour l'âge x est noté par la suite par $m_x(t)$.

Définition 2.2.3. Avec les notations précédentes, le *taux central de mortalité annuel* est défini pour $x, t \in \mathbb{N}$ par

$$m_x(t) = \frac{\text{Nombre de décès à l'âge } x \text{ durant l'année } t}{\text{Effectif moyen durant l'année } t \text{ d'âge } x}.$$

Précisons que l'année t est à prendre au sens de l'année calendaire, soit entre les dates t et $t + 1$. L'âge x doit être compris comme l'âge atteint au dernier anniversaire.

Pour définir ce taux de manière formelle, nous devons introduire de nouvelles notations. Nous reprenons le nombre D_{xt} de décès à l'âge x durant l'année t vu à la sous section 2.1.2 et nous introduisons L_{xt} le nombre d'individus de x années révolues durant l'année t . Nous obtenons alors la définition suivante de l'exposition au risque ou de l'effectif moyen.

Proposition 2.2.3. Pour $x, t \in \mathbb{N}$, nous pouvons définir l'exposition au risque E_{xt} à l'âge x durant l'année t par :

$$E_{xt} = \int_{\eta=0}^1 L_{x+\eta, t+\eta} d\eta.$$

Nous pouvons alors redéfinir le taux $m_x(t)$ de manière formelle.

¹paragraphe réalisé à partir de Cairns, Blake et Dowd (2008) [6]

Définition 2.2.4. Avec les notations précédentes, le taux central de mortalité annuel peut se réécrire pour $x, t \in \mathbb{N}$ par

$$m_x(t) = \frac{D_{xt}}{E_{xt}}.$$

Ce premier taux est à mettre en relation avec le **taux instantané de mortalité** à la date t et à l'âge x pour des valeurs réelles. Nous notons ce dernier par $\mu_x(t)$. Nous pouvons donner la propriété suivante :

Proposition 2.2.4. Avec les notations précédentes, nous avons les relations suivantes :

$$q_x(t) = 1 - \exp \left[- \int_t^{t+1} \mu_{x-t+s}(s) ds \right],$$

ainsi que

$$p_x(t) = \exp \left[- \int_t^{t+1} \mu_{x-t+s}(s) ds \right].$$

2.2.5 Hypothèse usuelle

Bien souvent en actuariat certaines hypothèses sont faites sur ces taux de mortalité. Dans le cadre de ce mémoire, nous allons le plus souvent travailler avec l'hypothèse de constance par morceaux des taux instantanés de mortalité sur chaque carré du diagramme de Lexis.

Hypothèse 2.2.1. L'hypothèse de constance par morceaux des taux instantanés de mortalité est donnée pour $0 \leq u, s \leq 1$ par :

$$\mu_{x+u}(t+s) = \mu_x(t) \text{ avec } x, t \in \mathbb{N}.$$

Cette hypothèse a pour conséquence directe d'impliquer la proposition suivante.

Proposition 2.2.5. Sous l'hypothèse et les notations précédentes, nous avons les relations suivantes :

- i. $m_x(t) = \mu_x(t)$,
- ii. $p_x(t) = \exp [-\mu_x(t)] = \exp [-m_x(t)]$.

2.3 Rentes et capitaux décès

Par la suite dans ce mémoire, nous allons très souvent utiliser les termes de rentes et d'assurances vie de manière générale. Notons au passage que nous allons faire l'amalgame entre les termes « assurance vie », « assurance en cas de décès » et

« capital décès ». En effet dans ce mémoire, nous estimons que ces différents produits sont équivalents à un montant forfaitaire près correspondant au niveau souscrit pour l'assurance vie. Pour bien fixer les idées, nous présentons donc les définitions ainsi que les formules actuarielles générales pour une rente et un capital décès. Remarquons que la période considérée est à chaque fois l'année. Les formules et définitions sont néanmoins facilement généralisables pour des périodes quelconques.

2.3.1 Les Rentes

A - 1 Rentes viagères annuelles

En mathématique actuarielle, une rente viagère correspond à un engagement de verser une unité monétaire, chaque année, jusqu'au décès de l'assuré. La valeur actuelle probable d'une rente à terme *anticipé* et annuel pour un individu d'âge x à la date t est donnée par

$$\ddot{a}_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_{(t,t+k)} {}_k p_x(t),$$

avec $v_{(t,t+k)}$ le facteur d'actualisation entre l'année t et l'année $t+k$.

De la même manière, nous pouvons définir une rente à terme *échu* et annuel pour un individu d'âge x à la date t par

$$a_x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{(t,t+k)} {}_k p_x(t) = \ddot{a}_x(t) - 1.$$

La différence entre terme *anticipé* et *échu* se situe donc dans la date de paiement des arrérages de rente. Dans le premier cas, ceux-ci ont lieu en début d'année alors que dans le second, ils ont lieu en fin d'année.

A - 2 Rentes viagères avec différé et temporaire

L'ajout d'un *différé* indique que les paiements des arrérages n'auront lieu que ultérieurement et non immédiatement. De plus en cas de *temporaire*, les versements auront quoiqu'il advienne une limite temporelle. Nous donnons la formule mathématique de la valeur actuelle probable d'une rente à terme anticipé et annuel avec différé s et

temporaire u , pour un individu d'âge x à la date t :

$${}_{s|u}\ddot{a}_x(t) = \sum_{k=s}^{s+u-1} v_{(t,t+k)} {}_k p_x(t),$$

où $v_{(t,t+k)}$ est encore une fois le facteur d'actualisation entre le temps t et le temps $t+k$.

Nous pouvons donner également l'analogie de la valeur actuelle probable pour une rente à terme échu et annuel :

$$\begin{aligned} {}_{s|u}a_x(t) &= \sum_{k=s+1}^{s+u} v_{(t,t+k)} {}_k p_x(t) \\ &= {}_{s|u}\ddot{a}_x(t) - v_{(t,t+s)} {}_s p_x(t) + v_{(t,t+s+u)} {}_{s+u} p_x(t). \end{aligned}$$

A - 3 Principaux risques encourus

Globalement pour ce type de produit, il y a deux risques majeurs.

- Un premier purement financier lié au risque de fluctuation du taux d'intérêt. On peut voir dans les formules que ce taux a un impact direct sur la valeur calculée du contrat.
- Un second non financier lié au risque de dérive de la longévité humaine. En effet, ce risque impacte directement le nombre d'ar-rérages de rentes que l'assureur ou le gestionnaire devra payer à ses assurés. Si dans les faits, une amélioration de la mortalité sera constatée alors les engagements auront été supérieurs à ceux de la valeur actuelle probable calculée en son temps. En cas de détério-ration future de la mortalité, c'est tout simplement l'effet inverse.

En définitive, le risque lié au taux d'intérêt n'est pas celui prépondé-rant, dans le cas où bien entendu les taux demeurent stables et à un niveau relativement bas. Dans la situation contraire, il devient natu-rellement le plus important.

2.3.2 Les Capitaux décès

B - 1 Capitaux en fin d'année du décès

En mathématique actuarielle, un capital correspond à l'engagement de verser une unité monétaire en fin d'année du décès de l'assuré.

Nous donnons alors la valeur actuelle probable d'un tel produit

$$A_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_{(t,t+k)} {}_k p_x(t) q_{x+k}(t+k),$$

avec $v_{(t,t+k)}$ le facteur d'actualisation entre l'année t et l'année $t+k$.

B - 2 *Capitaux avec différé et temporaire*

Les notions de *différé* et *temporaire* sont les mêmes que celles précédemment évoquées. La valeur actuelle probable d'un tel engagement avec versement en fin d'année du décès est :

$${}_{s|u}A_x(t) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v_{(t,t+k)} {}_k p_x(t) q_{x+k}(t+k).$$

où $v_{(t,t+k)}$ est encore une fois le facteur d'actualisation entre le temps t et le temps $t+k$.

B - 3 *Principaux risques encourus*

Outre l'exposition aux fluctuations du taux d'intérêt, ce type de contrats est sensible au risque dû à une sur-mortalité non anticipée par la compagnie. Dans cette situation, la société devra verser ses prestations plus tôt que ce qu'elle avait calculé à l'origine. Dans le cas contraire, elle bénéficie de l'allongement de la durée de vie résiduelle de ses assurés en payant bien plus tard ses engagements.

Présentation des modèles de mortalité¹

ans ce chapitre, nous allons présenter sept modèles particuliers de mortalité. Ces modèles relèvent tous de la méthodologie que nous avons privilégiée dans la première section, cf. 1.3. En effet, ils se basent tous sur la connaissance passée de la mortalité pour extrapoler celle future. De plus, ils ont l'avantage certain d'être tous stochastiques, ce qui va permettre de tenir compte des variations de la mortalité autour de la tendance extrapolée. Par contre, ils n'autorisent pas dans leur forme de base tout du moins l'avis d'expert ou la prise en compte de causes spécifiques pour la mortalité. Avant de passer à la description de ces modèles, nous devons remarquer que ceux-ci font partie de l'outil informatique *LifeMetrics*², cf. *Software user guide* [16], développé par la société *JPMorgan*. Il permet d'estimer les paramètres de ces modèles ainsi que de réaliser des simulations pour les projections de la mortalité au delà de la date du dernier taux de mortalité connu. Notons au passage que les programmes sont implémentés dans le langage du logiciel **R**.

Ce chapitre débute par l'introduction d'une hypothèse centrale à cette étude : l'hypothèse de modélisation du nombre de décès D_{xt} à l'âge x durant l'année t par une loi de Poisson. En effet, cette dernière est commune à tous les modèles développés dans *LifeMetrics*, et a pour conséquence directe l'emploi du critère du maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres. Ces modèles sont plus amplement détaillés dans la seconde et dernière section de ce chapitre.

¹section réalisée à partir de Cairns et *all* (2007) [7]

²téléchargeable gratuitement sur le site <http://www.jpmorgan.com/pages/jpmorgan/investbk/solutions/lifemetrics>

3.1 Hypothèse de Poisson

Le modèle proposé par Lee et Carter en 1992, cf. Lee & Carter (1992) [18], est certainement l'un des modèles les plus standard pour générer des tables prospectives de mortalité. Nous présentons en annexe à la page 111 ce modèle particulier. Le principal défaut de ce dernier repose sur l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus lors de l'estimation par les moindres carrés ordinaires. Effectivement, on constate bien souvent que la variance des taux de mortalité observés croît pour les âges élevés en raison du faible nombre d'observation à ces âges. Le lecteur peut se référer à Planchet & Thérond (2006) [21] pour une illustration de ce fait. Brouhns, Denuit et Vermunt ont alors proposé une adaptation du modèle de Lee-Carter pour pallier à ce défaut important. Dans Brouhns, Denuit & Vermunt (2002) [4], il est suggéré de modéliser le nombre D_{xt} de décès à l'âge x durant l'année t comme une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de moyenne $E_{xt}\mu_x(t)$.

Les programmes développés par *LifeMetrics* ont pour hypothèse sous-jacente cette modélisation particulière du nombre de décès D_{xt} . Nous partons alors du principe que pour l'ensemble des modèles présentés ultérieurement nous avons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1.1. *Nous considérons dès à présent que la loi du nombre de décès à l'âge x durant l'année t suit la loi suivante :*

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}\mu_x(t)),$$

avec E_{xt} l'exposition au risque, soit la taille moyenne de la population d'âge x durant l'année t , et $\mu_x(t)$ le taux instantané de mortalité.

Cette hypothèse est très intéressante dans la mesure où elle va nous permettre d'utiliser le critère du maximum de vraisemblance au lieu de celui des moindres carrés ordinaires comme dans Lee-Carter pour estimer les paramètres des modèles exposés. De plus, l'hypothèse de constance par morceaux des taux de mortalité (hypothèse 2.2.1) ne vient pas contredire la modélisation que nous venons de retenir. En effet, les vraisemblances qui découlent de ces deux hypothèses ne diffèrent que d'un facteur constant près, cf. Delwarde (2005) [13]. Rappelons de même que sous cette dernière hypothèse, il devient alors équivalent d'employer les taux $\mu_x(t)$ et $m_x(t)$.

Les programmes de *LifeMetrics* sont donc construits *via* le critère du maximum de vraisemblance pour estimer les différents paramètres du modèle. Notons par ϕ l'ensemble des paramètres d'un modèle, nous modifions alors momentanément la notation du taux $m_x(t)$ par $m_x(t; \phi)$ afin de bien marquer la dépendance de ce taux à

ces paramètres. La vraisemblance des différents modèles peut alors se synthétiser en utilisant les hypothèses 2.2.1 et 3.1.1 sous :

$$L(\phi) = \prod_{x,t} \frac{(E_{xt}m_x(t; \phi))^{D_{xt}}}{(D_{xt})!} \exp(-E_{xt}m_x(t; \phi)).$$

La log-vraisemblance s'écrit donc pour tous les modèles comme suit :

$$\ln L(\phi) = \sum_{x,t} D_{xt} \ln(E_{xt}m_x(t; \phi)) - E_{xt}m_x(t; \phi) - \ln((D_{xt})!).$$

Bien entendu pour les modèles M5 à M8 où nous disposons de la modélisation de $q_x(t)$, nous utilisons alors la propriété suivante découlant de l'hypothèse 2.2.1 :

$$m_x(t; \phi) = -\ln(1 - q_x(t; \phi)).$$

3.2 Les modèles de *LifeMetrics*

Cette section est destinée à fournir au lecteur une description des sept modèles qui sont implémentés informatiquement par *LifeMetrics*. Ils sont tous basés sur l'hypothèse de Poisson décrite dans la section précédente. Dans la suite de cette section, les notations suivantes sont employées de manière générale :

- $\beta_x^{(i)}$ paramètres reflétant l'effet relatif de l'âge, avec x la variable représentant l'âge ;
- $\kappa_t^{(i)}$ paramètres reflétant l'effet relatif de la période, avec t la variable représentant le temps ou la période ;
- $\gamma_{t-x}^{(i)}$ paramètres reflétant l'effet relatif de la cohorte, avec $t - x$ la variable représentant la génération de naissance.

Le tableau suivant offre un premier aperçu des modèles en question avec \bar{x} la moyenne empirique des âges sélectionnés, $\widehat{\sigma}_x^2$ son écart-type empirique et x_c un paramètre constant à estimer.

Modèle	Formule
M1	$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$
M2	$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$
M3	$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}$
M5	$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x})$
M6	$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$
M7	$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \widehat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}$
M8	$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x)$

Précisons que la fonction logit est définie de la manière suivante :

$$\forall z \in]0, 1[, \quad \text{logit}(z) = \frac{z}{1-z}.$$

On peut trouver dans Cairns & *all* (2007) [7] la description détaillée de ces modèles, ainsi que leurs avantages et inconvénients. Ces derniers peuvent être classifiés en deux grandes familles.

1. Extensions du modèle de Lee-Carter (M1, M2 et M3).
2. Extensions du modèle de Cairns, Blake & Dowd (M5, M6, M7 et M8).

Il n'existe pas réellement un modèle meilleur qu'un autre et on peut dire que tout dépend des données sur lesquels la modélisation est effectuée.

3.2.1 M1 - modèle de Brouhns, Denuit & Vermunt

Le modèle proposé dans Brouhns, Denuit & Vermunt (2002) [4] reprend la structure log-bilinéaire des taux de mortalité proposé par Lee & Carter. Ainsi, nous avons :

$$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}.$$

La différence entre les deux modèles repose donc sur la formulation de l'hypothèse de Poisson 3.1.1 qui implique une modification au niveau de la structure de l'erreur. Dans le modèle de Lee-Carter, l'erreur est représentée par un bruit additif sur l'échelle logarithmique. Ici, c'est la loi de Poisson qui est utilisée pour modéliser le nombre de décès.

Cette même expression du taux de mortalité a pour conséquence de devoir introduire des contraintes identiques pour pouvoir identifier les paramètres du modèles. Les contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sum_x \beta_x^{(2)} &= 1, \\ \sum_t \kappa_t^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Les paramètres signifient alors :

- $\beta_x^{(1)}$ décrit le comportement moyen des $\ln m_x(t)$ au cours du temps,
- $\beta_x^{(2)}$ est la sensibilité pour chaque âge x des logarithmes des taux de mortalité par rapport à la composante temporelle $\kappa_t^{(2)}$,
- $\kappa_t^{(2)}$ décrit l'évolution de la mortalité à travers le temps.

3.2.2 M2 - modèle de Renshaw-Haberman

Dans Renshaw & Haberman (2006) [25], les auteurs proposent un modèle de mortalité stochastique qui possède l'originalité d'incorporer un effet de cohorte, c'est-à-dire d'ajouter une composante liée à l'année de naissance. Néanmoins, ce modèle demeure un dérivé de celui de Lee-Carter dans le sens où les logarithmes des taux de mortalité instantanés sont ajustés de la manière suivante

$$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}.$$

La composante $\gamma_{t-x}^{(3)}$ représente donc l'effet aléatoire lié à la génération de naissance $t - x$.

Le modèle M1 est bien un cas particulier de ce modèle M2 puisqu'on retrouve le modèle originel de Lee-Carter en fixant $\beta_x^{(3)} = 0$ et $\gamma_{t-x}^{(3)} = 0$. Ce modèle possède donc les mêmes problèmes d'identifiabilité et pour parer à cet inconvénient, on peut imposer les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_t \kappa_t^{(2)} &= 0, \\ \sum_x \beta_x^{(2)} &= 1, \\ \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} &= 0 \quad \text{et,} \\ \sum_x \beta_x^{(3)} &= 1. \end{aligned}$$

Dans leur article, Renshaw et Haberman ont trouvé une amélioration notable de ce modèle par rapport à celui de Lee-Carter à partir des données masculines anglaises et galloises. Ces améliorations portaient notamment sur l'analyse des résidus standardisés qui révèle une très faible dépendance en comparaison avec le modèle de Lee-Carter. Pour plus de détails sur les avantages et critiques de ce modèle, nous renvoyons le lecteur à Cairns, Blake & Dowd (2008) [6].

3.2.3 M3 - modèle Age-Période-Cohorte de Currie

Ce modèle introduit dans Currie (2006) [11] est en fait un cas spécial du modèle M2. En effet, les taux de mortalité sont ici :

$$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}.$$

Le modèle M3 est donc bien un cas particulier du modèle M2 avec $\beta_x^{(2)} = 1$ et $\beta_x^{(3)} = 1$. Encore une fois pour des raisons d'identifiabilité des paramètres, les

contraintes suivantes sont imposées :

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad \text{et,}$$

$$\sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

Une contrainte supplémentaire doit être rajoutée. On peut ajouter $\delta((t - \bar{t}) - (x - \bar{x}))$ à $\gamma_{t-x}^{(3)}$, soustraire $\delta(t - \bar{t})$ de $\kappa_t^{(2)}$ et additionner $\delta(x - \bar{x})$ de $\beta_x^{(1)}$ sans impact sur les deux contraintes précédentes. La notation \bar{x} ou \bar{t} signifie bien évidemment la moyenne empirique relatif aux âges x et aux années t . Le paramètre δ est alors choisi par minimisation de

$$\sum_x (\beta_x^{(1)} + \hat{\sigma}_x^2(x - \bar{x}) - \bar{\beta}_x^{(1)})^2,$$

où $\bar{\beta}_x^{(1)} = n_{ans}^{-1} \sum_t \ln m_x(t)$ avec n_{ans} le nombre d'années. Ce qui implique que :

$$\delta = \frac{\sum_x (x - \bar{x})(\beta_x^{(1)} - \bar{\beta}_x^{(1)})}{\sum_x (x - \bar{x})^2}.$$

On révisé alors l'estimation des paramètres selon les formules :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_x^{(1)} &= \beta_x^{(1)} + \delta(x - \bar{x}), \\ \tilde{\kappa}_t^{(2)} &= \kappa_t^{(2)} - \delta(t - \bar{t}) \quad \text{et,} \\ \tilde{\gamma}_{t-x}^{(3)} &= \gamma_{t-x}^{(3)} + \delta((t - \bar{t}) - (x - \bar{x})). \end{aligned}$$

3.2.4 M5 - modèle de Cairns, Blake & Dowd

Dans Cairns, Blake & Dowd (2006) [5], nous avons la modélisation suivante des taux de mortalité.

$$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}),$$

où \bar{x} est la moyenne empirique des âges sélectionnés. Ce modèle a l'avantage de ne pas avoir de contraintes d'itérabilité.

3.2.5 M6 - modèle de Cairns, Blake & Dowd avec effet de cohorte

Ce modèle généralise le précédent en incluant un effet de cohorte. Les taux de mortalité suivent le modèle suivant.

$$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)},$$

où \bar{x} est la moyenne empirique des âges sélectionnés. Cette fois, on doit fixer des contraintes pour pouvoir identifier les paramètres. On peut par exemple remplacer $\gamma_{t-x}^{(3)}$ en $\gamma_{t-x}^{(3)} + \phi_1 + \phi_2(t - x - \bar{x})$ et avec les ajustements correspondant sur $\kappa_t^{(1)}$ et $\kappa_t^{(2)}$ n'obtenir aucun impact sur les valeurs prédites des taux de mortalité. La contrainte choisie est que si on utilise les moindres carrés pour ajuster une fonction linéaire en $t - x$ à $\gamma_{t-x}^{(3)}$, alors la fonction ajustée est identiquement égale à zéro. En appliquant ceci, l'estimation de $\gamma_{t-x}^{(3)}$ est centrée autour de zéro.

3.2.6 M7 - modèle de Cairns, Blake & Dowd avec effet de cohorte et effet quadratique de l'âge

Ce modèle est la généralisation du précédent en ajoutant simplement un terme quadratique dans l'effet dû à l'âge. Ainsi, le modèle propose d'ajuster les taux de mortalité par

$$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \widehat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)},$$

où \bar{x} est la moyenne empirique des âges sélectionnés, et $\widehat{\sigma}_x^2$ son écart-type empirique. Nous avons également un problème d'identifiabilité des paramètres du modèle. On peut substituer $\gamma_{t-x}^{(4)}$ en $\gamma_{t-x}^{(4)} + \phi_1 + \phi_2(t - x - \bar{x}) + \phi_3(t - x - \bar{x})^2$ et avec les ajustements correspondant sur $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$ et $\kappa_t^{(3)}$ n'obtenir aucun impact sur les valeurs prédites des taux de mortalité. On impose la contrainte que la fonction quadratique ajustée par les moindres carrés pour $\gamma_{t-x}^{(4)}$ est identiquement égale à zéro. L'estimation de $\gamma_{t-x}^{(4)}$ fluctue alors autour de zéro.

3.2.7 M8 - modèle de Cairns, Blake & Dowd avec effet de cohorte « décroissante »

Le dernier modèle propose l'ajustement suivant des taux de mortalité.

$$\text{logit } q_x(t) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x),$$

où \bar{x} est la moyenne empirique des âges sélectionnés, et x_c un paramètre constant à estimer. On doit alors introduire une contrainte pour pouvoir identifier les paramètres :

$$\sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0.$$

La couverture « naturelle »

n premier lieu pour traiter de la couverture naturelle, nous venons d'introduire les notions préalables liées aux risques de longévité et de mortalité. Nous disposons maintenant de ce contexte théorique et sommes en mesure d'échafauder la partie pratique de cette étude. Mais avant, nous souhaitons exclusivement consacrer ce chapitre à la présentation de la couverture naturelle. Un premier jet serait de considérer le principe de couverture naturelle entre les risques de longévité et de mortalité comme un instrument permettant de compenser ces deux risques de nature plutôt systématique, c'est-à-dire non mutualisable. Nous débutons alors ce chapitre par une revue concise et détaillée de cette couverture naturelle telle qu'elle peut être vue dans la publication scientifique. Enfin, nous finissons en mentionnant les principales critiques pouvant être formulées à l'encontre de cet outil.

4.1 Une revue de la recherche actuelle

L'idée même de la couverture naturelle n'est pas nouvelle. Il suffit simplement d'observer que les engagements au niveau des contrats en assurance en cas de décès et en cas de vie, soit de manière schématique les contrats d'assurance vie et de rente, répondent de manière opposée à un changement de la mortalité sous-jacente. Pourtant, peu d'études ont été menées dans ce sens, bien que l'on trouve référence à cette idée dans un certain nombre d'articles qui s'attachent à étudier l'impact de la mortalité séparément et non conjointement sur ces deux types de contrats. Néanmoins, son analyse en tant que telle a fait l'objet de quelques parutions dans la littérature scientifique.

L'un des principaux articles traitant de ce sujet est celui de Cox & Lin (2007) [10]. Partant de l'intérêt fondamental sous-jacent à la couverture naturelle, les auteurs

cherchent à évaluer le prix d'une rente par le biais d'une régression, dont parmi les variables explicatives on trouve le niveau de couverture naturelle ainsi que des variables liées à la compagnie et à l'effet annuel. Il faut noter que le niveau de couverture naturelle correspond au ratio des réserves d'assurance vie par rapport aux réserves totales d'assurance vie et de rente. Le résultat empirique marquant de cet article est que les compagnies d'assurance bénéficient réellement des effets de cette couverture, et ainsi d'un avantage concurrentiel.

En pratique néanmoins, toutes les compagnies n'ont pas les capacités d'utiliser ce type de couverture. Les auteurs proposent donc le *mortality swap* comme instrument de couverture naturelle. Ce *swap* s'effectue entre un assureur vie et un gestionnaire de rente. Ce dernier paiera les flux variables de trésorerie à l'assureur vie basés sur le nombre de décès dans le portefeuille de l'assureur. En échange, l'assureur paiera un flux basé sur le nombre de survivants dans le portefeuille du gestionnaire.

Outre la référence principale explicitée ci-dessus, on trouve dans la recherche scientifique des articles traitant de la couverture naturelle par le biais d'étude sur des portefeuilles mélangeant des produits de type assurance en cas de décès et de rente. Deux références dans ce domaine sont Bayraktar & Young (2007) [3] et Bayraktar & Ludkovski (2008) [2].

Dans Bayraktar & Young (2007) [3], les auteurs utilisent le ratio de Sharpe pour pouvoir évaluer un portefeuille mélangeant un certain nombre de contrat d'assurance en cas de vie et en cas de décès. Le contexte de l'article suppose que le taux d'intérêt et le taux de mortalité suivent des diffusions particulières. Le résultat marquant de cet article est alors que le prix d'un tel portefeuille est sous-additif. En particulier, pour un volume équivalent, la valeur d'un portefeuille mixte est toujours inférieure à celle d'un portefeuille composé uniquement d'un seul des deux types de produit.

Dans Bayraktar & Ludkovski (2008) [2], l'idée est de capturer le niveau de couverture mutuelle entre les différentes composantes d'un portefeuille d'un assureur que sont les contrats à terme d'assurance vie et les rentes temporaires. La mortalité ainsi que le taux d'intérêt sont supposés stochastiques et modélisés *via* des diffusions particulières. En application, l'effet réducteur de la couverture mutuelle peut alors être exhibé en comparant le prix obtenu pour une rente temporaire avec celui sans affaire en contrat d'assurance décès. Enfin pour plus de précision, nous notons que la méthode principale d'évaluation employée dérive du principe d'utilité espérée de la transformée d'Esscher : *dynamic exponential premium principle*.

Une référence plus atypique mais pas moins intéressante est celle de Gründl, Post & Schulze (2005) [15]. Leur vision est celle de l'actionnaire, soit en d'autres termes de maximiser la valeur d'une compagnie d'assurance revenant à ce dernier.

Ils choisissent comme hypothèse une compagnie à responsabilité limitée, constituée à partir d'un capital social et de la vente de contrats de rente et d'assurance vie temporaire. De plus, ils autorisent la compagnie à investir en actifs risqués et sans risque.

Cette société est alors soumise à un risque démographique, c'est-à-dire un risque que les tables de mortalité changent d'une manière non déterministe. L'article s'intéresse alors à l'impact de ce risque sur la politique optimale de gestion de la société (en capital, allocation en actifs et gestion des produits). Ce risque est par ailleurs représenté par un changement de table selon la réalisation de certains états du monde en nombre limité. Le résultat intéressant qui découle de l'analyse de cet article est que la couverture naturelle est optimale seulement si le capital n'est pas suffisant pour atteindre un certain niveau optimal. Sinon, il se peut même que l'emploi de la couverture naturelle détruit de la valeur pour l'actionnaire.

Enfin, pour conclure cette revue scientifique, on peut citer également l'étude de Wang, Yang & Pan (2003) [28]. Ces derniers analysent l'impact d'un changement de la mortalité pour une compagnie d'assurance commercialisant des produits d'assurance vie et de rente. Ils proposent un modèle d'immunisation pour couvrir ce risque basé sur la mortalité d'expérience à Taiwan. Ce modèle pourrait être mis en parallèle avec les méthode de Δ -hedging en finance. La principale critique pouvant être formulée à l'encontre de ce modèle est que les mortalités d'expérience en assurance vie et en rente peuvent réellement être différentes. La difficulté est donc qu'il y a là un risque de base non pris en compte dans un tel modèle.

4.2 Limites et critiques de la couverture naturelle

Tout d'abord, si on prend l'exemple simpliste de deux contrats d'assurance décès d'un côté et de rente de l'autre souscrits sur la même personne, alors nous sommes dans le cas d'une couverture parfaite face à une évolution de la mortalité sous-jacente. Bien entendu, cet exemple souffre de certaines critiques, et la principale est qu'en pratique ce cas de figure n'est pas le plus représentatif. En fin de compte, il est certainement illusoire d'espérer atteindre ce type de couverture parfaite pour un assureur ou un gestionnaire quelconque. Néanmoins, cet argument ne met pas en défaut le fait qu'il est quand même possible d'obtenir une couverture imparfaite mais réelle à partir d'affaires en assurance vie et en rente.

Dans le même ordre idée, on peut arguer du phénomène d'antisélection dans les domaines de l'assurance vie et des rentes. En effet, cette antisélection implique que les risques issus de la mortalité de ces deux types d'affaires ne sont pas les

mêmes. En conclusion, un risque de base peut être exhibé, et ayant pour conséquence de limiter la faisabilité de la couverture naturelle.

Pour finir, on peut citer une autre difficulté pratique. L'objectif de la couverture naturelle est de gérer le plus efficacement les deux types d'affaires afin de minimiser le risque de mortalité global du portefeuille commun. Or, l'assurance vie et les rentes peuvent être sujetes à toutes sortes d'influences différentes. La question en jeu est alors de connaître le facteur de corrélation de ces diverses influences. Ceci n'est pas une chose aisée puisqu'il n'existe pas encore de réel marché sur lequel serait côtés ces deux produits, ce qui offrirait l'avantage non négligeable de fournir une estimation fiable de tels facteurs de corrélation.

En définitive, cette partie donne un aperçu des principales critiques et limitations que l'on peut trouver lorsque l'on évoque la couverture naturelle. Elle donne également une raison du succès dans la littérature scientifique des articles portant sur la gestion des risques de mortalité et de longévité *via* des instruments financiers tels que la titrisation. En effet, la couverture naturelle ne va pas immuniser totalement l'assureur ou le gestionnaire de rente mais elle peut participer à cela de manière directe ou indirecte. Nous citons pour illustrer le dernier point l'exemple présenté dans Cox & Lin (2007) [10], soit un *mortality swap* entre un assureur vie et un gestionnaire de rente qui profite indirectement de la couverture naturelle entre les deux types de produits.

Deuxième partie

Mise en œuvre pratique de la couverture naturelle

Dans cette deuxième partie, nous nous intéressons de manière générale à l'ensemble des mécanismes que nous allons devoir utiliser pour pouvoir étudier la couverture naturelle comme moyen de gestion des risques de mortalité et de longévité. Dans la partie précédente, nous avons déjà introduit les notions nécessaires à la compréhension de ce mémoire, ainsi que sept modèles de mortalité. Nous disposons donc d'une base théorique pour nos différentes applications. Dans la suite, nous désirons utiliser des portefeuilles de rentes pour symboliser le risque de longévité, et des portefeuilles d'assurances vie pour celui de mortalité. La situation intéressante à analyser de notre point de vue consiste bien entendu en l'association des deux. Notre but ici s'avère de transcrire les différents choix, hypothèses et méthodes que nous avons choisis pour mener à bien cet objectif.

Cette partie s'articule en trois chapitres. Le premier commence par un rappel non exhaustif des différentes mesures existantes en statistique pour quantifier le risque. Nous en avons besoin dans l'optique d'évaluation du niveau des risques qui nous intéressent, mais également pour mesurer et comparer le degré de couverture naturelle. Nous détaillons ensuite la manière que nous utilisons pour obtenir les simulations des portefeuilles utilisés dans cette étude. Ce travail se scinde en deux étapes principales, correspondantes chacune à un chapitre. La première étape consiste à décrire les méthodes nous permettant de générer des tables prospectives de mortalité à partir de modèles calibrés sur les données françaises. Ces tables sont l'outil adéquat lorsque l'on souhaite étudier le risque de dérive de la longévité dans le futur. Elles sont donc la source des simulations des engagements liés aux portefeuilles et de leur analyse, présentées dans la deuxième étape.

*Les mesures du risque*¹

ans le cadre de ce mémoire, nous allons avoir besoin de quantifier le « risque » pouvant être associé aux produits de rentes ou d'assurances vie par exemple. Dans cette optique, il est donc tout-à-fait logique de se tourner vers cette classe de fonctions que l'on nomme les mesures de risque. Nous débutons donc ce chapitre par une première section regroupant des définitions et des propriétés utiles de ces fonctions. Puis, nous finissons en nous penchant sur le cas particulier des mesures qui sont employées par la suite dans ce mémoire.

1.1 Définitions et propriétés des mesures de risque

Nous donnons dans cette section quelques définitions et propriétés nécessaires pour bien comprendre ce qu'est une mesure de risque.

1.1.1 Définition d'une mesure de risque

Pour clarifier nos propos, nous notons par X la variable aléatoire représentant un risque quelconque. Dans le domaine de l'assurance et plus précisément dans cette étude, un risque peut être représenté par les coûts totaux induits par un portefeuille. Pour finir, nous donnons la définition succincte suivante d'une mesure de risque.

Définition 1.1.1. *Mesure de risque.*

Une mesure de risque est une fonction ρ qui attribue à un risque X une valeur positive et éventuellement infinie.

Cette définition est donc très générale et en pratique fait souvent l'objet d'ajout d'axiomes supplémentaires.

¹section réalisée à partir de Marceau (2006) [19] et de Planchet & Thérond (2007) [22]

1.1.2 Chargement de sécurité

Nous parlons de chargement de sécurité dès lors que la compagnie d'assurance demande une prime supérieure à celle dite de prime pure, soit l'espérance des pertes.

Définition 1.1.2. *Chargement de sécurité.*

Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque X , on a $\rho(X) \geq \mathbb{E}(X)$.

Cette définition nous amène au point présenté dans le paragraphe suivant.

1.1.3 Capital économique

Le chargement de sécurité correspond finalement au capital économique pour une compagnie d'assurance. Il dépend donc de la mesure de risque choisie.

Définition 1.1.3. *Capital économique.*

Le capital économique, noté CE , établi à partir de la mesure de risque ρ est donné par

$$CE(X) = \rho(X) - \mathbb{E}(X).$$

Puisque le total $\mathbb{E}(X)$ correspond aux pertes espérés pour le portefeuille, le montant $CE(X)$ est donc bien la marge de sécurité que la compagnie constitue pour se protéger de toute sur-sinistralité.

1.1.4 Mesure de risque cohérente

La définition des mesures de risque est très générale. C'est la raison pour laquelle on exige bien souvent que ces mesures vérifient certaines propriétés mathématiques. Parmi les plus utilisés, on trouve les axiomes suivants :

– **A1 (invariance par translation)** : soit un scalaire c et un risque X , alors

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c.$$

– **A2 (homogénéité)** : soit une constante positive c et un risque X , alors

$$\rho(cX) = c\rho(X).$$

– **A3 (monotonie)** : soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2) = 1$, alors

$$\rho(X_1) \leq \rho(X_2).$$

– **A4 (sous-additivité)** : soient X_1 et X_2 des risques quelconques, alors

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

Ces quatre axiomes sont associés par Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999) [1] pour donner naissance au concept d'une mesure de risque cohérente.

Définition 1.1.4. *Mesure de risque cohérente.*

Une mesure de risque est dite cohérente si elle vérifie les axiomes A1, A2, A3 et A4.

1.2 Quelques mesures de risque

Nous allons par la suite détailler les principales mesures que nous allons utiliser dans ce mémoire. Celles-ci sont les suivantes :

- la variance,
- l'écart-type,
- la *Value at Risk*,
- la *Tail Value at Risk*.

1.2.1 La Variance et l'écart-type

La variance et l'écart-type sont parmi les premières mesures de risque à avoir été utilisées. La variance est également employée dans le critère moyenne-variance de Markowitz.

Définition 1.2.1. *Variance et Écart-Type.*

La variance, sous réserve de son existence, admet pour définition suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2).$$

Ceci correspond donc au moment centré d'ordre 2. L'écart-type, noté σ , est quant à lui la racine carré de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

L'une des propriétés les plus employées de la variance est résumée comme suit.

Proposition 1.2.1. *Si le moment centré d'ordre 2 existe, alors la relation suivante tient :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Remarques. La variance n'est pas la mesure la plus pertinente dans le cadre de l'assurance. En effet, celle-ci est symétrique ce qui a pour effet de pénaliser les « bonnes variations » de la même façon que les « mauvaises variations ».

1.2.2 La Value at Risk

La *Value at Risk* (VaR) est parmi les mesures de risque certainement la plus populaire. C'est par exemple la mesure de risque préconisée dans le cadre du référentiel Solvabilité 2. Elle est définie de la manière qui suit :

Définition 1.2.2. Soit le niveau $0 \leq \alpha \leq 1$, la VaR de niveau de confiance α associée à la variable aléatoire X est définie par

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha).$$

La fonction F_X est la fonction de répartition associée à la variable aléatoire X , soit $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. On peut alors définir la fonction inverse généralisée de la fonction de répartition par :

Définition 1.2.3. L'inverse généralisée de la fonction de répartition F_X est donné pour $u \in [0, 1]$ par

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} / F_X(x) \geq u\},$$

avec la convention que $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Remarques.

- La VaR de niveau de confiance α est finalement rien d'autre que le quantile d'ordre α , soit un point de la queue de distribution. En d'autres termes, le niveau $VaR_\alpha(X)$ correspond au montant permettant de couvrir les sinistres dus au risque X avec la probabilité α .
- Nous rappelons la remarque suivante que si X est une variable aléatoire continue alors

$$1 - F_X(VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha.$$

En définitive, si une compagnie n'assure qu'un risque X et a un niveau de ressource égal à $VaR_\alpha(X)$ alors sa probabilité de ruine correspond à $1 - \alpha$.

- La VaR n'est pas une mesure cohérente car elle n'est pas sous-additive.

1.2.3 La Tail Value at Risk

En complément de la VaR, on peut introduire la *Tail Value at Risk* (TVaR). Cette dernière donne une information sur la queue de distribution contrairement à la VaR. Or dans le domaine de l'assurance, cette information est souvent pertinente car elle est liée directement à la sévérité des sinistres, soit à la gravité de ceux-ci. La définition est la suivante.

Définition 1.2.4. Soit le niveau $0 \leq \alpha \leq 1$, la TVaR de niveau de confiance α associée à la variable aléatoire X est définie par :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

On remarque que $TVaR_0(X) = \mathbb{E}(X)$.

Remarque.

- La mesure $TVaR_\alpha(X)$ est assimilable à la moyenne arithmétique des mesures $VaR_u(X)$ pour les valeurs de u supérieures à α .
- La TVaR fournit une indication de l'épaisseur de la queue de distribution.
- La TVaR est cohérente et inclut un chargement de sécurité car pour $0 \leq \alpha \leq 1$ quelconque, on a alors que $TVaR_\alpha(X) \leq TVaR_0(X) = \mathbb{E}(X)$.

Génération des tables prospectives de mortalité

e choix d'un modèle de mortalité n'est pas forcément si aisé qu'il n'y paraît. En effet, un nombre important de ces modèles ont été créés ces dernières années, ce qui rend ce choix encore plus difficile. Dans la première partie, cf. 1.3, nous avons déjà évoqué certains aspects méthodologiques dans ce type de travail. Dans cette même partie mais au chapitre 3, nous avons présenté sept modèles stochastiques et extrapolatifs. Outre le fait que ces différents modèles sont réellement employés par les actuaires pour l'élaboration de tables prospectives de mortalité, ces derniers sont déjà tous implémentés dans *LifeMetrics*. Ceci va nous permettre de gagner du temps sur tout ce qui concerne le calibrage et l'extrapolation des paramètres, cf. *Software user guide* (2007) [16]. Dans ce chapitre, nous allons donc aborder le traitement des différents modèles. Comme nous ne disposons pas de données ou de tables d'expérience à la fois en matière de rentes et d'assurances décès, nous partons des données nationales françaises sur lesquels un travail ultérieur à partir des modèles proposés par *LifeMetrics* à déjà été effectué au sein de l'entreprise. Nous avons donc repris ce travail pour calibrer les modèles.

Notre but ici est donc la génération de tables prospectives de mortalité pour chaque modèle de *LifeMetrics* et naturellement en fonction du sexe. Ces tables serviront alors à simuler les flux des engagements liés aux différents contrats considérés. La première section de ce chapitre présente les données initiales, ainsi que les travaux que nous avons repris en matière de création des dites tables. Enfin, la seconde section décrit quant à elle les travaux supplémentaires que nous avons personnellement ajoutés, notamment dans la validation des modèles.

2.1 Les données et travaux repris

Les données qui sont utilisées dans ce travail proviennent du site *Human Mortality Database*¹. Elles couvrent les populations féminines et masculines françaises sur la plage 1899 à 2005. Pour chaque année appartenant à cette période délimitée, plusieurs indicateurs statistiques liés à la mortalité générale sont ventilés pour chaque âge exacte au premier janvier compris entre 0 et 109 ans, ainsi que pour la classe des 110 ans et plus notée 110+. Nous allons alors utiliser l'effectif E_{xt} sous risque de la population et le nombre D_{xt} de décès qui a été recensé pour chaque année et chaque âge.

2.1.1 Premiers traitements

L'emploi des programmes de *LifeMetrics* impliquent certaines contraintes. Il faut notamment que l'exposition au risque et que le nombre de décès ne soient pas nuls simultanément. Ce cas de figure arrive pour certains âges avancés et pour certaines années d'étude. Des limites sont donc introduites de la manière suivante :

- pour les hommes : années 1920-2005 et âges 0-99 ans,
- pour les femmes : années 1920-2005 et âges 0-102 ans.

Lors de l'étude préalablement effectuée à ce mémoire, il a été noté que le « meilleur » modèle au sens du *Bayes Information Criterion* (BIC) est le modèle M2 parmi ceux proposés par *LifeMetrics* à la fois pour les femmes et pour les hommes. Ce résultat est obtenu sur base des statistiques réelles exposées ci-dessus. Rappelons seulement au passage que le BIC est un critère prenant compte de la qualité d'ajustement du modèle *via* la log-vraisemblance et du nombre de paramètres à estimer.

Néanmoins, si on utilise les programmes de *LifeMetrics* tels quels sur nos statistiques, alors nous sommes limités en ce qui concerne l'âge ultime à 100 ans pour les hommes et 103 ans pour les femmes. Or, cette limite d'âge ne peut certainement pas être fixée à l'une de ces valeurs, surtout si l'on souhaite travailler sur le risque de longévité, c'est-à-dire de voir la mortalité future s'améliorer. Dès lors, l'âge ultime doit être supérieur et typiquement de l'ordre de 125 ou 130 ans. Le problème demeure alors dans le fait qu'il faille employer des techniques de fermeture de table.

¹cf. <http://www.mortality.org>

2.1.2 Fermeture des tables de mortalité

Le choix en ce qui concerne l'âge limite pour la longévité humaine est arbitrairement établi à 130 ans pour l'ensemble de cette étude. En d'autres termes, toute personne ayant atteint l'âge de 130 ans au moins au premier janvier de l'année civile a une probabilité de décéder lors de cette année égale à 1. De manière formelle, nous pouvons synthétiser cette hypothèse par la définition suivante.

Définition 2.1.1. *Par hypothèse, nous supposons que l'ensemble des modèles de mortalité utilisés intègrent la contrainte suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{N}, q_{130}(t) = 1.$$

L'étude effectuée préalablement à ce mémoire préconise d'employer la méthode de fermeture de Denuit et Goderniaux, voir pour plus de précision Denuit & Goderniaux (2005) [14]. En résumé, cette méthode consiste à ajuster par les moindres carrés le modèle log-quadratique suivant sur la base des statistiques relatives aux âges élevés :

$$\ln \hat{q}_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{x,t},$$

avec $\varepsilon_{x,t}$ une suite d'erreurs gaussiennes indépendantes, centrées et de même variance. À cela viennent s'ajouter deux contraintes :

$$\forall t, x \in \mathbb{N}, q_{130}(t) = 1 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial q_x(t)}{\partial x} \right|_{x=130} = 0.$$

Quashie & Denuit (2005) [23] précisent que ces deux contraintes imposent à la courbe des quotients de mortalité une allure concave aux grands âges et l'existence d'une tangente horizontale au point $x = 130$ ans. La deuxième contrainte a pour conséquence d'empêcher une décroissance éventuelle des $q_x(t)$ aux âges avancés. En outre, le modèle log-quadratique précédent peut se réécrire en la formule suivante :

$$a_t + b_t x + c_t x^2 = c_t(130^2 - 260x + x^2)$$

Une dernière remarque sur cette méthode porte sur la détermination de l'âge « raccord » à partir duquel les $q_x(t)$ bruts seront remplacés par les valeurs ajustées provenant du modèle. Cet âge est celui qui maximise le coefficient de détermination R^2 en faisant varier l'âge raccord dans l'intervalle 50-85 ans.

2.1.3 Extrapolation des séries temporelles

En plus d'un outil d'ajustement des modèles, *LifeMetrics* propose également un programme permettant d'extrapoler les séries temporelles du type $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$ et

$\kappa_t^{(3)}$. Pour le choix du processus servant à extrapoler les séries, *LifeMetrics* s'inspire de Cairns, Blake & Dowd (2006) [5]. En effet, le processus est une marche aléatoire avec tendance. Il est clair que d'autres processus ARIMA plus généraux peuvent être employés, mais celui employé et fixé a le mérite d'être simple et de nécessiter peu de paramètres restant à estimer.

D'un point de vue pratique, nous allons par la suite fixer à 1.000 le nombre de simulations en plus de l'extrapolation *best estimate* pour chacune des séries temporelles dans chaque modèle. Ce choix est dicté par des raisons d'espace mémoire disponible ainsi que sur le compromis d'obtenir par la suite des estimations empiriques des quantiles suffisamment pertinentes. Pour finir, le nombre d'années futures de projection de ces séries est fixé à 150 ans à partir de la dernière année de statistique observée, soit en pratique à partir de 2005.

2.2 Travaux effectués

Puisque notre travail porte à la fois sur le risque de longévité et celui de mortalité, nous avons choisi de nous focaliser au final sur une plage d'âge comprise entre 20 et 130 ans, contrairement à l'étude préalable qui prévoit une plage 0-130 ans. C'est la seule différence notable par rapport à ces premiers travaux. Le calibrage des modèles suit donc la même méthode que celle employée dans l'étude préalable.

- i - Sélection des années (1920-2005) et des âges (0-102 pour les femmes et 0-99 pour les hommes) pour que l'exposition au risque et le nombre de décès ne soient pas nuls simultanément dans les données statistiques originelles.
- ii - Fermeture des tables de mortalité jusqu'à l'âge limite de 130 ans *via* l'estimation des paramètres introduits à la sous section 2.1.2.
- iii - Estimation des paramètres des modèles sur base des tables fermées pour la plage d'âge 20-130 ans et la plage d'années 1920-2005.
- iv - Extrapolation des séries temporelles de chaque modèle sur 150 années à partir de 2005 en employant une marche aléatoire avec tendance.
- v - Simulation de 1.000 trajectoires de ces mêmes séries en plus du scénario *best estimate* en utilisant des réalisations de la variable aléatoire représentant le terme d'erreur gaussien des marches aléatoires.

Une fois ce travail accompli par l'intermédiaire des programmes de *LifeMetrics*, nous obtenons donc au total 1.000 tables prospectives de mortalité différentes en plus de celle que nous dénommons sous l'appellatif *best estimate*. Bien évidemment, ces tables sont « datées » de 2005, dernière année d'observation statistique.

Avant d’employer ces tables prospectives, nous avons tenu à vérifier la cohérence des résultats que nous obtenons, soit en définitive des estimations des taux de mortalité par modèle et par sexe. Une manière d’atteindre ce but est de contrôler l’allure générale des espérances de vie résiduelles obtenues.

2.2.1 Sélection des modèles

Nous commençons par la définition suivante :

Définition 2.2.1. *L’espérance de vie résiduelle est par définition égale à :*

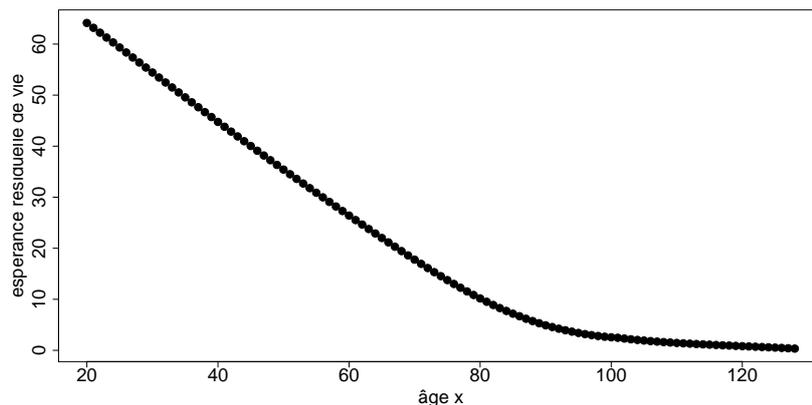
$$e_x(t) = \mathbb{E}(T_x(t)).$$

Cette définition se traduit dans notre contexte annuel et donc discret par :

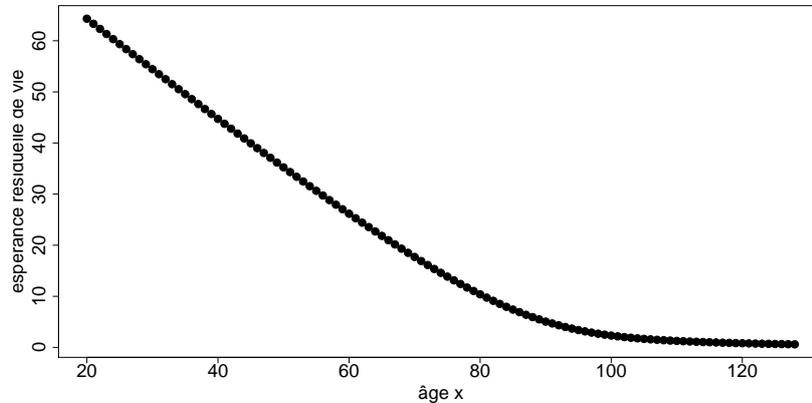
$$e_x(t) = \sum_{k=1}^{\omega-x} k p_x(t),$$

avec ω l’âge ultime considéré, soit ici de 130 ans.

À partir de cette formule, on peut obtenir les graphes suivants des espérances de vie résiduelles $e_x(t)$ pour chaque âge entier de 20 à 129 ans calculées en 2005. Nous utilisons pour produire les exemples suivants uniquement l’extrapolation *best estimate* des séries temporelles en plus naturellement des estimations des autres paramètres. Les exemples fournis concernent les femmes pour les modèles M2 et M7.



Espérances de vie résiduelles des femmes en année $t = 2005$ pour M2



Espérances de vie résiduelles des femmes en année $t = 2005$ pour M7

L'allure des graphes précédents est très représentative de ce que l'on obtient en pratique : une droite de pente -1 qui s'incurve aux âges élevés. Ceci est en relation directe avec le fait que les taux de mortalité sont petits aux âges les moins élevés et donc que la courbe diminue d'environ un an chaque année. Aux âges les plus élevés, les taux augmentent et donc la courbe finit par s'incurver.

Certaines estimations des modèles par *LifeMetrics* ont donné des allures totalement aberrantes avec des graphes en forme de cloche par exemple. Nous n'avons pas réussi à identifier l'erreur dans les algorithmes où il semble y avoir un problème dans la maximisation de la vraisemblance. Pour cette raison, nous allons rejeter les modèles M6 et M8 à la fois pour les hommes et pour les femmes. Pour bien fixer les idées, nous allons utiliser les modèles suivants pour les hommes et pour les femmes :

- M1, M2 et M3 pour les extensions du modèle de Lee-Carter,
- M5 et M7 pour les extensions du modèle de Cairns, Blake & Dowd.

2.2.2 Comparaison des modèles

Nous venons de rejeter deux modèles et par la même de conserver cinq modèles. Il semble alors pertinent de se donner un critère avec lequel on puisse comparer les modèles. L'outil *LifeMetrics* offre la possibilité de renvoyer le *Bayes Information Criterion* (BIC) calculé pour chacun des modèles. Ce critère permet de rendre compte de la qualité de l'ajustement aux données tout en privilégiant la parcimonie du modèle, c'est-à-dire un nombre de paramètres pas trop élevé. La formule du BIC est la suivante :

$$BIC = \ln L(\hat{\phi}) - \frac{1}{2} \nu \ln N,$$

avec ϕ l'ensemble des paramètres du modèle et donc $\hat{\phi}$ son estimation par le maximum de vraisemblance, alors $\ln L(\hat{\phi})$ devient la log-vraisemblance maximale. N est le nombre d'observations sans compter celles qui ont été exclues de l'analyse dans les programmes de *LifeMetrics*, et v le nombre effectif de paramètres à estimer sans compter ceux pouvant être déduits des contraintes fixées pour les besoins d'identifiabilité des modèles.

Le tableau suivant est donc un condensé des différents BIC et donne également le rang des différents modèles en fonction du sexe :

Modèle	Femmes		Hommes	
	Rang	BIC	Rang	BIC
M1	2	-60.298,49	3	-77.885,87
M2	1	-45.589,22	1	-51.630,01
M3	4	-71.046,77	4	-123.337,90
M5	5	-237.697,14	5	-221.132,27
M7	3	-62.422,24	2	-66.226,09

TAB. 2.1 – BIC et rang des modèles en fonction du sexe

On peut dès lors constater que le modèle M2 est à chaque fois le meilleur pour ce critère, à la fois pour les hommes et pour les femmes.

Analyse des engagements

Nous venons d'aborder dans ce qui précède la méthode que nous employons pour générer des tables prospectives représentant différents scénarios de mortalité, ou plus précisément des surfaces selon l'âge et l'année. Maintenant, le but avoué de cette partie est la simulation des engagements liés à des portefeuilles d'assurances vie ou de rentes. Autrement dit, nous allons employer ces tables pour décrire la mortalité des individus de ces portefeuilles, afin d'en déduire des réalisations des flux futurs. Nous notons au passage que la génération des tables est effectuée avec le logiciel **R**, tandis que la simulation des engagements l'est avec le logiciel **SAS**.

Ce chapitre commence par décrire les différentes hypothèses que nous fixons pour pouvoir réaliser les simulations. Celles-ci sont de nature générales, actuarielles et intrinsèques aux portefeuilles. Puis, nous analysons la variable aléatoire représentant la somme des engagements futurs des portefeuilles que nous allons devoir simuler dans chaque cas, et sous les hypothèses fixées précédemment. Enfin, nous appliquons tout ceci dans des exemples numériques permettant une première approche de la couverture naturelle.

3.1 Les hypothèses employées

Notre étude et notamment la partie consacrée à la mise en œuvre des simulations nécessite de supposer l'utilisation de certaines hypothèses afin d'atteindre les objectifs fixés dans le temps imparti. Ces hypothèses ont donc un rôle « simplificateur » et sont résumées en trois catégories : les hypothèses générales, actuarielles et celles sur la nature des portefeuilles.

3.1.1 Les hypothèses générales

Tout d’abord, nous allons supposer le risque financier supporté par l’assureur ou le gestionnaire comme éliminé ou nul. En pratique ce risque est loin d’être nul et peut être un risque important pour des produits tels que les rentes par exemple. En effet pour faire face à ses engagements au passif, le gestionnaire va investir en actif. Néanmoins si on suppose que ce dernier investit en actif totalement répliquable alors le risque qualifié de financier est éliminé. Naturellement cette hypothèse se voit être limitée dans son application pratique et la couverture ne pourra certainement jamais être parfaite. Cette hypothèse a pour conséquence immédiate que nous considérons le facteur d’actualisation comme constant et nous considérons nos engagements comme insensible à tout risque financier.

Pour ce qui concerne la partie non financière, nous allons considérer que la mortalité des individus relèvent des tables prospectives de mortalité que nous avons puees générer au chapitre précédent. Nous avons choisi l’emploi de modèles stochastiques de mortalité pour pouvoir dans chaque modèle simuler plusieurs tables ou en d’autres termes plusieurs surfaces de mortalité. En cela, nous intégrons une incertitude sur la surface de mortalité future pouvant fluctuer vis-à-vis de la surface de référence *best estimate*. Cette partie du risque non financier est de nature « systématique », puisque non mutualisable *a priori* et représentant les risques de longévité et/ou de mortalité suivant le contexte. Nous avons également une partie du risque non systématique ou « diversifiable ». Cette part du risque provient des différences d’échantillonnage entre la mortalité réelle des populations des portefeuilles et celle prédite par la table de mortalité sélectionnée. Ceci peut arriver par exemple si l’on suppose que les décès ne sont pas parfaitement mutualisables, ce qui est le cas de figure pour de petit portefeuille.

3.1.2 Les hypothèses actuarielles

Nous avons déjà évoqué par ailleurs l’usage de certaines hypothèses actuarielles utiles pour les parties consacrées aux modèles et tables de mortalité. Nous ne faisons que de les rappeler ici :

- i - L’hypothèse 2.2.1 de constance par morceaux des taux instantanés de mortalité sur chaque carré du diagramme de Lexis impliquant la propriété 2.2.5 d’égalité des taux de mortalité instantané et central.
- ii - L’hypothèse 3.1.1 de Poisson où le nombre de décès annuel à chaque âge et pour chaque année suit une loi de Poisson de moyenne le produit entre l’exposition au risque et le taux de mortalité correspondants.

- iii - Nous supposons un âge ω maximal à la longévité humaine égale à 130 ans dans nos applications.

Il est évident que ces hypothèses ne sont pas sans conséquences et ne sont qu'une approximation de la réalité, notamment par exemple sur l'âge limite ω qui est fixé arbitrairement mais au-delà du record actuel de longévité humaine.

3.1.3 Les hypothèses sur les portefeuilles

Les différents portefeuilles sur lesquels nous allons nous baser pour simuler les engagements sont constitués de manière générale soit d'assurances en cas de décès, soit de rentes. L'approche que nous adoptons dans ce qui suit est l'approche dite « rétrospective », où il n'y a pas possibilité de nouveaux entrants dans les portefeuilles. Nous supposons alors un certain nombre d'hypothèses techniques sur ces produits :

1. Les produits sont tous considérés en cours de service.
2. Les produits ne donnent lieu à aucun droit supplémentaire.
3. Aucune prime ne peut être versée ultérieurement.
4. Aucun type de revalorisation est prévu.
5. Le taux technique est considéré comme constant.
6. Les versements sont annuels et en fin d'année pour les rentes.

Les produits que nous traitons dans ce mémoire ont attiré à la longévité et la mortalité humaine. La variable importante est donc la durée de vie résiduelle. Nous allons alors émettre l'hypothèse classique d'indépendance de ces durées entre chaque individu différent appartenant aux portefeuilles.

3.2 Simulation des engagements

Nous allons par la suite nous intéresser à la variable aléatoire, notée symboliquement Λ , représentant la somme des engagements futurs actualisés associée à un portefeuille constitué de rentiers et/ou d'assurés en cas de décès. Pour analyser une telle variable, nous retenons la méthode par simulation qui consiste bien évidemment à obtenir une multitude de réalisations de cette variable pour pouvoir l'étudier. Les simulations de la variable Λ sont construites sur le schéma suivant.

- I - Nous sélectionnons plusieurs scénarios de mortalité, c'est-à-dire plusieurs surfaces de mortalité future ou tables prospectives parmi les 1.000 au choix différent pour un modèle particulier M1, M2, M3, M5 ou M7. Par cette action, nous déterminons un certain nombre noté M de réalisations de la loi de mortalité Π .

II - Pour chaque scénario m de mortalité fixé, nous simulons plusieurs réalisations de la mortalité réelle des populations des portefeuilles. En définitive, nous simulons si oui ou non les individus décèdent en utilisant les paramètres issus de la table de mortalité tirée. Nous obtenons pour N nombres de telles simulations les estimateurs indépendants entre eux $\Lambda_{m1}, \dots, \Lambda_{mn}, \dots, \Lambda_{mN}$ de la loi Λ .

L'étape II permet donc d'obtenir au total un nombre $M \times N$ d'estimateurs de Λ , et ainsi d'étudier le risque total associé à la somme des engagements futurs actualisés. Maintenant, nous souhaitons pouvoir analyser la seule composante systématique de ce risque, c'est-à-dire sans la partie diversifiable due aux fluctuations d'échantillonnage de la mortalité du portefeuille par rapport à celle prévue par la surface sélectionnée initialement. Nous cherchons donc des estimateurs de la loi de $\Lambda|\Pi$, soit la loi de l'engagement Λ sachant la surface de mortalité Π . Il nous suffit alors de connaître les M réalisations de Π , faites à l'étape I, et ainsi obtenir un échantillon $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, \dots, \Lambda_M$ de la loi conditionnelle nous permettant d'étudier la seule partie systématique du risque.

Nous commençons tout d'abord par présenter les formules des engagements à simuler dans le cadre des hypothèses que nous décrivons dans la section précédente. Puis, nous parlons de la manière d'analyser et de mesurer finalement les risques de longévité et/ou de mortalité intrinsèques aux portefeuilles.

3.2.1 Formules théoriques des engagements

Nous fixons tout d'abord quelques notations nécessaires à la présentation des trois cas que nous donnons par la suite :

- v le facteur d'actualisation ou taux technique supposé constant ;
- r_i le montant annuel d'une rente pour l'individu i ;
- C_i le capital décès versé à l'individu i ;
- ${}^rI(t)$ l'ensemble des individus vivant à la date t et possédant une rente de mêmes caractéristiques ;
- ${}^aI(t)$ l'ensemble des individus vivant à la date t et possédant une assurance en cas de décès de mêmes caractéristiques ;
- m l'indice se référant au scénario de mortalité, soit la table prospective de mortalité sélectionnée ;
- n l'indice représentant le « passif » du produit, soit suivant le contrat la réalisation ou non du décès des individus.

Cas des rentes

Prenons pour commencer l'exemple d'un individu rentier que l'on numérote par i , nous pouvons associer à cet individu une suite de flux correspondant aux paiements des arrérages de rente en fin d'année conditionnés au fait que ce dernier soit toujours en vie à cette date là. Nous réemployons à cette fin les notations actuarielles présentées au chapitre 2 de la première partie. Soit $T_{x(i)}(t)$ la durée de vie résiduelle de l'individu i âgé de $x(i)$ années révolues à la date t , alors les flux vus de la date t sont pour les scénarios m et n de simulation :

$${}^r\Lambda_{m,n}^i(t) = r_i \sum_{k=1}^{\omega-x(i)-1} v^k \mathbb{1}_{\{T_{x(i)}(t) > k \mid T_{x(i)}(t) > 0\}}.$$

Nous considérons ici les flux jusqu'au décès de l'individu, et donc prenons l'exemple d'une rente viagère à terme échu dans le cas particulier où $r_i = 1$. Pour les autres types de rentes, il est très facile d'adapter la formule précédente.

Pour un ensemble d'individus ayant les mêmes caractéristiques de rente, nous obtenons comme somme des engagements futurs actualisés la variable pour les scénarios m et n de simulation :

$${}^r\Lambda_{m,n}(t) = \sum_{i \in {}^rI(t)} {}^r\Lambda_{m,n}^i(t).$$

Cas des assurances vie

Ce cas est assez similaire au cas précédent dans le sens où il est son complémentaire. Considérons un individu j , ainsi que sa durée de vie résiduelle $T_{x(j)}(t)$ à la date t sachant qu'il a atteint l'âge $x(j)$. En date t , la somme des engagements futurs actualisés pour les scénarios m et n de simulation est :

$${}^a\Lambda_{m,n}^j(t) = C_j \sum_{k=0}^{\omega-x(j)-1} v^{k+1} \mathbb{1}_{\{k < T_{x(j)}(t) \leq k+1 \mid T_{x(j)}(t) > 0\}}.$$

Cet exemple correspond au versement d'un capital décès comme dans le chapitre 2 de la première partie où $C_i = 1$. Il suffit d'adapter cette formule aux autres types de capitaux.

Nous obtenons de même pour plusieurs individus possédant les mêmes caractéristique d'assurance vie la variable pour les scénarios m et n de simulation :

$${}^a\Lambda_{m,n}(t) = \sum_{j \in {}^aI(t)} {}^a\Lambda_{m,n}^j(t).$$

Cas des rentes et assurances vie

Premier cas – Ce cas est le plus fréquent de ceux que nous allons étudier. Il correspond à la situation où les individus possédant une rente ne sont pas les mêmes que ceux ayant une assurance vie : cela revient à considérer ${}^rI(t) \cap {}^aI(t) = \emptyset$. Alors, la variable des sommes des engagements futurs actualisés est tout simplement :

$$\Lambda_{m,n}(t) = {}^r\Lambda_{m,n}(t) + {}^a\Lambda_{m,n}(t).$$

Deuxième cas – Dans le cas contraire où ${}^rI(t) \cap {}^aI(t) \neq \emptyset$, nous notons ${}^{ra}I(t) = {}^rI(t) \cap {}^aI(t)$ l'ensemble des individus vivant en t et possédant une rente ainsi qu'une assurance vie. Pour des raisons de simplification, nous considérons les rentes comme viagères et les assurances sans aucun temporaire. Alors, nous avons tout d'abord pour un individu ayant souscrit les deux contrats pour les scénarios m et n de simulation :

$${}^{ra}\Lambda_{m,n}^i(t) = \sum_{k=0}^{\omega-x(i)-1} v^{k+1} \left[r_i \mathbb{1}_{\{T_{x(i)}(t) > k+1 \mid T_{x(i)}(t) > 0\}} + C_i \mathbb{1}_{\{k < T_{x(j)}(t) \leq k+1 \mid T_{x(j)}(t) > 0\}} \right].$$

Ce qui donne bien entendu pour l'ensemble de ces individus :

$${}^{ra}\Lambda_{m,n}(t) = \sum_{i \in {}^{ra}I(t)} {}^{ra}\Lambda_{m,n}^i(t).$$

Puis, nous choisissons de noter par ${}^{r\perp}I(t) = {}^rI(t) \setminus {}^{ra}I(t)$ l'ensemble des individus vivant en t et possédant une rente mais pas d'assurance. De même ${}^{a\perp}I(t) = {}^aI(t) \setminus {}^{ra}I(t)$ représente l'ensemble des individus possédant uniquement une assurance et vivant en t . En supposant par généralité que les deux derniers ensembles définis sont non vides, nous obtenons à partir des cas des rentes et des assurances vie :

$$\begin{aligned} {}^{r\perp}\Lambda_{m,n}(t) &= \sum_{i \in {}^{r\perp}I(t)} {}^r\Lambda_{m,n}^i(t) \quad \text{et} \\ {}^{a\perp}\Lambda_{m,n}(t) &= \sum_{j \in {}^{a\perp}I(t)} {}^a\Lambda_{m,n}^j(t). \end{aligned}$$

D'où, nous finissons par déduire la variable représentant la somme des engagements futurs actualisés pour les scénarios m et n de simulation par :

$$\Lambda_{m,n}(t) = {}^{r\perp}\Lambda_{m,n}(t) + {}^{a\perp}\Lambda_{m,n}(t) + {}^{ra}\Lambda_{m,n}(t).$$

3.2.2 Les simulations

Nous rappelons que les simulations de la variable aléatoire représentant la somme Λ des engagements futurs actualisés sont exclusivement effectuées sous **SAS** alors que celles des surfaces de mortalité l'ont été sous **R**. Les simulations de cette variable aléatoire ont la même trame pour n'importe quel type de portefeuille. La seule différence réside bien entendu dans le choix de la variable Λ selon qu'elle se rapporte à des rentes, des assurances, des rentes et assurances sur les mêmes têtes ou sur des têtes différentes. Nous reprenons alors le schéma en deux étapes, vu au tout début de cette section.

Étape I – Nous supposons que nous souhaitons sélectionner M tables prospectives de mortalité parmi les 1.000 différentes générées précédemment par l'intermédiaire de *LifeMetrics*. Pour cela, il suffit simplement de tirer M nombres aléatoires entre 1 et 1.000. De plus, rien n'interdit à ce que ce nombre M puisse être supérieur à 1.000.

Étape II – Pour une surface $m \in \{1, \dots, M\}$ fixé, nous souhaitons effectuer N simulations différentes du « passif » à savoir de simuler différentes réalisations des durées de vie des membres des portefeuilles. Nous choisissons d'utiliser une loi binomiale dont les paramètres sont le nombre de survivants en début d'année et la probabilité de survie annuelle pour chaque année de développement des engagements. Ainsi, nos simulations nous donnent $N \times M$ réalisations de la variable aléatoire Λ . Ici, nous omettons les indices r , a ou ra par exemple, mais nous utilisons la bonne variable correspondant au type de portefeuille désiré.

Nous notons les estimations obtenues par la série $\{\lambda_{mn}\}_{(m,n) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}}$ avec m l'indice de la trajectoire de mortalité et n celui de la trajectoire du passif. Nous obtenons alors les estimateurs de la variable aléatoire conditionnelle $\Lambda|\Pi$ pour $m \in \{1, \dots, M\}$ suivant,

$$\bar{\lambda}_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_{mn}$$

qui représentent la composante systématique du risque associé à la variable Λ .

3.2.3 Traitement et mesure des résultats

La première approche que nous pouvons adopter pour évaluer le risque lié à la variable aléatoire Λ est d'utiliser les mesures définies au chapitre 1 de cette même partie : variance, écart-type, *Value at Risk* et *Tail Value at Risk*. Nous travaillons

par la suite sur des exemples de portefeuilles dont les caractéristiques vont certainement différer. Il apparaît nécessaire d'introduire des indicateurs relatifs nous permettant de comparer les différents niveaux de risque de ces portefeuilles.

Un premier indicateur intéressant à citer provient directement de la formule de décomposition de la variance conditionnée par la surface de mortalité Π . Celle-ci s'écrit de cette manière :

$$\mathbb{V}(\Lambda) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(\Lambda|\Pi)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(\Lambda|\Pi)).$$

Dans cette formule, nous pouvons retrouver dans le premier terme du membre de droite le risque diversifiable, et dans le second le risque systématique. Nous pouvons introduire l'indicateur suivant.

Définition 3.2.1. *Nous définissons la part Ω de la variance expliquée par la composante du risque systématique par :*

$$\Omega = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}(\Lambda|\Pi))}{\mathbb{V}(\Lambda)}.$$

Nous pouvons noter que par le principe de diversification, si l'effectif de la population concernée tend vers l'infini, alors le rapport Ω converge vers 1. En effet dans ce cas théorique, seule la composante systématique subsiste et décrit alors l'ensemble du risque.

Nous avons également choisi d'introduire un second rapport entre le capital économique, vu au chapitre 1 de cette partie, et la provision *best estimate* associée au portefeuille en question. Formellement, nous avons la définition suivante.

Définition 3.2.2. *Nous définissons le $Ratio_\rho$ associé à la mesure de risque ρ comme le rapport :*

$$Ratio_\rho = \frac{CE(\Lambda)}{\mathbb{E}(\Lambda)} = \frac{\rho(\Lambda) - \mathbb{E}(\Lambda)}{\mathbb{E}(\Lambda)},$$

où $\mathbb{E}(\Lambda)$ est la provision *best estimate* et $CE(\Lambda) = \rho(\Lambda) - \mathbb{E}(\Lambda)$ le capital économique.

Nous allons souvent employer ce ratio dans nos applications numériques, le but pour la compagnie étant idéalement d'avoir le plus petit $Ratio_\rho$ possible pour une mesure de risque ρ fixée.

3.3 Applications numériques

Dans cette section, nous réunissons quelques exemples numériques en concordance directe avec la présentation antérieure des méthodes de simulations des engagements. Nous avons tout d'abord besoin de fixer un certain nombre de paramètres globaux valables pour toutes les applications.

M	N	ν	Date t	Modèle
5.000	200	1/1.02	2005	M2

Les nombres M et N correspondent aux notations utilisées dans la section précédente, soit respectivement au nombre de scénarios de simulations de la mortalité et du passif. Le taux ν est le taux d'actualisation ou technique supposé constant. La date t est la date d'actualisation des flux financiers, ou en d'autres termes la date vue de laquelle ces flux sont considérés. Enfin, nous allons utiliser les tables prospectives issues du modèle M2 à la fois pour les hommes et pour les femmes. En effet, il a déjà été évoqué que ce dernier est le meilleur pour le critère du BIC.

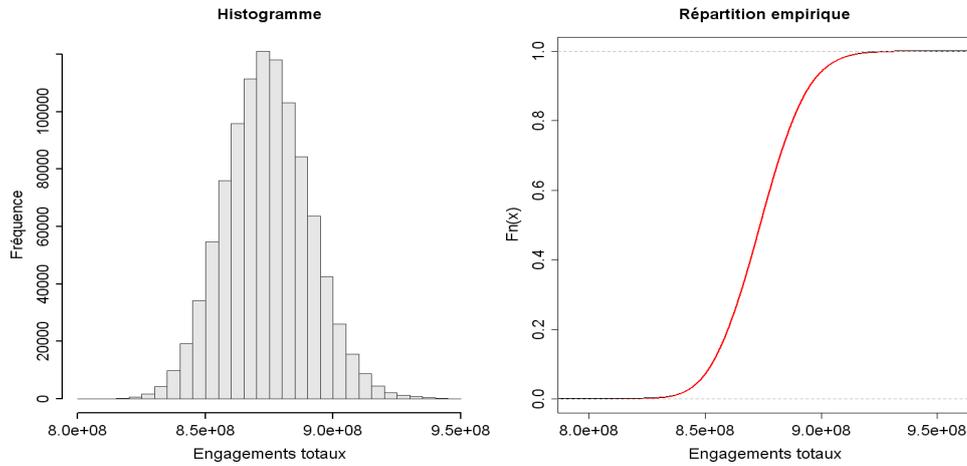
Notre objectif dans cette section est de présenter les résultats des simulations sur des portefeuilles de rentiers et d'assurés en cas de décès, puis d'essayer d'exhiber le phénomène de couverture naturelle existant entre ces deux types de portefeuilles. Nous tenons à préciser que le développement des engagements se fait jusqu'à la mort du dernier survivant pour chacune des simulations, qui intervient obligatoirement à l'âge de 130 ans par hypothèse.

3.3.1 Portefeuille de rentiers

Pour les rentiers, nous utilisons un portefeuille constitué de 6 sous-groupes établis selon le sexe (hommes-femmes) et l'âge des individus (50-60-70 ans). L'effectif est de 500 individus pour chaque sous-groupe, soit une population de 3.000 individus au total. Le niveau du montant annuel des rentes est fixé de manière forfaitaire à 15.000 euros. Nous récapitulons dans le tableau suivant les principaux indicateurs statistiques et les différentes mesures de risque que nous obtenons pour la somme Λ des engagements futurs actualisés :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
874.029.207	16.537.360	901.505.464	909.423.962	3,14%	4,05%

Nous pouvons d'hors et déjà constater que la variable Λ est extrêmement sous-dispersée. Il suffit pour cela de regarder la moyenne (*best estimate*) et l'écart-type qui traduisent un faible coefficient de variation de l'ordre de 1,89%. Nous constatons également ce fait sur l'histogramme et la fonction de répartition empirique de Λ , où la distribution semble à chaque fois resserré autour de la moyenne.

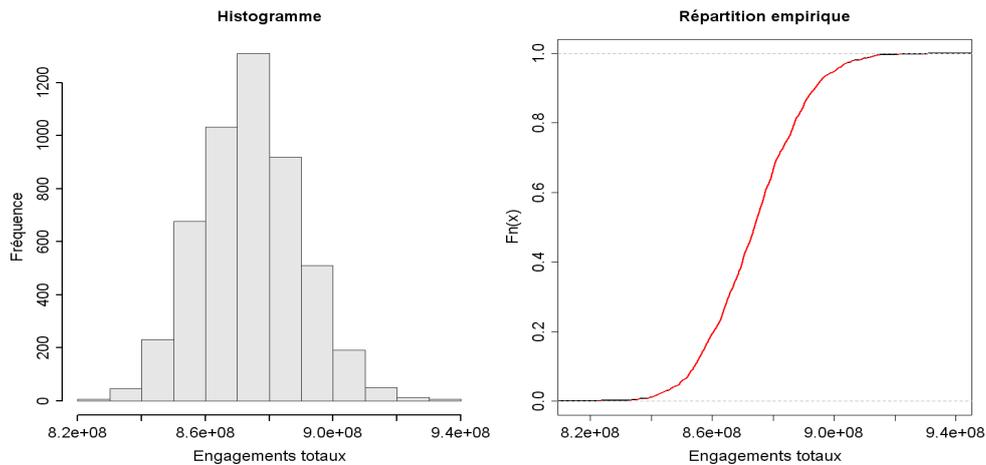


Répartition empirique dans le cas du modèle M2

De par notre méthode, nous pouvons nous intéresser à la composante systématique du risque associé à la variable Λ . Nous donnons alors les mêmes indicateurs et mesures que précédemment :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0.95}$	$TVaR_{0.95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
874.029.207	15.586.508	900.483.674	907.616.688	3,03%	3,84%

Là encore, il est naturel de trouver que cette répartition est peu volatile, avec un coefficient de variation de l'ordre de 1,78%. Nous trouvons naturellement des mesures plus faibles que précédemment en dehors de la moyenne qui demeure la même. La part Ω de la variance expliquée par la composante systématique du risque est ici de 88,83%. Nous représentons cette répartition empirique avec les graphiques suivants :



Répartition empirique de la part systématique dans le cas du modèle M2

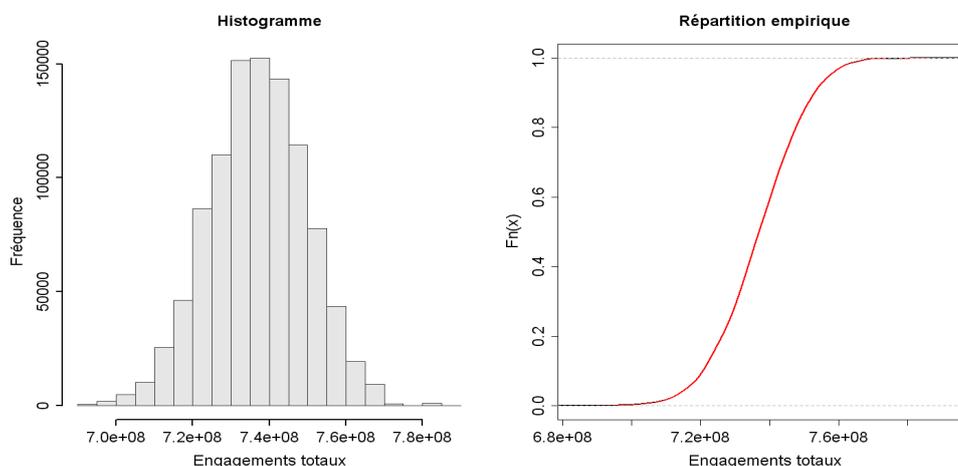
À chaque fois, les distributions sont très peu dispersées autour de la moyenne. Cette constatation nous amène alors à penser que sur cet exemple le risque supporté par la compagnie ne paraît pas être trop difficilement gérable. Bien entendu, il faut garder à l'esprit l'ensemble des hypothèses faites, ainsi que le fait que nous travaillons qu'avec un seul modèle.

3.3.2 Portefeuille d'assurés

Pour les assurés en cas de décès, nous considérons cette fois un portefeuille constitué de 8 sous-groupes toujours selon le sexe (hommes-femmes) et selon l'âge (30-40-50-60 ans). Les effectifs de chaque sous-groupe sont les mêmes et égaux à 2.000 individus. Au total, la population du portefeuille est donc de 16.000 personnes. Nous résumons les principales mesures du risque associé à la variable Λ représentant le coût total des engagements futurs actualisés dans le tableau suivant :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0.95}$	$TVaR_{0.95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
736.973.920	12.608.305	757.561.154	762.362.757	3,03%	3,84%

Comme dans le cas des rentiers, la répartition est peu variable. Le coefficient de variation est de l'ordre de 1,71%. Les graphes de la répartition empirique de la variable Λ sont présentés ci-après.

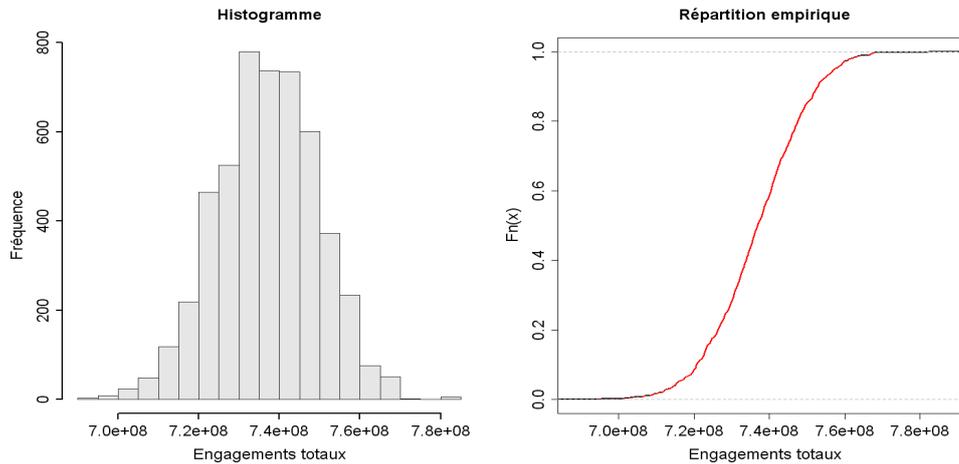


Répartition empirique dans le cas du modèle M2

Maintenant, nous reprenons le même type d'informations mais seulement pour la composante systématique du risque. Tout d'abord, les indicateurs et mesures statistiques sont :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0.95}$	$TVaR_{0.95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
736.973.920	12.497.329	757.333.860	762.127.992	2,76%	3,41%

Nous retrouvons bien entendu le même constat que précédemment et nous précisons que le coefficient de variation est de l'ordre de 1,70%. La part Ω de la variance expliquée par la composante systématique du risque est de 98,24% pour cet exemple. Les graphes de la répartition empirique sont :



Répartition empirique de la part systématique dans le cas du modèle M2

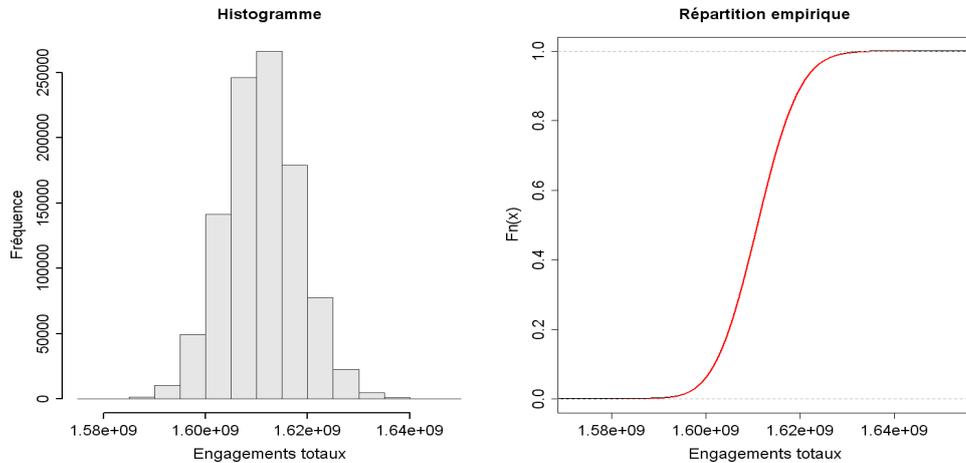
Nous pouvons alors formuler le même constat que pour le cas des rentiers. Le risque paraît faible en comparaison du niveau de la moyenne et donc des provisions pour la compagnie.

3.3.3 Portefeuille mixte

Cet exemple est le premier qui va nous servir à exhiber le principe de la couverture naturelle. Nous reprenons les deux portefeuilles étudiés dans les cas précédents pour les examiner ensemble et non séparément. Comme d'habitude, notre première étape est d'analyser la variable Λ résultante de la somme des engagements futurs actualisés, cette fois pour les rentes et les assurances vie. Les principales mesures et indicateurs sont résumés dans le tableau suivant :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
1.611.003.127	7.205.158	1.622.976.631	1.626.253.756	0,74%	0,95%

La répartition est dans ce cas moins variable, et le coefficient de variation est de l'ordre de 0,45% en comparaison avec les deux répartitions des cas précédents. Nous pouvons constater un effet de la couverture naturelle dans l'évolution des *Ratio*. En effet, par rapport au cas des rentiers, les ratios décroissent d'environ 76% pour la $VaR_{0,95}$ et la $TVaR_{0,95}$. Par rapport au cas des assurés, ces mêmes ratios diminuent d'approximativement 75%. Nous donnons maintenant les graphiques de la répartition empirique de la variable Λ .

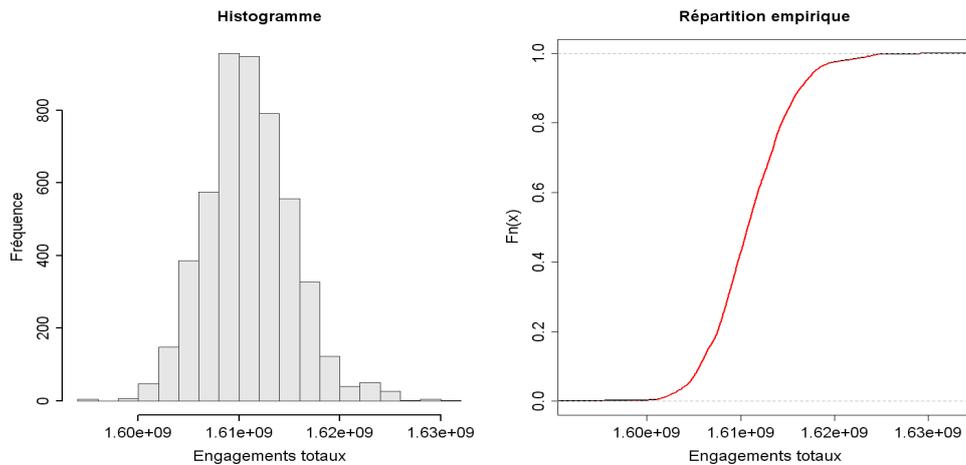


Répartition empirique dans le cas du modèle M2

Nous remarquons encore que le distribution est très recentrée autour de sa moyenne. Nous allons maintenant nous intéresser à la composante systématique du risque associé à Λ . Les mesures statistiques et indicateurs sont :

Best estimate	Écart-type	$VaR_{0.95}$	$TVaR_{0.95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
1.611.003.127	4.301.999	1.617.942.716	1.620.878.664	0,43%	0,61%

La part Ω de la variance expliquée par la composante systématique du risque est de 35,65%. Cette part a donc considérablement diminué par rapport aux cas des rentiers et des assurés pris individuellement. L'effet de la couverture naturelle se voit également dans la diminution des ratios de l'ordre de 82% à 85% selon le type de mesure de risque et le cas considéré (rentiers ou assurés). Les graphes de cette répartition empirique sont :



Répartition empirique de la part systématique dans le cas du modèle M2

La distribution est encore moins volatile et plus resserrée que dans les cas précédents, notamment par rapport à celui où le risque est total. Cette dernière remarque est intéressante car elle n'était pas vraiment valable pour les situations où les portefeuilles de rentes et d'assurances sont pris séparément.

3.3.4 Synthèse

Ce premier exemple numérique nous permet donc d'observer pour la première fois l'effet de la couverture naturelle entre des portefeuilles de rentes et d'assurances. Dans nos applications, cet effet est bénéfique pour chacune de nos mesures et par rapport à chaque type de produits. Tous les ratios relatifs ont diminué pour le portefeuille mixte, et sa distribution empirique s'est indéniablement resserrée autour de sa moyenne. Ce constat s'avère encore plus criant pour la seule composante systématique du risque. Comparé aux deux premières situations, le risque systématique est encore moins volatile que le risque global pour la dernière situation. La part Ω tombe même à 35,65%, alors que précédemment elle valait soit 88,83% pour les rentes, ou soit 98,24% pour les assurances.

En pratique, cela implique pour la compagnie une gestion de ses risques encore plus facilitée, simplement en ayant accès à ces deux portefeuilles à la fois. Néanmoins, à la base les risques qui pesaient sur ces derniers n'étaient que relativement très faibles. Même si le gain dans l'association des deux portefeuilles en pourcentage sur les ratios est important par rapport aux situations individuelles, nous pouvons comprendre qu'une compagnie puisse ne pas être intéressée par un tel procédé. Il faut noter que ceci est démontré avec le modèle M2, mais que cela reste valable pour chacun des modèles M1, M3, M5 et M7. Ce résultat provient certainement de la variabilité des taux de mortalité simulés. Ces modèles n'autorisent *a priori* que de faibles fluctuations en général.

Troisième partie

**Analyse de l'impact de la couverture
naturelle**

Avec la partie précédente, nous disposons désormais d'un outil de base permettant de simuler et également d'analyser les engagements de différents portefeuilles de rentes et d'assurances. Nous consacrons entièrement cette dernière partie à l'étude de l'impact de la couverture naturelle, en nous basant donc sur les programmes développés antérieurement. Il s'ouvre alors à nous un vaste champ de pistes de réflexions possibles à mener. Nous ne sommes pas bien entendu capable de répondre à toutes les questions que nous pouvons nous poser, il faut restreindre cette analyse à certaines investigations ciblées. L'exemple numérique développé dans la fin de la deuxième partie a mis à jour la faible variabilité intrinsèque aux simulations pour un modèle de mortalité. Nous sommes intéressés par enrichir notre outil de base de risques supplémentaires, non pris en compte pour le moment. Ainsi, nous devrions gagner en variabilité et en réalisme.

Trois chapitre constituent cette troisième et dernière partie. Nous débutons par mener un premier exemple de problématique pratique pour une compagnie d'assurance. Cette dernière souhaite en effet savoir quel gain de couverture d'un portefeuille d'assurances vie ressortirait si elle développait ses affaires *via* des rentes. Notamment pour bénéficier pleinement des conséquences de la couverture naturelle, elle aimerait détecter le nombre optimal de tels contrats à adjoindre à ses assurances. D'autre part, l'ajout successif de certains risques additionnels est réalisé parallèlement à cette étude. Le chapitre suivant fait la part belle aux analyses de sensibilité. Nous cherchons ici à voir ce qu'il se passe lorsque nous faisons varier certains paramètres, comme les montants des versements des produits ou l'effectif de rentiers hommes et femmes. Enfin, nous terminons par un ultime chapitre traitant des compléments possibles à effectuer au sein de notre méthode ou de nos analyses.

Un premier exemple pratique

 face aux nombreuses manières d'étudier l'impact de la couverture naturelle, nous décidons de nous focaliser dans ce chapitre sur une problématique unique. Nous considérons une société d'assurance vie quelconque dont les affaires comprennent des contrats constitués d'assurances décès. Cette entreprise a alors l'idée de se développer *via* des contrats de rentes. Elle peut par exemple penser que ses assurés en cas de décès soient intéressés par un contrat leurs permettant de se prémunir contre le risque de longévité, ou alors trouver de nouveaux individus souhaitant souscrire à ce type de produit. Dans les deux cas, le but est avant tout commercial. Un autre objectif compatible avec ce but lucratif est pour la compagnie de vouloir bénéficier de l'effet de la couverture naturelle. Ceci pourrait diminuer son exposition globale au risque sans réel coût supplémentaire, puisqu'elle accroît ses affaires en même temps. Cette problématique nous paraît être le point de départ d'une étude intéressante d'un point de vue pratique pour une compagnie d'assurance, voir de réassurance.

Notre démarche dans ce chapitre est donc d'étudier ce cas de figure en utilisant les modèles et hypothèses que nous avons construits et formulés tout au long des parties précédentes. Dans ce contexte, nous prenons en compte seulement ce que nous appelons les « **risques basiques** », ceux-ci font référence aux risques systématiques de longévité et de mortalité, mais également au risque diversifiable. Toutefois, comme il a déjà été remarqué dans le troisième chapitre de la partie précédente à la section 3.3, nous nous trouvons dans des situations où finalement le risque global s'avère être peu élevé pour la compagnie. Nous souhaitons donc enrichir notre étude de risques supplémentaires en les ajoutant un à un à la situation de base. La première étape de ce projet consiste à considérer le **risque d'incertitude des paramètres** des modèles de mortalité que nous avons estimés avec *LifeMetrics*. La seconde étape concerne le **risque de modèle** associé aux générations des tables de mortalité. Il faut bien voir que dans le fait de choisir un

modèle particulier réside une erreur potentiellement importante de ne pas sélectionner le bon modèle. Nous voulons prendre en compte ce problème. Enfin, nous finissons en tenant compte du **risque de pandémie**. Lors de la simulation de nos engagements, la possible occurrence d'un tel phénomène peut avoir un impact sur nos résultats.

1.1 Méthodologie

Dans toutes les applications présentées dans ce chapitre, nous commençons par fixer un portefeuille d'assurances vie, puis nous déterminons le nombre « optimal » de rentiers. Ce nombre est celui qui minimise le rapport $Ratio_\rho$ du portefeuille mélangeant assurances et rentes avec ρ la mesure de risque choisie. Pour cela, les paramètres du portefeuille d'assurés sont fixés au préalable et restent invariables. Nous faisons de même pour les portefeuilles de rentiers, sauf naturellement pour l'effectif qui est la variable de contrôle ici.

1.1.1 Portefeuille d'assurés

Pour notre étude, nous devons fixer un portefeuille de contrats d'assurances vie. Nous choisissons de constituer ce dernier par 12 sous-groupes selon l'âge et le sexe. Les paramètres de ce portefeuille sont :

- âges : 40, 45, 50, 55, 60 et 65 ans,
- sexe : hommes et femmes,
- montant du capital décès : identique par sous-groupe fixé à 100.000 euros,
- effectif : identique par sous-groupe fixé à 1.000 individus.

Nous allons alors développer les flux liés aux engagements de ce type de portefeuille jusqu'au décès du dernier survivant pour chaque simulation.

1.1.2 Portefeuilles de rentiers

Les portefeuilles de rentiers sont tous construits en 4 sous-groupes selon l'âge et le sexe. Nous allons faire varier l'effectif de ces sous-groupes mais de manière à ce que la répartition entre hommes et femmes soit paritaire. Les paramètres des portefeuilles de rentiers sont :

- âges : 50 et 60 ans,
- sexe : hommes et femmes,
- montant des arrérages annuels des rentes : identique par sous-groupe fixé à 15.000 euros,
- effectif : variable mais identique par sous-groupe.

La valeur commune des effectifs des 4 sous-groupes varie de 0 à 625 individus avec un pas de 25. Ce qui se traduit pour l'effectif global des portefeuilles a un nombre allant de 0 à 2.500 individus par pas de 100. Enfin, le développement des flux s'effectue encore une fois jusqu'au décès du dernier survivant.

1.1.3 Cas étudiés

Nous souhaitons étudier deux cas de figure dans la constitution des portefeuilles de rentiers.

Cas de figure 1 : nous allons considérer que les rentiers sont également des assurés issus du portefeuille d'assurances vie fixé initialement. Ce cas implique donc que si un rentier meurt au cours d'une année, la compagnie ne verse plus d'ar-rérages liés à la rente mais paie le montant du capital décès aux bénéficiaires de l'assurance en fin de cette même année.

Cas de figure 2 : nous considérons cette fois que les rentiers ne bénéficient pas en même temps de contrat d'assurance vie. Dans ce cas, il y a donc total indépen-dance entre les engagements liés aux assurances vie et ceux des rentes.

1.1.4 Paramètres fixés

Nous résumons dans le tableau suivant les valeurs que nous avons fixées des pa-ramètres qui restent globaux dans l'ensemble des applications de ce chapitre :

M	N	v	Date t
5.000	100	1/1.02	2005

Nous rappelons seulement que M est le nombre de scénarios de mortalité choisi, N celui du passif, v est le taux constant d'actualisation ou de manière équivalente le taux technique, et la date t est l'année à laquelle s'effectue l'actualisation des flux financiers.

1.2 Risques basiques

Dans cette section, nous reprenons simplement les méthodes de simulations telles que présentées dans le chapitre 3 de la deuxième partie de ce mémoire pour les appliquer au problème qui nous intéresse ici.

1.2.1 Présentation

Nous considérons dans cette section principalement deux types de risques : les risques systématiques comme ceux de longévité et de mortalité, et les risques diversifiables. Pour pouvoir simuler des réalisations des engagements des différents portefeuilles, nous avons besoin de générer des tables de mortalité ou de manière équivalente des surfaces de mortalité. Pour cela, nous choisissons d'employer le modèle M2 pour les hommes et pour les femmes. C'est ce dernier qui apparaît être à chaque fois comme le meilleur selon le critère du BIC (cf. table 2.1).

1.2.2 Application

Commençons par fournir les principales mesures et indicateurs statistiques concernant la somme des engagements futurs et actualisés pour le portefeuille d'assurés individuellement.

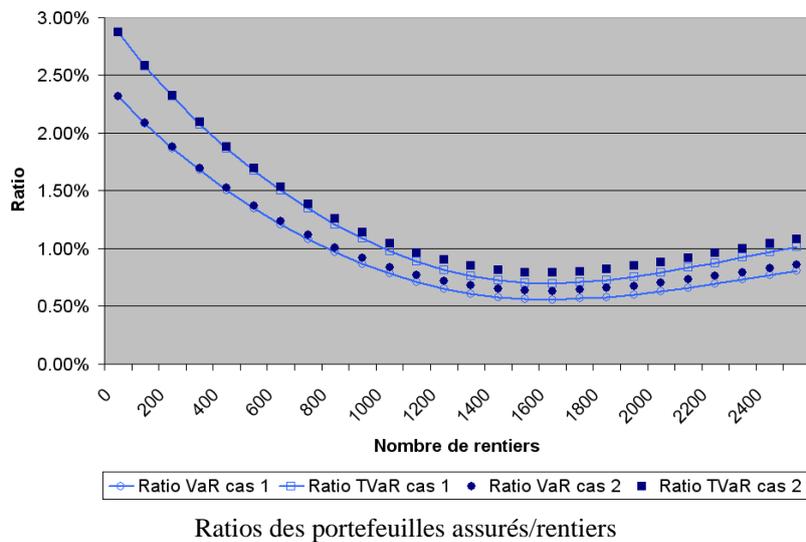
<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
632.671.545	9.117.947	647.355.711	650.835.342	2,32%	2,87%

Nous nous trouvons dans une situation équivalente à celle déjà vue dans la sous section 3.3.2 de la deuxième partie. En effet, nous observons une faible variabilité à travers l'estimation de l'écart-type par rapport à celle de la moyenne, mais aussi avec les faibles niveaux de ratios. Nous donnons également les mêmes mesures pour la part systématique du risque seulement.

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
632.671.545	8.995.866	647.205.888	650.573.018	2,30%	2,83%

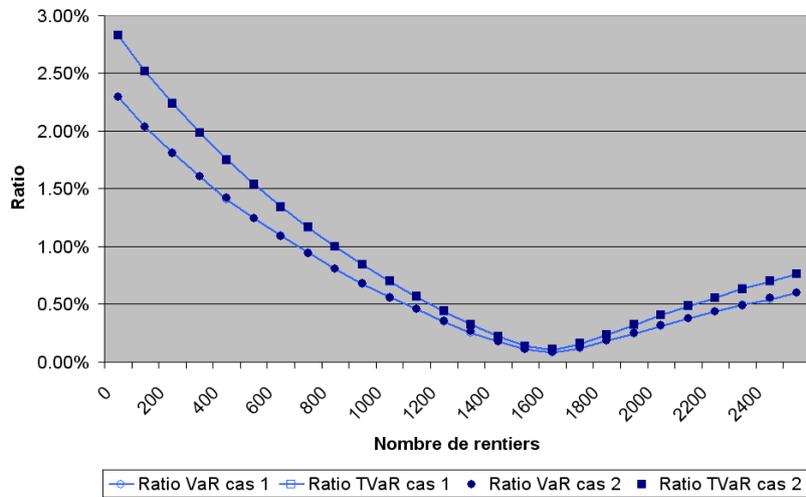
Nous obtenons des valeurs très proches du cas où le risque est pris globalement. Ceci s'explique par le fait que la composante systématique est prépondérante avec une part Ω de variance expliquée de l'ordre de 97,34%.

Passons maintenant aux résultats empiriques liés à notre problématique en prenant compte uniquement les risques dits basiques. Pour cela, nous ajoutons au portefeuille d'assurances vie un portefeuille de rentes, et nous réitérons ceci en faisant varier les effectifs des rentiers. Nous obtenons le graphique suivant des ratios provenant de la $VaR_{0,95}$ et de la $TVaR_{0,95}$.



Nous observons bien pour chacun des deux cas l'effet de la couverture naturelle sur les portefeuilles constitués d'assurés et de rentiers, par rapport à celui des assurés uniquement. En effet, sur cette figure tous les points sont inférieurs aux ratios pour 0 rentiers, soit seulement les assurés.

Autre constat, il n'y a guère de différence entre les deux cas étudiés d'assurés/rentiers dépendants (cas 1) ou indépendants (cas 2). Néanmoins, cet écart joue en faveur du cas dépendant qui offre donc un plus dans la couverture naturelle. Ceci est particulièrement visible aux environs de la zone où les ratios sont à leur minimum. Effectivement, il est clair sur ce graphique qu'il existe un minimum atteint aux alentours de 1.600 individus rentiers au total, ce qui fait un nombre de 400 personnes par sous-groupe. Pour le premier cas, les ratios les plus bas sont obtenus pour les valeurs $Ratio_{VaR} = 0,56\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,70\%$. Dans le second cas, ces mêmes valeurs sont supérieures et égales à $Ratio_{VaR} = 0,63\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,79\%$. Intéressons-nous maintenant plus spécifiquement à la part systématique du risque pour laquelle nous obtenons les graphiques suivants.



Ratios des portefeuilles assurés/rentiers pour la part systématique

Dans la forme, nous trouvons des résultats qui diffèrent de précédemment, mais dans le fond nous sommes amenés à formuler des remarques similaires à quelques nuances près. Tout d'abord, nous pouvons affirmer que les ratios obtenus pour les deux cas assurés/rentiers dépendants ou indépendants sont les mêmes. Ensuite, le « creux » des différentes courbes est nettement plus marqué que pour le risque global, mais correspond à la même zone de 1.600 rentiers. Le fait que les ratios pour la composante systématique soient inférieurs à ceux du risque total est tout-à-fait naturel, puisque la partie diversifiable du risque est ici omise.

Par contre, cet écart relatif entre les ratios des risques global et systématique est plus accentué pour la région minimale. Ceci est un effet de la couverture naturelle qui permet en quelque sorte d'éliminer du risque systématique par compensation entre longévité et mortalité. Par exemple pour les deux cas, le minimum est obtenu pour des ratios de niveaux égaux à $Ratio_{VaR} = 0,08\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,10\%$ à comparer aux mêmes indicateurs pour la part total du risque, ce qui donne une diminution relative de l'ordre de 85% à 86%. Dans le même temps, nous rappelons que ces ratios ne décroissent relativement que très peu pour les assurés individuellement, de 1% à 1,5%. En ajoutant 2.500 rentiers, nous obtenons une baisse de l'ordre de 29% à 31%.

Pour le portefeuille d'assurés et de 1.600 rentiers, la part Ω de variance expliquée par le risque systématique est de l'ordre de 2,15% seulement. Nous pouvons ajouter également que le gain apporté par la couverture naturelle ne se fait pas seulement que pour le portefeuille d'assurés, puisque nous obtenons dans le cas des rentiers uniquement des ratios de l'ordre de $Ratio_{VaR} = 2,90\%$ et $Ratio_{TVaR} = 3,66\%$ pour la part systématique du risque. Ces valeurs sont bien supérieures à leurs courbes respectives, et constituent le seuil si nous poursuivons infiniment l'ajout

de rentiers selon la même méthode.

1.3 Risque d'incertitude des paramètres

Dans la deuxième partie au chapitre 2, nous avons expliqué comment nous obtenions nos tables prospectives de mortalité, éléments essentiels à nos simulations. Lors de cette présentation, nous avons déclaré que les programmes de *LifeMetrics* étaient utilisés pour la construction de ces tables, notamment pour l'estimation des paramètres et l'extrapolation des séries temporelles $\kappa_t^{(i)}$ des modèles. Nous avons pu alors remarquer que les différentes estimations des paramètres ne tenaient en aucune manière d'une quelconque incertitude ou erreur sur celles-ci, provenant de fluctuations d'échantillonnage du modèle de régression poissonien. En effet, seul le risque d'incertitude lié à la prédiction des séries temporelles $\kappa_t^{(i)}$ est considéré dans ces programmes. Cela se traduit dans les faits par l'obtention d'estimations uniques des paramètres, tandis que nous pouvons simuler les différentes séries chronologiques dans le futur.

1.3.1 Principe

Nous avons donc la volonté d'enrichir les programmes originelles de *LifeMetrics* en tenant compte du risque d'incertitude sur les paramètres des modèles. Pour ce faire, nous sommes partis des travaux de Delwarde (2005) [13] dans lesquels il est fait mention de l'impossibilité d'obtenir analytiquement des intervalles de confiance pour les variables recherchées. La présence des deux sources d'aléas citées précédemment, erreurs d'échantillonnage relatives aux paramètres et erreurs de prédiction des séries temporelles, en est principalement la cause. Nous avons testé deux méthodes toutes les deux basées sur de la simulation.

Approche par simulation de Monte Carlo

Cette méthode découle directement de l'hypothèse de Poisson 3.1.1 permettant de modéliser le nombre D_{xt} de décès à l'âge x pendant l'année t . En effet, ceci implique que nous pouvons utiliser le critère du maximum de vraisemblance pour estimer l'ensemble Φ des paramètres du modèle. Dès lors, nous pouvons conclure que l'estimateur $\hat{\Phi}$ de Φ est asymptotiquement distribué selon une loi normale multivariée. La moyenne de cette loi est le vecteur Φ et la matrice de variance-covariance est l'inverse de la matrice d'information de Fisher du modèle. Pour obtenir une estimation de cette dernière, il suffit de prendre l'opposé de l'espérance des dérivées secondes de la log-vraisemblance $\ln L(\hat{\Phi})$ par rapport aux paramètres $\hat{\Phi}$. À partir de là, nous pouvons simuler de nouveaux paramètres pour les

modèles. Plus précisément, nous suivons les trois étapes suivantes pour obtenir un échantillon k de paramètres :

1. Nous générons le vecteur $\widehat{\Phi}^k$ à partir de la loi normale multivariée que nous venons de détailler.
2. Nous estimons les paramètres de projection de la marche aléatoire avec tendance associée aux séries temporelles des modèles en utilisant les séries $\kappa_t^{(i),k}$ venant d'être simulées jusqu'à $t = t_{max}$ la dernière année d'observation.
3. Nous simulons une trajectoire future de chacune des séries $\kappa_t^{(i)}$ pour $t > t_{max}$. Celle-ci est obtenue à partir des paramètres estimés à l'étape 2, ainsi que des réalisations des termes d'erreurs $\widehat{\epsilon}_t^k$ en employant des simulations de la loi normale $\mathcal{N}(0, \widehat{\sigma}^k)$ où $\widehat{\sigma}^k$ a été déterminé dans l'étape 2 encore une fois.

Ainsi par cette méthode, nous tenons bien compte des deux sources d'aléa. Dans nos applications numérique, nous construisons 1.000 échantillons différents en plus de celui *best estimate* pour être cohérent avec la méthode de base, où nous simulons 1.000 trajectoires des séries temporelles à partir des estimations uniques des paramètres.

Lors de la mise en pratique de cette méthode, nous n'avons eu aucun problème pour les deux premiers modèles M1 et M2. Mais lors de l'application au modèle M3, nous avons eu la production de valeurs manquantes dans les simulations des échantillons de paramètres. Nous pensons que le problème survient lors de l'exécution de la phase d'inversion de la matrice d'information de Fisher par le logiciel **R**. En tout état de cause, nous nous sommes rabattus sur la deuxième méthode qui bien que plus longue, n'a pas posé de problème.

Rééchantillonnage paramétrique des décès

Cette méthode est entièrement basée sur l'hypothèse de Poisson 3.1.1 pour D_{xt} . En effet, nous employons les données d'exposition au risque et du nombre de décès (E_{xt}, D_{xt}) pour créer des échantillons *bootstrap* (E_{xt}, D_{xt}^b) . Les D_{xt}^b sont simplement obtenus par simulation à partir de la loi de Poisson de moyenne D_{xt} . Nous pouvons alors obtenir des échantillons de nouveaux paramètres pour les modèles en procédant de la même façon que dans l'approche précédente :

1. Nous créons les nouveaux nombres de décès D_{xt}^b par simulation selon la distribution de *Poisson*(D_{xt}).
2. Nous estimons les paramètres Φ^b des modèles à partir des données simulées (E_{xt}, D_{xt}^b) à l'étape précédente.

3. Nous estimons les paramètres de projection de la marche aléatoire avec tendance associée aux séries temporelles des modèles en utilisant les séries $\kappa_t^{(i),k}$ venant d'être simulées jusqu'à $t = t_{max}$ la dernière année d'observation.
4. Nous simulons une trajectoire future de chacune des séries $\kappa_t^{(i)}$ pour $t > t_{max}$. Celle-ci est obtenue à partir des paramètres estimés à l'étape 3, ainsi que des réalisations des termes d'erreurs $\hat{\varepsilon}_t^k$ en employant des simulations de la loi normale $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^k)$ où $\hat{\sigma}^k$ a été déterminé dans l'étape 3 encore une fois.

Nous choisissons d'effectuer 1.000 échantillons *bootstrap* des nouveaux paramètres dans nos applications numériques. Le nombre de tables prospectives de mortalité différentes est encore de 1.000 en plus de celle *best estimate* comme dans la méthode de base pour chaque modèle et sexe.

1.3.2 Application

Cette application va donc voir l'ajout du risque d'incertitude sur tous les paramètres du modèle choisi par rapport à la méthode de base abordée dans la section précédente. Nous avons sélectionné le modèle M2 pour les hommes et pour les femmes pour modéliser la mortalité. Nous commençons en donnant les indicateurs liés au risque global de la somme des engagements futurs actualisés pour le portefeuille d'assurés uniquement.

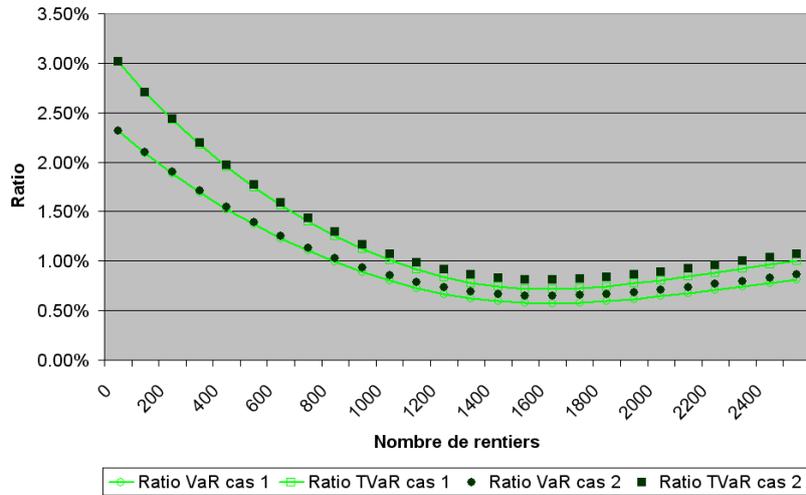
<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
633.070.067	9.050.529	647.751.885	652.145.303	2,32%	3,01%

Les résultats obtenus sur ce portefeuille sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus dans la section précédente qui n'inclue pas le risque d'incertitude sur les paramètres. Il semble que nous ne gagnons pas de variabilité supplémentaire avec l'ajout de ce risque. Les résultats sur la part systématique du risque sont résumés dans le tableau suivant :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
633.070.067	8.927.732	647.209.928	651.876.964	2,23%	2,97%

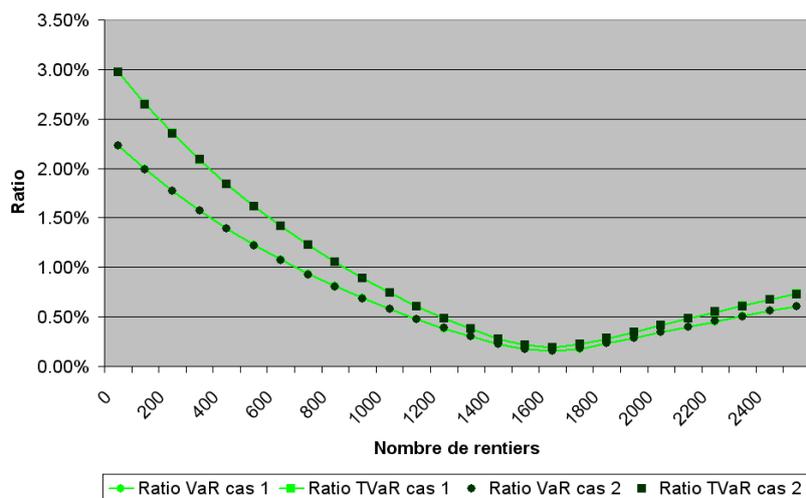
Il y a sur cet exemple peu de différence avec le risque global. Ici, la composante systématique est encore prépondérante avec une part Ω de variance expliquée de l'ordre de 97,30%.

Examinons les graphiques obtenus dans le cadre de notre problématique. Pour commencer, nous donnons le graphe des ratios pour les portefeuilles assurés/rentiers en faisant varier la taille des groupes de rentiers pour les ratios de la $VaR_{0,95}$ et de la $TVaR_{0,95}$:



Ratios des portefeuilles totaux

L'interprétation est identique à celle de la section précédente à savoir que la couverture naturelle s'apprécie par le creux que nous pouvons observer lorsque nous ajoutons des rentiers au portefeuille d'assurés. La différence entre les cas 1 et 2 est encore une fois minimale en faveur du cas assurés/rentiers dépendants puisque les ratios sont dans ce cas légèrement inférieurs. Le minimum semble être atteint pour 1.600 rentiers pour les deux types de ratios considérés. Les valeurs atteintes sont pour le premier cas de $Ratio_{VaR} = 0,57\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,72\%$, et pour le deuxième cas de $Ratio_{VaR} = 0,65\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,81\%$. Nous nous intéressons maintenant à la composante systématique du risque dont le graphe des ratios est ci-après.



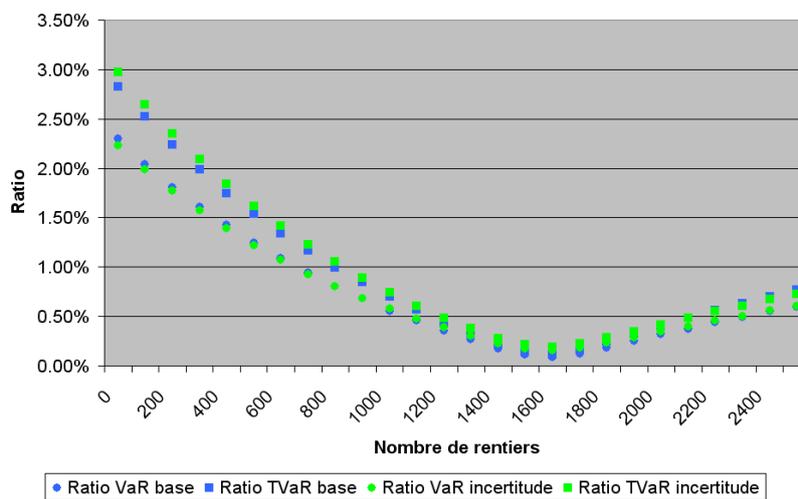
Ratios des portefeuilles totaux sur la part systématique

Les résultats s'interprètent finalement de la même façon que pour la section précédente, d'autant plus que la différence entre les cas 1 et 2 est ici inexistante. La baisse relative des ratios de la composante systématique par rapport à ceux du risque total n'est pas uniforme, et est plus marquée dans la zone minimale des 1.600 rentiers. Effectivement, pour les assurés uniquement, elle est de l'ordre de 1% à 4%, alors que cette diminution est la plus forte pour 1.600 rentiers avec une chute relative de 76%.

Les ratios obtenus pour ces portefeuilles minimaux sont de l'ordre de $Ratio_{VaR} = 0,15\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,19\%$. Le risque systématique est donc dans cet exemple très bien compensé entre la longévité et la mortalité. En effet, la part Ω de variance expliquée par la part systématique est de l'ordre de 7,28% dans le cas où le minimum est atteint. L'effet de la couverture naturelle est également notable pour les portefeuilles de rentiers individuellement dans la mesure où les ratios associés aux parts systématiques sont égaux à $Ratio_{VaR} = 2,80\%$ et $Ratio_{TVaR} = 3,40\%$.

1.3.3 Comparaison

Nous venons de traiter deux contextes différents dont l'un s'avère être un enrichissement de l'autre par l'ajout du risque d'incertitude sur les paramètres. Pour comparer ces deux situations, nous réunissons les ratios des parts systématiques uniquement, puisque ces derniers sont les mêmes pour les cas 1 et 2. Dans la légende du graphique, le contexte correspondant aux risques basiques est noté par « base », l'autre l'étant par « incertitude ».



Comparaison des ratios sur la part systématique

Les différences ne sont que très légères et ne varient pas forcément dans le même

sens. Ces écarts sont les plus visibles lorsqu'ils se situent dans la zone proche des assurés uniquement. Dans cette région, l'influence du portefeuille fixe d'assurés est la plus forte. Or par construction, ces derniers sont en moyenne plus jeunes que les rentiers. L'ajout de l'incertitude sur les paramètres pourrait donc avoir un impact supérieur aux âges les moins élevés sur les niveaux des ratios. Enfin, dans la zone minimale, les ratios « basiques » sont inférieurs à ceux tenant compte du risque d'incertitude. Les valeurs sont égales à $Ratio_{VaR} = 0,08\%$ et à $Ratio_{TVaR} = 0,10\%$ pour la première situation, et pour la seconde à $Ratio_{VaR} = 0,15\%$ et à $Ratio_{TVaR} = 0,19\%$.

1.4 Risque de modèle

Jusqu'à présent, nous travaillons en présumant que le modèle de mortalité permettant de décrire les taux de mortalité est le bon. Or, nous ne pouvons pas avoir une telle certitude puisque dans les faits nous sélectionnons notre modèle à partir de certains critères. Nous souhaitons désormais pouvoir tenir compte dans nos simulations d'un tel risque de se tromper de modèle.

1.4.1 Principe

Dans ce mémoire, le critère permettant de classer les modèles est celui du BIC. Nous avons alors sélectionné le modèle M2 parmi cinq modèles retenus au total. Un moyen pratique de prendre en compte le risque de modèle est finalement d'employer l'ensemble de ces cinq modèles pour nos simulations. Pour ce faire, nous décidons d'utiliser le BIC afin d'affecter un poids « relatif » à chacun des modèles différencié selon le sexe également. Ces poids sont calculés en fonction des écarts relatifs entre l'ensemble des BIC des différents modèles. Pour clarifier nos propos, nous rappelons les BIC en question et donnons les poids leur étant associés :

Modèle	Femmes			Hommes		
	Rang	BIC	Poids	Rang	BIC	Poids
M1	2	-60.298,49	0,2277	3	-77.885,87	0,2142
M2	1	-45.589,22	0,3012	1	-51.630,01	0,3231
M3	4	-71.046,77	0,1933	4	-123.337,90	0,1353
M5	5	-237.697,14	0,0578	5	-221.132,27	0,0755
M7	3	-62.422,24	0,2200	2	-66.226,09	0,2519

TAB. 1.1 – Poids relatifs des modèles en fonction du sexe

Dans les programmes originaux de simulation, nous choisissons M scénarios de

mortalité parmi les 1.000 surfaces ou tables de mortalité disponibles une fois un modèle sélectionné. Nous effectuons cette étape tout simplement *via* le tirage aléatoire de M nombres entre 1 et 1.000. Dorénavant, nous allons rajouter une étape supplémentaire qui va permettre de choisir un modèle parmi les cinq disponibles M1, M2, M3, M5 et M7. Pour ce faire, nous définissons deux lois discrètes, une pour chaque sexe, à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dont les masses de probabilité sont les différents poids associés. Puis, il suffit de réaliser autant de simulations de ces lois que de scénarios M pour sélectionner un modèle.

1.4.2 Application

Cette fois, nous utilisons tous les modèles disponibles pour prendre en considération le risque de modèle. Naturellement, nous tenons compte du risque d'incertitude sur les paramètres. Pour commencer, nous résumons les mesures associées à la somme des engagements futurs actualisés pour le portefeuille d'assuré uniquement.

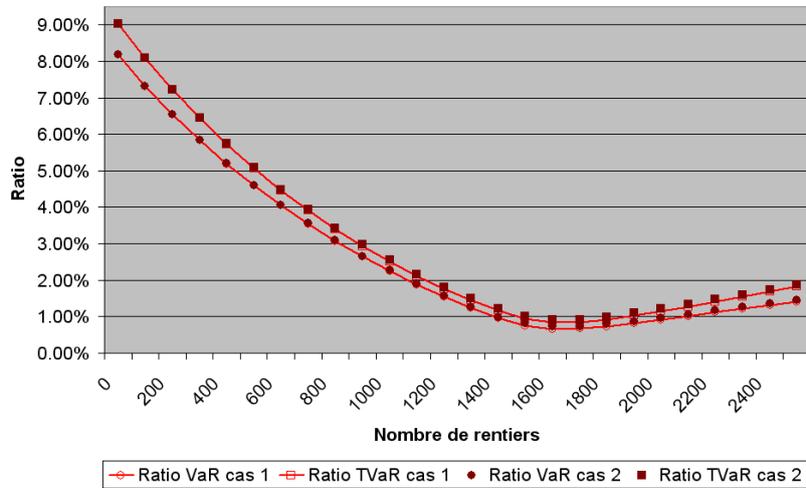
<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0.95}$	$TVaR_{0.95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
642.376.171	27.353.435	694.918.737	700.430.862	8,18%	9,04%

L'ajout du risque de modèle augmente nettement la variabilité des résultats que nous considérons. En effet par rapport à la section précédente, le niveau moyen d'engagement reste à peu près le même puisque le *best estimate* n'augmente relativement que de 1,47%, tandis que l'écart-type augmente lui relativement de 202%. En outre, les niveaux des ratios augmentent relativement de 253% pour le $Ratio_{VaR}$ et de 200% pour le $Ratio_{TVaR}$. Pour la part systématique, nous avons les indicateurs suivants :

<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0.95}$	$TVaR_{0.95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
642.376.171	27.319.472	694.730.747	700.295.612	8,15%	9,02%

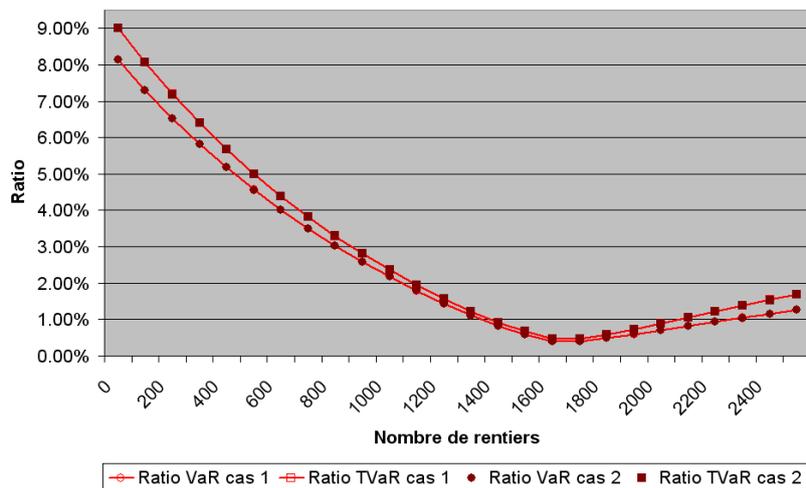
La différence est plus que minime avec le risque global et effectivement la part Ω de variance expliquée par la composante systématique est de l'ordre de 99,75%. Cette part représente donc pratiquement toute l'intégralité du risque.

Passons aux résultats graphiques que nous avons pour les ratios des portefeuilles assurés/rentiers vis-à-vis de notre problématique. Tout d'abord pour le risque global, le graphique est :



Ratios des portefeuilles totaux

Les niveaux des ratios sont bien plus supérieurs que ceux obtenus dans les deux sections précédentes, ce qui correspond à l'effet de l'ajout du risque de modèle. Néanmoins, l'interprétation reste la même. Il y a peu de différence entre les deux cas mais en faveur du cas assurés/rentiers dépendants. Le minimum est obtenu aux environs de 1.600 rentiers pour des valeurs de $Ratio_{VaR} = 0,67\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,83\%$ dans le premier cas, et de $Ratio_{VaR} = 0,73\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,91\%$ pour l'autre. Sur la part systématique, le graphique est le suivant.



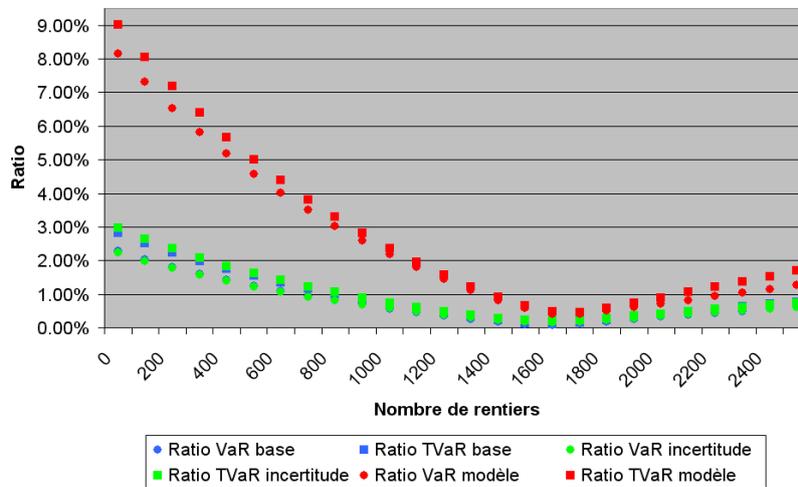
Ratios des portefeuilles totaux sur la part systématique

Le creux est toujours plus accentué avec la part systématique mais moins que pour les deux situations précédentes. Il n'y a pas de différence entre les cas 1

et 2, et le minimum est atteint aux environs de 1.600 rentiers pour des niveaux de ratios égaux à $Ratio_{VaR} = 0,40\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,47\%$. Dans ce cas, nous avons une part Ω de variance expliquée par la partie systématique du risque de l'ordre de 37,94%. Il semble donc que cette part augmente avec l'ajout successif des risques. En effet dans le cas basique, elle était de 2,15%, puis de 7,28% avec le risque d'incertitude supplémentaire et maintenant de 37,94%. En outre pour les portefeuilles de rentiers uniquement, nous obtenons pour la part systématique des ratios du niveau de $Ratio_{VaR} = 6,60\%$ et $Ratio_{TVaR} = 8,68\%$. L'effet de la couverture naturelle est donc largement bénéfique. Mais pour la première fois, nous avons une constatation que le $Ratio_{VaR}$ pour les portefeuilles d'assurés et de 100 ou de 200 rentiers est supérieur à celui des rentiers uniquement. Dans ce cas de figure, l'effet est négatif.

1.4.3 Comparaison

Nous avons désormais trois situations à comparer. Celles-ci sont synthétisées dans le graphe suivant qui présentent les ratios pour les parts systématiques du risque. La situation correspondant à l'ajout du risque de modèle est notée dans la légende par « modèle ».



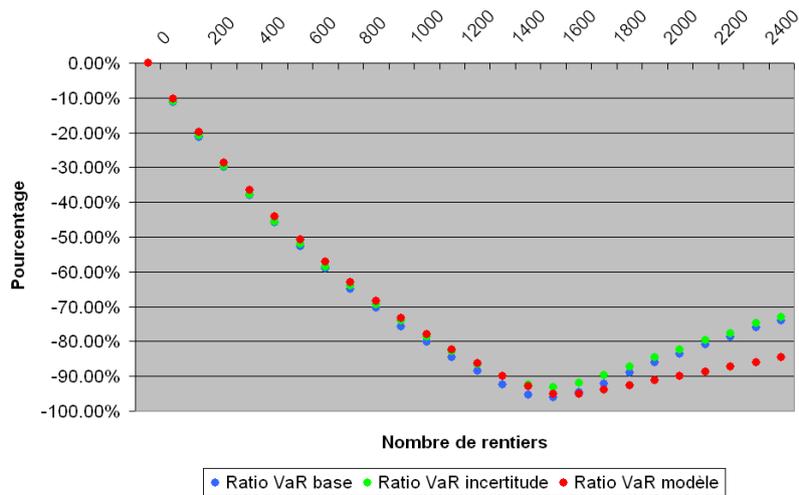
Comparaison des ratios sur la part systématique

Il apparaît très clairement ici que l'apport du risque de modèle dans nos résultats est important. La différence se traduit avant tout dans les niveaux des ratios obtenus avant et après l'ajout de ce risque. En effet, la zone optimale du nombre de rentes semble demeurer la même, soit aux environs de 1.600 rentiers au total. Cependant, les creux sont visiblement différents. Tout d'abord, la variation des

niveaux des ratios est plus importante dans le cas où nous prenons en compte le risque de modèle. Toutefois comme révélé sur le graphe ci-après où nous nous intéressons au taux de variation suivant

$$\text{Taux} = \frac{\text{Ratio}_{VaR} - \text{Ratio}_{VaR} \text{ pour le portefeuille d'assurés uniquement}}{\text{Ratio}_{VaR} \text{ pour le portefeuille d'assurés uniquement}},$$

il n'y a pas de réelle différence entre les trois cas avant la zone optimale de rentiers. Nous obtenons par contre une différence significative après cette zone pour le cas avec risque de modèle. Si nous pouvons dire que la situation optimale de rentiers offre un gain relativement équivalent pour nos trois cas, nous devons quand même remarquer que le cas avec risque de modèle conduit à de réelles différences par rapport aux deux précédents. De notre point de vue, il est beaucoup plus riche car il semble capter les phénomènes vus avec les risques basiques et d'incertitude des paramètres, mais en plus il en contient des supplémentaires. En conséquence de quoi nous estimons dorénavant que nous ne devons plus négliger ce risque de modèle et travailler avec par défaut.



Taux de variation relative des ratios par rapport au cas des assurés uniquement sur la part systématique

Le graphe des taux de variation relative des ratios entre les portefeuilles variables assurés/rentiers et la situation du portefeuille uniquement d'assurés est fourni seulement pour les ratios liés à la $VaR_{0.95}$. Nous précisons que celui que nous pouvons avoir *via* la $TVaR_{0.95}$ est sensiblement l'équivalent de celui-ci.

1.5 Risque de pandémie

Ce mémoire a pour domaine la branche vie de l'assurance. Il est alors logique de vouloir prendre en compte dans nos simulations l'impact d'une éventuelle pandémie sur les engagements. En effet, une pandémie est une épidémie qui s'étend sur une très large région géographique comme un continent ou la planète entière. L'exemple le plus frappant du début du XX^{ième} siècle est la grippe espagnole qui de 1918 à 1920 a fait plus de 15 millions de morts de l'Asie à l'Amérique du Nord en passant par l'Europe. De nos jours, le SIDA est considéré comme une pandémie après avoir infecté plus de 40 millions de personnes. De tels phénomènes influent forcément sur les taux de mortalité, c'est pour cela qu'il est intéressant de s'interroger sur leur impact.

1.5.1 Principe

L'étude de la pandémie n'est pas si aisée que cela. Ses conséquences sur la mortalité ou sa probabilité d'occurrence sont variables selon le type de pandémie, comme dans le cas des deux exemples cités précédemment. Nous nous sommes basés sur l'étude de Van Broekhoven et *all* (2006) [27], et plus particulièrement sur les pandémies de type grippal. Notre modèle est très simple vu la complexité du sujet. Pour chaque année de développement des flux financiers dans nos simulations, nous réalisons la simulation de l'occurrence d'une pandémie ou non par une variable de Bernoulli. Puis si épidémie il y a, nous ajoutons aux taux de mortalité un surplus « forfaitaire » et identique à chaque âge, mais pour cette année particulière seulement. Les paramètres employés pour nos applications proviennent de Van Broekhoven et *all* (2006) [27] et sont :

Probabilité d'occurrence dans l'année	3%
Surplus de mortalité « forfaitaire »	0,25%

TAB. 1.2 – Paramètres du modèle de pandémie

1.5.2 Application

Le dernier cas que nous étudions voit donc l'ajout supplémentaire du risque de pandémie. Nous débutons en donnant les mesures associées à la somme des engagements futurs actualisés pour le portefeuille d'assurés uniquement.

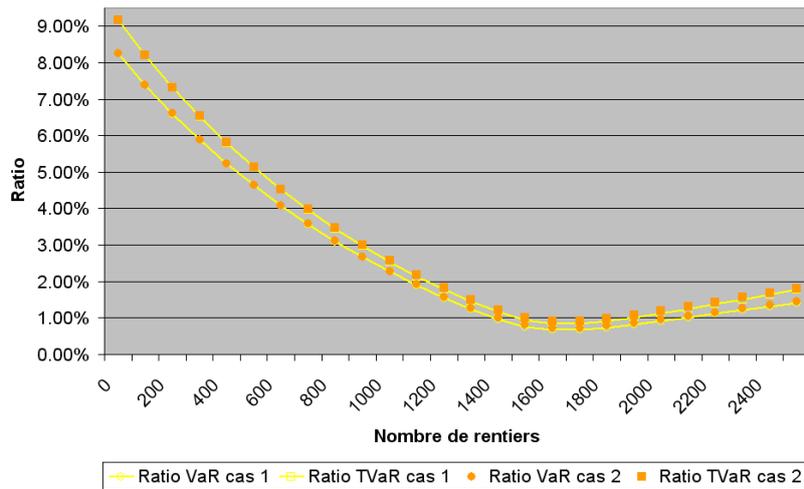
<i>Best estimate</i>	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
643.099.516	27.427.613	696.192.398	702.025.225	8,26%	9,16%

L'ajout de la pandémie n'a pas ici de grandes conséquences sur le niveau des indicateurs en comparaison avec le cas précédent. Nous constatons tout du moins une légère augmentation des indicateurs par rapport à la situation sans prise en compte d'effet de pandémie. Ce résultat semble cohérent car une pandémie implique une mortalité supérieure et plus précoce des individus. Or sur un portefeuille d'assurés uniquement, ceci coûte forcément plus cher à la compagnie. Nous constatons le même effet sur la part systématique du risque.

Best estimate	Écart-type	$VaR_{0,95}$	$TVaR_{0,95}$	$Ratio_{VaR}$	$Ratio_{TVaR}$
643.099.516	27.393.407	696.049.047	701.918.373	8,23%	9,15%

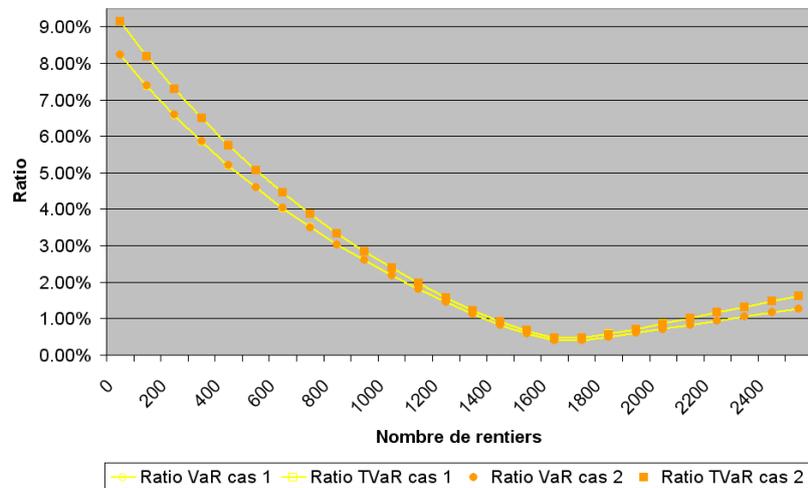
Encore une fois, la composante systématique est prépondérante avec une part Ω de variance expliquée de l'ordre de 99,75%.

Les graphiques des ratios sur les portefeuilles assurés/rentiers sont présentés ci-après, tout d'abord pour le risque global.



Ratios des portefeuilles totaux

L'interprétation est finalement la même que celle vue dans la section précédente sans le risque de pandémie. L'ajout de la pandémie n'a pas eu trop d'effet visible sur le niveau des ratios ou sur la zone optimale du nombre de rentiers toujours au voisinage de 1.600 rentiers pour des valeurs de $Ratio_{VaR} = 0,67\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,83\%$ pour le premier cas et de $Ratio_{VaR} = 0,73\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,91\%$ pour le deuxième cas. Ces valeurs sont d'ailleurs les mêmes que dans le cas où nous excluons la pandémie. Pour la part systématique, nous obtenons le graphique suivant.

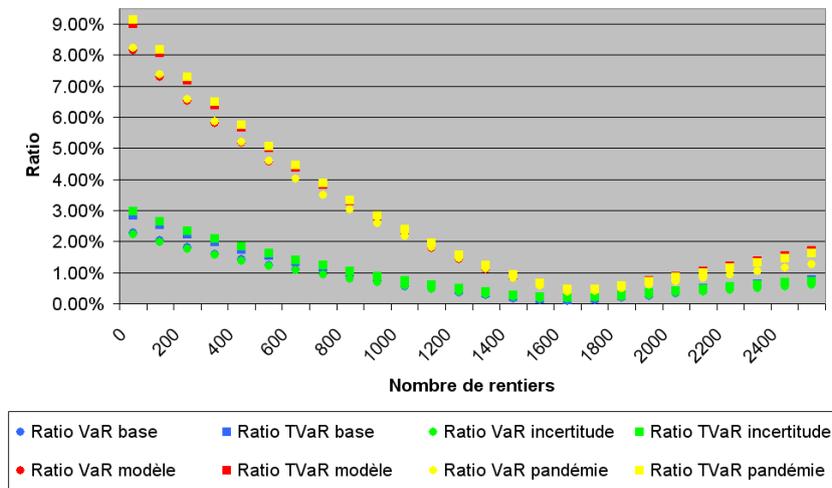


Ratios des portefeuilles totaux sur la part systématique

L'analyse est la même que celle de la section précédente. Il n'y a aucune différence entre les cas 1 et 2. Le minimum est atteint pour environ 1.600 individus à des niveaux de ratios égaux à $Ratio_{VaR} = 0,40\%$ et $Ratio_{TVaR} = 0,47\%$. Dans ce cas, nous avons une part Ω de variance expliquée par la partie systématique du risque de l'ordre de 37,99%, très proche de celle du contexte sans pandémie. En outre pour les portefeuilles de rentiers uniquement, nous obtenons pour la part systématique des ratios du niveau de $Ratio_{VaR} = 6,63\%$ et $Ratio_{TVaR} = 8,45\%$.

1.5.3 Comparaison

Nous comparons pour finir les quatre situations qui voient l'ajout successif des risques basiques, du risque d'incertitude des paramètres, du risque de modèle et du risque de pandémie. Le graphique suivant rassemble les ratios de ces cas pour la part systématique du risque.



Comparaison des ratios sur la part systématique

L'effet dû à la pandémie seule est à lire sur ce graphique en comparant les ratios notés dans la légende par « pandémie » et ceux par « modèle ». Nous pouvons noter une certaine évolution reflétant donc l'impact de la pandémie, mais il semble néanmoins que son influence reste faible. Le sens de variation de ces ratios est facilement interprétable. Pour de faibles nombres de rentiers, les engagements liés aux assurés sont prépondérants dans le portefeuille total. Or, nous avons déjà noté que pour un portefeuille d'assurés uniquement les valeurs des ratios augmentent légèrement lorsque nous tenons compte d'effet de pandémie. Maintenant, nous pouvons remarquer que dans la zone minimale vers 1.600 rentiers les ratios sans et avec pandémie sont les mêmes, ou quasi identiques. Puis lorsque le nombre de rentiers croît, le sens s'inverse et les ratios avec pandémie se retrouvent plus bas que ceux sans. Dans ce cas, l'influence des engagements des rentiers domine celle des assurés. Incorporer la pandémie dans notre modèle a pour effet que les portefeuilles de rentes coûtent moins chers, et dans ce cas mélangés avec le portefeuille d'assurés font supporter relativement moins de risque à la compagnie.

1.6 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons développé une première approche permettant d'analyser un point concret de la couverture naturelle. Nous avons voulu savoir s'il était possible de déterminer un nombre optimal de rentiers à ajouter à un portefeuille fixe d'assurés, permettant ainsi de diminuer le risque relatif supporté par une compagnie. Pour cela, nous nous sommes donnés deux contraintes. La première et la principale est de voir l'impact sur la couverture naturelle de l'ajout de certains risques supplémentaires aux risques basiques : risque d'incertitude des

paramètres, risque de modèle et risque de pandémie. La seconde est de comparer deux types particuliers de composition des portefeuilles : le premier mélangeant assurés et rentiers sur les mêmes têtes, et le second sur des têtes différentes. Dans le premier, nous introduisons de la dépendance entre les rentiers et les assurés, tandis que dans le second l'indépendance est totale. En tout cas, nous avons pu observer un nombre identique de 1.600 rentiers au total permettant d'obtenir les ratios minimaux.

En définitive, nous n'avons remarqué que très peu d'écart dans les ratios obtenus entre les deux cas d'assurés/rentiers dépendants ou indépendants. Cette différence s'amenuise même lors de l'ajout du risque de modèle. Cependant, le cas dépendant semble produire des ratios légèrement inférieurs. Ce résultat nous paraît logique puisque ce cas correspond à une situation de couverture parfaite où longévité et mortalité sont censées se compenser le mieux. Maintenant, la faible divergence est certainement due aux modèles sous-jacents à notre étude. De plus, nous travaillons avec les mêmes tables de mortalité pour les rentiers et les assurés. Or si ces derniers ont le même âge et que le modèle sélectionné admet peu de variabilité, alors la différence entre les deux cas sera faible. Ceci est encore plus criant lorsque nous utilisons l'ensemble des modèles pour insérer le risque de modèle dans notre étude.

Passons maintenant aux conséquences des risques supplémentaires sur nos résultats. Tout d'abord, nous pouvons dire que l'ajout successif de ces risques implique en valeur absolue une augmentation des ratios minimaux pour 1.600 rentiers sur les graphiques. Par exemple pour la $TVaR_{0,95}$, nous avons des niveaux de ratios sur la part systématique égaux à $Ratio_{TVaR} = 0,10\%$ pour la situation de base, $Ratio_{TVaR} = 0,19\%$ avec le risque d'incertitude, et $Ratio_{TVaR} = 0,47\%$ pour le risque de modèle et de pandémie. Néanmoins, la diminution de ces ratios relativement à la situation sans rentiers est finalement pratiquement la même, et est de l'ordre de 93% à 96%. Nous pouvons également affirmer que l'incertitude des paramètres n'ajoute que peu de variabilité supplémentaire à la situation de base. Ceci est logique car l'erreur commise dans l'estimation des paramètres est très faible par rapport à celle des simulations des projections futures des séries temporelles. En effet, nous disposons d'un volume d'observations statistiques assez important qui nous permet d'avoir une faible incertitude sur les estimations des paramètres de chacun des modèles. Par contre, la prise en compte du risque de modèle apporte beaucoup de variabilité supplémentaire. Il semble primordial de considérer ce risque car nous avons noté que nous pouvons capter de nouveaux phénomènes en plus de ceux déjà remarqués. *A priori* cela provient simplement du fait que par construction le modèle M2 et ses analogues avec incertitude sur les paramètres sont tous employés pour tenir compte du risque de modèle. Enfin,

il semble que la pandémie n'est pas un grand impact sur les résultats présentés. À cela, nous pouvons penser que le problème peut aussi résider dans la manière de mesurer son effet. Actuellement, nous développons nos flux jusqu'à extinction du dernier vivant. En conséquence, nos mesures sont faites sur de longues périodes, or il serait certainement judicieux de mesurer la pandémie sur de plus courtes périodes.

Analyses de sensibilité


 e chapitre s'articule autour de l'étude de sensibilité de la couverture naturelle à divers paramètres. Compte tenu du temps limité dont nous disposons, le choix de ces derniers est subjectif. Néanmoins, il se veut le reflet de certaines de nos pistes de réflexion pratique. Nous n'oublions pas que nous étudions la couverture naturelle à des fins de compenser entre eux les risques de longévité et de mortalité. Nous sommes donc dans les analyses développés ici largement intéressés par déterminer quels peuvent être les constituantes d'un portefeuille optimal, au sens où il permet de minimiser par exemple le $Ratio_{VaR}$ ou celui du $Ratio_{TVaR}$. Naturellement, nos applications doivent être limitées par certaines contraintes, ce qui de toute manière s'avère être le cas également pour une compagnie dans la réalité. Pour commencer, nous travaillons en englobant bien entendu les risques basiques, mais aussi ceux d'incertitude des paramètres et de modèle comme présentés dans le chapitre précédent. Nous mettons de côté celui lié à la pandémie. Ensuite, nous fixons des paramètres pour l'ensemble des analyses effectuées qui sont les suivants.

M	N	v	Date t
5.000	100	1/1.02	2005

Nous rappelons que M est le nombre de scénarios de mortalité choisi, N celui du passif, v est le taux constant d'actualisation ou taux technique, et la date t est l'année à laquelle s'effectue l'actualisation des flux financiers.

Nous débutons nos analyses en étudiant la sensibilité de l'influence de la couverture naturelle par rapport aux niveaux des prestations de chacun des types de produits d'assurance ou de rente. Puis, nous portons notre regard sur l'évolution de cette couverture lorsque les effectifs de rentiers hommes et femmes varient sans que le portefeuille d'assurés ne soit modifié.

2.1 Sensibilité par rapport aux niveaux des prestations

Pour cette première analyse, nous désirons étudier la sensibilité des résultats par rapport aux niveaux de montants des capitaux décès ainsi que ceux des arrérages annuels de rente. Pour mener à bien cette analyse, nous allons fixer certaines caractéristiques associées aux portefeuilles utilisés pour cette étude. En outre, sauf mention du contraire nous travaillons en incluant les risques d'incertitudes des paramètres et de modèle, comme présentés dans le chapitre précédent.

2.1.1 Préliminaires

Les portefeuilles

Dans la suite de cette section, les **portefeuilles de rentiers** sont constitués de deux sous-groupes selon le sexe. Les caractéristiques sont les suivantes :

- âges : 65 ans,
- sexe : hommes et femmes,
- montant des arrérages annuels de rentes : **variable** mais identique par sous-groupe,
- effectif : identique par sous-groupe fixé à 1.000 individus.

À cela, nous ajoutons les **portefeuilles d'assurés** composés de deux sous-groupes également selon le sexe. De plus, nous utilisons deux âges différents pour ce type de portefeuille, ce qui va nous amener à effectuer deux études de sensibilité au total. Les différents paramètres pour les assurances vie sont :

- âges : 40 ou 60 ans,
- sexe : hommes et femmes,
- montant du capital décès : **variable** mais identique par sous-groupe,
- effectif : identique par sous-groupe fixé à 4.000 individus.

Pour finir, nous allons développer les flux liés aux engagements jusqu'au décès du dernier survivant pour chacune des simulations.

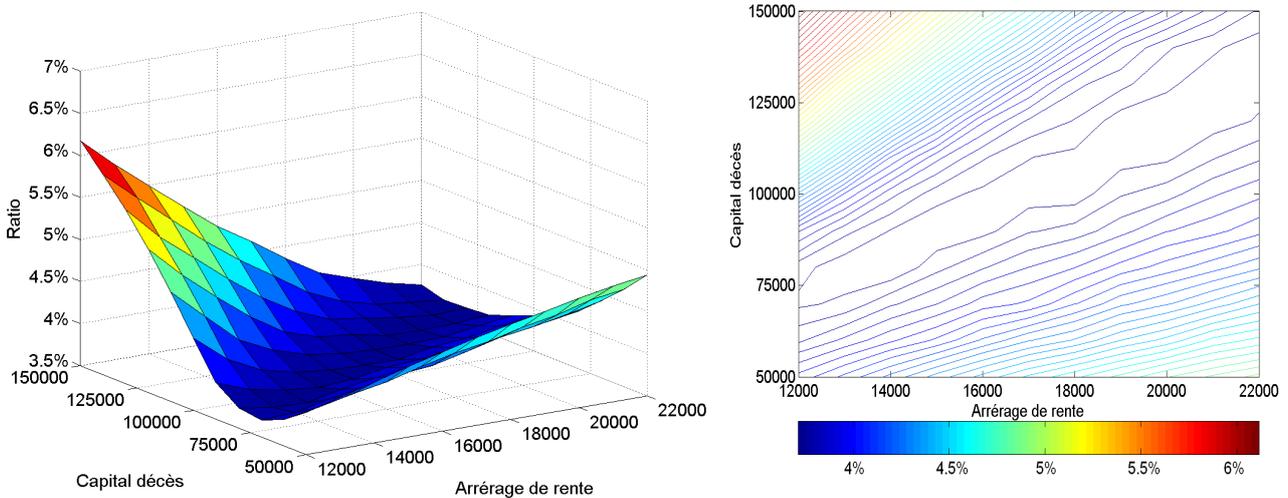
Remarque sur les $Ratio_\rho$

Le seul paramètre variant aussi bien pour les portefeuilles d'assurés que de rentiers est le montant du produit en question. Néanmoins, il demeure identique pour chaque individu selon son type de contrat. Or que le niveau d'engagement pour un produit soit de 1 euro ou de 1.000 euros, cela ne va produire aucune variation sur le niveau du $Ratio_\rho$ pour une mesure de risque ρ cohérente ou tout du

moins homogène. Cela tient naturellement à la définition du ratio qui est le rapport entre le capital économique et le montant d'engagement espéré, c'est donc une mesure relative du risque supporté par la compagnie. Dans nos applications, les portefeuilles d'assurés ont donc une unique valeur théorique du $Ratio_\rho$ pour une mesure ρ fixé. Il en est naturellement de même pour les portefeuilles de rentiers. Bien entendu une fois les deux types de portefeuilles associés, cette valeur varie et nous sommes alors intéressés par déceler le ou les niveaux inférieurs aux ratios des portefeuilles pris individuellement. Ce cas reflète l'effet positif de la couverture naturelle. De plus, nous nous intéressons également à déterminer le ou les éventuels ratios minimaux parmi tous ceux calculés.

2.1.2 Cas des assurés de 40 ans

Notre première étude utilise des portefeuilles d'assurés dont l'âge est fixé à 40 ans. Nous faisons alors varier le montant du capital décès de 50.000 à 150.000 euros avec un pas de 10.000 euros. De même, les arrrages annuels de rente vont de 12.000 à 22.000 euros avec un pas de 1.000 euros. Nous obtenons les graphiques suivants pour le $Ratio_{VaR}$ où la VaR est de niveau 0.95.

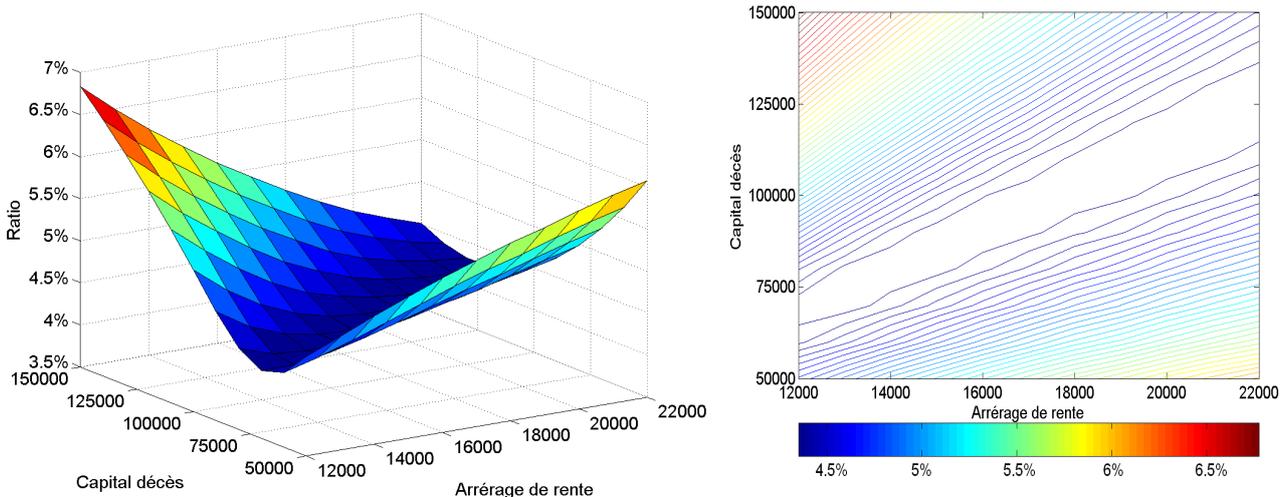


Surface et contours des $Ratio_{VaR}$ pour la part systématique

Première constatation, il n'apparaît pas sur cette figure de minimum local et *a fortiori* global. Il n'existe donc pas un niveau de capital décès et de rente qui combinés ensemble donnent un portefeuille de ratio minimal. Par contre, nous pouvons distinguer une bande « minimale ». Cette dernière matérialise les ratios les plus bas observés sur la surface à gauche. Elle permet à un niveau de capi-

tal décès fixé de faire correspondre un montant d'arrérage permettant d'obtenir le portefeuille assurés/rentiers avec le ratio minimal parmi tous les portefeuilles dont l'arrérage de rente est variable. Ceci est également inversement lisible pour un montant de rente fixé et des niveaux de capital décès variables. Cette observation est particulièrement visible sur le graphe de droite des contours. Sur ce dernier, nous pouvons observer une bande diagonale allant en s'élargissant pour les arrérages ou capitaux les plus élevés. C'est cette région qui coïncide avec les ratios les plus bas. En valeurs numériques, nous obtenons des ratios minimaux compris entre 3,68% et 3,71%. La répartition dans les engagements totaux des portefeuilles liés à ces ratios particuliers est de l'ordre de 60% à 63% pour les engagements liés aux rentes, et donc de 37% à 40% pour ceux des assurances.

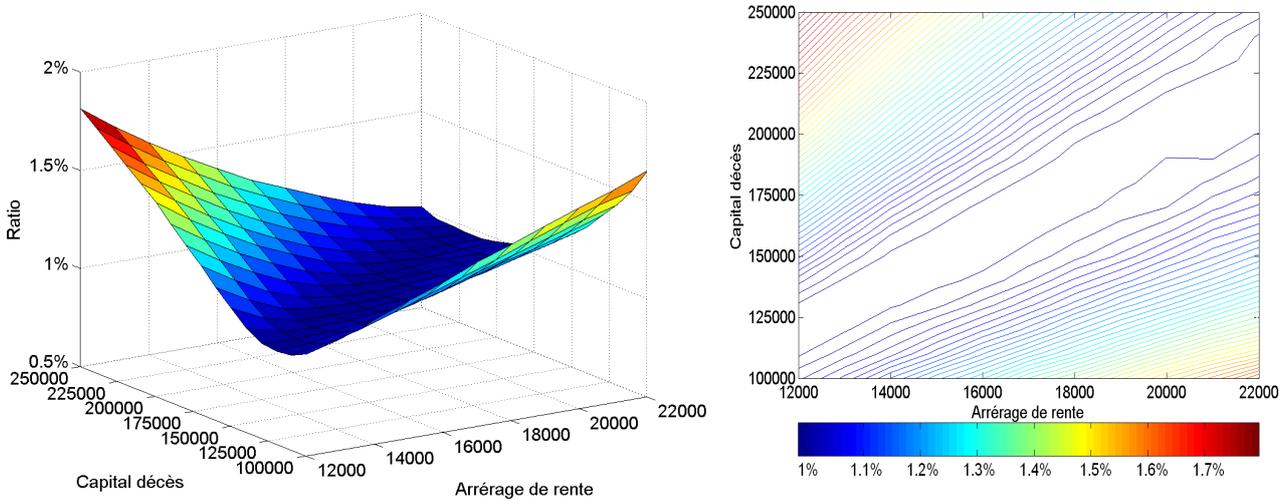
La forme des graphiques que nous obtenons est particulière et s'expliquent notamment par la répartition des niveaux des engagements entre assurances et rentes. Fondamentalement, plus le capital décès est élevé et la rente faible, et plus les engagements totaux du portefeuilles proviennent majoritairement des assurances. Or les mêmes types de $Ratio_{VaR}$ sur la part systématique du risque pour les portefeuilles uniquement d'assurés sont assez élevés et de l'ordre de 14,25%. Ceci explique le pic élevé dans le coin gauche observé sur la surface. Dans le même ordre d'idée, le pic du coin droit provient de la prépondérance des rentes sur les assurances qui tendent vers un ratio de l'ordre de 6,96%, celui des portefeuilles de rentiers individuellement. L'élargissement de la bande est dû au fait que nous nous éloignons des sommets liés respectivement aux portefeuilles d'assurés et de rentiers individuellement. Passons maintenant aux mêmes graphiques mais pour les ratios liés à la $TVaR_{0,95}$.



Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

Dans le cas de la $TVaR_{0,95}$, nous trouvons des niveaux de ratios plus élevés qu'avec la $VaR_{0,95}$, ce qui s'expliquent largement par la définition de ces mesures. Néanmoins, les interprétations sont dans le fond que très légèrement différentes. En effet comme nous pouvons le constater sur le graphe des contours, nous conservons cette bande diagonale un petit peu décalée vers le bas cette fois, vers des niveaux d'assurances plus faibles pour des mêmes niveaux de rentes. L'important est ici de noter que même si elle se situe à des hauteurs de ratios plus important, la localisation de cette bande est très proche de celle trouvée avec le $Ratio_{VaR}$. Pourtant dans le même temps, la surface à gauche évolue. L'altitude relative entre eux des pics à gauche et à droite s'est modifiée, puisque la hauteur de celui des rentes s'est rapprochée de celle des assurances. Effectivement, cette déformation s'explique toujours par le fait que les ratios tendent vers ceux des portefeuilles uniquement composés d'assurés d'un côté, et de rentiers de l'autre. Les valeurs du ratio sur la part systématique pour la $TVaR_{0,95}$ sont de l'ordre de 15,53% pour les assurances et de 9,16% pour les rentes. Le ratio des rentiers s'est d'avantage rapproché de celui des assurés par rapport au cas de la $VaR_{0,95}$. Pour finir, la répartition dans les engagements totaux des portefeuilles de ratio minimal s'est encore une fois légèrement décalé du côté des rentes. Les engagements de celles-ci représentent de 63% à 65% de ceux totaux, au lieu de 60% à 63% précédemment.

Nous enrichissons cette étude en comparant les derniers résultats avec ceux que nous pouvons obtenir en excluant le risque de modèle, mais tout en gardant celui d'incertitude sur les paramètres. Nous employons le modèle M2 pour les hommes et les femmes. Nous présentons ici les graphiques des ratios de la $TVaR_{0,95}$ sur la part systématique avec la même échelle d'arrérages de rentes et des capitaux allant de 100.000 à 250.000 euros avec un pas de 10.000 euros.



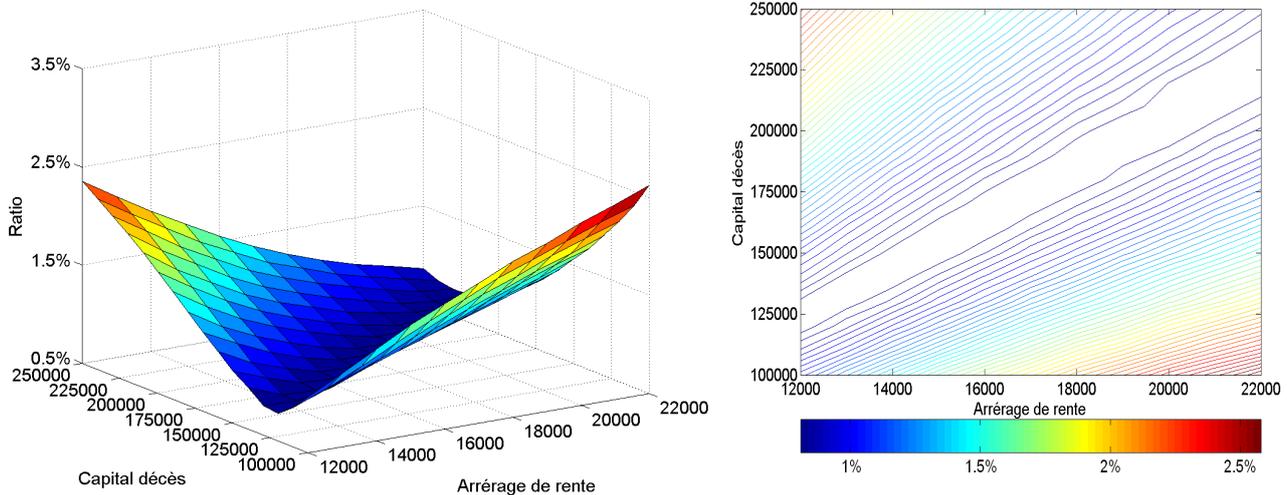
Surface et contours des $Ratio_{TVAR}$ pour la part systématique

En travaillant avec le meilleur modèle uniquement, nous trouvons des discordances par rapport aux résultats précédents, mais également des points communs. En effet, nous obtenons toujours une bande de ratios minimaux comprises entre 0,97% et 0,98%. Cependant, la localisation de cette bande pour des niveaux d'arrangements de rentes inchangés est modifiée vers des valeurs de capitaux décès beaucoup plus élevées. Par exemple pour une rente de 18.000 euros annuels, nous trouvons en prenant en compte le risque de modèle un capital optimal de 100.000 euros, et en l'excluant un capital de 180.000 euros. Notons que la part des rentes dans les engagements de ces portefeuilles de ratios minimaux est d'environ 51%. Globalement, il n'y a pas vraiment d'explications différentes à chercher pour la forme des graphiques et plus particulièrement la bande minimale. La différence notable réside bien entendu dans la localisation de cette région permettant d'associer les niveaux de capitaux et d'arrangements conduisant aux portefeuilles de ratios minimaux.

2.1.3 Cas des assurés de 60 ans

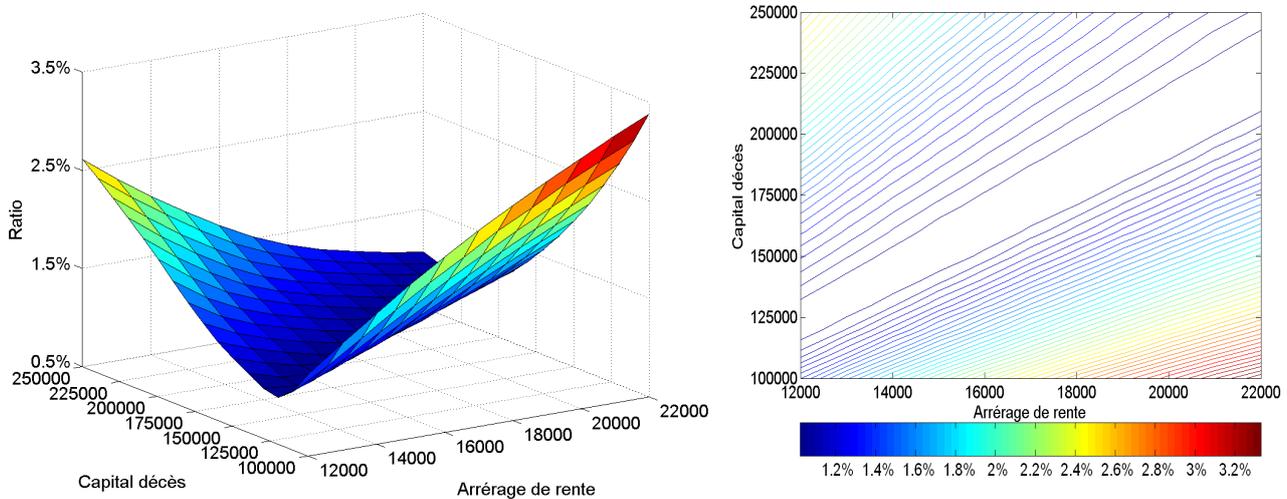
Pour la seconde étude, nous utilisons cette fois des portefeuilles d'assurances vie pour des individus âgés exclusivement de 60 ans. Ceci va par ailleurs nous permettre d'avoir une première idée de l'impact de l'évolution de l'âge sur la couverture naturelle. Notre but est donc de comparer les nouveaux résultats avec ceux précédemment analysés. Nous gardons la même échelle pour les arrangements de rente entre 12.000 et 22.000 euros avec un pas de 1.000 euros. Pour obtenir des graphiques équivalents à ceux précédents, nous changeons la plage de capitaux de

100.000 à 250.000 euros avec le même pas de 10.000 euros. Nous débutons avec les graphiques pour les ratios de la $Var_{0,95}$ sur la part systématique seulement.



Surface et contours des $Ratio_{VaR}$ pour la part systématique

Cette fois encore, nous devons faire la constatation qu'il n'existe pas de minimum local ou global sur cette figure, mais une nouvelle bande diagonale « minimale ». La localisation de cette bande a par contre totalement évoluée puisqu'elle se situe à des niveaux de capitaux bien plus élevés pour de même montants de rentes. Cette bande s'élargit toujours pour des arrrages ou des capitaux élevés, comme nous le voyons sur le graphe des contours. La forme de la surface reste fondamentalement la même avec les deux pics représentatifs des influences des portefeuilles uniquement constitués d'assurés (à gauche) et de rentiers (à droite). La valeur des ratios sur la part systématique pour ces derniers types de portefeuilles sont de l'ordre de 6,03% pour les assurances et de 6,96% pour les rentes. L'ordre de grandeur du ratio des assurés est le seul à changer puisque l'âge de ces derniers est modifié dans cette seconde étude. Nous pouvons donc conclure que ce changement n'a pas d'influence sur l'interprétation que nous avons déjà formulée quant à la forme des graphiques. Il est cependant raisonnable de voir la localisation de la bande être modifiée et correspondant à des niveaux de ratios compris entre 0,77% et 0,78%. La répartition des engagements totaux entre la part provenant des assurances et celle des rentes est également modifiée : entre 39% et 40% pour les rentes et donc entre 60% et 61% pour les assurances. Intéressons nous maintenant aux graphiques pour les ratios de la $TVaR_{0,95}$ sur la composante systématique du risque.

Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

Par rapport aux résultats obtenus avec la $VaR_{0,95}$, nous avons les mêmes observations exception faite des niveaux des ratios supérieurs avec la $TVaR_{0,95}$. La forme de la surface évolue et notamment le pic des rentiers augmente plus relativement à celui des assurés. Effectivement, le ratio sur la part systématique pour les portefeuilles exclusivement constitués de rentiers est de l'ordre de 9,16% par rapport à 6,91% pour celui exclusivement d'assurés. Par contre, la bande minimale est située pratiquement pour les mêmes niveaux de capitaux et d'arrages pour des ratios compris entre 0,97% et 0,98%. L'écart est encore moins important que par rapport à la première étude et ne se ressent pas dans la répartition des engagements totaux pour ces portefeuilles dont le ratio est minimal. Nous n'avons pas de différence fondamentale à formuler pour expliquer la forme de la surface ni la localisation de la bande que les propos déjà évoqués.

2.1.4 Synthèse

Cette première analyse nous à amener à voir un effet largement bénéfique de la couverture naturelle entre des portefeuilles d'assurés et de rentiers. Nous avons remarqué l'existence d'une bande mettant en correspondance un niveau de capital décès et un d'arrage de rente permettant d'obtenir les portefeuilles dont le ratio est minimal. Il n'existe pratiquement pas de différence dans la localisation de cette bande pour les montants des assurances et des rentes en fonction du type de ratio que nous avons pu choisir. Et ce même si les surfaces évoluent entre la $VaR_{0,95}$ et la $TVaR_{0,95}$, et notamment vis-à-vis des sommets dus à la prépondérance croissante des assurances ou des rentes dans le portefeuille total en fonction

de l'évolution inverse des niveaux de capitaux et d'arrérages. En modifiant l'âge des assurés, nous récupérons logiquement des montants d'engagements inférieurs à ceux précédents pour les portefeuilles d'assurance. Nous obtenons une nouvelle localisation de cette bande, désormais pour des capitaux plus élevés pour les mêmes niveaux de rentes à l'âge de 60 ans. La répartition des engagements des portefeuilles totaux appartenant à cette région évolue également. Nous avons observé que la part des rentes à diminuer en augmentant l'âge des assurés. Nous obtenons également le même type de conclusions lorsque nous excluons le risque de modèle et travaillons avec un seul modèle de mortalité particulier. L'impact quant au choix de modélisation est donc important. La question qui se pose à nous est de savoir comment évolue cette fameuse bande. Existe-t'il par exemple une légère inclinaison de celle-ci en direction des niveaux de rentes et d'assurances élevés que nous ne pouvons pas relever sur nos graphiques ?

2.2 Sensibilité par rapport aux nombres d'hommes et de femmes rentiers

Nous venons de décrypter un premier phénomène lié à la couverture naturelle. Cette nouvelle analyse va se pencher sur la sensibilité par rapport aux nombres de rentiers hommes ou femmes. Elle se veut être la généralisation de la première approche menée dans le premier chapitre de cette partie, où la proportion d'hommes et de femmes demeurait égale tout au long de l'étude. Ici, nous partons toujours d'un portefeuille d'assurés unique et fixé selon certains critères. Puis, nous lui ajoutons des portefeuilles de rentes dont les effectifs d'hommes et de femmes sont à chaque fois variables. Nous apprécions ensuite les résultats numériques issus des seuls ratios découlant de la $TVaR_{0.95}$. Exception faite des niveaux de ces ratios, nous avons pu déjà remarquer un très léger décalage entre les résultats liés aux $Ratio_{VaR}$ et ceux aux $Ratio_{TVaR}$. Nous préférons utiliser la $TVaR$ de niveau 0.95 pour son aspect plus prudent que la VaR de même niveau.

2.2.1 Préliminaires

Les portefeuilles

Dans cette section, l'unique **portefeuille d'assurés** est composé de deux sous-groupes selon le sexe. L'étude est effectuée en deux parties utilisant un âge différent pour les assurés. Pour chacune des parties, les assurés sont considérés comme ayant le même âge. De plus, nous allons faire varier sommairement la proportion d'hommes et de femmes de ce portefeuille, mais sans toucher à l'effectif total du portefeuille. Les éléments caractéristiques sont alors les suivants :

- âges : 40 ou 60 ans,
- sexe : hommes et/ou femmes,
- montant du capital décès : identique par sous-groupe fixé à 100.000 euros,
- effectif : 8.000 individus au total répartis le cas échéant exclusivement en hommes, en femmes ou à moitié.

Nous utilisons en outre des **portefeuilles de rentiers** constitués de deux sous-groupes également selon le sexe. Leurs caractéristiques sont données par :

- âge : 65 ans,
- sexe : hommes et femmes,
- montant des arrérages annuels de rentes : identique par sous-groupe fixé à 15.000 euros,
- effectif : **variable** selon le sexe.

En ce qui concerne le nombre d'hommes, les valeurs de nos applications varient entre 0 et 1.000 individus avec un pas de 100. Pour les femmes, l'échelle est suivant le cas comprise entre 0 et 1.500 personnes ou entre 0 et 2.000 personnes avec un pas de 100. Enfin, nous développons les flux liés aux engagements jusqu'au décès du dernier survivant pour chacune des simulations.

Remarque sur les $Ratio_\rho$

Par rapport à l'analyse de sensibilité précédente, le portefeuille d'assurés est fixe et seuls ceux de rentiers évoluent selon l'effectif lié au sexe, les autres paramètres étant constants. Chaque portefeuille de rentiers hommes et femmes a selon le cas soit un effectif total différent des autres, ou soit une répartition hommes-femmes différente de ceux possédant le même nombre d'individus global. Dans ces conditions, il est presque certain de trouver pour ces portefeuilles des valeurs différentes pour les $Ratio_\rho$ avec ρ une VaR ou $TVaR$. Ceci s'avère effectivement vrai pour le risque global que nous associons à la somme des engagements futurs actualisés, puisque par exemple les fluctuations d'échantillonnage dues aux effectifs croissants provoquent la baisse des ratios. Ces fluctuations n'existent plus par contre pour la composante systématique du risque, et seule la répartition hommes-femmes reste discriminante pour nos mesures ρ particulières. Mais pour une même répartition, nous avons donc une même valeur théorique des $Ratio_\rho$ une fois la mesure fixée, car ce ratio est une mesure relative. Nous obtenons donc les mêmes niveaux de ratios pour la part systématique du risque pour des portefeuilles exclusivement constitués d'hommes, de femmes, à moitié d'hommes et de femmes, ou à un tiers d'hommes et deux tiers de femmes par exemple. Pour bien apprécier l'effet de la couverture naturelle, il faut donc comparer les valeurs pour la composante systématique du ratio du portefeuille d'assurés et des portefeuilles de rentiers avec ceux résultants de l'association des portefeuilles assurés/rentiers.

L'idéal est naturellement d'obtenir un ou des minimums.

2.2.2 Cas des assurés de 40 ans

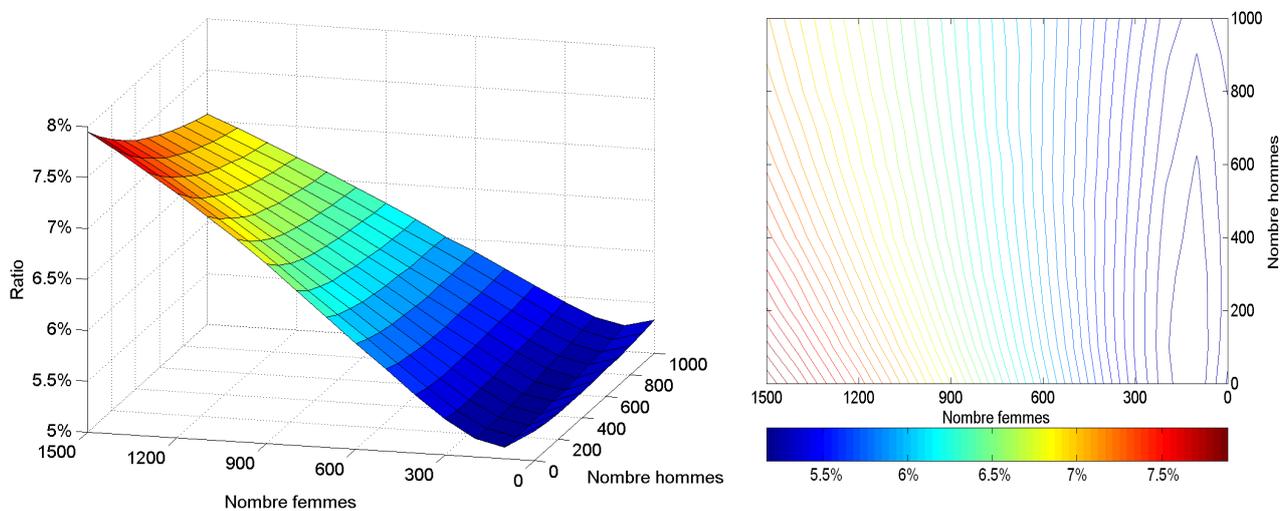
Dans cette première sous-section, nous fixons l'âge des assurés à 40 ans. Puis, nous utilisons trois types de portefeuille d'assurés constitué :

1. exclusivement d'hommes,
2. exclusivement de femmes,
3. à moitié d'hommes et de femmes.

Nous prenons en compte à chaque fois le risque de modèle ainsi que celui d'incertitude sur les paramètres. Toutefois dans le cadre du portefeuille d'assurés à moitié d'hommes et de femmes, nos simulations sont également faites avec le modèle M2 pour les hommes et les femmes en gardant l'incertitude sur les paramètres.

Assurés exclusivement masculins

Dans le cas d'assurés de sexe masculin, les graphiques suivants pour les ratios de la $TVaR_{0,95}$ sur la part systématique sont obtenus :



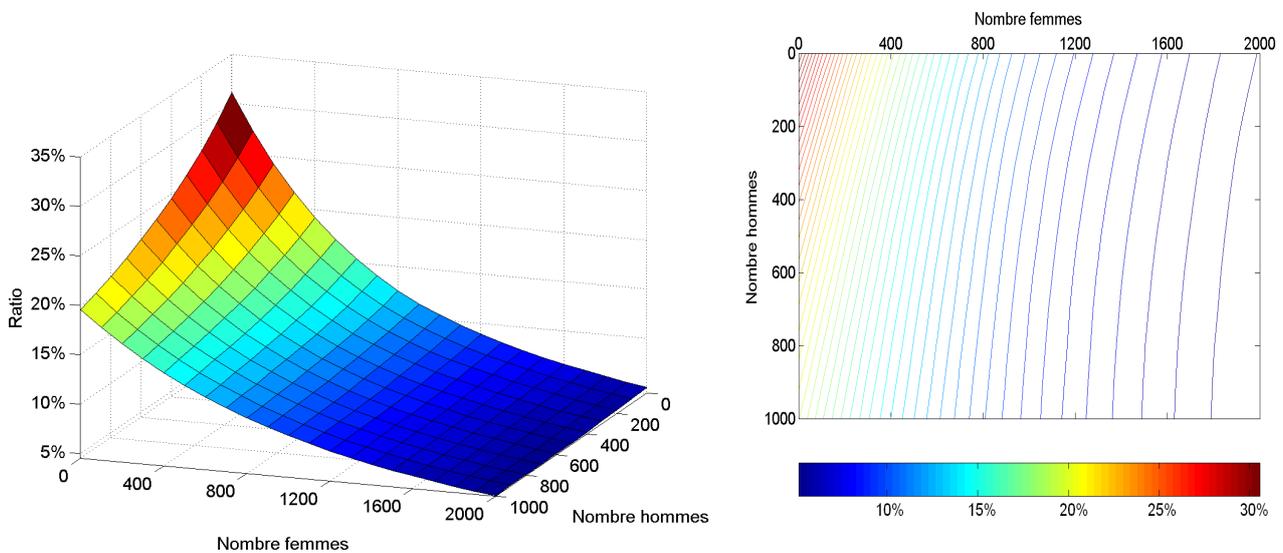
Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

Le premier constat est que la couverture naturelle n'a ici aucun ou voir très peu d'effet bénéfique si nous comparons l'ensemble des ratios issus de la nappe avec celui particulier du portefeuille d'assurés uniquement. Ce dernier se situe dans le coin en bas à gauche à un niveau de 5,29%. Les quelques cas où la couverture est positive sont localisés pour un nombre très limité de femmes, entre 0 et

200. Une région semble être constituée des minimums et est localisée pour 100 femmes et entre 0 et 400 hommes environ pour des ratios de l'ordre de 5,12%. Le gain est donc relativement faible. Tous les autres cas de figure présents sur les figures sont des situations où les ratios sont supérieurs à celui des assurés seulement. Nous pouvons d'ores et déjà affirmer que le sexe semble jouer un rôle dans le résultat final de couverture naturelle entre les deux produits. En effet, la nappe est totalement dissymétrique et pour un nombre total de rentiers fixé, les ratios augmentent globalement lorsque la part de femmes rentières dans le portefeuille d'assurés/rentiers devient prépondérante. Remarquons que les ratios de la $TVaR_{0,95}$ sur la part systématique des portefeuilles de rentiers sont compris entre 7,75% et 13,69%, niveaux pour les rentiers respectivement exclusivement masculins ou féminins. Or, ces valeurs sont globalement bien supérieures à ceux en ajoutant les assurés. Dans ce sens, la couverture naturelle est bénéfique.

Assurés exclusivement féminins

Nous obtenons le type de graphiques suivants pour les ratios de la $TVaR_{0,95}$ dans le cas d'assurés uniquement de sexe féminin.



Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

La situation est ici pratiquement complètement opposée à celle précédente. En effet avec un ratio de 31,12% pour le portefeuille d'assurés uniquement, nous pouvons constater que les autres ratios de la nappe lui sont inférieurs. La couverture naturelle a donc un effet largement bénéfique de ce point de vue. Nous obtenons la même fourchette entre 7,75% et 13,69% de ratios sur la part systématique pour les portefeuilles de rentes puisque ceux-ci ont les mêmes caractéristiques que pré-

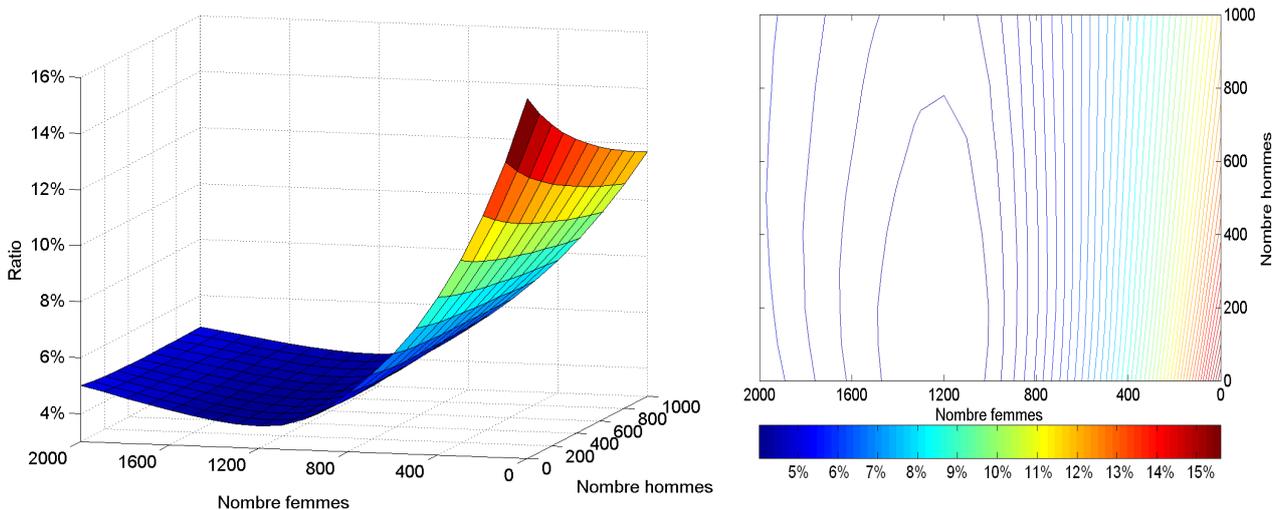
cédemment. Cette fois le ratio pour les assurés leur est tous supérieur, ce qui implique qu'il faut donc s'éloigner de la « zone d'influence » de ce portefeuille pour obtenir les ratios sur portefeuilles assurés/rentiers les plus bas et même inférieurs à ceux des rentes uniquement. Sur nos graphiques, le minimum se situe pour 2.000 femmes et 1.000 hommes à un niveau de 4,56%. Ce ratio n'est certainement pas le niveau minimal compte tenu qu'il est atteint pour nos limites d'échelles. Néanmoins, la région l'entourant fait partie de la zone que nous recherchons pour ses vertus de couverture naturelle positive, puisque les ratios s'y trouvant sont inférieurs aux portefeuilles d'assurés et de rentiers pris individuellement. Dernier constat pour un nombre de rentiers total fixé, les ratios diminuent lorsque la part de femmes dans le portefeuille d'assurés/rentiers augmente. Le sexe semble donc avoir une influence, et ici il est préférable d'avoir plus de femmes que d'hommes dans les portefeuilles de rentes pour jouir de la couverture maximale.

Assurés à moitié masculins et féminins

Pour ce cas particulier, nous avons scindé l'étude en deux parties : la première en prenant en compte le risque de modèle, et la seconde en l'excluant et en ne travaillant qu'avec le modèle M2.

1 - Risque de modèle inclus

Nous donnons les graphiques obtenus pour les ratios de la $TVaR_{0,95}$ sur la part systématique dans le cadre où le risque de modèle est retenu.

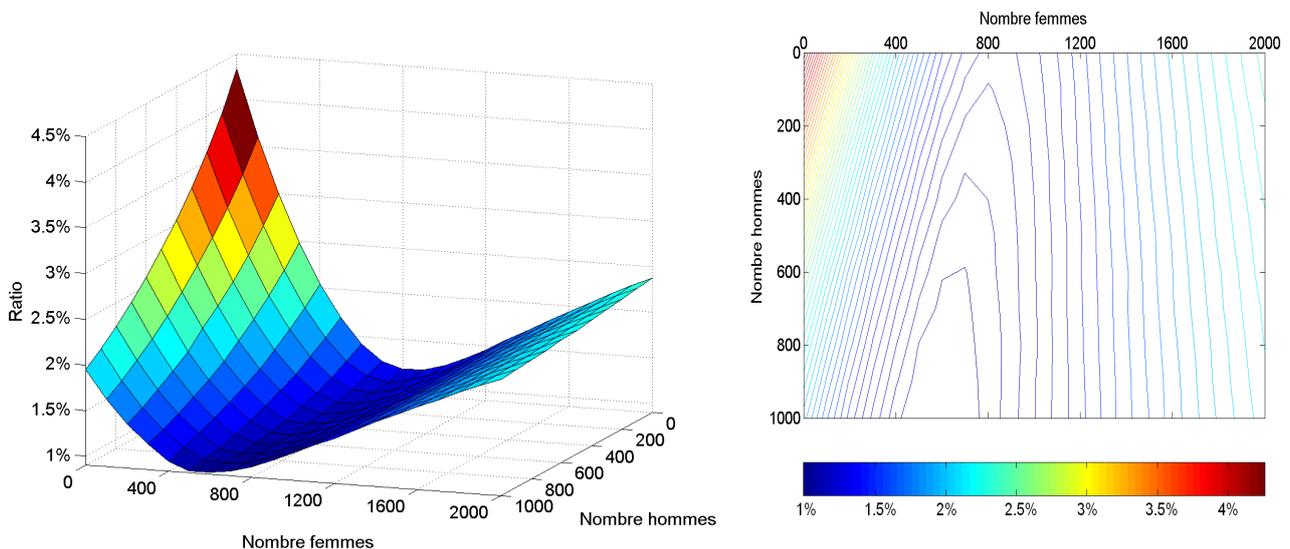


Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

Ici encore, le ratio du portefeuille d'assurés uniquement s'avère avec 15,85% être supérieur à l'ensemble des ratios des portefeuilles de rentiers uniquement, ainsi qu'à ceux des portefeuilles d'assurés/rentiers de la surface ci-avant. Nous sommes donc dans une situation où la couverture naturelle est extrêmement bénéficiaire vis-à-vis des assurances. Sur les graphiques, nous pouvons observer une zone assez étendue à partir de 500 femmes environs où les ratios sont localisés en dessous des 7,50%, et donc des ratios des rentiers également. C'est également dans cette zone que se situe la région minimale d'un niveau de 3,78% atteint pour 1.200 femmes et entre 0 et 200 hommes. Il semble encore que le rôle des hommes et des femmes dans la couverture pour ce portefeuille d'assurés particulier ne soit pas le même. Le nombre de femmes est essentiellement le facteur primordial, tandis que celui des hommes ne paraît pas trop faire évoluer le niveau des ratios comparativement aux femmes. Ceci est particulièrement visible en regardant les ratios du graphe des contours, il suffit de tracer des perpendiculaires avec l'axe des femmes et de les comparer avec les lignes de niveau. Notons que ce fait est de plus en plus marqué pour un nombre de femmes suffisamment important, à partir de 500 par exemple.

2 - Risque de modèle exclus

Nous donnons les mêmes types de graphiques mais dans le cadre du modèle M2 uniquement et en tenant toujours compte du risque d'incertitude sur les paramètres de ce modèle.



Surface et contours des $Ratio_{TVAR}$ pour la part systématique

Les résultats sont assez différents du cas précédent. Les ratios obtenus sont bien

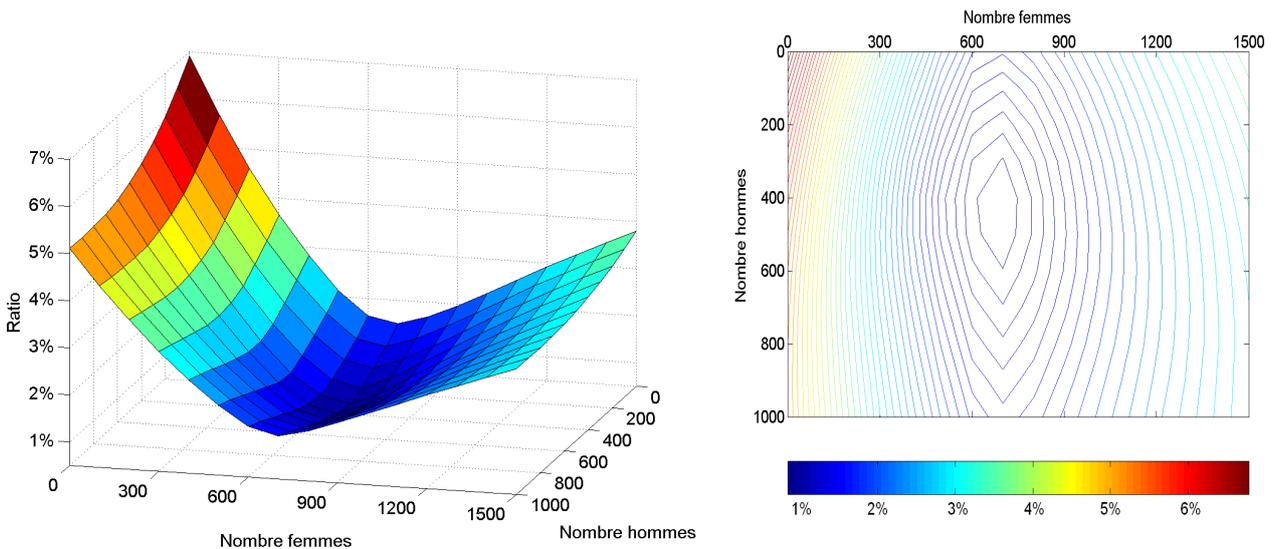
évidemment inférieurs que lorsque nous retenons le risque de modèle qui est source de plus grande variabilité. Nous avons par exemple un résultat de 4,33% pour les assurés uniquement. Cette fois, ce nombre est compris dans la fourchette entre 1,82% et 5,84% des ratios des rentes sur la part systématique, ceux-ci sont associés respectivement aux rentiers hommes et femmes uniquement. La divergence la plus notable avec le cas précédent est l'évolution de la zone de ratios minimaux. Celle-ci se situe dorénavant à un niveau de 0,92% pour un nombre de femmes compris entre 500 et 700 sur nos graphiques. Quant au nombre d'hommes, celui-ci est limité à 1.000, mais tout simplement en raison de notre échelle. La zone minimale est certainement en dehors de nos graphiques pour des nombres d'hommes supérieurs à 1.000 et des nombres de femmes éventuellement inférieurs. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder l'allure des contours à droite. Le rôle des hommes dans l'effet de la couverture naturelle s'est donc considérablement accru par rapport à l'exemple précédent.

2.2.3 Cas des assurés de 60 ans

Cette fois, notre étude se borne à des assurés âgés de 60 ans et répartis à part égale entre les hommes et les femmes. Nous travaillons d'abord avec le risque de modèle, puis nous l'omettons de la même manière que précédemment.

Risque de modèle inclus

Les graphiques suivants sont donnés pour le ratio lié à la $TVaR_{0,95}$ pour un portefeuille d'assurés à moitié d'hommes et de femmes tous âgés de 60 ans.

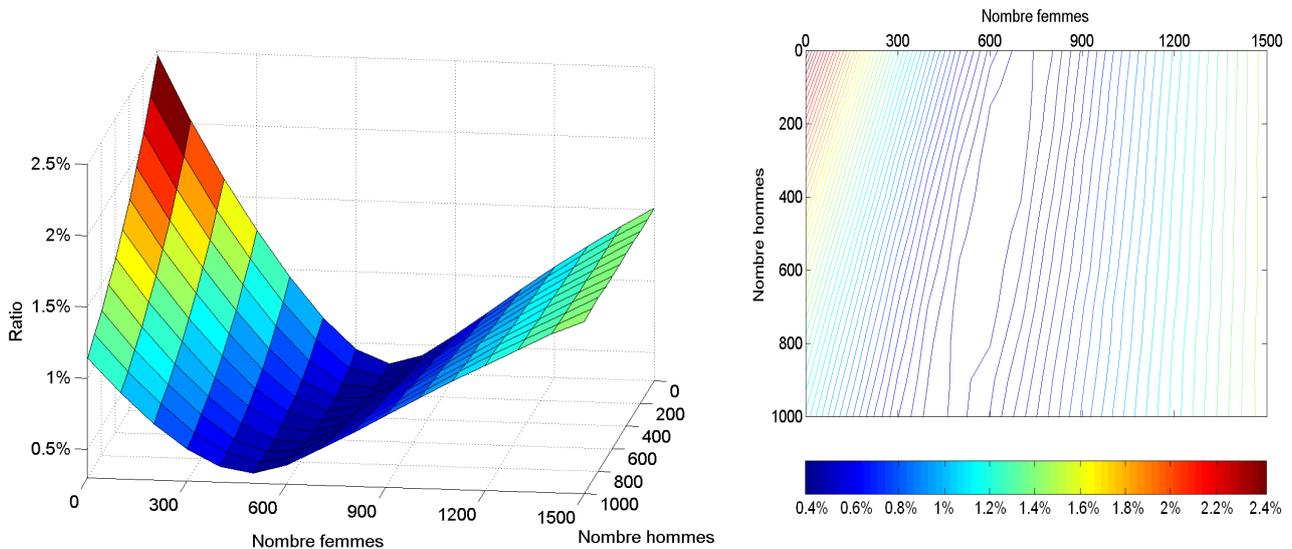


Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

L'âge des assurés est un facteur qui a des conséquences importantes dans l'obtention de nos résultats. Si nous comparons ces graphiques à la même situation mais pour des assurés âgés de 40 ans, alors nous remarquons une baisse totale des ratios. Par exemple pour le cas des assurés uniquement, nous passons d'un niveau de 15,85% à 6,91% ici. Ceci a pour effet à ce qu'il soit inférieur à l'ensemble des ratios des portefeuilles de rentiers compris pour rappel entre 7,75% et 13,69%. Dans ce cas, la zone minimale ne peut pas être obtenue pour des valeurs des nombres d'hommes et de femmes trop élevées. Le minimum global est atteint pour 0,72%, à des valeurs de 700 femmes et 400 hommes. Le rôle des sexes dans la couverture naturelle a encore évolué par rapport au cas où les assurés sont âgés de 40 ans.

Risque de modèle exclus

Dans une situation ne tenant pas compte du risque de modèle mais du risque d'incertitude sur les paramètres, nous obtenons les graphiques suivants pour les ratios de la $TVaR_{0,95}$ sur la part systématique en utilisant le modèle M2.



Surface et contours des $Ratio_{TVaR}$ pour la part systématique

Comme attendu, les ratios ont diminué de valeur puisqu'un risque a été supprimé. De plus, l'âge implique encore une fois que l'ensemble des ratios ont diminué. L'exemple parfait est le cas des assurés uniquement, dont le ratio diminue de 4,33% à 2,47%. Nous sommes par contre dans la même situation que pour les assurés de 40 ans, c'est-à-dire que le ratio de 2,47% se situe dans le panel des ratios des rentes compris entre 1,82% et 5,84%, respectivement ratio des rentiers uniquement hommes et femmes. Ceci peut être la raison pour laquelle nous ne

déterminons pas une zone limitée de ratios minimaux selon le nombre d'hommes. En effet, nous obtenons plutôt une ligne minimale partant de 0 hommes et 700 femmes et allant jusqu'à 1.000 hommes et 500 femmes. Cette ligne est alors coupée par la limite due à notre échelle. Les ratios minimaux sont au passage compris entre 0,35% et 0,37%.

2.2.4 Synthèse

Cette analyse s'est focalisée principalement sur la sensibilité de l'impact de la couverture naturelle aux nombres de rentiers hommes et femmes. Pour commencer, nous avons pu remarquer dans chacun des cas étudiés une zone particulière de ratios sur la composante systématique du risque lié à la somme des engagements futurs actualisés. Cette zone coïncide aux endroits où les ratios sont inférieurs à la fois à celui du portefeuille d'assurés fixé, mais aussi à ceux des portefeuilles de rentiers correspondants. C'est en cela que réside le véritable impact bénéfique de la couverture naturelle qui arrive à compenser deux sources de risque relativement aux montants d'engagements espérés. Nous pouvons même aller plus loin, car nous avons identifié une région à l'intérieur de cette zone bien spécifique. Cette région est celle des ratios de niveau minimal, en définitive là où la couverture naturelle est la plus forte. C'est certainement là que rentre en jeu l'influence du sexe dans la localisation de cette zone minimale.

Nous pouvons dire que ce rôle est différent. Les deux premiers exemples où les assurés ont 40 ans peuvent nous amener à penser qu'il est préférable de souscrire des rentiers hommes pour des assurés hommes et des rentières femmes pour des assurés femmes. Néanmoins pour l'exemple suivant où nous mélangeons des assurés hommes et femmes, il apparaît que les rentières ont une influence prépondérante dans l'efficacité de la couverture naturelle. Le fonctionnement est plus complexe que cela car il dépend bien évidemment du modèle de mortalité choisi. L'écart est notable entre le fait d'utiliser un seul modèle et l'ensemble de ceux disponibles, et est logique quand nous songeons à la différence dans les taux futurs de mortalité et leur variabilité selon le modèle ou le sexe.

Enfin, nous avons pu saisir un autre effet lié à l'âge. Et là encore le fonctionnement est complexe car la mortalité des assurés est totalement modifiée pour chaque modèle. Ceci provoque en outre une nette diminution des ratios des portefeuilles d'assurances due *a priori* à la baisse supérieure de variabilité du risque par rapport au niveau d'engagement espéré par la compagnie. Il est alors également logique de trouver une nouvelle répartition de l'influence du sexe sur la couverture optimale.

Pour aller plus loin

 et ultime chapitre permet de clore ce mémoire en s'attardant plus longuement sur les différentes pistes de réflexion visant à enrichir ou améliorer notre étude. Ces derniers points n'ont pas été appliqués ou pris en compte bien souvent par manque de temps ou car trop difficile à mettre en œuvre pour le moment. Nous distinguons deux groupes de pistes. Le premier concerne les améliorations possibles à faire vis-à-vis des modèles ou hypothèses permettant d'obtenir le cadre de notre étude sur la couverture naturelle. Le deuxième rassemble nos idées quant à la poursuite de l'analyse de l'impact de la couverture naturelle.

3.1 Améliorations possibles

Tout au long de ce travail, certains éléments nous sommes apparus comme pouvant apporter un plus dans les traitements effectués qui permettent d'étudier le principe et l'impact de la couverture naturelle. Nous résumons ici les principaux points dont l'amélioration pourrait enrichir ce mémoire.

L'hypothèse de Poisson

Pour commencer, cette étude est presque entièrement basée sur une hypothèse particulière. Cette hypothèse 3.1.1 est celle de modélisation du nombre de décès D_{xt} à l'âge x pendant l'année t selon une loi de Poisson. La conséquence s'apprécie directement dans l'emploi du maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres des modèles de mortalité. Ce n'est bien sûr qu'un point clé de toutes les conséquences découlant de cette spécification, mais qui traduit néanmoins l'importance de celle-ci. Il faut noter que cette hypothèse est une approximation du modèle naturel où D_{xt} suit une loi binomiale de paramètres le nombre de survivant d'âge x en début d'année t et la probabilité $q_x(t)$ de décéder dans l'année t à

l'âge x . De plus si nous utilisons un principe de fermeture des tables et notamment sur les probabilités $q_x(t)$, l'hypothèse de Poisson peut alors rentrer en conflit avec un tel procédé qui modélise directement les décès. Néanmoins pour employer les programmes de *LifeMetrics*, nous sommes quelque part obligés de supposer cette hypothèse.

Le modèle de pandémie

Le modèle que nous avons utilisé dans ce mémoire est très simple, puisque basé sur une loi de Bernoulli. Finalement, nous ne proposons et implémentons qu'un unique modèle de pandémie de type grippal. Il serait certain que de développer d'autres modèles nous permettrait de mieux analyser l'impact de ce phénomène épidémique. Lors de nos recherches, nous avons pris connaissance de modèles de mortalité particuliers. Ces derniers contiennent directement la possible occurrence et les effets d'une pandémie par l'intermédiaire de sauts. Leur dénomination provient d'ailleurs de cette particularité, puisqu'on les appelle les « modèles de mortalité à sauts ». Plusieurs références existent sur ce sujet, nous en citons deux : la première de Chen & Cox (2007) [8] qui incorpore des sauts au modèle classique de Lee-Carter, et la seconde de Hainaut & Devolder (2007) [17] qui utilise des processus de Lévy pour les sauts.

Mortalité et antisélection

Nous avons déjà évoqué auparavant le risque d'antisélection menaçant les assureurs sur le marché des rentes. Ce risque provient de la différence de mortalité existant entre les rentiers et le restant de la population. En effet, les personnes étant en excellente santé pensent vivre plus longtemps que la moyenne. Dans le cas des assurances vie, c'est le contraire bien évidemment qui est à redouter pour les compagnies. En tout cas, il paraît certain qu'il existe de réelle divergence entre les mortalités des populations de rentiers et d'assurés. Il serait donc très opportun d'en prendre compte dans nos modèles soit par l'intermédiaire de tables d'expérience, ou soit de coefficients correcteurs.

3.2 Analyses supplémentaires

Nous disposons naturellement d'un temps limité pour réaliser les analyses nous intéressant. Cependant, d'autres types d'études que celles menées auraient pu également être envisagées.

Le taux d'actualisation

Nous avons dans nos applications toujours supposé comme constant le taux d'actualisation ou de façon équivalente le taux technique des produits. Il serait toutefois intéressant d'intégrer d'une manière ou d'une autre dans notre étude une possible variation de ce taux. Ceci constituerait par ailleurs une première étape vers la prise en compte des risques financiers non inclus ici. Il ne s'agit pas forcément de partir vers des modèles du type du taux d'intérêt stochastique, mais plus facilement de faire une analyse de sensibilité à partir de variations déterministes de ce taux par exemple.

Approfondissement des analyses

Dans les analyses de sensibilité que nous avons développées, nous avons eu l'occasion d'effleurer en quelque sorte deux autres paramètres. Tout d'abord, l'âge notamment chez les assurés a été modifié dans plusieurs études. Nous avons à ce propos remarqué sur l'ensemble de nos exemples que pour un âge de rentiers fixe, le passage de 40 à 60 ans chez les assurés provoque une baisse des ratios sur les parts systématiques du risque. Il nous paraît intéressant de développer plus en avant une analyse sur les niveaux de ratios obtenus en fonction de l'âge des assurés, mais aussi pour celui des rentiers. Enfin, nous souhaiterions développer les comparaisons entre les modèles pour mieux déterminer la dépendance entre les résultats obtenus et le ou les modèles sélectionnés.

Vers d'autres mesures

Ce mémoire a nécessité le choix de certaines mesures pour évaluer l'impact de la couverture naturelle. Nous pouvons nous demander dans quel mesure nos interprétations sont-elles dépendantes de ce choix effectué. Il serait par exemple utile d'employer de nouvelles mesures de risque pour le ratio que nous avons défini, ou pourquoi pas introduire une nouvelle mesure pour la couverture naturelle. Nous pouvons également raccourcir l'horizon sur lequel nous considérons les risques. Pour le moment, notre étude se cantonne à une vision globale des engagements jusqu'à leur extinction. Dans ce contexte d'étude à plus court terme, nous pourrions peut-être nous interroger de nouveau sur l'impact de la pandémie.

Conclusion Générale

ans toute notre étude, nous n'avons eu de cesse de nous interroger quant au fonctionnement de la couverture naturelle. Intuitivement, nous la présentons comme un moyen de bénéficier des effets contraires des risques de longévité et de mortalité. Cette conviction demeure bien entendu à être vérifiée, mais surtout approfondie et analysée en même temps. Pour cela, nous avons dû choisir certaines orientations qui nous l'avouons ne sont pas sans conséquences. Celles-ci sont de l'ordre de trois types principaux : la modélisation de la mortalité, la simulation des engagements, et enfin le traitement pour l'analyse de ces simulations.

Premièrement pour la modélisation de la mortalité, nous choisissons d'employer des modèles à la fois stochastiques et extrapolatifs. Ils permettent tout d'abord d'extrapoler dans le futur des tendances constatées par le passé. Cette méthode est limitée car elle ne peut tout simplement pas prévoir des variations liées à des facteurs biologiques ou environnementaux par exemple. Ensuite, de par leur aspect stochastique, ils autorisent la prise en compte de plusieurs scénarios de mortalité. Ainsi, nous pouvons incorporer les différents risques systématiques de mortalité et de longévité dans notre étude. Deuxièmement pour la partie consacrée à la simulation, nous avons un travail préalable de calibrage des modèles sur des données françaises *via LifeMetrics*. Une fois ceci effectué, nous construisons des algorithmes permettant de simuler les engagements de portefeuilles de rentes et d'assurances vie, contrats qui reflètent parfaitement l'impact des risques étudiés. De plus, notre méthodologie décompose la part systématique du risque total. Enfin troisièmement, nous mettons en place deux indicateurs relatifs particuliers. Ils vont nous permettre de détecter et comparer ultérieurement le niveau de couverture naturelle contenu dans l'association des portefeuilles. Notre indicateur privilégié est le rapport entre le capital économique, symbolisant le surcoût du risque, et le montant espéré des engagements.

Notre travail s'achève en utilisant tous nos développements pour analyser l'effet de la couverture naturelle. Dans toutes nos applications, nous avons à chaque fois détecté l'influence de cet outil de compensation des risques. Notre première approche pratique a montré l'existence d'un nombre optimal de rentes à ajouter aux assurances pour obtenir la couverture la plus importante. Nous avons pu par ailleurs constater sur cet exemple que l'ajout successif de risques supplémentaires ne modifiait pas la nature fondamentale de cette influence, mais seulement le niveau. Il s'agissait des risques d'incertitude sur les paramètres, de modèle et enfin de pandémie. Néanmoins, ce dernier point ne peut être considéré comme à valeur générale. En effet, nos analyses de sensibilité ont noté quelques divergences, notamment pour les cas avec et sans le risque de modèle. En faisant varier les montants de prestations, nous avons remarqué un résultat général. Il existe pour

un capital fixé un unique montant d'arrérage, et inversement, offrant la couverture optimale. La prise en compte ou non du risque de modèle ne modifie pas ce résultat, mais seulement ses valeurs. Pour la seconde analyse de sensibilité par rapport aux effectifs de rentiers hommes et femmes, nous avons toujours réussi à exhiber une zone où la couverture est la plus importante. Mais cette fois, le phénomène est un peu plus complexe. Les résultats évoluent nettement selon que le risque de modèle est pris en compte ou pas, et selon la constitution en hommes et femmes du portefeuille d'assurés. Nous ne sommes pas arrivés à trouver une règle définitive quant à la localisation *a priori* de cette zone.

Nous pensons avoir montré dans ce mémoire l'utilité de la couverture naturelle comme moyen de compenser les risques systématiques de longévité et de mortalité. Naturellement, certains points restent à développer. La manière dont nous avons introduit le risque de modèle ou la pandémie sont des premiers « jets ». Une idée serait d'améliorer ces deux points. Les modèles de mortalité à « sauts » sont une manière originale pour parvenir à ce but. En effet, ils tiennent compte d'éventuels sauts des taux de mortalité en plus ou en moins, dus aux épidémies ou à des avancés médicales majeures par exemple. Un autre point important à noter est la différence de mortalité entre les rentiers d'un côté, et les assurés de l'autre. Il paraît indéniable que le phénomène d'antisélection joue pleinement dans les domaines de l'assurance vie et des rentes, selon le niveau de santé des individus. Dans notre cas où nous travaillons à partir de statistiques nationales, nous ne tenons donc pas compte de ce point. Une manière d'y remédier serait de déterminer des coefficients correcteurs à appliquer aux deux types de mortalité différente.

Bibliographie

- [1] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9 :203–28, 1999.
- [2] E. Bayraktar and M. Ludkovski. Relative hedging of systematic mortality risk. *Submitted*, 2008.
- [3] E. Bayraktar and V. R. Young. Hedging life insurance with pure endowments. *Insurance : Mathematics and Economics*, 40(3) :435–444, 2007.
- [4] N. Brouhns, M. Denuit, and J. Vermunt. A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance : Mathematics & Economics*, (31) :373–393, 2002.
- [5] A.J.G. Cairns, D. Blake, and K. Dowd. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty : Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73 :687–718, 2006.
- [6] A.J.G. Cairns, D. Blake, and K. Dowd. Modelling and management of mortality risk : a review. *To appear in Scandinavian Actuarial Journal*, 2008.
- [7] A.J.G. Cairns, D. Blake, K. Dowd, G.D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, and I. Balevich. A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from england and wales and the united states. *Available from www.lifemetrics.com*, 2007.
- [8] H. Chen and S. H. Cox. Modeling mortality with jumps : Transitory effects and pricing implication to mortality securitization. *Working paper, Georgia State University*, 2007.
- [9] Continuous Mortality Investigation (CMI). Stochastic projection methodologies : Further progress and p-spline model features, example results and implications. *Working paper 20*, 2006.
- [10] S. H. Cox and Y. Lin. Natural hedging of life and annuity mortality risks. *North American Actuarial Journal*, 11(3) :1–15, 2007.
- [11] I.D. Currie. Smoothing and forecasting mortality rates with p-splines. *Talk given at the Institute of Actuaries*, 2006.
- [12] N. Darchambeau. Saveur d’orval. *Édition Les Capucines*, 1994.

- [13] A. Delwarde. Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives. *Institut d'Administration et de Gestion & Institut des Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain*, 2005.
- [14] M. Denuit and A.-C. Goderniaux. Closing and projecting lifetables using log-linear models. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires*, 2005.
- [15] T. Gründl, H. Post and R.N. Schulze. To hedge or not to hedge : Managing demographic risk in life insurance companies. *The Journal of Risk and Insurance*, 73 :19–41, 2006.
- [16] JPMorgan Pension Advisory Group. Lifemetrics software user guide version 2.0. Available from www.lifemetrics.com, 2007.
- [17] D. Hainaut and P. Devolder. Mortality modelling with lévy processes. *Working paper, Université Catholique de Louvain*, 2007.
- [18] R.D. Lee and L.R. Carter. Modeling and forecasting u.s. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87 :659–675, 1992.
- [19] E. Marceau. Modèles et méthodes actuariels pour l'évaluation quantitative des risques. *Cours ACT-21414 Théorie du risque, École d'actuariat, Université Laval*, 2006.
- [20] S.J. Olshansky. On forecasting mortality. *The Milbank Quarterly*, 66(3) :482–530, 1998.
- [21] F. Planchet and P. Thérond. Modèles de durée : Applications actuarielles. *Economica*, 2006.
- [22] F. Planchet and P. Thérond. Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière. *Economica*, 2007.
- [23] A. Quashie and M. Denuit. Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges. *Institut des Sciences Actuarielles & Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain*, 2005.
- [24] Swiss Re. Too big to ignore : the impact of obesity on mortality trends. *Zurich : Swiss Re*, 2004.
- [25] A.E. Renshaw and S. Haberman. A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38 :556–570, 2006.
- [26] R. Rogers. Will mortality improvements continue ? *National Underwriter*, 106 :11–13, 2002.
- [27] H. Van Broekhoven, E. Alm, T. Tuoninen, A. Hellman, and W. Dziworski. Actuarial reflections on pandemic risk and its consequences. *Groupe Consultatif Actuariel Européen*, 2006.

Bibliographie _____

- [28] L.Y. Wang, J.L. Yang and Y.C. Pan. Hedging longevity risk in life insurance companies. *In Asia-Pacific Risk and Insurance Association. Annual Meeting, Bangkok, Thailand, 2003.*
- [29] Watson Wyatt Worldwide. The uncertain future of longevity. *London : Author, 2005.*

Annexe

Modèle de Lee-Carter

Le modèle proposé par Lee & Carter (1992) [18] est certainement l'un des plus populaires de nos jours dans le monde actuariel. Ce modèle propose d'ajuster les logarithmes des taux de décès de la manière suivante

$$\ln m_x(t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t},$$

avec $\varepsilon_{x,t}$ des variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale représentant le terme d'erreur. Cette hypothèse d'homoscédasticité des résidus est par ailleurs forte en pratique puisque le logarithme du taux de mortalité est plus variable aux grands âges qu'aux âges jeunes par manque de nombre d'observations. Naturellement, on dispose des taux bruts de mortalité calculés à partir d'un ensemble de données pour les ajuster de la manière décrite ci-dessus. Finalement, à la transformation *via* le logarithme et le terme d'erreur près, les taux de mortalité sont soumis à un double effet. Un premier effet correspondant au premier terme de la somme est totalement spécifique à l'âge. Le second effet, deuxième terme de la somme, est la résultante du produit entre une composante temporelle qui permet de décrire l'évolution de la mortalité au cours du temps, et d'une autre composante lié à l'âge. Plus particulièrement, l'interprétation des paramètres est la suivante :

- $\beta_x^{(1)}$ est la valeur moyenne temporelle des $\ln m_x(t)$ pour l'âge x ,
- $\beta_x^{(2)}$ est la sensibilité pour chaque âge x des logarithmes des taux de mortalité par rapport à la composante temporelle $\kappa_t^{(2)}$, soit formellement

$$\frac{d \ln m_x(t)}{d \kappa_t^{(2)}} = \beta_x^{(2)},$$

- $\kappa_t^{(2)}$ est pour rappel la composante qui décrit l'évolution de la mortalité à travers le temps.

Cependant, il est important de noter qu'il faut rajouter au modèle des contraintes pour que ce dernier soit identifiable. Les contraintes sur les paramètres sont bien

souvent les suivantes

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x^{(2)} = 1.$$

On peut alors trouver une estimation des paramètres du modèle en utilisant un critère des moindres carrés ordinaires, soit en d'autre terme par

$$(\hat{\beta}_x^{(1)}, \hat{\beta}_x^{(2)}, \hat{\kappa}_t^{(2)}) = \operatorname{argmin}_{\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)}} \sum_{x,t} \left(\ln \hat{m}_x(t) - \beta_x^{(1)} - \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} \right)^2,$$

où les $\hat{m}_x(t)$ sont les taux bruts de mortalité estimés à partir des données disponibles.

In fine, l'estimation des paramètres se fait en employant une méthode de décomposition en valeur singulière. Ceci implique par ailleurs un nouveau défaut pour ce modèle. En effet, cette méthode nécessite d'avoir à disposition des tables rectangulaires complètes de taux de décès. Il se pose alors le traditionnel problème de fermeture de la table aux âges élevés où l'effectif soumis à exposition n'est plus assez important pour fournir des résultats stables, voir inexistant. Pour plus de détail, le lecteur peut se référer à Planchet & Thérond (2006) [21].

Enfin, l'extrapolation du facteur temporel $\kappa_t^{(2)}$ est souvent effectué à partir de processus de marche aléatoire, cf. Lee & Carter (1992) [18], ou comme un processus ARIMA, cf. CMI (2006) [9].