

La réassurance du risque de longévité

Haderer Marie

Année 2002

Abstract

Keywords : Longevity risk, life annuities, reinsurance

The main concern on life annuities lies in the nature of the relationship between the insurer and the policyholder : life commitment. It is the length of this commitment that affects the model with uncertainty. That is why longevity risk should first and foremost be considered as a model risk. The insurer who set a premium rate may face some inadequacy later on. Reinsurance appears as a key solution to hedge a life annuitants portfolio.

We develop several reinsurance structures which target either the reserves or directly the annuities. In case the insurer would be interested in transferring part of his financial risk to the reinsurer we introduce a double trigger guarantee which release is linked to the simultaneous realisation of a financial and an insurance event. To price those treaties we build projected lifetables using an original method recently developed. We focus mostly on the Belgian market. We also measure the impact of various parameters such as the portfolio composition, its average age or the shareholders payments on the price of reinsurance.

Résumé

Mots clé : Risque de longévité, rentes viagères, réassurance

Pour les produits d'assurance que sont les rentes viagères la principale difficulté réside dans la nature de la relation qui lie l'assureur à l'assuré : l'engagement viager. C'est la durée de cet engagement qui entache les différentes modélisations de beaucoup d'incertitude dans le temps. C'est pourquoi le risque de longévité doit avant tout être considéré comme un risque de modèle. L'assureur, qui s'est engagé sur un tarif a priori, peut constater d'importantes insuffisances a posteriori. La réassurance apparaît alors comme une solution clé pour couvrir un portefeuille de rentiers. Nous développons ici plusieurs couvertures dont l'objet porte soit sur les provisions mathématiques soit directement sur les annuités versées. Au cas où l'assureur souhaiterait également transférer une partie de son risque financier au réassureur, nous introduisons une garantie double trigger dont le déclenchement est lié à la réalisation simultanée de deux événements, l'un de nature financière, l'autre d'assurance. Afin de coter ces traités, nous construisons des tables de mortalité prospectives selon une méthodologie originale développée récemment en s'intéressant tout particulièrement au marché belge et à la population française. Nous procédons ensuite à une analyse de sensibilité pour mesurer l'impact de différents paramètres tels que la composition du portefeuille, son âge moyen ou encore le niveau de rémunération des actionnaires sur le prix de la réassurance.

Remerciements

Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs Jean-François Walhin et Michel Denuit pour leurs conseils avisés tout au long de l'élaboration de ce mémoire. Je tiens également à remercier tout le corps enseignant de l'Institut des Sciences Financières et d'Assurance et en particulier Messieurs les Professeurs Daniel Serant, Christian Partrat et Jean-Claude Augros qui m'ont encouragée tout au long de ma scolarité dans tous les projets entrepris. Un grand merci à tous mes collaborateurs et collègues et plus particulièrement à Antoine, Oana, Mohammed, Sandra, Christophe, François, Corinne et Xavier qui ont pris le temps de répondre à toutes mes questions. Merci à mes proches pour leur soutien et plus particulièrement à Brice pour sa présence quotidienne.

Table des matières

I	Construction de tables prospectives	7
1	Hypothèses, notations et données	9
1.1	Durée de vie	9
1.2	Probabilité de décès	9
1.3	Hypothèse sur la répartition des décès	10
1.4	Données	11
2	Modélisation de Poisson	14
2.1	Le modèle de Lee et Carter	14
2.2	Le modèle de Brouhns, Denuit et Vermunt	17
2.3	Estimation des paramètres	17
2.4	Extrapolation de la composante temporelle	19
2.5	Application aux données population française	21
2.6	Estimation de $a_x(2000)$ et $e_x(2000)$	26
2.7	Critiques et améliorations	29
3	Intervalles de confiance	33
3.1	La méthode de simulation	33

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
3.2 Génération des intervalles	34
4 La table réglementaire française	39
4.1 Méthode de construction et utilisation	39
4.2 Comparaison avec la table prospective Poisson	40
5 Mesure de l'antisélection	44
5.1 Nécessité de la quantification	44
5.2 Modèle	45
5.3 Critiques et améliorations	47
5.4 Intervalles de confiance	47
5.5 Illustration	48
II Les traités de réassurance	50
6 La couverture du risque de longévité	52
6.1 Les longevity bonds	52
6.2 Le double trigger	54
6.2.1 Le principe	54
6.2.2 Modélisation du rendement des actifs de la cédante	56
6.3 Méthodologie de cotation	61
6.4 Modèle de cash flows	64
7 Couvertures classiques	67
7.1 Stop loss	67
7.2 Excess of Loss en durée	83

7.3	Excess of Loss en montant	94
8	Couverture sur insuffisance de provisions	103
8.1	Adaptation de la notion de S/P	104
8.2	Formalisation du ratio S/P	104
8.2.1	Formalisation par tête	105
8.2.2	Formalisation sur portefeuille	106
8.3	Les principales difficultés techniques	106
8.3.1	Le choix de la priorité	106
8.3.2	Le calcul $a_x^{TP(t)}(t)$	106
8.3.3	Le taux technique	107
8.3.4	La table de mortalité	107
8.3.5	Les clauses de réversion	108
8.3.6	La conversion en rente ou en capital	108
8.3.7	Les contrats de rente en unité de compte	109
8.3.8	La clause de participation aux bénéfices	109
8.4	Stop Loss sur provisions	110
8.5	Excess of Loss sur provisions	119
8.6	Autre produit avec introduction d'un tiers au contrat	127
8.7	Critiques et améliorations	128

Introduction

Cadre et motivations

La législation relative au provisionnement et à la tarification des contrats de rentes viagères varie énormément selon le pays auquel on s'intéresse. Au Royaume Uni par exemple, les compagnies d'assurance sont libres de choisir leurs bases techniques, tant au niveau de la table de mortalité que du taux technique. En Belgique par contre, la législation impose, et la table et le taux utilisés. Les compagnies françaises quant à elles se voient offrir la possibilité d'utiliser leurs propres tables de mortalité à condition qu'elles aient été certifiées préalablement, bien qu'en pratique, elles tarifient et provisionnent à l'aide de la table réglementaire.

Le risque majeur pour les assureurs qui proposent des contrats de rentes viagères est de sous-estimer la longévité de leurs assurés par rapport à celle donnée par la table de mortalité qu'ils utilisent. En cas de dérive trop importante les moyens d'action des compagnies d'assurance sont limités. Les produits financiers, s'ils sont suffisants, peuvent servir à compenser les déficits techniques, tout du moins dans les pays où la législation n'impose pas de participation bénéficiaire comme c'est le cas en France.

Une solution pour l'assureur consiste à transférer une partie de son risque au réassureur. La mise en place d'une couverture de réassurance permet d'améliorer sa solvabilité. Cela permet également à une société dont l'activité d'assurance des rentes viagères serait marginale de lisser son résultat en palliant son incapacité à mutualiser son risque. Et surtout, le réassureur de par son expérience et sa connaissance du marché peut aider les compagnies d'assurance à mieux appréhender leur risque, le risque de longévité étant avant tout un risque de modèle.

L'objectif de notre travail est de proposer des produits de réassurance qui puissent satisfaire au mieux les besoins des cédantes et implémenter les programmes de cotation en utilisant une méthodologie originale basée essentiellement sur des techniques de simulation.

Structure du travail

Dans la première partie nous nous concentrons sur l'obtention de solides bases techniques. A l'aide d'une méthodologie originale basée essentiellement sur des techniques de simulation, nous construisons des tables de mortalité prospectives pour le marché belge et la population française.

La seconde partie traite de l'analyse qualitative du risque de longévité et développe diverses couvertures non proportionnelles que nous jugeons susceptibles d'intéresser les compagnies d'assurance. Ces traités sont assortis de manière optionnelle d'une garantie financière. Nous procédons à leur cotation sur base d'un portefeuille fictif de rentiers belges et effectuons quelques analyse de sensibilité sur les résultats obtenus.

Aspect technique

Tous les programmes sont implémentés en SAS. Le plus souvent nous avons recours à la procédure `IML`. Nous construisons sept programmes principalement. Le premier permet de créer les tables prospectives marché, le second correspond au modèle financier et les 5 autres sont les programmes de cotation des différents traités de réassurance Stop Loss et Excess of Loss.

Première partie

Construction de tables prospectives

La première partie de l'étude est entièrement consacrée à la construction de tables de mortalité prospectives. Nous travaillons sur des données belges et françaises. Ces tables constituent notre outil technique de base.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction de diverses notations et concepts indispensables à la bonne compréhension des techniques utilisées par la suite. Nous consacrons une section à la description des données recueillies.

Le second chapitre décrit les modèles qui servent de base à la construction des tables prospectives. Nous évoquons le modèle classique de LEE & CARTER(1992). Nous présentons ensuite les améliorations proposées par BROUNHS, DENUIT & VERMUNT(2002). La suite est consacrée aux méthodes d'estimation des paramètres du modèle et fournit des premiers résultats quant à la table prospective française.

Le troisième chapitre présente la méthode du Bootstrap paramétrique qui permet d'obtenir les intervalles de confiance des principaux indicateurs de mortalité.

Le quatrième chapitre propose de comparer les tables construites avec la table de mortalité prospective réglementaire française.

Nous concluons la première partie en présentant une méthode originale pour quantifier l'anti-sélection existant dans un portefeuille de rentiers ainsi qu'une procédure de simulation permettant de générer des tables prospectives marché. Les résultats présentés sont obtenus à partir de données marché belges.

Chapitre 1

Hypothèses, notations et données

1.1 Durée de vie

Modélisons la durée de vie d'un individu né l'année t (i.e de la génération t) par une variable aléatoire $T(t)$. De là, nous définissons la suite $\{T_x(t)\}_{x=0,1,2,\dots}$ représentant la durée de vie restante d'un individu de la génération ayant atteint l'âge x , i.e.

$$T_x(t) =_d [T(t) - x | T(t) > x]$$

où $=_d$ signifie *a même loi que*. Une personne née l'année t et vivante à l'âge x décèdera donc à l'âge $x + T_x(t)$.

1.2 Probabilité de décès

Notons $p_x(t)$ la probabilité qu'un individu de la génération t ayant atteint l'âge x , survive jusqu'à l'âge $x + 1$,

$$p_x(t) = \mathbb{P}[T_x(t) > 1 | T(t) > x]$$

et $q_x(t) = 1 - p_x(t)$ la probabilité complémentaire.

1.3 Hypothèse sur la répartition des décès

Pour calculer les expositions au risque $L_x(t)$ ainsi que les quotients de mortalité $q_x(t)$ nécessaires aux techniques que nous appliquons dans les sections suivantes, nous devons recourir à une hypothèse de répartition des décès sur l'année. Nous considérons les taux instantanés de mortalité constants par morceaux. Cette hypothèse se caractérise par la relation,

$$\mu_{x+\xi}(t + \tau) = \mu_x(t) \text{ pour } 0 \leq \tau, \xi < 1 \text{ et } x, t \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

Cette hypothèse est nécessaire pour calculer les quantités qui nous intéressent telles que $e_x(t)$ ou $a_x(t)$. Nous considérons donc le taux de hasard constant sur chaque carré du diagramme de Lexis comme présenté à la figure (1.1).

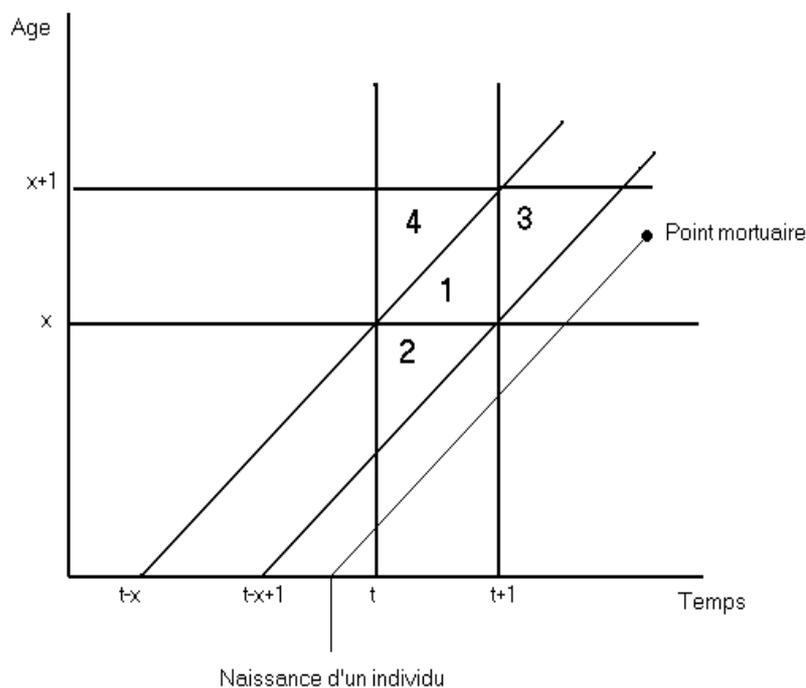


FIG. 1.1 – Diagramme de Lexis

Il en découle directement,

$$\mu_x(t) = m_x(t) = -\ln(1 - q_x(t)) \quad (1.2)$$

$$L_x(t) = \int_{\xi=0}^1 l_{x+\xi}(t + \xi) d\xi = \frac{-l_x(t)q_x(t)}{\ln(1 - q_x(t))} \quad (1.3)$$

$$e_x(t) = \frac{1 - \exp(-\mu_x(t))}{\mu_x(t)} + \sum_{k \geq 1} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \exp(-\mu_{x+j}(t + j)) \right\} \frac{1 - \exp(-\mu_{x+k}(t + k))}{\mu_{x+k}(t + k)} \quad (1.4)$$

$$a_x(t) = \sum_{k \geq 0} \left\{ \prod_{j=0}^k \exp(-\mu_{x+j}(t + j)) \right\} \left(\frac{1}{1 + i} \right)^{k+1} \quad (1.5)$$

où i est le taux technique annuel. $L_x(t)$, $e_x(t)$, $a_x(t)$ et $l_x(t)$ désignent respectivement l'exposition au risque relatif aux individus de la génération t ayant atteint l'âge x (mesurée en personnes années), l'espérance de vie au-delà de l'âge x pour un individu de la génération t , la prime pure unique d'un individu d'âge x de la génération t et l'effectif d'âge x à l'instant t .

1.4 Données

Nous disposons d'un premier jeu de données population française fourni conjointement par l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques) et l'INED (Institut National d'Etudes Démographiques). Il s'agit de quatre tables couvrant la période [1950, 1999]. L'INSEE nous fournit les tableaux en 1998 et 1999, le reste de la période d'observation étant couvert par les données de l'INED. Les tables contiennent l'effectif recensé au premier janvier de chaque année ainsi que le nombre de décès en âge atteint, ventilés par sexe et par âge. La période d'observation est choisie postérieure à la seconde guerre mondiale pour des raisons qui nous apparaissent évidentes.

Le but de cette partie est, rappelons-le, d'appréhender de manière quantitative le risque de longévité dans une population de rentiers. A la suite de divers travaux menés par BROUHNS, DELWARDE & DENUIT(2002), tout porte à croire que le modèle de Poisson que nous développons par la suite, appliqué à tous les âges ne donne

pas des résultats satisfaisants lorsque l'on s'intéresse au calcul d'indicateurs de mortalité pour les grands âges. Prendre en compte la mortalité des moins de 50 ans revient à inclure dans le modèle la mortalité infantile et la bosse accident, ce qui n'est pas souhaitable ici. Nous travaillons ainsi uniquement avec la population âgée de 50 ans et plus. Signalons d'ores et déjà qu'une courte étude complémentaire est menée à la section 2.7, étude concernant la population des 65 ans et plus. Elle permet d'appréhender l'influence du choix de la tranche d'âge sur quelques paramètres de mortalité.

Résumons l'information disponible,

Pour $l_x(t)$: – De 1950 à 1953, les effectifs sont donnés jusqu'à 90 ans exclu par l'INED

- De 1954 à 1974, les effectifs sont donnés jusqu'à 95 ans exclu par l'INED
- De 1974 à 1997, les effectifs sont donnés jusqu'à 100 ans exclu par l'INED
- De 1997 à 1999, les effectifs sont donnés jusqu'à 100 ans exclu par l'INSEE

Pour $d_x(t)$: – De 1950 à 1997, les effectifs sont donnés jusqu'à 100 ans exclu par l'INED

- De 1997 à 1999, les effectifs sont donnés jusqu'à 100 ans exclu par l'INSEE

Les données manquantes ne font pas l'objet d'un retraitement. La modélisation de Poisson que nous développons ne nécessite pas en effet la fermeture des tables contrairement à l'approche de LEE & CARTER(1992).

Nous disposons également d'un second jeu de données belges qui se présente sous la même forme que les données françaises. Il s'agit de données population qui proviennent de l'Annuaire statistique de Belgique et qui couvrent la période d'observation [1950, 2000].

Résumons l'information disponible,

Pour $l_x(t)$: – De 1950 à 1959, les effectifs sont donnés jusqu'à 84 ans inclus

- De 1960 à 2000, les effectifs sont donnés jusqu'à 98 ans inclus

Pour $d_x(t)$: – De 1950 à 2000, les effectifs sont donnés jusqu'à 98 ans inclus

Le dernier jeu de données belges disponible se présente sous la même forme que les données précédentes. Simplement, il s'agit cette fois de données marché pour les opérations vie à souscription individuelle qui proviennent de l'OCA (Office de Contrôle des Assurances belge). La période d'observation est beaucoup plus courte cette fois, elle s'étend de [1996, 2000].

Résumons l'information disponible,

Pour $l_x(t)$: – De 1996 à 2000, les effectifs sont donnés jusqu'à 99 ans inclus

Pour $d_x(t)$: – De 1996 à 2000, les effectifs sont donnés jusqu'à 99 ans inclus

Chapitre 2

Modélisation de Poisson

Nous présentons les grandes lignes de la méthode proposée par LEE & CARTER(1992) puis nous développons l'approche de Poisson proposée par BROUHNS, DENUIT & VERMUNT (2002a).

2.1 Le modèle de Lee et Carter

La méthode de LEE & CARTER (1992), à la fois simple et élégante, a déjà prouvé son efficacité à maintes reprises sur des populations très diverses. Elle consiste à ajuster le modèle log-bilinéaire

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_x(t) \quad (2.1)$$

où $\varepsilon_x(t)$, de moyenne nulle et de variance constante σ_ε^2 , représente le terme d'erreur et où les $\hat{\mu}_x(t)$ sont les taux de mortalité population bruts estimés sur base de l'hypothèse (1.1). Remarquons qu'il ne s'agit pas d'un modèle de régression à proprement parler, étant donné qu'aucune variable observable n'est présente dans le terme de droite. Sur l'échelle logarithmique, la mortalité se trouve ainsi décomposée à un terme d'erreur près en la somme de deux composantes : la première est spécifique à l'âge tandis que la seconde est composée du produit d'un paramètre temporel décrivant l'évolution générale de la mortalité et d'un paramètre propre à l'âge décrivant l'évolution du taux par rapport aux autres âges.

Afin de garantir l'identification du modèle, les paramètres sont sujets aux contraintes

$$\sum_t \kappa_t = 0 \quad (2.2)$$

et

$$\sum_x \beta_x = 1. \quad (2.3)$$

L'estimation des paramètres s'effectue par la méthode des moindres carrés ordinaire, c'est-à-dire en résolvant

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \arg \min_{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t} \sum_{x,t} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

Leur interprétation est la suivante :

- Les α_x sont les moyennes temporelles des $\ln \hat{\mu}_x(t)$ et représentent donc l'allure générale de la mortalité par âge au cours de la période d'observation.
- Les β_x représentent l'évolution de la mortalité à chaque âge. Ils quantifient l'influence de l'indice temporel κ_t sur le logarithme des taux de mortalité à l'âge x . En théorie, β_x pourrait être négatif pour certains âges, indiquant ainsi une croissance de la mortalité pour la tranche de population considérée.
- Les κ_t caractérisent la tendance temporelle. Les forces de mortalité varient donc suivant l'indice de mortalité κ_t modulé par les β_x . Si κ_t est linéaire en temps (posons $\kappa_t = c - k_0 t$), on trouve

$$\frac{d}{dt} \ln \mu_x(t) = \beta_x \frac{d}{dt} \kappa_t = -k_0 \beta_x$$

et la mortalité à chaque âge varie donc exponentiellement à un taux constant propre à l'âge considéré.

L'estimation des paramètres s'effectue en utilisant une méthode de décomposition en valeur singulière. Précisons que l'emploi de cette technique nécessite des tables rectangulaires, ce qui oblige l'utilisateur à faire des hypothèses sur la répartition des décès afin de compléter les données manquantes. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à l'article de BROUHNS, DELWARDE & DENUIT (2002).

Le modèle de LEE & CARTER présente deux principaux défauts. Le premier réside dans l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs requise pour l'estimation par moindres carrés ordinaires. En effet, le logarithme du taux de hasard observé est

généralement bien plus variable aux grands âges que chez les jeunes, étant donné le faible nombre d'observations. Le deuxième tient en la nécessité de fermeture des tables, car la méthode de décomposition en valeurs singulières exige des tables rectangulaires. A contrario, la modélisation de Poisson ne nécessite pas de retraitement des données.

2.2 Le modèle de Brouhns, Denuit et Vermunt

Considérons maintenant le nombre de décès comme une variable aléatoire de comptage. On admet généralement la pertinence de la modélisation d'une telle variable par la loi de Poisson. L'intérêt de cette approche est de pouvoir alors facilement caractériser le nombre de décès :

$$D_x(t) \sim \text{Poisson} [L_x(t)\mu_x(t)] \text{ avec } \mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t) \quad (2.4)$$

où les paramètres respectent toujours les contraintes (2.2) et (2.3).

Dans cette reformulation du problème, l'interprétation des α_x , β_x et κ_t reste essentiellement la même que dans le modèle classique de LEE & CARTER(1992).

2.3 Estimation des paramètres

Un grand avantage du modèle de Poisson est qu'il est aisé d'en estimer les paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance. En effet, en notant $\lambda_{x,t} = L_x(t) \exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t)$ le nombre attendu de décès à l'âge x durant l'année t , la fonction de log-vraisemblance est,

$$\begin{aligned} \ln V(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}) &= \ln \left[\prod_{x,t} \left(\frac{\lambda_{x,t}^{d_x(t)} \exp(-\lambda_{x,t})}{(d_x(t))!} \right) \right] \\ &= \sum_{x,t} [d_x(t) \ln \lambda_{x,t} - \lambda_{x,t} - \ln [(d_x(t))!]] \\ &= \sum_{x,t} [d_x(t) \ln L_x(t) + d_x(t)(\alpha_x + \beta_x\kappa_t) - L_x(t) \exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t) - \ln [(d_x(t))!]] \\ &= \sum_{x,t} [d_x(t)(\alpha_x + \beta_x\kappa_t) - L_x(t) \exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t)] + \text{constante} \end{aligned}$$

et doit être maximisée.

La présence du terme bilinéaire $\beta_x\kappa_t$ rend l'estimation des paramètres irréalisable par les logiciels commerciaux traitant de la régression de Poisson. Néanmoins, nous disposons d'un algorithme itératif proposé par GOODMAN (1979) et qui utilise la

méthode de Newton-Raphson. Le principe en est simple : à chaque itération, chaque ensemble de paramètres est mis à jour en fixant les autres paramètres à leur valeur estimée actuelle. Dans le cas qui nous occupe, il existe trois ensembles de paramètres, à savoir α_x , β_x et κ_t , et nous trouvons l'itération suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_x^{(\nu+1)} &= \widehat{\alpha}_x^{(\nu)} - \frac{\sum_t \left(d_x(t) - L_x(t) \exp(\widehat{\alpha}_x^{(\nu)} + \widehat{\beta}_x^{(\nu)} \widehat{\kappa}_t^{(\nu)}) \right)}{-\sum_t \left(L_x(t) \exp(\widehat{\alpha}_x^{(\nu)} + \widehat{\beta}_x^{(\nu)} \widehat{\kappa}_t^{(\nu)}) \right)} \\ \widehat{\kappa}_t^{(\nu+1)} &= \widehat{\kappa}_t^{(\nu)} - \frac{\sum_x \left(d_x(t) - L_x(t) \exp(\widehat{\alpha}_x^{(\nu+1)} + \widehat{\beta}_x^{(\nu)} \widehat{\kappa}_t^{(\nu)}) \right) \widehat{\beta}_x^{(\nu)}}{-\sum_x \left(L_x(t) \exp(\widehat{\alpha}_x^{(\nu+1)} + \widehat{\beta}_x^{(\nu)} \widehat{\kappa}_t^{(\nu)}) \right) \left(\widehat{\beta}_x^{(\nu)} \right)^2} \\ \widehat{\beta}_x^{(\nu+1)} &= \widehat{\beta}_x^{(\nu)} - \frac{\sum_t \left(d_x(t) - L_x(t) \exp(\widehat{\alpha}_x^{(\nu+1)} + \widehat{\beta}_x^{(\nu)} \widehat{\kappa}_t^{(\nu+1)}) \right) \widehat{\kappa}_t^{(\nu+1)}}{-\sum_t \left(L_x(t) \exp(\widehat{\alpha}_x^{(\nu+1)} + \widehat{\beta}_x^{(\nu)} \widehat{\kappa}_t^{(\nu+1)}) \right) \left(\widehat{\kappa}_t^{(\nu+1)} \right)^2}.\end{aligned}$$

Cet algorithme nécessite une initialisation. Il faut évidemment éviter d'attribuer une valeur nulle à $\widehat{\beta}_x^{(0)}$ sous peine de constater une division par 0 dans le calcul de $\widehat{\kappa}_t^{(1)}$. Cette exception mise à part, le choix des paramètres initiaux est libre. Nous déterminons un critère d'arrêt relativement sévère : l'algorithme se termine lorsque la variation relative de la fonction de log-vraisemblance est inférieure à 0.0001.

Remarquons qu'aucune des contraintes (2.2) et (2.3) n'est pour le moment respectée. Il est nécessaire de modifier les estimateurs obtenus,

$$\begin{aligned}\kappa_t^* &= (\widehat{\kappa}_t - \bar{\kappa})K \\ \beta_x^* &= \frac{\widehat{\beta}_x}{\sum_x \widehat{\beta}_x}\end{aligned}$$

où $\bar{\kappa}$ est la moyenne arithmétique des $\widehat{\kappa}_t$ et K une constante quelconque. Les β_x^* satisfont maintenant (2.3) tandis que les κ_t^* satisfont (2.2) tout en restant contrôlés par la constante K . En choisissant $K = \sum_x \widehat{\beta}_x$ et en gardant à l'esprit la nécessité de respecter $\widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t = \alpha_x^* + \kappa_t^* \beta_x^*$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha_x^* &= \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t - \frac{\widehat{\beta}_x}{\sum_x \widehat{\beta}_x} (\widehat{\kappa}_t - \bar{\kappa})K \\ &= \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \bar{\kappa}\end{aligned}$$

Les nouveaux paramètres α_x^* , β_x^* et κ_t^* sont maintenant acceptables.

2.4 Extrapolation de la composante temporelle

Le modèle possède la propriété de synthétiser dans la série $\{\kappa_t\}_t$ toute l'information relative à l'évolution de la mortalité dans le temps. L'objectif de ce paragraphe est de modéliser cette série temporelle afin d'être en mesure d'effectuer des prévisions sur les indices de mortalité des années futures.

Nous disposons donc de deux séries temporelles que nous notons $\{\kappa_t^w\}_t$ et $\{\kappa_t^m\}_t$. Les exposants w et m font référence au sexe de l'individu, w pour les femmes et m pour les hommes.

Nous utilisons la méthodologie de Box et Jenkins pour modéliser une série temporelle par un processus ARIMA. Elle se décompose en cinq étapes fondamentales :

Stationnarisation en variance. La première condition nécessaire à l'ajustement d'un modèle ARIMA est la stabilité en variance des séries $\{\kappa_t\}_t$ considérées. Il faut donc que la variabilité de chacune des séries soit homogène sur toute la période d'observation.

Stationnarisation en moyenne. La méthodologie de Box et Jenkins exige également des séries stationnaires en moyenne, c'est-à-dire dépourvues de tendance temporelle.

Adoptons les notations suivantes :

- B est l'opérateur de retard, c'est-à-dire $B\kappa_t = \kappa_{t-1}$
- ∇_d est l'opérateur de différence d'ordre d , c'est-à-dire $\nabla_d = 1 - B^d$.

La méthode des différences itérées consiste à appliquer l'opérateur ∇_1 à une série initiale $\{\kappa_t\}_t$ autant de fois que nécessaire jusqu'à l'annulation de sa tendance.

Pour éprouver l'hypothèse nulle de non-stationnarité, nous utilisons des tests formels, comme ceux de Dickey-Fuller ou de Phillips-Perron.

Identification du modèle. On regarde les graphiques des autocorrélations et des autocorrélations partielles. Ensuite, pour départager les modèles candidats, nous utilisons le critère BIC (Bayesian information criterion).

Estimation des paramètres. Les paramètres de la série temporelle, à savoir les paramètres de l'ARIMA et les variances des bruits blancs, sont estimés par maximum de vraisemblance.

Analyse des résidus. Pour que la modélisation des séries temporelles soient correcte, il reste encore à vérifier que les résidus obtenus sont bien la réalisation d'un bruit blanc. Nous disposons pour cela d'un test éprouvant la nullité des corrélations des résidus.

Une fois les séries temporelles identifiées, nous sommes en mesure d'effectuer des projections. Pour le cas qui nous intéresse, nous projetons jusqu'en 2070. L'horizon de prédiction peut sembler démesuré par rapport aux 50 ans de données historiques dont nous disposons. Néanmoins, nous en avons besoin pour les applications actuarielles. Il faut préciser que chaque année le modèle peut être affiné à la lumière des observations de l'année écoulée, étendant ainsi la période d'observation.

Lors du traitement des données, nous effectuons également des prévisions sur la période [1995, 1999] à partir des modèles choisis appliqués à la période d'observation [1950, 1994]. La pertinence de la modélisation de la série temporelle est éprouvée en comparant les prévisions et les valeurs observées. Le lecteur peut trouver des détails page 25.

2.5 Application aux données population française

Nous appliquons la modélisation de Poisson aux données INSEE et INED. La période d'observation retenue est [1950, 1999]. Rappelons que le modèle offre l'avantage de ne pas exiger de tables fermées grâce à l'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance.

Estimation des paramètres

La figure (2.1) permet de visualiser les paramètres α_x , β_x et κ_t estimés pour chaque sexe.

Extrapolation de la composante temporelle

Nous utilisons la méthode décrite dans la section 2.4 pour modéliser la composante temporelle de la fonction de hasard. Les deux séries $\{\kappa_t^m\}_t$ et $\{\kappa_t^w\}_t$ sont clairement décroissantes, nous choisissons de les différencier une fois figure (2.2).

Les tests de Dickey-Fuller et Phillips-Perron offrent des p-valeurs maximales de 0.0041 pour les hommes et 0.0342 pour les femmes. Les séries différenciées semblent donc stationnaires. La p-valeur du test éprouvant la non-corrélation des observations vaut 0.0119 chez les hommes et 0.0072 chez les femmes, ce qui nous incite à rejeter l'hypothèse de bruit blanc. L'analyse des graphes des autocorrélations et des autocorrélations partielles ne permet pas de dégager une structure de manière évidente.

Nous observons alors les valeurs du critère BIC pour une série de modèles.

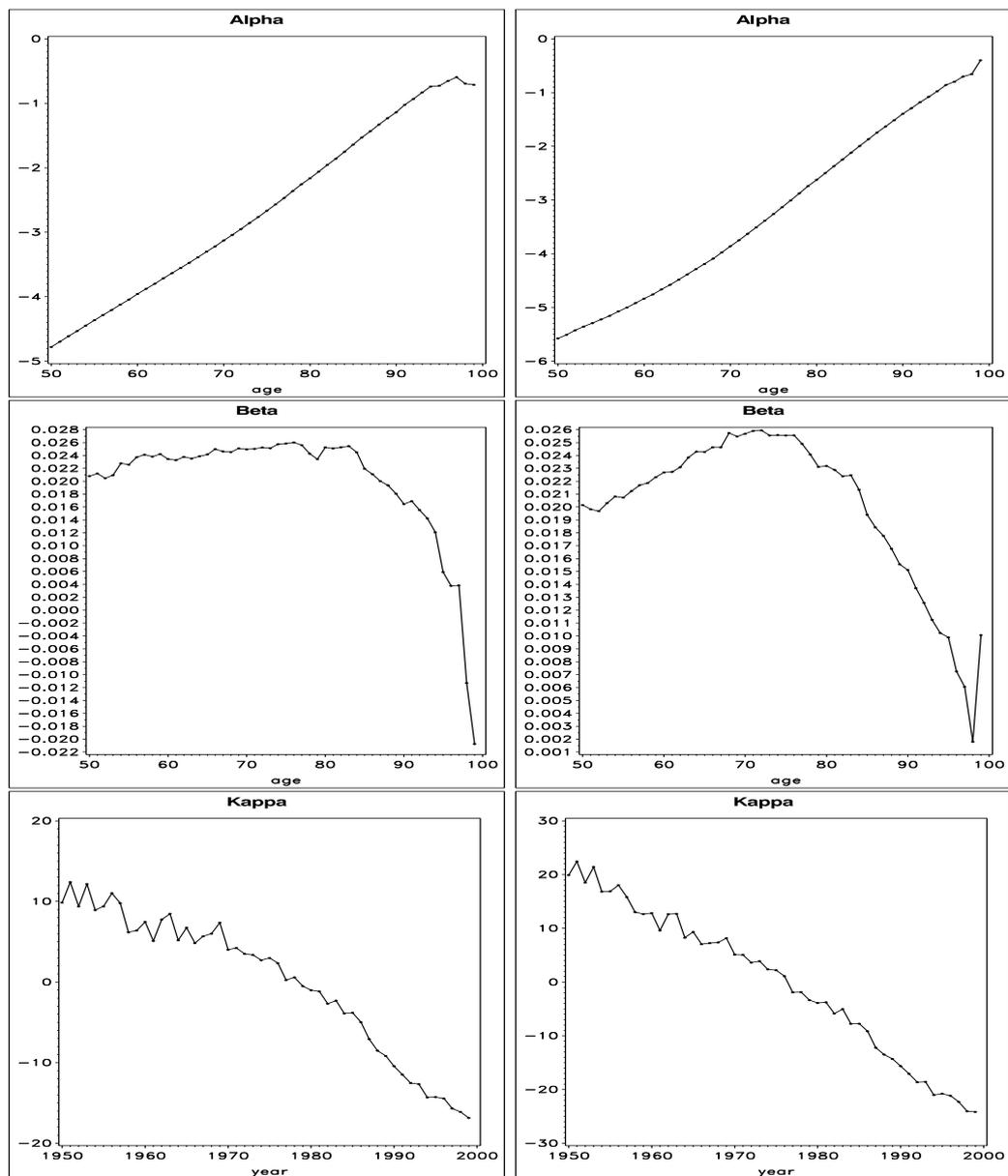


FIG. 2.1 – Estimation des paramètres de la méthode de Poisson pour la période d’observation [1950, 1999] (les hommes sont à gauche et les femmes à droite)

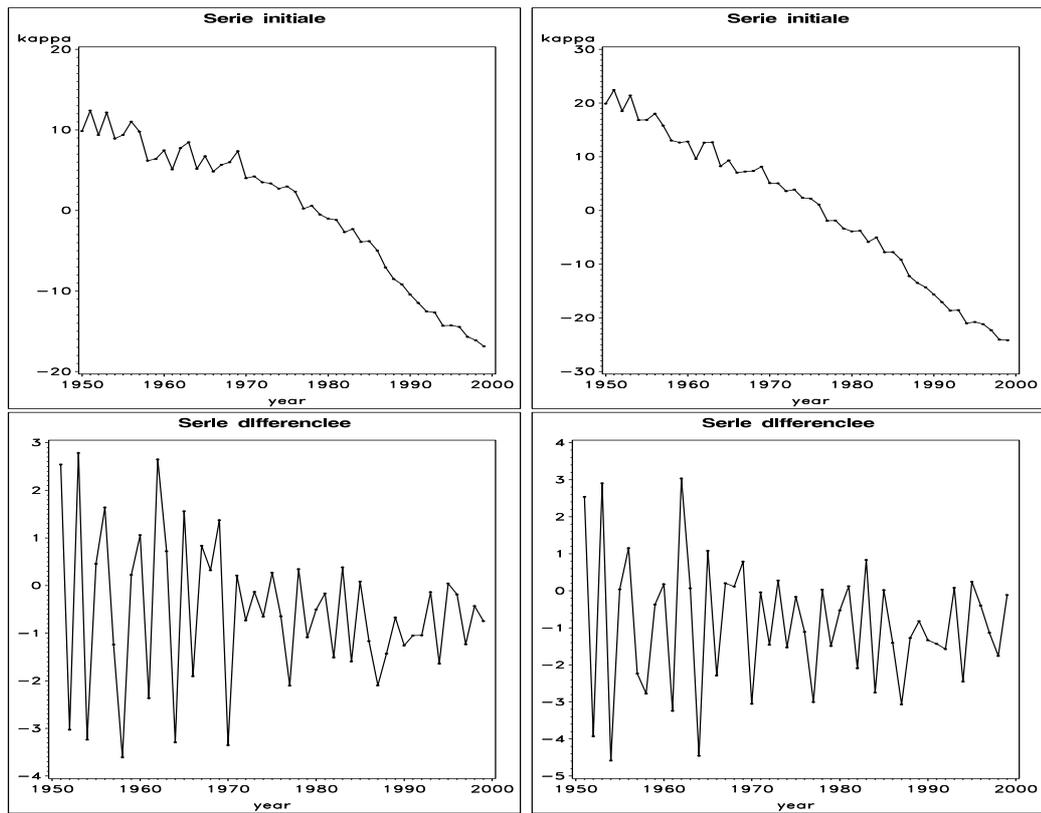


FIG. 2.2 – Séries initiales et différences premières (les hommes sont à gauche et les femmes à droite).

<i>BIC</i>	<i>Hommes</i>	<i>Femmes</i>
<i>ARMA</i> (0, 0)	183.16	195.15
<i>AR</i> (1)	174.48	181.37
<i>MA</i> (1)	172.18	179.52
<i>ARMA</i> (1, 1)	176.89	182.76
<i>AR</i> (2)	176.35	181.31
<i>MA</i> (2)	176.51	181.73
<i>ARMA</i> (2, 1)	180.18	185.21
<i>ARMA</i> (1, 2)	179.30	185.56
<i>AR</i> (3)	180.13	185.21
<i>MA</i> (3)	180.31	185.46

Pour les hommes et pour les femmes nous retenons le modèle MA(1), soit les relations,

$$\begin{aligned}\kappa_t^m &= \rho^m + \varepsilon_t^m + \theta^m \varepsilon_{t-1}^m \\ \kappa_t^w &= \rho^w + \varepsilon_t^w + \theta^w \varepsilon_{t-1}^w\end{aligned}$$

avec ε_t^m et ε_t^w des bruits blancs de variance σ_m^2 et σ_w^2 . Ajoutons à titre illustratif que pour les données population belge, nous avons sélectionné un ARIMA(1,1,2) pour les hommes et un ARIMA(2,1,1) pour les femmes.

L'estimation des paramètres donne,

Paramètre	Estimation
ρ^m	-0.55927
θ^m	0.46931
ρ^w	-0.92268
θ^w	-0.59787
σ_m	1.3497
σ_w	1.4252

Nous vérifions ensuite que les résidus peuvent être considérés comme des bruits blancs à l'aide du test Autocorrelation checks for residuals. Les p-valeurs sont reprise à la table (2.1). Nous testons également le caractère gaussien des résidus en utilisant la procédure univariate. Toutes les p-valeurs sont supérieures à 5%.

To lag	p-valeur hommes	p-valeur femmes
6	0.1907	0.5473
12	0.0978	0.3787
18	0.1866	0.5742

TAB. 2.1 – Test de non corrélation des résidus

Validation des modèles et prédiction

La figure (2.3) présente la projection à l’horizon 2050 de la série des $\{\kappa_t\}_t$ obtenue à partir des modèles ARIMA sélectionnés pour chaque sexe.

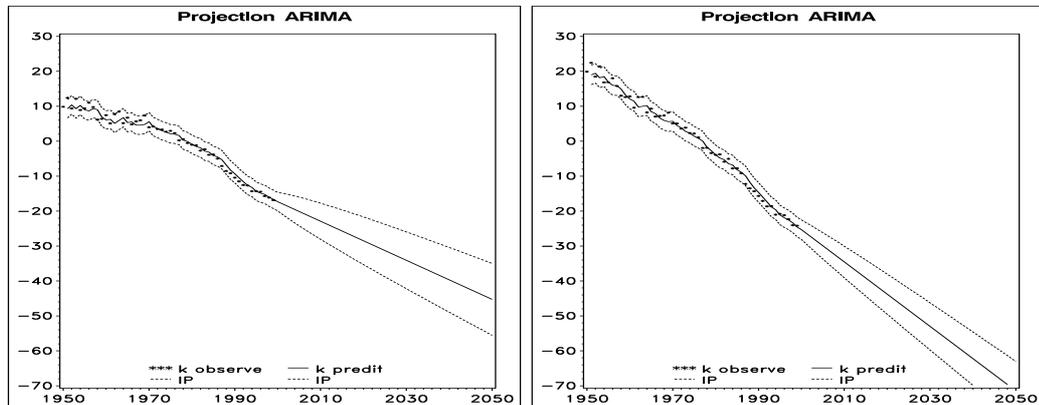


FIG. 2.3 – Prévisions à l’horizon 2050 (les hommes sont à gauche et les femmes à droite)

Le tableau (2.4) compare les prédictions faites sur la série des $\{\kappa_t\}_t$ à partir de la période d’observation [1950, 1994] avec la valeur réelle observée sur la période [1995, 1999].

Le modèle s’ajuste relativement bien. D’après BELL (1997) la projection ARIMA peut donner beaucoup de poids à la dernière valeur observée κ_{1999} . Il peut s’avérer utile dans certains cas de lisser les dernières valeurs avant de les projeter.

t	κ_t	$\widehat{\kappa}_{t,ARIMA}$	Erreur relative
1995	-14.26	-14.35	-0.6%
1996	-14.45	-14.91	3.1%
1997	-15.68	-15.47	-1.4%
1998	-16.11	-16.03	-0.5%
1999	-16.86	-16.59	-1.6%

t	κ_t	$\widehat{\kappa}_{t,ARIMA}$	Erreur relative
1995	-20.77	-21.11	-1.6%
1996	-21.17	-22.03	4.1%
1997	-22.30	-22.95	2.9%
1998	-24.05	-23.87	-0.7%
1999	-24.80	-24.80	2.5%

FIG. 2.4 – Validation des modèles sur la période [1995, 1999] (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

2.6 Estimation de $a_x(2000)$ et $e_x(2000)$

Nous pouvons à présent estimer la valeur d'indicateurs de mortalité de la population française à un horizon plus ou moins lointain. Les formules (1.4) et (1.5) nous permettent de calculer l'espérance de vie et la prime pure unique d'une rente viagère souscrite en $t = 2000$ par un individu d'âge x .

Nous souhaitons prendre en compte dans les calculs de $a_x(2000)$ et $e_x(2000)$ les âges jusqu'à 120 ans. Selon les démographes nous pouvons considérer que 120 ans est l'âge ultime. Cependant, les tableaux de données ne fournissent pas suffisamment d'information pour ces grands âges.

Nous prenons pour l'instant le parti de fixer les $\mu_x(t)$ manquants à la dernière valeur disponible $\mu_{x_{\max}}(t)$ telle que les β_x soient positifs. Rappelons que β_x quantifie l'influence de l'indice temporel sur le logarithme du taux de mortalité à chaque âge et que donc s'il est négatif pour l'âge x cela signifie que la mortalité s'est accrue à cet âge au cours du temps. Pour les hommes et les femmes le choix s'est porté sur $\mu_{97}(t)$. Ajoutons que pour les données population belge, la troncature est effectuée à 93 ans pour les raisons que nous venons d'évoquer.

Ce choix peut ne pas être sans conséquences. Nous faisons à nouveau tourner tous les programmes sur les données tronquées à l'âge 97 ans cette fois. Il s'agit pour nous de comparer les estimations ponctuelles des paramètres α_x , β_x et κ_t . Les valeurs obtenues s'avèrent identiques à 10^{-5} près. Les conclusions sont pratiquement les mêmes pour les données belges.

Ultérieurement il faudrait proposer une méthode de fermeture des tables en utilisant des méthodes de lissage et d'extrapolation par exemple, et en fixant la probabilité de décès à l'âge ultime que nous avons sélectionné à 1. Pour l'instant, la fermeture des tables que nous proposons n'est que moyennement satisfaisante, mais c'est par faute de temps que nous n'avons pu pousser plus avant, estimant ce choix prudent. Pour s'en convaincre, précisons que nous avons porté une attention toute particulière aux quotients de mortalité en bout de table, en comparant les taux bruts avec les taux prédits par le modèle. Le tableau (2.2) récapitule les résultats pour l'année 1999 sur les données françaises.

age	Données complètes	Données tronquées	Probabilités brutes
93	0.289803	0.289858	0.319395
94	0.322407	0.322456	0.348420
95	0.354034	0.354033	0.396346
96	0.385852	0.385851	0.409442
97	0.403640	0.403662	0.388847
98	0.403640	0.403662	0.462121
99	0.403640	0.403662	0.611429
age	Données complètes	Données tronquées	Probabilités brutes
93	0.228119	0.228029	0.239783
94	0.255226	0.255141	0.268196
95	0.283386	0.283305	0.293962
96	0.314878	0.314832	0.325883
97	0.348350	0.348339	0.360434
98	0.348350	0.348339	0.426138
99	0.348350	0.348339	0.469456

TAB. 2.2 – Comparaison des $q_x(1999)$ pour les grands âges (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

Une fois la table de mortalité prospective complétée, nous pouvons calculer les valeurs de $e_x(2000)$ et $a_x(2000)$ en utilisant un taux d'intérêt technique de 4%. La table (2.3) présente les résultats.

x	$e_x(2000)$	$a_x(2000)$
65	17.38	11.35
80	7.38	5.60
65	22.79	13.95
80	9.64	7.15

TAB. 2.3 – Valeurs de $e_x(2000)$ et $a_x(2000)$ (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

La figure (2.5) décrit l'évolution de la valeur de $a_x(t)$ en fonction du temps et sur toute la durée de la période d'observation [1950, 1999] respectivement aux âges 65 et 80 ans. Nous tenons à préciser que sur la période d'observation nous n'utilisons pas les données brutes mais les données du modèle.

Nous proposons également au lecteur de comparer les évolutions des espérances de vie à 65 ans et à 80 ans pour les deux sexes. La figure (2.6) indique qu'au cours des 50 dernières années, l'écart entre les hommes et les femmes s'est creusé.

La différence entre les espérances de vie à 65 ans est de 3 ans et 2 mois en 1950, alors qu'elle est de 5 ans et 5 mois en l'an 2000. Soit un accroissement de plus de 2 ans.

A 80 ans, les conclusions sont les mêmes. L'écart entre les sexes passe de 10 mois en 1950 à 2 ans et 3 mois en l'an 2000. Soit un gain d'un an et demi pratiquement.

Les mêmes tendances, bien que moins marquées, apparaissent clairement au travers des données belges.

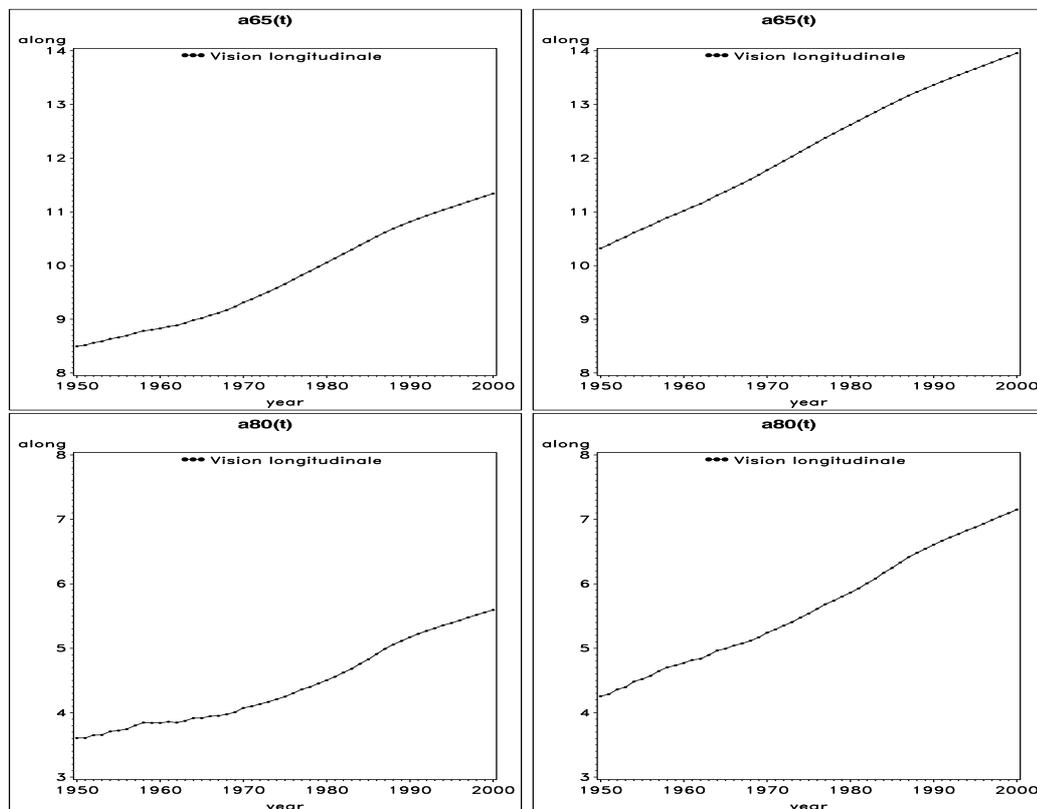


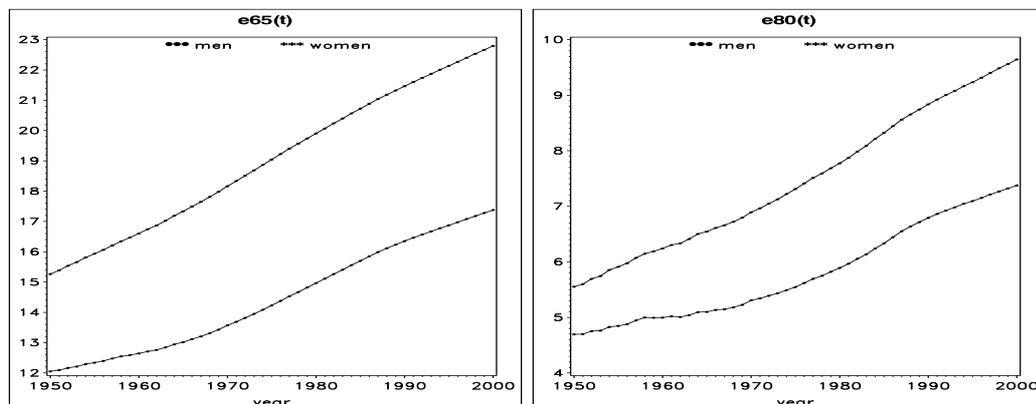
FIG. 2.5 – Evolution de $a_{65}(t)$ et $a_{80}(t)$ sur la période [1950, 1999] (les hommes sont à gauche et les femmes à droite).

2.7 Critiques et améliorations

Choix de la tranche d'âge

Notre travail porte sur les données population de plus de 50 ans. Il est intéressant de s'interroger sur la variabilité de nos projections en fonction de la tranche d'âge considérée. Pour ce faire, nous proposons d'estimer ponctuellement les valeurs de $e_x(t)$ et $a_x(t)$ en travaillant cette fois sur la population des 65 ans et plus. Toutes les procédures d'évaluation sont identiques à celles décrites précédemment. La table (2.4) donne un aperçu rapide des résultats.

Les valeurs numériques de ces quantités estimées sont pratiquement les mêmes que l'on considère cette population ou les 50 ans et plus. Le choix de la tranche d'âge

FIG. 2.6 – Evolution de $e_{65}(t)$ et $e_{80}(t)$ sur la période [1950, 2000]

x	$e_x(2000)$	$a_x(2000)$
65	17.28	11.29
80	7.32	5.56
65	22.81	13.97
80	9.65	7.16

TAB. 2.4 – Valeurs de $e_x(2000)$ et $a_x(2000)$ obtenus sur population de plus de 65 ans (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

n'a donc finalement que peu d'impact sur les projections de la mortalité française aux grands âges. Nous tenons à préciser que ce n'est pas le cas pour tous les pays et que cette vérification nous a semblé nécessaire. Nous arrivons aux mêmes conclusions pour les données population belge bien que l'influence du choix de la tranche d'âge soit plus marquée dans ce cas.

Etude des résidus

Jusqu'ici nous avons négligé l'étude des résidus, à savoir la différence entre le nombre de décès prédit par le modèle et le nombre de décès observé sur toute la période d'observation.

L'article de HABERMAN & RENSHAW (2002) propose une amélioration du mo-

dèle de Poisson, en prenant en compte dans l'expression du taux de hasard une deuxième composante dépendant du temps. Ceci revient à considérer que $\{\kappa_t\}_t$ ne peut décrire à lui seul toute la dépendance temporelle. Les auteurs ont mis en évidence sur les données britanniques une insuffisance du modèle au premier ordre. Celui-ci ne pouvait décrire entièrement la mortalité et devait s'ajuster ainsi,

$$\ln \widehat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \sum_{j=1}^n \beta_{x,j} \kappa_{t,j} + \varepsilon_x(t)$$

Par conséquent, nous testons les résidus pour éprouver l'ajustement de notre modèle aux données françaises. Les auteurs proposent dans leur article la formule qui suit - formule alternative aux résidus de Pearson - pour calculer les résidus,

$$\text{sign}(d_x(t) - \widehat{d}_x(t)) \frac{\sqrt{\text{dev}(x,t)}}{\sqrt{\widehat{\Phi}}}$$

$$\text{dev}(x,t) = 2[d_x(t) \ln\left(\frac{d_x(t)}{\widehat{d}_x(t)}\right) - (d_x(t) - \widehat{d}_x(t))]$$

$$\widehat{\Phi} = \sum_{\text{all } x,t} 2[d_x(t) \ln\left(\frac{d_x(t)}{\widehat{d}_x(t)}\right) - (d_x(t) - \widehat{d}_x(t))] \frac{1}{\nu\gamma}$$

Où ν est le nombre de degré de liberté déterminé en partie par le degré de paramétrisation.

Le lecteur peut se référer à l'article cité pour des renseignements complémentaires sur l'obtention des formules notamment.

La figure (2.7) présente la valeur des résidus à différents âges pour les deux sexes sur les données françaises.

Nous ne voyons pas dans les résidus apparaître de tendance temporelle claire et choisissons de ne pas étendre notre modèle au second ordre.

La même remarque peut être faite pour les données belges et il n'est pas nécessaire, là non plus, d'étendre le modèle au second ordre.

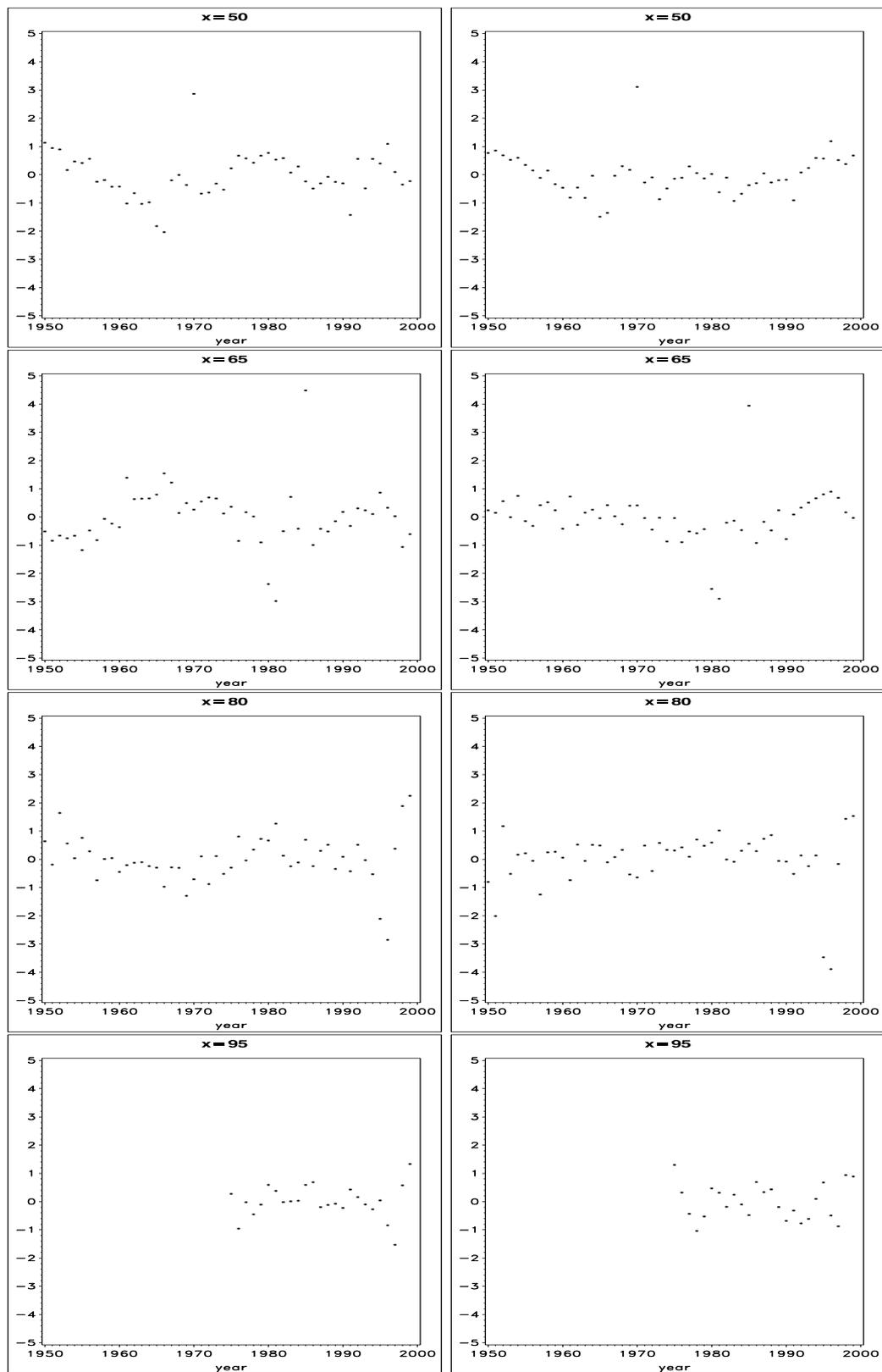


FIG. 2.7 – Valeur des résidus standardisés sur la période [1950, 1999] pour différents âges (les hommes sont à gauche et les femmes à droite).

Chapitre 3

Intervalles de confiance

Il est important de fournir de l'information sur la variabilité des quantités prédites. Dans notre cas, l'outil le plus adéquat nous paraît être l'intervalle de confiance. Ce chapitre s'attache à construire de tels intervalles pour les taux de hasard et par conséquent pour les indicateurs de mortalité $e_x(2000)$ et $a_x(2000)$.

3.1 La méthode de simulation

Remarquons tout d'abord qu'il est impossible d'obtenir analytiquement des intervalles de confiance pour notre modèle. Deux sources de variabilité très différentes se combinent. La première est liée aux erreurs d'échantillonnage relatives aux paramètres α_x , β_x et κ_t du modèle, tandis que la seconde est liée aux erreurs de prédictions sur la série des $\{\kappa_t\}_t$. De plus, les indicateurs $e_x(2000)$ et $a_x(2000)$ sont des fonctions non-linéaires relativement complexes des paramètres du modèle.

Au regard de ces difficultés, nous prenons le parti d'estimer les intervalles de confiance par simulation Monte Carlo. Les paramètres α_x , β_x et κ_t sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous savons alors qu'ils sont asymptotiquement distribués selon une variable aléatoire normale multivariée, de moyenne $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa})$ et dont la matrice de variance-covariance est l'inverse de la matrice d'information de Fisher. Concernant le modèle de prédiction, toute l'information sur la variabilité des processus ARIMA est résumée dans les paramètres ρ , θ et σ donnés au paragraphe 2.5.

Notons α_x^m , β_x^m et κ_t^m les valeurs des paramètres du $m^{\text{ème}}$ échantillon jusqu'à $t = t_{max}$ et κ_t^{*m} ses projections futures. La simulation Monte Carlo se résume alors en quatre étapes :

1. Générer α_x^m , β_x^m et κ_t^m par la distribution normale multivariée adéquate
2. Estimer le modèle ARIMA en utilisant la série $\{\kappa_t^m\}$. En déduire les paramètres ρ^m , θ^m et σ^m
3. Générer les projections κ_t^m en utilisant les paramètres ARIMA. Les erreurs ϵ_t^m sont simulées par une variable aléatoire normale de moyenne 0 et d'écart-type σ^m
4. Calculer $e_x^m(t)$ et $a_x^m(t)$

La première étape prend en compte le risque sur les paramètres du modèle de Poisson. La seconde étape permet de considérer le fait que le risque sur les paramètres ARIMA dépend du risque sur les paramètres de Poisson par l'utilisation de la série des $\{\kappa_t\}$ générés pour estimer les paramètres ARIMA. Dans la troisième étape, nous considérons que le risque sur les prédictions de la série des $\{\kappa_t\}$ ne dépend pas uniquement de l'erreur standard du modèle ARIMA, mais également du risque sur les paramètres ARIMA.

3.2 Génération des intervalles de confiance

Nous générons $n = 10000$ échantillons aléatoires. Tous les intervalles de confiance présentés dans cette section sont de niveau 95%.

Les principaux résultats obtenus par cette méthode de bootstrap paramétrique sont repris dans le tableau qui suit,

La génération d'un échantillon aléatoire plus grand n'apporte pas de réelles informations complémentaires. A partir de 10000 la convergence est assurée, les intervalles de confiance restent stables. La valeur des estimations ponctuelles de ces quantités données à la section 2.6 sont naturellement très proches de la moyenne de nos simulations. Nous les rappelons rapidement dans la table (3.2).

Les intervalles de confiance générés pour les données population belge sont légèrement plus larges. Ceci est dû aux ARIMA sélectionnés pour modéliser la série des $\{\kappa_t\}$.

x	$e_x(2000)$	IC	$a_x(2000)$	IC
65	17.39	[16.74, 18.04]	11.34	[11.40, 11.64]
80	7.26	[7.08, 7.45]	5.52	[5.40, 5.65]
65	22.88	[22.36, 23.41]	13.96	[13.77, 14.21]
80	9.68	[9.43, 9.94]	7.19	[7.02, 7.36]

TAB. 3.1 – Intervalles de confiance à 95 % pour $e_{65}(2000)$ et $a_{65}(2000)$ (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

x	$e_x(2000)$	$a_x(2000)$
65	17.38	11.35
80	7.38	5.60
65	22.79	13.95
80	9.64	7.15

TAB. 3.2 – Valeurs de $e_x(2000)$ et $a_x(2000)$ obtenues par estimation ponctuelle (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

L'approche par bootstrap présente un avantage majeur. Elle permet une compréhension immédiate de la manière dont peuvent être constituées les marges de sécurité. Une fois la densité de $\widehat{a_x(2000)}$ estimée pour les deux sexes, l'actuaire peut choisir directement un niveau de chargement en utilisant les quantiles.

La figure (3.1) illustre ce propos.

Remarquons que les intervalles de confiance sont relativement étroits. Les paramètres α_x , β_x et κ_t sont simulés à l'aide d'une variable aléatoire normale multivariée ce qui ne permet pas à plusieurs paramètres d'adopter simultanément des valeurs extrêmes. Le bootstrap est entièrement paramétrique, la seule erreur considérée est celle liée à l'estimation des paramètres du modèle.

Il nous paraît important de proposer également une approche semi-paramétrique car elle permet d'introduire un degré de sécurité supplémentaire en prenant en compte non seulement l'erreur liée à l'estimation des paramètres mais aussi l'erreur d'échantillonnage.

Nous estimons qu'il faut être prudent, en particulier aux grands âges. Les effectifs

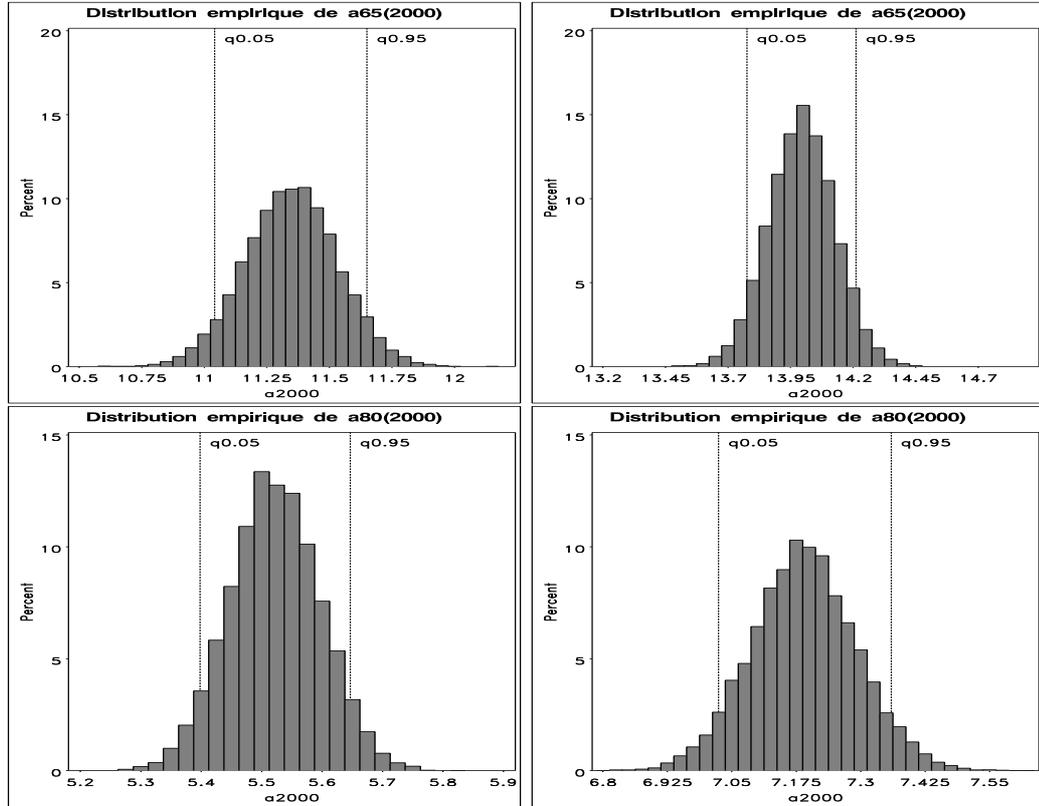


FIG. 3.1 – Estimation de la densité de $\widehat{a_x(2000)}$ par bootstrap paramétrique (les hommes sont à gauche et les femmes à droite).

décédés observés étant relativement faibles, des erreurs d'échantillonnage peuvent avoir un impact non négligeable sur la mortalité projetée. Afin de quantifier cette erreur, nous retirerons pour chaque simulation Monte Carlo le nombre de décès $D_x(t)$,

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(d_x(t))$$

où $d_x(t)$ est le nombre de décès effectivement observé l'année t à l'âge x . Et c'est à partir de ces décès simulés que nous estimons les différents paramètres.

Puis, les paramètres α_x , β_x et κ_t du modèle de Poisson sont ensuite générés comme décrit à la section 3.1. L'intervalle de confiance généré pour $\mu_x(t)$ par la méthode semi-paramétrique devrait être sensiblement plus large que celui généré par la méthode paramétrique. Les intervalles de confiance sont de niveau 95%.

La comparaison des tables (3.3) et (3.1) permet au lecteur d'apprécier les principales différences entre les deux approches.

x	$e_x(2000)$	IC	$a_x(2000)$	IC
65	17.38	[16.72, 18.04]	11.34	[11.03, 11.65]
80	7.38	[7.12, 7.65]	5.60	[5.42, 5.78]
65	22.75	[22.23, 23.25]	13.94	[13.72, 14.14]
80	9.63	[9.38, 9.88]	7.14	[6.98, 7.31]

TAB. 3.3 – Intervalles de confiance semi-paramétriques de niveau 95 % (les hommes sont en haut et les femmes en bas)

Les intervalles de confiance ont des largeurs comparables. Les moyennes des simulations pour $e_{80}^m(2000)$ sont un peu différentes selon l'approche mais cette différence sur l'espérance de vie ne représente qu'un mois. Pour les femmes, cela se compte même en jours.

L'utilisation d'un taux d'actualisation pour le calcul de $\widehat{a_x(2000)}$ efface une partie de l'effet que pourrait avoir l'erreur d'échantillonnage sur les grands âges. Nous proposons donc de ne comparer graphiquement à la figure (3.2) que les densités obtenues pour $e_{80}(2000)$ par les deux méthodes de bootstrap.

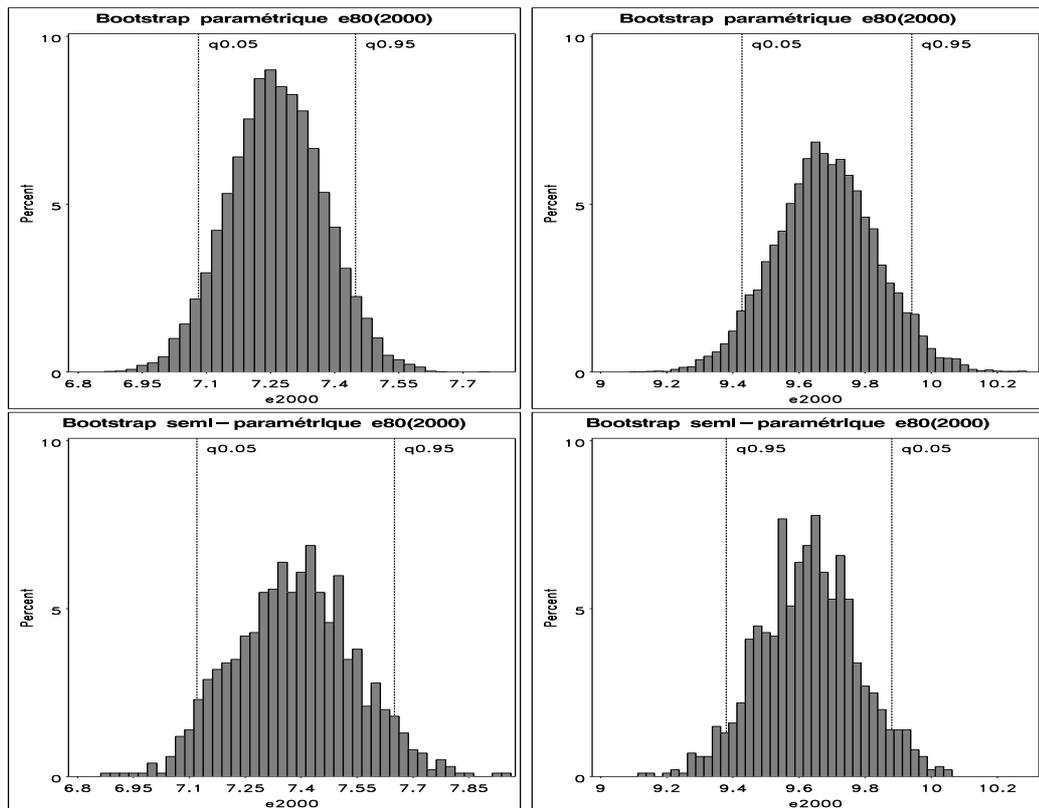


FIG. 3.2 – Comparaison des estimations de la densité de $\widehat{e_x(2000)}$ par bootstrap paramétrique et semi-paramétrique (les hommes sont à gauche et les femmes à droite)

Chapitre 4

La table réglementaire française

La législation française impose aux compagnies d'assurance qui proposent des contrats de rente viagère une méthode de tarification et de provisionnement. Le Code des assurances prévoit à l'article A335-1 que les tarifs et les provisions ne peuvent être inférieurs à ceux qui résultent de l'application de la table réglementaire française, la TPG.

4.1 Méthode de construction et utilisation

La TPG fut établie par Marc Hidalgo en 1992 sur base de taux de mortalité féminins bruts par tranche de 5 ans publiés par l'INSEE. La méthode utilisée est de manière synthétique un ajustement logistique sur les probabilités de décès. Il propose une utilisation simplifiée aux compagnies d'assurance à l'aide d'une méthodologie de décalage d'âge utilisée principalement dans les pays germaniques. Ce décalage est identique pour les hommes et pour les femmes. Il choisit une génération de référence, la génération des femmes de 1950.

Pour en illustrer l'utilisation, nous proposons un exemple simple. Soit une personne ayant atteint l'âge 65 en 2000 et née en 1935. Par une simple lecture de la table des correspondances qui se réfère à la génération, nous savons que le décalage d'âge vaut 2 ans par rapport à la génération de référence. Ainsi, $q_{65}(2000) = q_{67}^{TPG}$. De cette manière nous obtenons la série des $a_x(t)$.

4.2 Comparaison avec la table prospective Poisson

En préliminaire, nous tenons à rappeler que nos tables prospectives sont construites par sexe alors que la TPG sert de référence aussi bien pour les hommes que pour les femmes.

Les tableaux (4.1) et (4.2) comparent les valeurs prédites par notre modèle pour $a_{65}(2000)$, $a_{80}(2000)$, $e_{65}(2000)$ et $e_{80}(2000)$ avec les valeurs données par la table réglementaire française.

x	$a_x^m(2000)$	$a_x^w(2000)$	$a_x^{TPG}(2000)$
65	11.34	13.96	13.81
80	5.52	7.19	7.34

TAB. 4.1 – Comparaison des valeurs obtenues pour $a_x(2000)$

x	$e_x^m(2000)$	$e_x^w(2000)$	$e_x^{TPG}(2000)$
65	17.38	22.79	22.46
80	7.38	9.64	10.00

TAB. 4.2 – Comparaison des valeurs obtenues pour $e_x(2000)$

A priori les résultats donnés par la TPG sont très proches de ceux que nous obtenons pour les femmes. A 80 ans, la TPG semble même plus prudentielle que la table prospective que nous avons construite en l'an 2000.

Nous souhaitons à présent regarder les résultats obtenus pour l'année 2030 par les deux méthodes. Les tableaux (4.3) et (4.4) comparent les valeurs prédites et réglementaires.

x	$a_x^m(2030)$	$a_x^w(2030)$	$a_x^{TPG}(2030)$
65	12.75	15.41	15.17
80	6.75	8.67	8.55

TAB. 4.3 – Comparaison des valeurs obtenues pour $a_x(2030)$

x	$e_x^m(2030)$	$e_x^w(2030)$	$e_x^{TPG}(2030)$
65	20.28	26.25	25.97
80	9.01	12.00	11.96

TAB. 4.4 – Comparaison des valeurs obtenues pour $e_x(2030)$

Ainsi en se plaçant à un horizon plus lointain les espérances de vie féminines, de légères insuffisances apparaissent un peu plus nettement. Cependant ces résultats à horizon 2030 sont à prendre avec précaution. L'obtention de ces valeurs numériques nécessite une projection jusqu'en 2085 faisant peser une incertitude quasi totale sur le modèle constitué à l'aide de la période d'observation [1950, 1999].

A titre illustratif, nous proposons le graphe de l'évolution de la quantité $a_x(t)$ respectivement aux âges 65 et 80 ans sur la période [1950, 2030].

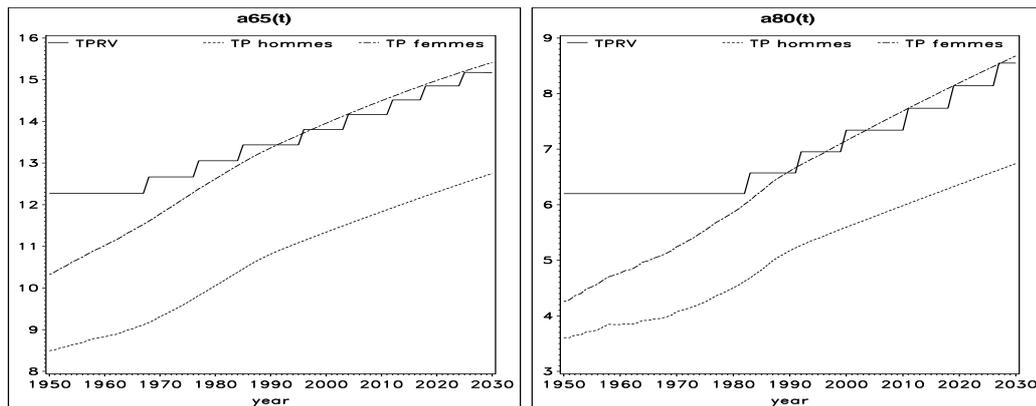


FIG. 4.1 – Valeur de $a_x(t)$ en fonction de la table prospective utilisée sur la période [1950, 2030]

Dès l'an 2000, les valeurs données par la TPG et notre table prospective ne cessent de se croiser. Cependant, nous voyons bien que peu à peu les écarts dus aux sauts, ne se compensent plus que partiellement. A un horizon lointain, la table légale semble donc insuffisante à couvrir la mortalité féminine.

Nous proposons encore deux séries de graphes afin d'exploiter nos résultats et de pousser la comparaison. La première série permet de situer la valeur calculée de $a_x^{TPG}(2000)$ par rapport au graphe de densité que nous avons obtenu pour $\widehat{a_x}(2000)$

au chapitre 3.2 respectivement aux âges 65 et 80 ans. Cette comparaison n'est bien évidemment effectuée que pour le sexe féminin. Situer la valeur de $a_x^{TPG}(2000)$ par rapport à la densité obtenue pour le sexe masculin n'a pas grand intérêt. Nous faisons de même pour l'espérance de vie à 65 et 80 ans.

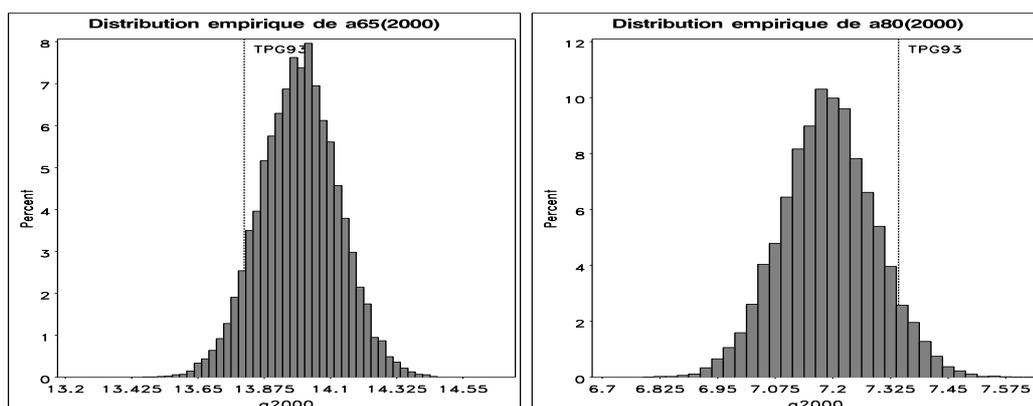


FIG. 4.2 – Position de $a_x^{TPG}(t)$ sur les intervalles de confiance de $a_x^w(t)$

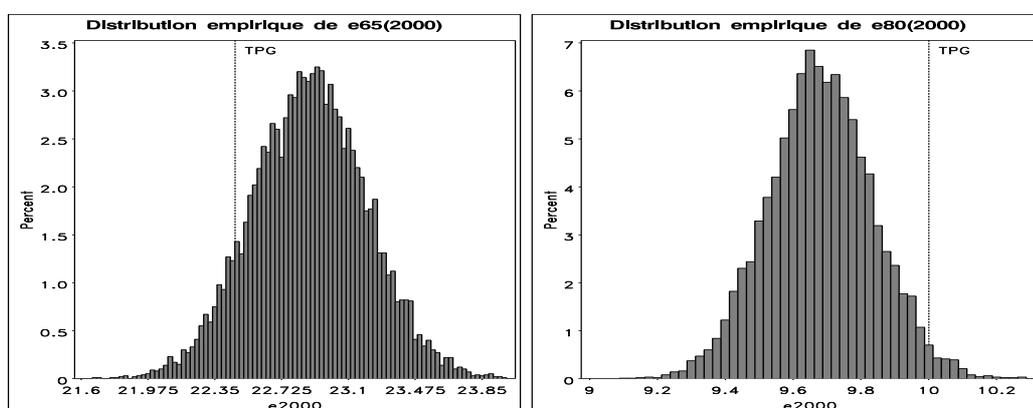


FIG. 4.3 – Position de $e_x^{TPG}(t)$ sur les intervalles de confiance de $a_x^w(t)$

Quelle que soit la quantité à laquelle on s'intéresse, espérance de vie ou valeur de la prime pure, les conclusions sont inversées selon l'âge considéré. A 65 ans, la TPG apparaît moins prudentielle que notre table prospective. A contrario, elle semble plus prudente à 80 ans.

Ainsi, à brève échéance et du point de vue des compagnies d'assurance françaises, il est rassurant que la TPG soit prudente aux grands âges. A plus ou moins long

terme toutefois, il faudrait éventuellement envisager une correction.

Tout porte à croire pourtant qu'un portefeuille bien équilibré pourrait permettre finalement une bonne mutualisation hommes femmes, et conserver à terme une provision suffisante. Mais il ne faut pas négliger le fait que ces tables sont construites sur base de données population et qu'un portefeuille de rentiers est soumis à une importante antisélection. Marc Hidalgo avait d'ailleurs à l'époque précisé en conclusion de son travail qu'il faudrait prendre en compte l'antisélection.

Dans les contrats groupe, l'antisélection est forte mais tout de même moins que dans les contrats à souscription individuelle. L'utilisation de la TPG pourrait s'avérer raisonnable pour ce type de contrats vie si l'on prend en considération le fait que les hommes sont tarifés à l'aide d'une table de mortalité féminine.

Nous estimons par contre que, dès lors que l'on travaille sur des contrats de rente individuels, l'utilisation de la table réglementaire peut engendrer des insuffisances importantes.

L'ARAB (Association Royale des Actuaires Belges) a constitué un groupe de travail sur la mortalité. L'étude est menée sur base des données population et marché belge que nous utilisons, et c'est d'ailleurs la table prospective marché construite conjointement avec ce groupe de travail qui nous sert de base technique lors de la cotation des traités dans la seconde partie de ce mémoire.

La quantification de l'antisélection révèle des disparités très importantes entre la population nationale et la population des rentiers. Pour des précisions sur la méthode de quantification, le lecteur peut se reporter au chapitre 5. Par exemple, la valeur de $a_{65}(2000)$ augmente de 38% selon que l'on s'intéresse à une population ou à l'autre, respectivement de 25% pour les femmes.

En ce qui concerne les espérances de vie, les résultats sont encore plus frappants, puisqu'il faut augmenter ses valeurs respectivement de 63% et 46%. Si nous appliquions les mêmes pourcentages aux données françaises l'espérance de vie à 65 ans d'un homme en l'an 2000 serait de 29 ans, d'une femme de 33 ans. Ils vivraient donc en moyenne jusqu'à respectivement 93 et 98 ans, situation qui deviendrait alors plutôt préoccupante pour les compagnies d'assurance.

Chapitre 5

Mesure de l'antisélection

Toute cette partie est illustrée uniquement à l'aide de données marché belges car nous ne disposons pas de données marché françaises. Notre objectif est de proposer un modèle de quantification de l'antisélection qui puisse permettre de lier les tables de mortalité prospectives population aux tables marché.

5.1 Nécessité de la quantification

Une étape importante à franchir avant d'obtenir une table prospective utilisable pour tarifier les traités de réassurance des rentes viagères commercialisées par les assureurs privés : la quantification de l'antisélection.

Les rentiers ont un profil nécessairement différent de la population nationale. Et cela pour plusieurs raisons. Tout d'abord, au terme du contrat d'épargne, l'assuré peut en principe choisir d'opter pour une conversion des droits acquis en rente ou en capital. Ainsi un assuré en bonne santé et issu d'une famille de centenaires optera préférentiellement pour une conversion en rente.

Par ailleurs, les souscripteurs d'épargne retraite individuelle appartiennent en général à des catégories socio-professionnelles relativement élevées. Ils ont accès entre autres à une plus grande qualité des soins, ce qui peut rallonger substantiellement leur espérance de vie.

Nous pourrions envisager de répéter sur les données marché l'analyse effectuée

dans les chapitres précédents. Cette approche est bien entendu vouée à l'échec ne serait-ce que parce que le nombre d'années d'observation du portefeuille est bien trop petit. Nous rappelons que les projections population réalisées jusqu'ici reposaient sur une période d'observation d'une durée de 50 ans pour la France et de 51 ans pour la Belgique. Une autre approche doit donc être envisagée.

L'idée est de modéliser puis de quantifier le lien existant entre une table prospective population et une table prospective marché.

Pour ce faire, le réassureur qui utilise ces tables comme base technique de cotation doit demander un certain nombre d'informations à la cédante. Les données souhaitées sont de la même forme que celles obtenues de l'INSEE, l'INED ou bien encore l'INS, à savoir les effectifs au premier janvier et le nombre de décès en âge atteint par âge et par sexe.

Quant à la période d'observation, nous nous sommes fixé un minimum de 5 ans. Ce choix est bien évidemment arbitraire. Avec une seule année d'observation, nous pourrions déjà avoir une estimation utilisable. Simplement, ce critère des 5 ans a pour objectif de réduire l'erreur qui entache le modèle.

5.2 Modèle

La technique utilisée s'inspire du système logit utilisé en démographie. Cette modélisation a été proposée par Brass pour établir des perspectives longitudinales de mortalité. S'il le désire, le lecteur peut en trouver une description succincte dans BENJAMIN & POLLARD (1993).

L'idée est de trouver une relation simple, idéalement log-linéaire voir BROUHNS & DENUIT(2002), liant certaines caractéristiques de la mortalité population à la mortalité marché. Nous proposons la relation suivante,

$$\ln \widehat{\mu}_x^{\text{Marché}}(t) = \gamma_{x,t} + \delta_{x,t} \ln \widehat{\mu}_x^{\text{INS}}(t) + \epsilon_{xt} \quad (5.1)$$

Nous considérons donc le logarithme de la fonction de hasard du marché comme la variable à expliquer, et le logarithme du taux de hasard de la population comme une variable explicative. Plusieurs modèles peuvent être testés. Ceux que nous souhaitons retenir comme modèles candidats sont ceux où les paramètres de la relation

linéaire sont indépendants du temps. Nous construisons des tables prospectives. Inclure des paramètres dépendants du temps nous obligerait à les extrapoler soit à l'aide de modèles linéaires soit à l'aide de processus ARIMA par exemple. Or, s'agissant de données marché, la durée d'observation est relativement faible. Utiliser ces méthodes n'aurait donc que peu de sens. Précisons toutefois que sur les données belges le groupe de travail a testé l'hypothèse de dépendance temporelle en introduisant l'année d'observation comme variable explicative sans grand résultat. Il s'agit ensuite de déterminer le meilleur modèle à l'aide de la procédure GENMOD de SAS, soit celui au plus grand pouvoir explicatif. Puis, on estime les paramètres γ_x et δ_x .

En ce qui concerne la dépendance par rapport à l'âge des paramètres du modèle, on peut aussi sélectionner des variables catégorielles telles que $\gamma \leq 65$ et $\gamma \geq 65$, ou bien encore choisir un modèle indépendant de x . Tout dépend du jeu de données de la cédante.

Notre postulat suivant est que la relation (5.1) liant les observations marché et population reste pertinente au cours du temps.

On a recours au modèle,

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(L_x^{\text{Marché}}(t)\mu_x^{\text{Marché}}(t))$$

$$\text{où} \quad \ln \mu_x^{\text{marché}}(t) = \gamma_x + \delta_x \ln \mu_x^{\text{INS}}(t)$$

dans laquelle les taux instantanés de mortalité $\mu_x^{\text{INS}}(t)$ sont obtenus comme décrit au chapitre 3.

On pourrait critiquer le postulat de stabilité dans le temps, le juger dangereux pour les produits de réassurance. Simplement, le marché des rentes individuelles semble être amené à s'élargir aux classes moyennes, notamment pour des motifs essentiellement politiques. La prise de conscience du problème de financement des retraites publiques pousse une certaine catégorie de la population vers des solutions individuelles. Nous sommes ainsi tentés de croire que l'antisélection devrait décroître au cours du temps. Une marge de sécurité supplémentaire serait donc implicitement introduite par ce biais.

5.3 Critiques et améliorations

Nous pourrions également envisager d'estimer les paramètres γ_x et δ_x en introduisant, non plus une dépendance par rapport à l'âge mais aussi par rapport au niveau de la rente souscrit. Il peut en effet exister au sein du portefeuille une grande hétérogénéité des montants annuels de rente souscrits. Ces contrats peuvent d'ailleurs constituer un risque de pointe pesant sur le portefeuille pour une cédante. Nous pouvons supposer à juste titre que l'antisélection soit encore plus forte sur la population des rentiers à fort arrérage. AUJOUX & CARBONEL(1995) ont effectué une étude à ce sujet dans un article paru dans le bulletin de l'IAF. Les auteurs ont travaillé sur un portefeuille de plus de 200000 assurés. Le lecteur peut s'y référer s'il souhaite des informations complémentaires.

Ainsi, choisir et estimer un γ_x dépendant du niveau de rente permettrait l'ajout d'une sécurité supplémentaire. Si la cédante est susceptible de fournir ce genre d'informations, il serait bon d'en tenir compte dans l'approche considérée.

5.4 Intervalles de confiance

Toutes les études menées dans la seconde partie de ce travail nécessitent la donnée d'informations sur la variabilité des quantités prédites, soit sur la variabilité des tables prospectives marché. Il serait faux de simuler γ_x et δ_x indépendamment des autres paramètres.

Nous proposons donc une méthode de double bootstrap semi-paramétrique qui prenne en compte également les erreurs d'échantillonnage des données population et marché. Pour l'échantillon m ,

1. Générer le nombre de décès population $D_x^{INS}(t) \sim Poisson(d_x^{INS}(t))$
2. Estimer α_x^m , β_x^m et κ_t^m
3. Estimer le modèle ARIMA en utilisant la série $\{\kappa_t^m\}$. En déduire les paramètres ρ^m , θ^m et σ^m
4. Générer les projections κ_t^{*m} en utilisant les paramètres ARIMA
5. Générer le nombre de décès marché $D_x^{Marche}(t) \sim Poisson(d_x^{marche}(t))$

6. Estimer les paramètres γ_x^m et δ_x^m

Le principe est le même que celui du bootstrap semi-paramétrique évoqué au chapitre 3. Nous rajoutons simplement deux étapes. La première consiste à retirer les décès marché observés afin de prendre en compte l'erreur d'échantillonnage. La seconde permet de réestimer le lien linéaire entre les deux jeux de données au travers des paramètres γ_x et δ_x .

Nous générons ainsi 1000 tables de mortalité prospectives marché complètes. Nous n'en générons pas d'avantage, car le temps de calcul est déjà de plus de 30 heures pour les obtenir. En ce qui concerne le stockage de l'information, nous choisissons de représenter une table simulée par un unique vecteur colonne contenant $\gamma_x, \delta_x, \alpha_x, \beta_x$ et κ_t pour chaque x et chaque t . Cela permet de stocker les 1000 tables simulées sous forme d'une unique table SAS à 1000 colonnes.

5.5 Illustration

Les résultats proviennent de l'étude réalisée conjointement avec le groupe de travail de l'ARAB sur base des données marché belges, s'agissant des opérations de type vie conclues à titre individuel. Différents modèles sont testés et comparés en utilisant le critère de la déviance, notamment l'âge comme variable explicative ou catégorielle comme nous l'avons expliqué précédemment. Le modèle finalement retenu est à deux paramètres uniquement.

On donne l'expression,

$$\ln \widehat{\mu}_x^{\text{Marché}}(t) = \gamma + \delta \ln \widehat{\mu}_x^{\text{INS}}(t), \quad \forall x \geq 50$$

dans lequel les taux instantanés de mortalité $\mu_x^{\text{INS}}(t)$ sont obtenus comme décrit aux chapitres précédents sur base des données population belges fournies par l'INS. A titre d'illustration, nous présentons l'estimation ponctuelle des paramètres γ et δ du modèle retenu au tableau (5.1). Les intervalles de confiance sont de niveau 95%.

Les 1000 tables de mortalité prospectives marché sont générées ensuite à l'aide de la méthode du double bootstrap décrite à la section 5.4.

Paramètres	Estimation	IDC	Estimation	IDC
δ	-1.5013	[-1.5793, -1.4233]	-1.2811	[-1.3673, -1.1949]
γ	0.7975	[0.7784, 0.8166]	0.8486	[0.8290, 0.8682]

TAB. 5.1 – Estimation des paramètres d’antisélection sur données belges (les hommes sont à gauche et les femmes à droite)

A titre de remarque, notons qu’un autre modèle s’ajuste également relativement bien. Nous introduisons un troisième paramètre, à savoir une variable catégorielle. A 65 ans, l’assuré peut en principe opter pour une conversion en rente ou en capital comme nous l’avons déjà indiqué. La population des assurés de 65 ans et plus doit avoir une mortalité sensiblement différente de celle des moins de 65 ans car un deuxième phénomène d’antisélection s’est ajouté au premier. Au niveau de la modélisation, cela revient à introduire un γ catégoriel à savoir $\gamma_{<65}$ et $\gamma_{>65}$. Après quelques tests, il apparaît que pour les femmes cette nouvelle segmentation n’apporte pas d’amélioration notable, contrairement aux hommes. Cependant cette segmentation n’est pas retenue par la suite.

Nous générons donc 1000 tables prospectives marché puis les stockons sous forme d’une unique table SAS contenant pour chaque simulation δ , γ , α_x , β_x et κ_t . C’est cette table qui sert de base technique pour la tarification des couvertures de réassurance dans la seconde partie.

Deuxième partie

Les traités de réassurance

La deuxième partie de l'étude est entièrement consacrée à l'analyse du risque de longévité et à la présentation et la cotation de cinq traités de réassurance non-proportionnels d'un portefeuille de rentes viagères à souscription individuelle. Précisons d'ores et déjà que certains produits s'adaptent mieux en pratique aux pays où la législation n'impose ni revalorisation des rentes ni participation aux bénéfices, comme c'est le cas en Belgique. Toutes les cotations sont effectuées en utilisant les tables prospectives marché belges obtenues par la méthode du double Bootstrap.

Le premier chapitre permet d'aborder plusieurs notions. Nous analysons qualitativement le risque de longévité et évoquons un possible transfert sur le marché financier. Nous définissons des traités de type trigger à double déclencheur, l'un financier, l'autre d'assurance. Nous présentons la méthodologie générale de cotation des traités ainsi que la méthodologie de cash flows implémentée.

Le deuxième chapitre présente des couvertures de réassurance non proportionnelles classiques. Nous abordons sous l'angle technique un traité Stop Loss, un Excess of Loss en durée et un Excess of Loss en montant. Nous procédons aux cotations et à une analyse de sensibilité des résultats par rapport à différents paramètres tels que la mesure de risque choisie ou la composition du portefeuille de rentes.

Le troisième chapitre est consacré à des couvertures non proportionnelles sur mali de provisionnement. Nous explicitons les différentes difficultés techniques rencontrées quant à l'élaboration de ces traités puis nous procédons à leur cotation et à une analyse de sensibilité.

Les illustrations numériques portent sur un portefeuille fictif de rentiers. Il est pris identique pour chaque cotation afin de permettre au lecteur d'apprécier et comparer les différentes couvertures tant au niveau de leurs prix que des chargements de sécurité.

Chapitre 6

La couverture du risque de longévité

6.1 Les longevity bonds

Il faut considérer le risque de longévité avant tout comme un risque de modèle. Ce qui rend très difficile la couverture de ce risque est la nature même de la relation qui lie l'assureur à l'assuré : l'engagement viager. Car c'est la durée de cet engagement qui entache le modèle d'autant d'incertitude. Ainsi une erreur même minime de modélisation au départ peut avoir des conséquences très lourdes aussi bien pour l'assureur que pour le réassureur à un horizon même moyen terme. En tant que risque de modèle, il est non diversifiable et ne peut être mutualisé géographiquement. Si la mortalité des rentiers d'un pays d'Europe dérive, elle devrait également dériver à plus ou moins brève échéance et de manière similaire dans les autres pays.

Une des solutions que nous pouvons proposer consiste à transférer le risque de longévité au marché financier en utilisant un outil tel que la titrisation.

Le principe serait identique à celui des Cat Bonds. Le réassureur émet de la dette sur les marchés financiers par le biais d'obligations indexées sur la durée de vie humaine. En cas de survenance d'un événement catastrophe - ici l'allongement excessif de la durée de vie humaine - les flux servis aux détenteurs des obligations sont utilisés pour régler les sinistres. On suspend le paiement des intérêts et/ou du capital et on reverse leurs montants à l'assureur direct.

Ainsi, ceux que l'on pourrait appeler les Longevity Bonds serviraient de source de financement alternative. L'avantage pour un investisseur est que ces Longevity Bonds

peuvent être considérés comme une nouvelle classe d'actifs offrant des rendements non corrélés aux investissements traditionnels que sont les actions et les obligations. Une difficulté persiste toutefois. La définition de l'événement catastrophe dans les Cat Bonds ne pose pas de difficultés majeures. A contrario, pour les Longevity Bonds cette définition est très délicate et suscite un certain nombre d'interrogations. Nous proposons la construction d'un indice qui sert alors de référence, un indice sur l'allongement de la durée de vie humaine.

Cette indice doit répondre à un certain nombre d'exigences. Il doit être défini à partir de données objectives, et révisable annuellement pour être accepté à la fois par les compagnies d'assurance et les investisseurs. Se référer aux données Eurostat peut être une réponse. Notons que lors de la construction de l'indice, il faut définir une méthodologie qui permette de lier la dérive de la mortalité population, estimée par les données Eurostat, et la dérive de la mortalité marché qui intéresse le réassureur. La méthodologie d'évaluation de l'antisélection développée dans la première partie au chapitre 5, nous paraît susceptible d'être acceptée par les acteurs du marché financier. D'autant plus que la méthode de LEE CARTER a été adoptée par le US bureau of Census et qu'elle est gérable à l'aide de procédures prédéfinies de SAS.

En pratique le réassureur conserve à sa charge le risque de base - l'écart entre la sinistralité marché et la sinistralité de son portefeuille. Le réassureur peut recevoir des fonds provenant du marché financier si l'indice est mauvais, et cela même si sa propre sinistralité de l'année est bonne.

6.2 Le double trigger

6.2.1 Le principe

Une compagnie d'assurance peut être intéressée par une couverture portant à la fois sur le risque technique et le risque financier. Dans un pays où la législation n'impose pas à l'assureur de participation bénéficiaire et lorsque le rendement des actifs est supérieur au taux technique minimum garanti, la cédante peut être en mesure de compenser ses déficits techniques directement à l'aide des produits financiers qu'elle dégage. Tout porte à croire dans ces conditions que l'assureur direct n'est pas prêt à céder un volume important de prime au réassureur.

Un traité à double trigger peut lui être proposé. Dans ce type de produit, l'intervention du réassureur est conditionnée par la réalisation simultanée de deux événements : l'un de nature financière, l'autre d'assurance.

La figure (6.1) permet de visualiser rapidement de manière schématique le principe général de ce type de couverture,

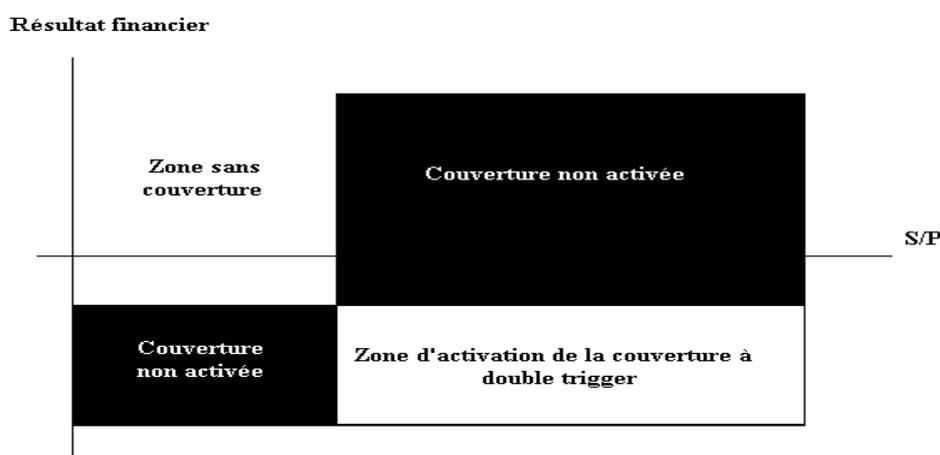


FIG. 6.1 – Présentation du principe du trigger à double déclencheur

Nous pouvons envisager deux types de produits. Dans le premier les événements déclencheurs financier et d'assurance sont liés. Imaginons par exemple une couver-

ture Stop Loss où le réassureur prend à sa charge la sinistralité annuelle cumulée de la cédante au-delà d'une certaine franchise. Une manière de lier les événements consiste à introduire un niveau de franchise qui varie positivement en fonction du rapport Φ ,

$$\Phi = \frac{\text{Rendement des Actifs}}{\text{Taux Minimum Garanti}}$$

Plus le rendement des actifs est important, plus la franchise est élevée ce qui permet à la cédante de compenser elle-même les pertes techniques qu'elle subit le cas échéant.

Dans le deuxième produit, les deux événements déclencheurs sont indépendants. ce choix ne pose pas de difficultés majeures quant à la tarification. L'événement financier que nous souhaitons retenir est le passage du rapport Φ sous un seuil prédéterminé contractuellement. Bien évidemment, la clause financière peut être différente de celle que nous proposons. Il s'agit simplement de fixer les idées. A travers les chapitres qui suivent, nous donnons les cotations des différents traités avec et sans garantie financière. Notre objectif est uniquement de donner des ordres de grandeur quant à la réduction de prime consécutive à l'introduction d'un trigger double.

6.2.2 Modélisation du rendement des actifs de la cédante

Notre objectif est de proposer un scénario d'évolution des actifs admis en représentation des provisions mathématiques des rentes de la cédante. Lors de la phase de négociation nous souhaitons fournir à la cédante un ordre d'idée quant à la diminution du volume de prime à sa charge consécutive à la souscription d'une couverture trigger à double déclencheur. Bien entendu, il faudrait proposer un modèle plus complexe incluant notamment la duration des actions et des stratégies optimales de gestion actif passif pour la cédante.

Nous tenons à préciser qu'en pratique il n'est pas possible de proposer ce genre de produit à une cédante. Le risque moral est trop important. Par exemple une cédante voyant sa mortalité évoluer défavorablement, peut être tentée de liquider une partie de ses actifs et recomposer son portefeuille avec des actifs de moins "bonne qualité". Les couvertures sont en général calibrées sur un indice tel que l'Euro Stoxx laissant ainsi à charge de la cédante le risque de base, à savoir la différence entre ses propres résultats et les résultats du marché.

Détaillons à présent les hypothèses utilisées dans la modélisation. Nous supposons que le portefeuille de la compagnie d'assurance est composé de 20% d'actions, de 70% d'obligations et de 10% d'immobilier. Cette répartition est supposée fixe au cours du temps.

D'autre part, nous travaillons sur un portefeuille fictif de rentiers belges. Il comprend 10000 têtes et est composé à 70% d'hommes et à 30% de femmes de la génération de 1938. Nous supposons que 60% des hommes et 10% de femmes ont souscrit une rente avec réversion de quotité 100%. Il s'agit d'une répartition basée sur quelques données marché et qui se veut au plus près de la réalité. Nous revenons sur ce point dans la section suivante.

Grâce à ce portefeuille nous pouvons obtenir la série annuelle des durations. Pour ce faire, nous utilisons la table réglementaire belge pour calculer les flux futurs annuels de paiement anticipés par la cédante. Ensuite, en utilisant le taux technique réglementaire de 3.25%, nous pouvons calculer la suite annuelle des durations du portefeuille (D_0, D_1, \dots, D_n) .

Nous supposons que la cédante a mis en place une stratégie simple de gestion Actif Passif qui consiste à égaliser les durations du passif et de l'actif. Ainsi, nous

supposons que le gestionnaire d'actifs constitue en date 0 un portefeuille obligataire de duration D_0 . A chaque échéance n , il recompose ce portefeuille obligataire afin que sa duration soit égale à D_n . Nous négligeons alors les durations des actions et de l'immobilier ce qui est une hypothèse assez forte. Lors d'éventuels développements ultérieurs, il faudrait améliorer cette approche.

A présent, formalisons nos hypothèses. Soit VPO_{n^-} la valeur du portefeuille obligataire en date n^- . Il est composé de zéro coupons d'échéance D_{n-1} . Le gestionnaire d'actif en date n^+ recompose son portefeuille pour obtenir des zéros coupons d'échéance D_n . Les coûts de transaction sont supposés nuls.

Présentons ensuite les modèles stochastiques retenus pour les différents actifs. S représente les actions, I l'immobilier,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \mu_1 dt + \sigma_1 d\widehat{z}_1 \\ \frac{dI}{I} &= \mu_2 dt + \sigma_2 d\widehat{z}_2\end{aligned}$$

Où $\widehat{z}_1(t)$ et $\widehat{z}_2(t)$ sont des processus de Wiener standard corrélés tels que,

$$d\widehat{z}_1 d\widehat{z}_2 = \rho_{1,2}$$

Pour le processus de taux, nous retenons le modèle de Vasicek,

$$dr = a(b - r) + \sigma_3 d\widehat{z}_3$$

Où b est le taux limite vers lequel converge $r(t)$ et a la vitesse de convergence. Où $\widehat{z}_3(t)$ est un processus de Wiener standard tel que,

$$d\widehat{z}_1 d\widehat{z}_3 = \rho_{1,3}$$

$$d\widehat{z}_2 d\widehat{z}_3 = \rho_{2,3}$$

La méthode de Vasicek présente l'avantage d'offrir une solution analytique pour le calcul du montant des zéro coupons. La méthode de Cholesky nous permet ensuite de décorréler les browniens,

$$\begin{aligned}\widehat{z}_1 &= z_1^\perp \\ \widehat{z}_2 &= \rho_{1,2} z_1^\perp + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} z_2^\perp \\ \widehat{z}_3 &= \rho_{3,1} z_1^\perp + \frac{\rho_{2,3} - \rho_{1,3} \rho_{1,2}}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} z_2^\perp + \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2 - \rho_{2,3}^2} z_3^\perp\end{aligned}$$

Où z_1^\perp , z_2^\perp et z_3^\perp sont des processus de Wiener standard indépendants.

Nous indiquons ensuite la matrice des corrélations retenue de notre modèle,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & \sigma_2^2 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutes les valeurs numériques sont extraites du mémoire de HUGUES(2000) qui traite de l'analyse Actif Passif d'un contrat de retraite collective. Les processus de diffusion des actions et de l'immobilier sont donc considérés comme indépendants. On obtient les formules suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dz_1^\perp \\ \frac{dI}{I} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dz_2^\perp \\ dr &= a(b - r) + \rho_{3,1} \sigma_3 dz_1^\perp + \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2} \sigma_3 dz_3^\perp \end{aligned}$$

Toute l'approche se fait par simulation. Le temps est discrétisé. Le pas choisi est un pas mensuel afin d'obtenir des résultats cohérents pour le processus de taux qui est, rappelons-le, corrélé avec le processus des actions. On obtient les formules explicites,

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) &= S(t) \exp \left\{ \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t} (z_1^\perp(t + \Delta t) - z_1^\perp(t)) \right\} \\ I(t + \Delta t) &= I(t) \exp \left\{ \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t} (z_2^\perp(t + \Delta t) - z_2^\perp(t)) \right\} \\ r(t + \Delta t) &= r(t) + a(b - r(t)) \Delta t + \rho_{3,1} \sigma_3 \sqrt{\Delta t} (z_1^\perp(t + \Delta t) - z_1^\perp(t)) \\ &\quad + \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2} \sigma_3 \sqrt{\Delta t} (z_3^\perp(t + \Delta t) - z_3^\perp(t)) \end{aligned}$$

$$\text{où } \forall i, \quad (z_i^\perp(t + \delta t) - z_i^\perp(t)) \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{1}{12}$$

Grâce au modèle de Vasicek pour le processus de taux, nous avons l'expression analytique des zéros coupons d'échéance T,

$$B(t, T) = \exp \left[\frac{1 - \exp(-a\tau)}{a} \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t \right) - \tau \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - \exp(-a\tau))^2 \right]$$

Où $\tau = T - t$.

Le lecteur peut se référer à l'ouvrage de QUITTARD-PINON (93) s'il souhaite des précisions sur l'obtention de cette formule.

Nous tenons également à préciser que nous n'avons pas pris en compte de risque de défaillance.

En ce qui concerne la simulation proprement dite, nous générons trois lois normales indépendantes à l'aide de la fonction *normal(0)* de SAS. Il reste encore à préciser les différents paramètres.

Paramètre	Valeur retenue
μ_1	6%
μ_2	5%
σ_1	20%
σ_2	10%
σ_3	10%
a	50%
b	4.5%
r_0	4%

Nous présentons quelques résultats graphiques sur une période de 10 ans. Ils sont obtenus à partir de 1000 simulations.

Pour la tarification du trigger dans les chapitres qui suivent, nous proposons une intervention du réassureur dès le franchissement par le rendement des actifs du seuil taux technique augmenté de 100 points de base, à savoir dès que le rendement des actifs passe sous la barre des 4.25%.

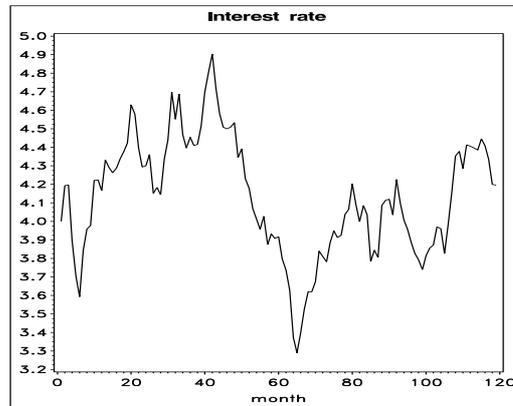


FIG. 6.2 – Taux d'intérêt. Modèle de Vasicek

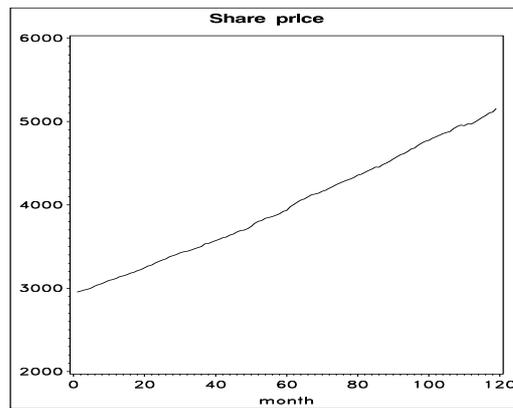


FIG. 6.3 – Cours des actions

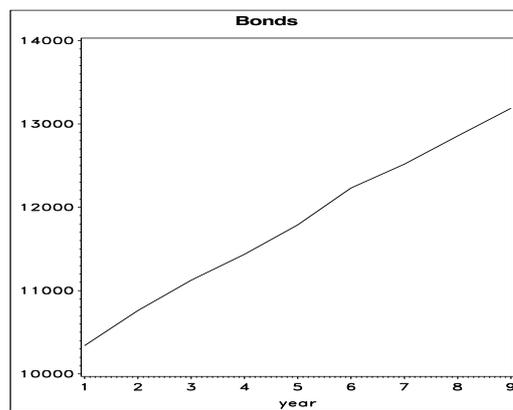


FIG. 6.4 – Valeur des obligations

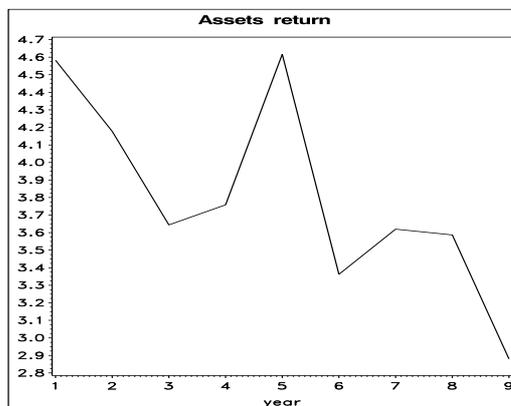


FIG. 6.5 – Rendement des actifs de la cédante

6.3 Méthodologie de cotation

Nous proposons successivement plusieurs couvertures de réassurance pour les rentes viagères. Bien que les traités répondent à des préoccupations différentes, les programmes de cotation sont implémentés selon une démarche identique d'un produit à l'autre. Les cinq programmes de base s'articulent pratiquement de la même manière. L'objectif de cette section est de présenter la philosophie de l'approche utilisée.

Les estimations et les calculs sont effectués par simulation. Les illustrations numériques sont obtenues à partir du portefeuille fictif de rentiers que nous avons évoqué dans la section consacrée au trigger financier.

Il est composé de 10000 têtes dont 70% d'hommes et 30% de femmes, 60% des hommes et 10% des femmes ont souscrit une rente de réversion totale. Nous supposons que dans les contrats de rente avec réversion, les deux têtes ont le même âge et que leurs probabilités de décès sont indépendantes. Cette hypothèse est reprise plus en détail page 108. Le portefeuille est composé uniquement d'individus de la génération 1938 à savoir ceux qui atteignent 65 ans en l'an 2003. Le montant de la rente est unitaire. Précisons d'ores et déjà que lors de la cotation de la garantie Excess of loss en montant, la composition du portefeuille est légèrement modifiée, certains assurés possédant des rentes de montant supérieur à 1.

Les paramètres que nous venons de citer sont des variables d'entrée du programme. Ils peuvent être modifiés à tout moment par l'utilisateur. Nous fixons une composition simplement pour que le lecteur puisse comparer le prix de différents traités entre eux. Nous procédons également à une analyse de la sensibilité des résultats par rapport aux différents

paramètres, à modèle fixé.

Les programmes sont construits d'une manière telle, que les flux à charge du réassureur sont obtenus par génération d'assurés. En effet, les tables prospectives construites sont relativement complexes et difficiles à manipuler. Ceci se répercute directement dans les temps de calcul qui peuvent rapidement devenir rédhibitoires. La méthode de cotation par génération nous est apparue optimale. Lors d'une phase effective de cotation, le réassureur doit faire tourner les programmes par génération d'assurés en portefeuille. Une légère modification du programme de base construit sur le portefeuille fictif permet d'agrèger les résultats obtenus par génération afin d'obtenir la valeur du traité toutes générations confondues.

A l'intérieur du programme de base - qui se réfère donc à une génération donnée - nous utilisons 1000 tables de mortalité prospectives marché générées par la méthode du double bootstrap semi-paramétrique. Le lecteur peut se reporter à la section 5.4 pour des informations complémentaires. Pour chaque table nous simulons l'extinction du portefeuille en tirant les effectifs annuels successifs à l'aide d'une loi Binomiale. Les effectifs simulés sont ventilés par sexe et par catégorie de police - sur une ou deux têtes. Nous tirons donc 4 lois binomiales chaque année et cela jusqu'à l'extinction totale du portefeuille.

Nous calculons à partir de ces effectifs les charges annuelles de l'assureur direct. Puis nous appliquons la franchise et le plafond sur la période de garantie et obtenons le montant à charge du réassureur. C'est ici que le programme de base doit être légèrement modifié pour passer des montants cumulés par génération au montants cumulés portefeuille entier.

A partir de là, nous pouvons calculer tous les paramètres d'intérêt comme la prime pure, la prime technico-financière et les montants annuels du capital alloué. Il reste encore pour cela à nous doter d'un modèle de cash flows approprié et à choisir une valeur pour le coût du capital. Nous présentons en détail le modèle de cash flows et revenons sur toutes ces notions dans la section 6.4.

Si la cédante a souhaité souscrire une garantie double trigger où les événements déclencheurs sont indépendants, il faut simuler en parallèle du scénario de passif, un scénario d'actif. Nous utilisons la modélisation du rendement des actifs de la cédante développée à la section précédente. A chaque table prospective sont associées 1000 trajectoires de rendement des actifs. Nous créons une bibliothèque où ces trajectoires sont stockées. Au total le modèle financier tourne donc 1 000 000 fois. Ensuite cette bibliothèque est incluse dans le programme de sorte que, chaque fois que le rendement est supérieur à 4.25%, la charge du réassureur est nulle.

Pour résumer disons qu'avec chaque table prospective obtenue par la méthode du double bootstrap, nous simulons l'extinction du portefeuille à l'aide de lois binomiales. En parallèle, nous avons des réalisations de l'actif. Nous appliquons la franchise, le plafond et le trigger financier si celui ci est activé sur la période de garantie et obtenons la charge du réassureur. Finalement nous traitons ces montants dans un modèle de cash flows et calculons la prime pure moyenne, la prime technico-financière et la valeur des capitaux à allouer.

6.4 Modèle de cash flows

Dans cette section, nous tâchons d'expliquer comment nous passons de la prime pure à la prime technicofinancière.

La prime technicofinancière se définit comme la valeur actualisée au coût du capital des flux futurs engendrés par le traité de réassurance.

Cependant définir ce que représente le coût du capital nécessite l'utilisation d'un outil de décision face à l'investissement. Le raisonnement suivi est simple. L'actionnaire investit du capital dans l'entreprise. Si l'on s'inspire du modèle de CAPM (Capital Asset Pricing Model) BREALEY & MEYERS (2000), nous pouvons dire que l'investisseur de la compagnie de réassurance espère un rendement sur ses placements équivalent au rendement d'autres actifs de même niveau de risque. Ce taux de rendement s'exprime comme la somme du taux sans risque et d'une prime de risque. Nous considérons alors que le coût du capital est le taux de rendement espéré par l'actionnaire. Dans les illustrations numériques nous le prenons égal à 10%.

Maintenant que nous avons défini ce que représente le coût du capital, il reste à déterminer les flux qu'engendre la couverture de réassurance. Détaillons la composition des flux pour chaque échéance t vue de la date 0, afin de reconstituer le compte de résultat du réassureur.

Les paiements. Il s'agit simplement du montant annuel à charge du réassureur, soit du décaissement total annuel. Nous estimons sa valeur comme moyenne des montants à charge des 1000 simulations. Notons ce décaissement D_t .

La variation de provision mathématique. La provision correspond à la valeur actualisée au taux de rendement des actifs du réassureur de ses engagements futurs. Nous estimons cette valeur comme moyenne des 1000 montants de provision calculés l'année t . Puis, suite aux paiements effectués chaque année, on libère une partie de la provision. Notons cette variation ΔP_t .

La variation de capital alloué. Nous souhaitons développer un certain nombre de concepts afin que le lecteur ait une vision claire de ce que nous entendons par la notion de capital alloué.

Cette notion s'apparente en fait à la notion de marge de solvabilité. Il s'agit d'une somme constituée à partir du capital social et des réserves, et qui sert en quelques sorte de réserve de capital pour garantir à l'assureur direct le paiement des prestations au cas où les provisions techniques s'avèreraient insuffisantes.

Pour déterminer le montant du capital à allouer nous devons nécessairement introduire une mesure de risque. Cette mesure de risque doit permettre de prendre en compte la variabilité observée sur nos résultats.

Classiquement, nous pourrions utiliser la value at risk VAR basée sur l'utilisation des quantiles. Cependant, nous choisissons d'introduire une autre mesure de risque, le CTE (Conditional Tail Expectation) notion introduite par ARTZNER (1999). Cette mesure du risque s'intéresse à la valeur moyenne des pertes au-delà du quantile VAR. Elle se calcule,

$$CTE_\alpha(P_t) = \mathbb{E}[P_t/P_t \geq V_\alpha(P_t)]$$

avec

$$V_\alpha(P_t) = \inf\{v : \text{Proba}[P_t \leq v] = \alpha\}$$

Où P_t est le montant des paiements escomptés en date t et $V_\alpha(P_t)$ la Value at Risk d'ordre alpha. Le capital alloué est donc calculé sur base des paiements escomptés, ce qui diffère de l'assurance non-vie.

Dans le cadre de l'approche par simulation, cette mesure de risque est très facile à implémenter. Il suffit de prendre toutes les valeurs simulées supérieures au quantile d'ordre alpha et d'en calculer la moyenne. Le capital alloué vaut,

$$k_t = CTE_\alpha(P_t) - E(P_t)$$

Si l'on considère par exemple un portefeuille fermé de rentiers, le nombre d'assurés et donc le risque diminue annuellement consécutivement aux décès. Ainsi au fur et à mesure du déroulement du traité le montant du capital alloué diminue en principe et une partie de ce capital est libérée chaque année. Notons cette variation Δk_t .

Le rendement des provisions et du capital. Les placements des provisions et du capital constituent un flux positif annuel pour le réassureur. Pour décrire le rendement des actifs de la compagnie de réassurance, nous considérons que le capital est investi au taux r pris égal à 5%. Les provisions rapportent également le taux r . Nous considérons le taux de taxe γ auquel sont soumis les résultats annuels. Il est pris égal à 40%.

Ayant décrit toutes les composantes du compte de résultat du réassureur de notre modèle de cash flows en date t , nous pouvons donner l'expression de la prime technico-financière :

$$P_{tf} = \sum_{t=0}^T v_c^t [D_t + (\Delta P_t - P_{t-1}r) + \frac{\Delta k_t}{1-\gamma} - k_{t-1}r]$$

Où k_t est le capital alloué en t et v_c représente le coût du capital.

Remarquons que dans cette expression de nombreux termes se simplifient. P_t est calculé comme la valeur actualisée au taux de rendement du réassureur des charges futures. Ainsi,

$$(D_t + P_t) = P_{t-1}(1 + r)$$

L'expression de la prime technico-financière devient,

$$P_{tf} = PP_o + \frac{k_0}{1 - \gamma} + \sum_{t=1}^T v_c^t \left[\frac{\Delta k_t}{1 - \gamma} - k_{t-1} r \right]$$

Où PP_o est le montant de la prime pure en calculé en date 0 soit le montant des flux escomptés en date 0.

Le programme est flexible. Il peut décrire entièrement le modèle de cash flows sans les simplifications que nous venons de faire au cas où l'on souhaiterait modéliser des provisions ne rapportant pas le taux r .

Le montant de la prime commerciale est obtenu ensuite à partir du montant de la prime technico-financière insérée dans un modèle de rentabilité qui fournit les différents charge-ments relatifs aux frais de gestion notamment. Mais nous ne fournissons aucun résultat numérique concernant l'obtention de la prime commerciale.

Chapitre 7

Couvertures classiques

Dans ce chapitre nous proposons trois couvertures non proportionnelles d'un portefeuille de rentiers. Nous couvrons la cédante contre les débours annuels qu'elle n'aurait pas suffisamment provisionnés. Il s'agit en fait de couvrir un déficit engendré par une trop grande disparité entre la mortalité observée et la table réglementaire utilisée pour le provisionnement et la tarification.

7.1 Stop loss

Le contrat de base

C'est une couverture tout à fait classique où le réassureur s'engage à intervenir auprès de la cédante si le total des rentes payées dans l'année dépasse un minimum fixé : la priorité. Plus précisément, nous faisons référence à un traité Aggregate Excess of Loss car la priorité est exprimée en unité monétaire et pas en pourcentage.

Ces couvertures présentent un certain nombre d'avantages pour la cédante. Les frais sont négligeables car la gestion de ces contrats est simple. Il suffit d'attendre les résultats annuels pour dresser le décompte du réassureur. Le volume de prime cédé est en principe limité. Cette couverture permet à la cédante de stabiliser ses résultats.

Pour le réassureur ces traités peuvent être dangereux. Il ignore l'évolution de la sinistralité en cours d'année. Et en général au moment où la véritable charge est connue, il a déjà renouvelé son engagement pour la période suivante.

A date de conclusion du traité, les deux partis fixent une date de déclenchement de la garantie, et une période de couverture. Dans les contrats classiques la période de couverture est l'année. Mais le risque que nous souhaitons couvrir est particulier, l'assureur et l'assuré sont liés par un engagement viager. Il nous semble alors essentiel de proposer à la cédante des couvertures pluriannuelles.

Toutefois la rédaction d'un traité pluriannuel n'est pas simple. La difficulté réside dans la définition de l'objet assuré. En fait, les partis sont contraints de se restreindre à un portefeuille fermé. En effet, si la composition du portefeuille évolue en cours de contrat incluant les nouveaux contrats de rente souscrits, le réassureur est dans l'impossibilité de donner un prix à la cédante.

Précisons encore que si malgré tout, la cédante opte pour une couverture annuelle le réassureur peut lui proposer une garantie par génération de contrats en portefeuille. Cette couverture permet la prise en charge des nouveaux assurés ayant souscrit un contrat de rente viagère dans l'année.

Franchise

La définition de la franchise en unité monétaire soulève quelques problèmes si la couverture est pluriannuelle. Et cela en plus des difficultés liées aux nouveaux contrats de rente viagère souscrits dans l'année. Nous voulons simplement attirer l'attention du lecteur sur un certain nombre de points.

Le montant de la franchise dépend du montant individuel des rentes mais aussi du nombre d'assurés en portefeuille. Or la composition du portefeuille évolue en fonction de la mortalité observée. Ainsi, la définition d'une franchise fixe ne peut avoir de sens que dans une période de couverture restreinte.

De manière simple, supposons que l'on ait en date 0 un portefeuille composé de 1000 têtes de 80 ans possédant chacune une rente de montant 1. A cette date les deux partis s'engagent sur une franchise fixe de montant 980. Au bout de trois ans, le nombre d'assurés sera en principe passé sous le seuil des 980. La souscription d'une couverture pluriannuelle de 5 ans ne présente alors aucun intérêt pour la cédante. Ainsi ce type de garantie s'adapte plus à des échéances brèves ou à des portefeuilles plutôt jeunes - entendre composé majoritairement de têtes entre 65 et 75 ans.

Si la cédante est intéressée par une couverture pluriannuelle, nous pouvons lui proposer une priorité qui décroît annuellement en fonction de la mortalité observée. Plus il y a de décès dans l'année moins il y a d'assurés couverts, plus le niveau de franchise est bas ce

qui évite les problèmes que nous venons d'aborder.

Si la cédante est intéressée par une garantie renouvelable annuellement nous suggérons de définir une priorité qui soit fonction de la génération du contrat de l'assuré. Nous tenons à préciser que la cotation de traités par génération de contrat s'effectue selon la même logique que ce qui est présenté pour les portefeuilles fermés. Il suffit simplement de considérer chaque génération comme un sous-groupe fermé.

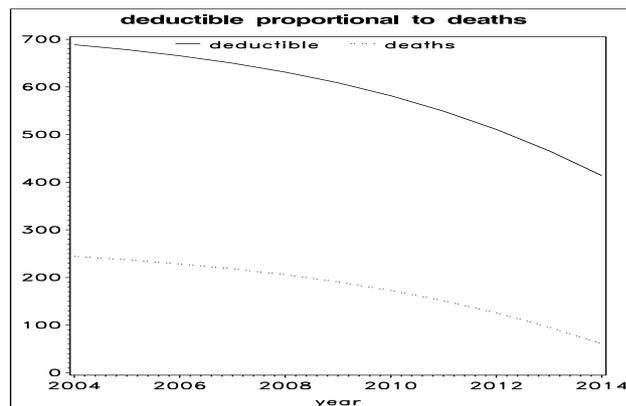


FIG. 7.1 – Niveau de franchise décroissant avec la mortalité observée

Les illustrations numériques portent sur des traités pluriannuels dont la priorité est fixe ou indexée sur la sinistralité.

Variante

Il s'agit d'une variante de la couverture pluriannuelle dont la franchise est indexée sur la mortalité observée.

Nous pouvons suggérer à la cédante d'introduire dans la définition de la priorité une double décroissance temporelle. Au fur et à mesure du déroulement de la garantie, le niveau de franchise diminue encore plus vite que s'il était simplement indexé sur la mortalité.

L'intérêt pour la cédante est qu'à terme cette double décroissance lui permet implicitement de transférer au réassureur un risque de pointe, à savoir l'allongement excessif de la durée de vie des rentiers à fort arrérage. Elle se prémunit par ce traité contre le cas où les assurés qui ont souscrit de forts niveaux de rente vivent encore plus longtemps que les autres. Ce qui permet de prendre en compte une éventuelle hétérogénéité des populations en portefeuille.

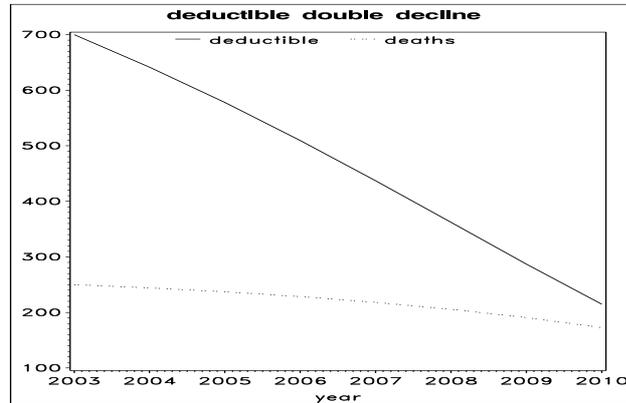


FIG. 7.2 – Niveau de franchise doublement décroissant avec la mortalité observée

Nous pouvons également proposer d'introduire une clause aggregate annuelle. En limitant le montant total à charge du réassureur, elle peut diminuer significativement le prix de la garantie. La clause aggregate peut se définir éventuellement en Aggregate Limite ou Deductible. Mais nous ne traitons pas dans les détails ces contrats. L'introduction de ces clauses peut complexifier énormément la rédaction et la cotation du traité, surtout si la police pluriannuelle. Car, la logique voudrait que l'on définisse un montant Aggregate qui décroisse en fonction de la mortalité observée soit par exemple indexé sur les provisions de la cédante.

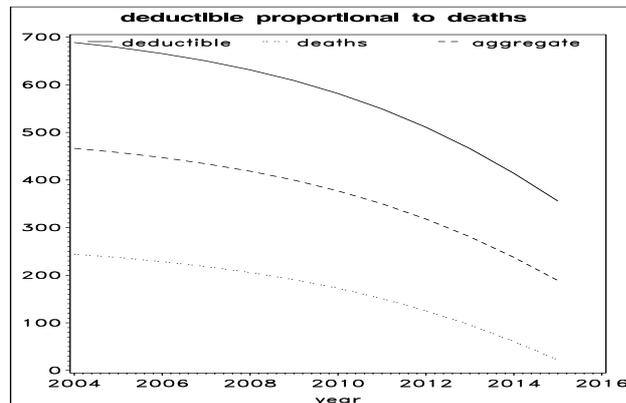


FIG. 7.3 – Niveau de franchise décroissant avec la mortalité observée avec introduction d'une clause aggregate

Une autre solution consiste à envisager une clause Aggregate pluriannuelle. Nous définissons une franchise et un plafond portant sur un agrégat de débours sur plusieurs années.

Le réassureur n'intervient auprès de la cédante qu'une seule fois, à la fin de la période de garantie. La rédaction de ce traité est simple et les frais de gestion minimales. Nous pouvons proposer par exemple un 400 XS 500 sur 5 ans où le réassureur intervient si le montant cumulé des débours de l'assureur excède 500 sur 5 ans, sachant que le réassureur s'engage au maximum sur un montant total de 400.

Une dernière variante que nous évoquons déjà dans la section 6.2, lie la clause de déclenchement du trigger financier à la franchise. Rappelons l'hypothèse sous-jacente. La compagnie qui réalise des gains financiers préférera directement les investir pour compenser ses déficits techniques plutôt que de passer par la réassurance. Ainsi nous proposons une franchise indexée sur la mortalité observée et le rendement des actifs de la compagnie admis en représentation des provisions mathématiques des rentes. Plus l'assureur direct est performant et réalise des bénéfices financiers plus la priorité est élevée. Dans un pays comme la France, ce n'est pas envisageable. La clause de participation bénéficiaire rend impossible une telle compensation entre les résultats techniques et financiers.

A notre sens, ce type de traité apparaît comme au plus près des besoins de la cédante. En revanche, il est délicat à mettre en place juridiquement et à coter car le réassureur doit être en mesure de construire des modèles très fiables pour anticiper les rendements financiers de la cédante et modéliser leur impact sur le niveau de la franchise. En pratique, un risque de base est laissé à la cédante de sorte que l'on puisse calibrer la modélisation sur quelque chose de connu et fixé comme l'Euro Stoxx 50 par exemple. Nous ne proposons pas d'illustration numérique dans ce cas.

Illustration numérique

Toute la cotation est faite en utilisant la méthode générale décrite à la section 6.3. Nous n'en rappelons dans cette section que les grandes lignes.

Tout d'abord, nous devons estimer le montant annuel à charge de la cédante. Dans le portefeuille fictif sur lequel nous travaillons, le montant des rentes est unitaire. En simulant le déroulement des effectifs en portefeuille nous obtenons donc directement la charge annuelle. Pour calculer l'effectif total, nous simulons indépendamment puis agrégeons l'évolution des effectifs des hommes et des femmes en distinguant ceux possédant un contrat sur une seule tête et ceux possédant un contrat sur deux têtes. Ce qui revient à tirer quatre lois binomiales chaque année.

Initialement nous souhaitions tirer la durée de vie de chaque assuré individuellement. Mais étant donné le nombre considérable d'assurés, et le fait que les assurés appartiennent

à des générations différentes et que pour chaque génération nous utilisons 1000 tables prospectives différentes, nous avons choisi de simuler les décès en utilisant les lois binomiales agrégées. Les temps de calcul deviennent alors raisonnables. Ces lois sont tirées suivant le principe suivant,

$$E_r^{TP_i^m}(k+1) = \mathcal{B} (E_r^{TP_i^m}(k), p_{x+k}^{TP_i^m}(k)) \quad (7.1)$$

$$E_r^{TP_i^w}(k+1) = \mathcal{B} (E_r^{TP_i^w}(k), p_{x+k}^{TP_i^w}(k)) \quad (7.2)$$

$$E_{\bar{r}}^{TP_i^m}(k+1) = \mathcal{B} (E_{\bar{r}}^{TP_i^m}(k), p_{x+k}^{TP_i^m}(k)) + \mathcal{B} (E_r^{TP_i^m}(k) - E_r^{TP_i^w}(k+1), \prod_{j=0}^k p_{x+j}^{TP_i^m}(j)) \quad (7.3)$$

$$E_{\bar{r}}^{TP_i^w}(k+1) = \mathcal{B} (E_{\bar{r}}^{TP_i^w}(k), p_{x+k}^{TP_i^w}(k)) + \mathcal{B} (E_r^{TP_i^m}(k) - E_r^{TP_i^m}(k+1), \prod_{j=0}^k p_{x+j}^{TP_i^w}(j)) \quad (7.4)$$

Où m, w est sexe de l'assuré considéré ou de son conjoint, TP_i^m représente la $i^{\text{ème}}$ table prospective homme simulée, $E_{\bar{r}}^{TP_i^m}(k)$ représente le nombre d'assurés hommes en portefeuille l'année k ne possédant pas de contrat de rente avec réversion et où $q_{x+k}^{TP_i^w}(k)$ représente la probabilité de décéder au cours de l'année k à l'âge $x+k$, calculée avec la table TP_i^w . Rappelons qu'à chaque fois ces effectifs appartiennent à une génération d'assurés donnée.

Ainsi les formules (7.1) et (7.2) décrivent la manière de simuler l'évolution des effectifs d'assurés possédant une rente avec réversion. Dès lors que l'effectif $E_r^{TP_i^w}(k+1)$ est tiré, on connaît le nombre de décès durant l'année k . A partir de là, nous tirons une nouvelle loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pour savoir si les conjoints des rentiers décédés sont encore en vie : n représente le nombre de rentiers avec réversion décédés durant l'année k et p la probabilité que le conjoint de l'assuré ait survécu k années. Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que les conjoints ont le même age et que leurs probabilités de décès sont indépendantes. Dès lors que le conjoint a survécu, il devient assuré à son tour et doit donc être compris dans l'effectif des rentiers possédant un contrat sur une seule tête. C'est ce qu'exprime le deuxième terme des formules (7.3) et (7.4).

Nous utilisons la même *Graine* pour simuler les lois binomiales dans toutes les cotations, sinon il serait impossible de comparer le prix des produits entre eux. C'est donc à chaque fois la même séquence de nombres aléatoires qui est générée. Mais attention ce n'est pas la même séquence pour chaque table prospective. Il s'agit simplement d'initialiser le premier tirage de la loi binomiale de la première table prospective.

En fait il faudrait générer chaque tirage des lois binomiales plusieurs fois pour chaque table prospective. Notre méthodologie de projection de l'extinction du portefeuille pourrait sous-estimer l'effet "variation autour de la table". C'est un effet qui pourrait être d'autant plus accentué que la génération est ancienne car la loi binomiale est bien plus variable aux grands âges.

C'est essentiellement en raison de temps de calcul prohibitifs que nous avons opté pour un unique tirage de l'extinction du portefeuille par table prospective. En conclusion de ce travail, nous proposons une solution pour améliorer cet aspect.

Une fois le montant à charge de l'assureur direct obtenu nous appliquons la franchise. Deux franchises différentes sont retenues dans les applications numériques, l'une fixe et l'autre indéxée sur la mortalité observée. Nous proposons de définir la deuxième grâce à l'expression,

$$F_k = \mathbf{Max}\left(F_0 \frac{E_k}{E_{k-1}}, F_{min}\right) \quad (7.5)$$

Dans les exemples numériques, nous précisons les valeurs de F_0 et F_{min} . E_k est recalculé annuellement et pour chaque simulation avec la table TP_i .

Nous sélectionnons différentes périodes de couverture qui peuvent être éventuellement prises infinies - soit jusqu'à l'extinction totale du portefeuille.

Précisons encore que le taux de prime est exprimé en pourcentage des provisions de la cédante en date de conclusion de traité, provisions calculées à l'aide de la table réglementaire belge MRFR et au taux technique réglementaire de 3.25%.

franchise fixe

Nous tarifons plusieurs couvertures puis procédons à une analyse de sensibilité. L'analyse de sensibilité propose de tester les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital et TCE.

La table (7.1) donne la prime technico-financière, le taux de chargement et le taux de prime de différents produits. Ce que nous appelons taux de chargement est le rapport entre la prime technico-financière et la prime pure calculée comme moyenne des 1000 simulations de la valeur actualisée de la charge du réassureur. Ces valeurs nous permettent d'observer l'influence du niveau de franchise et de la période de couverture sur les prix.

D'après la table réglementaire il devrait rester en moyenne 9511 assurés dans le porte-

Franchise	Période	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
200 XS 9500	[2008, 2010[277.8	6.12%	0.19%
∞ XS 9500	[2008, 2010[327.0	15.6%	0.22%
200 XS 9500	[2008, 2013[455.1	29.5%	0.31%
∞ XS 9500	[2008, 2013[502.7	35.0%	0.34%
200 XS 9500	[2008, ∞ [456.6	29.9%	0.31%
∞ XS 9500	[2008, ∞ [504.3	35.4%	0.34%
500 XS 9000	[2008, 2015[2165.0	7.35%	1.46%
∞ XS 9000	[2008, 2015[2666.9	11.61%	1.81%
500 XS 9000	[2008, ∞ [2517.0	17.1%	1.70%
∞ XS 9000	[2008, ∞ [3017.0	19.6%	2.04%

TAB. 7.1 – Prix de différentes couvertures Stop loss

feuille de la cédante au 31 décembre 2008. Par contre d'après nos projections, la probabilité qu'ils soient plus de 9700 est de 79.8%. Pour le produit 200 XS 9500 le réassureur intervient auprès de la cédante en 2008 dans tous cas simulés. Dès 2010 par contre la tranche assurée de ce produit n'est plus entièrement traversée que dans 2 cas simulés sur 1000.

D'après la table réglementaire il ne devrait plus rester que 8401 assurés en moyenne au 31 décembre 2015. Selon nos projections dans 98% des cas ils sont plus de 9000. Pour le produit 500 XS 9000 la probabilité que la tranche soit entièrement traversée en 2015 est pratiquement nulle.

Conformément à ce que l'on pouvait attendre, plus la période de couverture est longue ou plus la tranche couverte est large, plus le chargement est élevé.

Nous souhaitons donner pour un produit en particulier un certain nombre de résultats supplémentaires tels que la densité de la provision du réassureur en date 0 de conclusion du traité ainsi que les tableaux de cash flows de la période de couverture.

Le produit choisi est un 200 XS 9500 dont la garantie débute au premier janvier 2008 pour une durée de 5 ans. La cédante s'attend à payer une série de flux sur cette période de 9511, 9397, 9269, 9129 et 8973. D'après la table réglementaire, la tranche de réassurance ne devrait être touchée qu'une seule fois. Or dans 79.8% des cas elle est entièrement traversée en 2008. En 2011 le réassureur n'intervient auprès de la cédante que dans 28.2% des cas simulés. Nous cotons ce produit. La prime pure vaut 372.4. L'intervalle de confiance de niveau 90% de la prime pure est [238.5, 541.5]. La prime technico-financière vaut 455.1. Le

chargement est de 29.5%, le taux de prime est égal à 0.30%.

La figure (7.4) permet de visualiser la densité de la prime pure du réassureur. Le taux d'actualisation est le taux de rendement des actifs du réassureur pris égal à 5%, ce n'est pas le coût du capital.

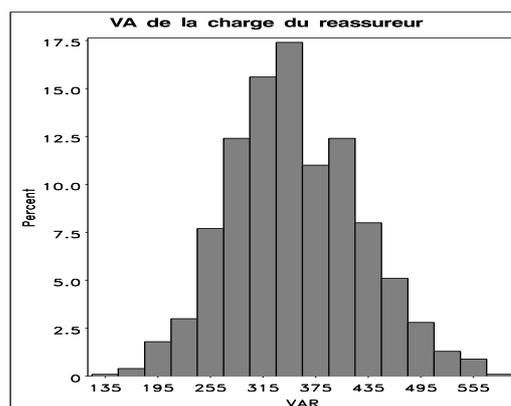


FIG. 7.4 – Densité de la prime pure du réassureur en 0

Nous proposons ensuite la série annuelle des différents cash flows. La charge est exprimée au 31 décembre de l'année, les provisions et le capital alloué par contre sont donnés au premier janvier de l'année. Il s'agit à chaque fois des quantités obtenues comme moyenne des 1000 simulations réalisées.

Année	Charge Réassureur	Provision cédante	Provision Réassureur	Capital alloué
2008	197	121822	449	206
2009	161	116409	274	214
2010	97	110932	126	186
2011	33	105398	36	120
2012	4	99818	4	44

TAB. 7.2 – Cashflows annuels obtenus pour le produit 200 XS 9500 et la période de garantie [2008, 2013[

Nous testons ensuite les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital et TCE. Rappelons que nous utilisons la même *Graine* pour initialiser le tirage des lois binomiales..

Effet génération. Le produit que nous sélectionnons est un 700 XS 9000 sur la période de couverture [2005, 2010]. Nous avons choisi ce produit en particulier afin que la probabilité de traverser la tranche pour chaque génération ne soit pas nulle. La table (7.3) donne pour 4 générations différentes la prime technico-financière, le taux de prime et le taux de chargement.

Génération	Prime technico-financière	Chargement	Taux de prime
1935	2642	1.94%	1.95%
1930	2163	5.13%	1.90%
1925	1158	8.70%	1.25%
1920	355	11.98%	0.50%

TAB. 7.3 – Effet génération

D'après la table réglementaire il est possible que la tranche cédée soit traversée la première année de garantie pour les générations 1935, 1930 et 1925. La probabilité que la tranche soit entièrement traversée en 2008 est de 100% pour la génération 1935, de 98.4% pour la génération 1930 et nulle pour les autres.

Plus le portefeuille est âgé plus le capital à allouer est important. Nous pouvons nous attendre à ce résultat car les valeurs données par la table de mortalité prospective sont plus volatiles aux grands âges.

Effet composition. Le portefeuille de base que nous avons sélectionné pour les cotations est composé de 70% d'hommes et de 30% de femmes. L'effectif total est de 10000 assurés. De plus, 60% des hommes et 10% des femmes ont souscrit une rente de réversion.

Nous analysons successivement les effets mutualisation du risque en modifiant l'effectif initial total assuré E_0 , puis l'effet composition en féminisant ou en masculinisant le portefeuille.

Le produit que nous cotons est un $0.2E_0$ XS $0.95E_0$ sur la période [2008, 2013] où $E_0 \in [1000, 100000]$. La génération de référence est la génération 1938. Les résultats obtenus pour l'analyse de sensibilité du facteur effectif sont donnés par le tableau (7.4).

Rappelons que le portefeuille est homogène car il est composé de rentiers ayant tous le même âge et une rente de montant 1. Les résultats sont conformes à nos attentes. Plus la cédante possède d'assurés en portefeuille plus le risque est mutualisé et donc moins le capital à allouer est important proportionnellement, toujours dans l'optique où le modèle est exact.

Effectif	Prime technico-financière	Chargement	Taux de prime
1000	52	47.17%	0.35%
5000	234	33.56%	0.32%
10000	455	29.46%	0.30%
50000	2236	27.20%	0.30%
100000	4471	27.11%	0.31%

TAB. 7.4 – Effet mutualisation du risque sur la prime technico-financière

Remarquons qu'au-delà de 10000 assurés l'effet mutualisation est moindre. Il n'est donc pas nécessaire de posséder un portefeuille trop important pour s'assurer une bonne mutualisation des risques.

A titre indicatif nous donnons les intervalles de confiance empiriques à 90% des primes pures et les coefficients de variation pour quelques effectifs à la table (7.5).

Effectif	IDC empirique	Coefficient de variation
1000	[14, 57]	37.25
10000	[238, 480]	21.19
100000	[2422, 4735]	19.58

TAB. 7.5 – Effet mutualisation du risque sur les intervalles de confiance empiriques de la prime pure

Nous étudions ensuite le même traité 200 XS 9500 en faisant varier la proportion homme/femme dans le portefeuille. Le premier tableau donne la valeur de la prime technico-financière, le chargement et le taux de prime en fonction du pourcentage de femmes dans le portefeuille, la proportion de contrat avec réversion restant 60%/10%. Le deuxième tableau propose d'analyser l'influence de la proportion de contrats avec réversion dans le portefeuille.

Dans les deux cas, nous constatons que la féminisation du portefeuille entraîne une réduction de prime pour la cédante et une diminution du risque car le chargement baisse. Nous vérifions que l'incertitude quant à la construction des tables est plus grande pour les hommes que pour les femmes. Pour de plus amples informations à ce sujet le lecteur pourra se reporter à la première partie du travail.

Nous remarquons également que le montant de la prime technico-financière décroît régulièrement avec le pourcentage de réversion homme. Cela s'explique simplement

Femmes	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
30%	455	29.46%	0.30%
40%	434	28.08%	0.29%
50%	410	26.00%	0.28%
60%	390	24.11%	0.27%

TAB. 7.6 – Effet proportion de femmes dans le portefeuille

Rentes avec réversion	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
60%/10%	455	29.46%	0.30%
50%/20%	374	39.91%	0.26%
40%/30%	301	55.88%	0.21%
30%/40%	230	72.43%	0.16%

TAB. 7.7 – Effet proportion de contrats avec rente de réversion

par le fait que le nombre total d'assurés sur la période de couverture est plus faible car, en proportion, le nombre total de contrat avec réversion a diminué.

Coût du capital. Nous voulons tester le poids du paramètre coût du capital dans le prix demandé à la cédante. En fonction de la compagnie de réassurance dont ils détiennent des parts, les actionnaires ne souhaitent pas le même taux de rémunération pour leur participation. Le taux de rémunération attendu dépend bien évidemment du risque qu'ils prennent en participant au capital de la société. Nous cotons le produit 200 XS 9500 sur la période [2008, 2013[avec le portefeuille de référence en utilisant 5 taux différents pour le coût du capital.

Coût du capital	Prime technico-financière	Chargement	Taux de prime
14%	500	42.25%	0.34%
12%	479	36.41%	0.30%
10%	455	29.46%	0.30%
8%	426	21.18%	0.29%
6%	391	11.26%	0.26%

TAB. 7.8 – Effet coût du capital

Une augmentation de 8% de la valeur du coût du capital entraîne une augmentation

de plus de 30% de la valeur de la prime.

Nous constatons que pour ce produit de réassurance, la valeur du coût du capital peut augmenter substantiellement le chargement de la prime pure.

TCE. Afin de procéder à l'allocation du capital, nous choisissons une mesure de risque. Le choix se porte sur le TCE_α . Pour plus de détails le lecteur peut se reporter à la section 6.4. Nous souhaitons regarder l'influence du quantile α sur le chargement de la prime pure. Le quantile de référence est le quantile à 95%.

Quantile	Prime technicofinancière	Chargement	Taux de prime
90%	438	24.79%	0.29%
95%	455	29.46%	0.30%
99%	485	38.18%	0.33%
99.5%	492	40.08%	0.34%

TAB. 7.9 – Effet quantile du TCE

La table (7.9) nous donne une idée sur la dispersion des valeurs simulées. Lorsque l'on passe du quantile à 90% au quantile à 99.5% le chargement de la prime pure augmente de 15%. Le choix du niveau α n'est donc pas sans conséquence sur le prix. Pour l'instant le niveau de la mesure de risque est choisie librement pas le réassureur.

franchise variable

Nous définissons la valeur de la franchise variable avec la formule (7.5) en prenant $F_{min} = 9000$. Le programme recalcule la franchise chaque année et pour chaque table prospective. Grâce aux effectifs simulés avec les lois binomiales, nous obtenons $\forall k, i F_k^{TP_i}$. Nous supposons donc implicitement que la mortalité qui sera observée est bien conforme à celle projetée. Nous rappelons la formule de calcul de la franchise,

$$F_k = \mathbf{Max}\left(F_0 \frac{E_k}{E_{k-1}}, F_{min}\right)$$

Par contre, les plafonds que nous introduisons sont indépendants de la mortalité observée. Il nous a semblé impératif de les définir de cette manière car cela simplifie la lisibilité du traité. En fait, nous pensons surtout à un autre réassureur qui souhaiterait souscrire des tranches supérieures.

La table (7.10) fournit quelques résultats numériques pour des produits Aggregate Excess of Loss sur différentes périodes de couverture.

F_0	Plafond	Période	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
9500	9700	[2008, 2010[360	4.66%	0.14%
9500	∞	[2008, 2010[409	12.13%	0.28%
9500	9700	[2008, 2010[665	23.75%	0.43%
9500	∞	[2008, ∞ [713	27.63%	0.48%
9500	9700	[2008, ∞ [702	29.55%	0.47%
9500	∞	[2008, ∞ [749	33.13%	0.51%

TAB. 7.10 – Prix de différentes couvertures Aggregate Excess of Loss

Les chargements sur prime pure sont très semblables à ceux obtenus pour la franchise fixe. La "dangerosité" des risques est comparable. Par contre le prix de la garantie est beaucoup plus élevé.

Nous donnons pour un produit en particulier un complément d'information, la densité de la prime pure du réassureur en date 0 et les tableaux de cash flows de la période de couverture. Le produit a pour caractéristique $F_0 = 9500$, un plafond de 9700 et une période de garantie [2008, 2013].

La prime pure vaut 538.0. L'intervalle de confiance de niveau 90% de la prime pure est [376.1, 700.7]. La prime technico-financière est de 665, le chargement de 23.75%. Le taux de prime est égal à 0.43%.

La figure (7.5) donne la densité de la prime pure du réassureur. Le taux d'actualisation est le taux de rendement des actifs pris égal à 5%.

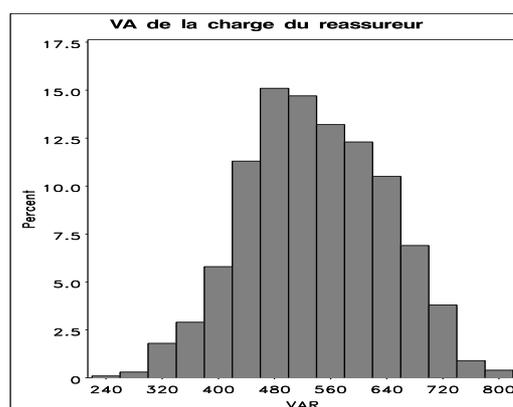


FIG. 7.5 – Densité de la prime pure du réassureur en 0

Le tableau suivant donne la série annuelle des cash flows. La charge du réassureur est donnée au 31 décembre de l'année. Les provisions et le capital alloué sont donnés au premier janvier de l'année.

Année	Charge Réassureur	Provision cédante	Provision Réassureur	Capital alloué
2008	251	121822	686	249
2009	219	116409	469	259
2010	162	110932	273	233
2011	96	105039	124	170
2012	36	99818	34	89

TAB. 7.11 – Cashflows annuels pour la période de garantie [2008, 2013]

Nous ne procédons pas à l'analyse complète de sensibilité. Cette étude n'apporte rien de significativement nouveau par rapport à l'étude de la franchise fixe. Les ordres de grandeurs sont les mêmes.

Trigger financier

Nous souhaitons à présent mesurer l'impact de l'introduction du trigger financier sur la prime technico-financière et le chargement de la prime pure. Rappelons qu'à chaque extinction du portefeuille - simulée avec une table prospective donnée - nous associons 1000 scénarios de rendement des actifs de la cédante. Le seuil de déclenchement sélectionné est 4.25%. Nous ne présentons des résultats que pour la garantie où la franchise est fixe car les résultats obtenus pour la franchise variable sont très semblables.

Franchise	Période	PTF	PTF	Chargement	Chargement
200 XS 9500	[2008, 2013[455.1	180.3	24.5%	371.2%
∞ XS 9500	[2008, 2013[502.7	200.5	34.4%	391.5%

TAB. 7.12 – Prix de différentes couvertures Stop loss (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite trigger)

Nous constatons que l'introduction du trigger financier divise le montant de la prime technico-financière par 2.5 et multiplie le pourcentage de chargement par plus de 12. Le double trigger est donc bien moins cher pour l'assureur direct et bien plus dangereux pour

le réassureur. A titre illustratif, nous présentons à la table (7.13) une partie des cashflows sur la période de couverture pour le produit 200 XS 9500.

Année	Charge Réassureur	Charge Réassureur	Capital alloué	Capital alloué
2008	197	23	206	312
2009	161	18	214	254
2010	97	8	186	153
2011	33	3	120	96
2012	4	1	44	46

TAB. 7.13 – Cashflows annuels pour le produit 200 XS 9500 (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

La charge du réassureur est beaucoup plus faible en moyenne lorsque la garantie double trigger est mise en place. Par contre, le capital à allouer reste élevé. Quant à la prime pure, elle passe de 351.5 à 38.3 ce qui explique les niveaux de chargement élevés. Rappelons que le capital alloué se calcule comme la différence entre le TCE_α et la prime pure.

Nous analysons pour conclure la sensibilité des prix et du chargement au seuil de déclenchement du trigger financier Φ . Il apparaît clairement à la table (7.14) que le choix de ce seuil est très important. Il influence énormément les prix des couvertures de réassurance.

Seuil	Prime technico-financière	Chargement
4.25%	180.3	371.2%
4.75%	269.5	108.1%
5.25%	384.1	51.6%
5.75%	438.6	33.6%

TAB. 7.14 – Effet seuil de déclenchement du trigger financier

7.2 Excess of Loss en durée

Le contrat de base

Un Excess of Loss est une couverture où la cédante se décharge auprès du réassureur de la part des sinistres dont le montant dépasse une priorité, montant calculé isolément pour chaque police du portefeuille. La prestation du réassureur par police peut être en principe limitée par un plafond de garantie.

L'Excess of Loss en durée est un cas un peu particulier de ce genre de produit car la franchise qui se définit donc tête par tête, n'est pas exprimée en unité monétaire mais en unité de temps. De notre point de vue, il s'adapte mieux à des portefeuilles plutôt vieux - entendons majoritairement composé de têtes de plus de 85 ans. Ainsi dès lors que l'assuré dépasse un certain âge, le réassureur se substitue à l'assureur direct pour le paiement de la rente. Cette substitution est virtuelle, car l'assureur garde entièrement à sa charge la gestion du portefeuille de rentes.

Les avantages pour la cédante sont nombreux. Le système est simple à gérer même si la mise en place du traité peut être compliquée. A chaque fois qu'un assuré franchit le seuil, le paiement de sa rente est entièrement à charge du réassureur. Le volume de prime est en principe limité. Ce traité réduit les variations de décaissement dues à des allongements de durée de vie individuels importants.

D'une manière générale la mise au point d'un traité Excess of Loss et en particulier sa tarification peuvent être délicats pour le réassureur. Dans ce cas-ci par contre, s'agissant de durée, la cotation n'est pas trop difficile.

Dans son mémoire, TERRIER(2000) introduit la notion de partage de risque dans le temps entre l'assureur direct et le réassureur. En effet lorsque la priorité est franchie le réassureur a deux options. La première consiste à se substituer à l'assureur et à payer les arrérages jusqu'au décès de l'assuré. Dans ce cas, le réassureur assume seul le risque de dérive encore ultérieure de la mortalité. Mais il peut également choisir de verser à l'assureur direct la provision mathématique de la rente évaluée à l'aide des bases techniques connues à cette date. Ils se partagent alors dans le temps le risque de dérive de la mortalité. La deuxième option bien qu'intéressante pour le réassureur reste en pratique très difficile à mettre en oeuvre pour des raisons juridiques, les bases techniques futures étant difficiles à définir contractuellement. Dans les exemples qui suivent, nous nous intéresserons uniquement au cas où le réassureur se substitue à l'assureur direct pour le paiement des rentes.

La franchise

La franchise est une durée de survie. Elle peut être fixée pour l'ensemble du portefeuille ou dépendre du sexe de l'assuré. Si le pays qui nous intéresse est doté d'une table de mortalité réglementaire comme c'est le cas en France et en Belgique, nous pouvons proposer à la cédante de définir les franchises à partir des espérances de vie réglementaires. L'espérance de vie réglementaire belge est de 18 ans pour les hommes et 22 pour les femmes.

Nous pouvons également proposer de définir une franchise à l'aide d'un quantile. Le réassureur intervient dès lors qu'il ne reste plus que $\xi\%$ des assurés par rapport à la population en portefeuille initialement. La date d'intervention du réassureur est alors aléatoire.

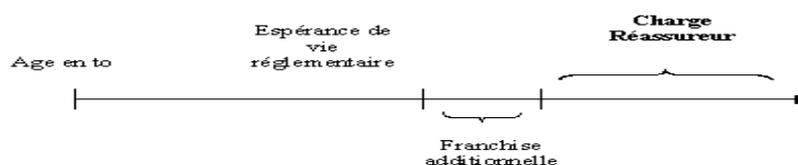


FIG. 7.6 – Franchise exprimée à l'aide de l'espérance de vie réglementaire

Si la franchise est définie par sexe, les contrats avec rente de réversion posent des difficultés supplémentaires au niveau de la cotation. Consécutivement au décès de l'assuré, le conjoint survivant devient titulaire de la rente, ce qui implique un changement de niveau de franchise en cours de contrat. La figure (7.7) illustre ce propos.

Variante

Afin de tenir compte d'une éventuelle hétérogénéité de la population assurée et de ses différents niveaux de rente, nous pouvons suggérer à la cédante l'introduction d'une double franchise qui soit conjointement fonction du niveau de rente et de la durée de survie. Par exemple pour un rentier dont l'arrérage est élevé le réassureur intervient à l'âge l . Pour un assuré dont l'arrérage est faible, il intervient plus tard à l'âge $l + m$. La figure (7.8) propose une illustration.

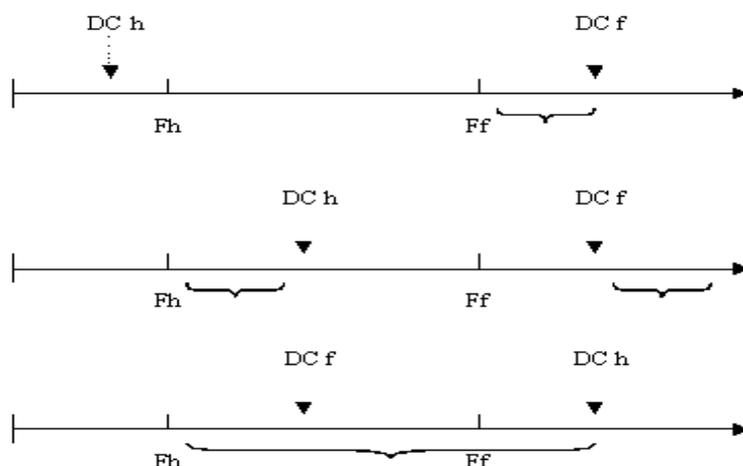


FIG. 7.7 – Franchise et clause de réversion

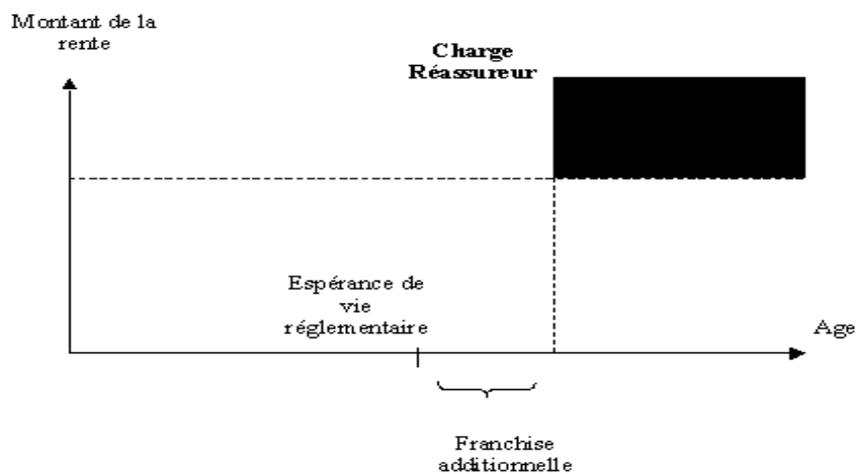


FIG. 7.8 – Franchise double exprimée à l’aide de l’espérance de vie réglementaire et d’un montant d’arrérage

Illustration numérique

Nous procédons à la cotation des traités en utilisant la méthode décrite aux sections 6.3 et 7.1.

Nous ne revenons pas, dans ce paragraphe, sur l'obtention des montants à charge de l'assureur direct. Dès que ceux-ci sont déterminés, nous calculons la charge du réassureur en appliquant la franchise sur la période garantie souscrite. Nous tenons à rappeler que les contrats sont tarifés par génération d'assurés en portefeuille. Si on s'intéresse à la génération de 1938 et qu'on s'est fixé une franchise fixe de 90 ans, le réassureur intervient pour cette génération à partir de 2028. Cette méthode de cotation par génération rend donc très facile l'obtention du montant à charge du réassureur, il vaut 0 jusqu'en 2027 puis vaut le montant à charge de la cédante obtenu préalablement.

Précisons que si la cédante a souscrit une franchise en durée qui dépende du sexe de l'assuré, il faut l'appliquer par tête et non pas par police d'assurance. Lors du décès d'un rentier possédant un contrat avec réversion, sa femme se verra appliquer la franchise femme bien que le contrat au départ ait été soumis à la franchise homme.

Par ailleurs, le fait que la franchise s'exprime non pas en unité monétaire mais en unité de temps implique que l'introduction de plafonds de garantie équivaut en fait à la mise en place de périodes de couverture.

Nous tarifons plusieurs couvertures puis procédons à une analyse de sensibilité. L'analyse de sensibilité propose de tester les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital et TCE.

La table (7.15) donne la prime technico-financière, le taux de chargement et le taux de prime de différents produits. Ce que nous appelons taux de chargement est le rapport entre la prime technico-financière et la prime pure calculée comme moyenne des 1000 simulations de la valeur actualisée de la charge du réassureur. Ces valeurs nous permettent d'observer l'influence du niveau de franchise et de la période de couverture sur les prix.

Pour certains produits nous sélectionnons des franchises variables selon le sexe de l'assuré. Nous notons e^m l'espérance de vie réglementaire des hommes et e^w l'espérance de vie réglementaire des femmes. F^m , P^m , F^w et P^w représentent la franchise et le plafond appliqués aux hommes respectivement aux femmes.

Nous constatons que la période de couverture n'a qu'une influence finalement faible sur le taux de chargement de la prime pure. Ainsi pour le produit en Excess de 90 ans lorsque l'on passe d'une couverture de 5 ans à une couverture illimitée, le chargement n'augmente que de 2.3%. Par contre, l'incidence sur le niveau de la prime technico-financière est forte, son montant double.

Nous souhaitons donner pour un produit en particulier un certain nombre de résultats supplémentaires tels que la densité de la provision du réassureur en date 0 de conclusion

F^m	F^w	P^m	P^w	PTF	Chargement	Taux de prime
$e^m + 5$	$e^w + 5$	$e^m + 10$	$e^w + 10$	9894	13.63%	6.7%
$e^m + 5$	$e^w + 5$	∞	∞	19697	16.87%	13.3%
$e^m + 10$	$e^w + 10$	$e^m + 15$	$e^w + 15$	6184	17.41%	4.6%
$e^m + 5$	$e^w + 5$	∞	∞	11205	18.46%	8.3%
90	90	95	95	9209	11.22%	6.3%
90	90	∞	∞	18363	13.57%	12.4%
95	100	95	95	5647	12.64%	4.2%
95	100	∞	∞	10752	15.03%	7.9%

TAB. 7.15 – Prix de différentes couvertures Excess of Loss en durée

du traité ainsi que les tableaux de cash flows.

Le produit que nous choisissons est un 5 XS 90. La cédante s'attend à régler une série de flux sur cette période de 4118, 3654, 3193, 2745 et 2317 - les règlements des rentes de réversion sont inclus. Or le réassureur s'attend selon nos projections à des règlements atteignant parfois le double de cette valeur.

La prime pure vaut 8280. L'intervalle de confiance de niveau 90% de la prime pure est [7767, 8793]. Remarquons que cette intervalle est beaucoup moins large que dans le cas de l'Aggregate Excess of Loss. La prime technico-financière vaut 9209 et le chargement 11.22%. Le taux de prime est égal à 6.23%.

La figure (7.9) permet de visualiser la densité de la prime pure du réassureur. Il s'agit en fait de la prime pure. Le taux d'actualisation est le taux de rendement des actifs pris égal à 5%.

Nous proposons ensuite la série annuelle des différents cash flows. La charge est exprimée au 31 décembre de l'année, les provisions et le capital alloué par contre sont donnés au premier janvier de l'année. Il s'agit à chaque fois des quantités obtenues comme moyenne des 1000 simulations.

Ce produit permet en fait à la cédante de conserver à partir de 2027 sa provision de 22179. Elle pourra alors lui servir après 2031 à régler les arrérages dus. On peut noter abusivement que ce produit permet à la cédante de transformer un a_{90} en a_{95} .

Nous testons ensuite les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital et TCE. Rappelons que nous utilisons la même *Graine* pour initialiser le tirage des lois binomiales.

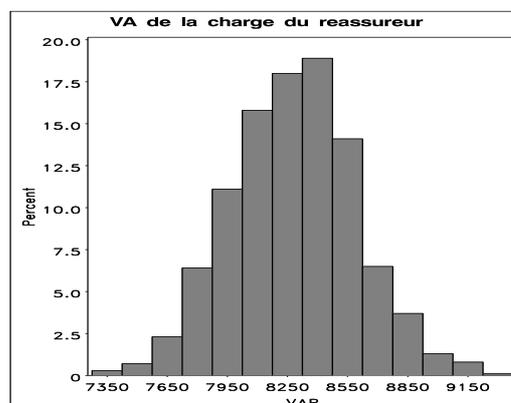


FIG. 7.9 – Densité de la provision du réassureur en 0 pour le produit 5 XS 90

Année	Charge Réassureur	Provision cédante	Provision Réassureur	Capital alloué
2027	6861	22179	26740	2136
2028	6527	18552	21178	1763
2029	6167	15271	15710	1353
2030	5758	12351	10328	911
2031	5340	9797	5086	465

TAB. 7.16 – Cashflows annuels obtenus pour le produit 5 XS 90

Effet génération. Le produit que nous sélectionnons est celui noté abusivement 5 XS 90. Quelle que soit la génération considérée postérieure à 1908, la tranche de réassurance est traversée au moins une fois. La table (7.17) donne pour 5 générations différentes la prime technico-financière, le taux de prime et le taux de chargement.

On constate que plus la génération est ancienne moins le chargement est élevé ce qui est contre intuitif. L'incertitude est en principe grande sur les tranches d'âge élevées. Pour y voir plus clair, regardons la table (7.18) qui présente la valeur des réserves de la cédante et du réassureur ainsi que le capital alloué l'année du déclenchement de la garantie.

La réserve de la cédante augmente lorsque la génération diminue, ce qui est normal, car au départ nous avons à chaque fois 10000 individus de la génération considérée. Le chargement de la prime pure décroît avec la génération. C'est contre-intuitif car le modèle est moins fiable aux grands âges. Nous pensons que cela peut s'expliquer par le fait que le risque de modèle est moins lourd aux grands âges car le réassureur

Génération	Ptechnico financière	Chargement	Taux de prime
1935	10541	9.68%	7.8%
1930	13360	6.93%	11.7%
1925	17393	4.22%	18.7%
1920	23694	1.75%	32.81%

TAB. 7.17 – Effet génération

Année	Génération	Provision cédante	Provision réassureur	Capital alloué
2024	1935	22880	26775	1967
2019	1930	24720	27273	1642
2014	1925	28053	28542	1286
2009	1920	34371	31207	811

TAB. 7.18 – Tableau des cash flows - effet génération

intervient plus tôt auprès de la cédante.

On peut remarquer également que les provisions du réassureur sont dans 3 cas sur 4 supérieures à celle de la cédante en date de déclenchement de la garantie, alors qu'il ne couvre les paiements que sur 5 ans.

Effet composition. Le portefeuille de base que nous avons sélectionné pour les cotations est composé de 70% d'hommes et de 30% de femmes. L'effectif total est de 10000 assurés. De plus, 60% des hommes et 10% des femmes ont souscrit une rente de réversion.

Nous analysons successivement les effets mutualisation du risque en modifiant l'effectif initial total assuré E_0 , puis l'effet composition en féminisant ou en masculinisant le portefeuille. La génération de référence est la génération 1938. Les résultats obtenus pour l'analyse de sensibilité du facteur effectif sont donnés par le tableau (7.19).

les résultats sont conformes à nos attentes. Plus la cédante possède d'assurés en portefeuille, plus le risque est mutualisé et donc moins le capital à allouer est important proportionnellement.

Notons cependant que l'effet mutualisation est beaucoup moins marqué que dans le cas du traité Aggregate Excess of Loss. A partir de 5000 assurés déjà, la mutualisation est correctement assurée. Le réassureur peut donc proposer ce produit sur des portefeuilles de très petite taille.

A titre indicatif nous donnons les intervalles de confiance empiriques à 90% des

Effectif	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
1000	934	12.95%	6.3%
5000	4616	11.51%	6.3%
10000	9209	11.22%	6.2%
50000	45950	11.10%	6.2%
100000	92020	11.01%	6.2%

TAB. 7.19 – Effet mutualisation du risque

primes pures et les coefficients de variation pour quelques effectifs à la table (7.20).

Effectif	IDC empirique	Coefficient de variation
1000	[764, 885]	4.39
10000	[7767, 8796]	3.76
100000	[77836, 87866]	3.73

TAB. 7.20 – Effet mutualisation du risque sur les intervalles de confiance empiriques de la prime pure

Nous étudions ensuite le même traité en faisant varier la proportion homme/femme dans le portefeuille. Le premier tableau donne la valeur de la prime technico-financière, le chargement et le taux de prime en fonction du pourcentage de femmes dans le portefeuille, la proportion de contrats sur deux têtes restant 60%/10%. Le deuxième tableau permet d'analyser l'influence de la proportion de contrats avec réversion dans le portefeuille.

Femmes	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
30%	9209	11.22%	6.23%
40%	9064	10.20%	6.14%
50%	8929	9.37%	6.06%
60%	8817	8.72%	6.00%

TAB. 7.21 – Effet proportion de femmes dans le portefeuille

Dans les deux cas, nous constatons que la féminisation du portefeuille entraîne une réduction de prime pour la cédante et une diminution du risque car le chargement

baisse. Nous avons fait la même constatation sur les produits Aggregate Excess of Loss.

Rentes avec réversion	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
60%/10%	9209	11.22%	6.23%
50%/20%	9062	12.44%	6.22%
40%/30%	8952	14.25%	6.23%
30%/40%	8783	15.38%	6.21%

TAB. 7.22 – Effet proportion de contrats avec rente de réversion

Nous remarquons également que le montant de la prime technico-financière décroît régulièrement avec le pourcentage de réversion homme. Cela s'explique simplement par le fait que le nombre total d'assurés sur la période de couverture est plus faible car en proportion le nombre de contrats avec réversion a diminué.

Coût du capital. Nous voulons tester le poids du paramètre coût du capital dans le prix demandé à la cédante. Nous cotons le produit 5 XS 90 avec le portefeuille de référence en utilisant 5 taux différents pour le coût du capital.

Coût du capital	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
14%	9360	13.05%	6.33%
12%	9305	12.38%	6.30%
10%	9209	11.22%	6.23%
8%	9042	9.20%	6.12%
6%	8752	5.70%	5.92%

TAB. 7.23 – Effet coût du capital

Une augmentation du coût du capital de 8% entraîne une augmentation équivalente de la valeur de la prime.

TCE. Nous souhaitons conclure l'analyse de sensibilité en regardant l'influence du quantile α sur le chargement de la prime pure. Le quantile de référence est le quantile 95%. La table (7.24) donne les principaux résultats.

La table 7.24 nous donne une idée sur la dispersion des valeurs simulées. Lorsque l'on passe du quantile à 90% au quantile à 99.5% le chargement de la prime pure augmente de 6.5%. Le choix du niveau α a bien entendu une influence sur le prix demandé à la cédante mais elle n'est pas décisive.

Quantile	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
90%	9056	9.37%	6.13%
95%	9209	11.22%	6.23%
99%	9528	15.01%	6.45%
99.5%	9590	15.82%	6.49%

TAB. 7.24 – Effet quantile du TCE

Nous souhaitons à présent mesurer l'impact de l'introduction du trigger financier sur la prime technico-financière et le chargement de la prime pure.

Rappelons qu'à chaque extinction du portefeuille - simulée avec une table prospective donnée - nous associons 1000 scénarios de rendement des actifs de la cédante. Le seuil de déclenchement sélectionné est 4.25%.

Garantie	PTF	PTF	Chargement	Chargement
5 XS 90	9209	4649	11%	1075%
∞ XS 90	18363	5120	14%	919%

TAB. 7.25 – Prix de différentes couvertures Excess of loss en durée (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

Nous constatons que l'introduction du trigger financier permet de diviser le montant de la prime technico-financière par 2 pour le premier produit et par plus de 3 pour le second. Par contre les chargements deviennent considérables. Pour le produit 5 XS 90 la prime pure passe de 8280 à 395 quand on met le trigger financier en place. En fait elle devient beaucoup plus faible suite à l'introduction de la clause financière car pour un grand nombre d'extinctions du portefeuille simulées la charge du réassureur est nulle. Il suffit pour cela que le rendement des actifs soit supérieur à 4.25% sur la période de couverture. Par contre, dès que la charge du réassureur est non nulle les valeurs obtenues par table prospective sont très dispersées par rapport à la prime pure moyenne ce qui explique des chargements si élevés. A titre illustratif, nous présentons à la table (7.26) une partie des cashflows sur la période de couverture pour le produit 5 XS 90.

Nous constatons que le capital à allouer est énorme par rapport à la charge du réassureur. La prime pure est vraiment très basse.

Nous analysons pour conclure la sensibilité des prix et du chargement au seuil de

Année	Charge Réassureur	Charge Réassureur	Capital alloué	Capital alloué
2027	6861	356	2136	9923
2028	6527	350	1763	9814
2029	6167	359	1353	8244
2030	5758	204	911	7616
2031	5340	177	465	5316

TAB. 7.26 – Cashflows annuels pour le produit 5 XS 90 (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

déclenchement du trigger financier Φ .

Seuil	Prime technico-financière	Chargement
4.25%	4649	1075.8%
4.75%	7904	242.1%
5.25%	9757	65.2%
5.75%	9303	18.2%

TAB. 7.27 – Effet seuil de déclenchement du trigger financier

Nous voyons bien apparaître à la figure (7.27) que le choix de ce seuil est fondamental. Il influence considérablement les prix des couvertures de réassurance et surtout leur chargement.

7.3 Excess of Loss en montant

Le contrat de base

C'est un Excess of Loss tout à fait classique. Il permet à l'assureur direct de limiter ses versements annuels par police. Dans le cas spécifique de la réassurance des rentes viagères, mettre en place ce type de traité revient pour la cédante à transférer au réassureur la partie du risque de longévité qui concerne les rentiers à fort arrérage.

Le principal inconvénient pour la cédante est qu'elle supporte entièrement l'aggravation de la fréquence des petits sinistres - soit qu'elle garde entièrement à sa charge la baisse de mortalité des rentiers à faible arrérage.

Franchise

La franchise se définit comme un montant individuel et annuel de rente. Nous pouvons proposer à la cédante d'introduire une franchise par sexe.

Variante

Nous pouvons proposer une couverture mixte, combinaison entre l'Excess of Loss en durée et l'Excess of Loss en montant. Cela permet de diminuer le volume de prime à charge de la cédante.

Illustration numérique

Jusqu'à présent le portefeuille fictif qui nous sert de base pour coter les contrats ne comporte que des rentes de montant unitaire. Nous devons proposer une composition différente pour pouvoir coter l'Excess of Loss en montant. A partir du portefeuille précédent nous en créons un nouveau dans lequel 10% des assurés ont souscrit une rente de montant 5. Nous définissons ensuite des franchises individuelles dépendant du sexe de l'assuré ou non.

La clause de réversion soulève des interrogations comme nous l'avons déjà évoqué. Supposons qu'un homme ait souscrit une rente avec réversion de montant 5. La franchise pour les hommes vaut 4 contre 3 pour les femmes. Lors du décès de cet assuré la question

se pose de savoir si la franchise est appliquée par police, auquel cas elle reste égale à 4, ou par tête devenant alors égale à 3. Nous estimons que la femme subroge aux droits de son mari. Ainsi en cours de traité la franchise appliquée à la police passe de 4 à 3.

La table (7.28) donne la prime technico-financière, le taux de chargement et le taux de prime de différents produits. Ce que nous appelons taux de chargement est le rapport entre la prime technico-financière et la prime pure calculée comme moyenne des 1000 simulations de la valeur actualisée de la charge du réassureur. Ces valeurs nous permettent d'observer l'influence du niveau de franchise et de la période de couverture sur les prix.

Pour certains produits nous sélectionnons des franchises variables selon le sexe de l'assuré. Nous notons F^m et F^w les franchises en montant individuel respectivement des hommes et des femmes.

F^m	F^w	Période	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
4.5	4.5	[2008, 2010[710	0.62%	0.34%
4.5	4.5	[2008, ∞ [5253	4.50%	2.54%
4	4	[2008, 2010[1420	0.62%	0.68%
4	4	[2008, ∞ [10507	4.08%	5.08%
4	4.5	[2008, 2010[1191	0.85%	0.58%
4.5	4	[2008, 2010[944	0.79%	0.45%
4	4.5	[2008, ∞ [8593	6.51%	4.15%
4.5	4	[2008, ∞ [7272	3.67%	3.51%

TAB. 7.28 – Prix de différentes couvertures Excess of Loss en montant

D'après la table réglementaire il ne devrait rester que 951 assurés à haut niveau de rente en moyenne dans le portefeuille de la cédante au 31 décembre 2008. D'après nos projections, il en reste 971. Toujours selon la table réglementaire, ils ne sont plus que 23 en 2040, alors que selon nos projections, ils sont encore 250. On peut facilement s'imaginer que la solvabilité de l'assureur sera sérieusement mise en danger si les niveaux de rentes sont très élevés.

Conformément à ce que l'on pouvait attendre, plus la période de couverture est longue ou plus la priorité est basse, plus le chargement est élevé.

Nous remarquons ensuite plusieurs choses. Tout d'abord si l'on regarde simplement le taux de chargement, on constate que ce produit est beaucoup moins risqué pour le réassureur que les produits étudiés précédemment.

La troisième et la quatrième couverture coûte le double exactement des deux premières, le chargement de la prime pure restant le même. Nous attendions ce résultat car dans les deux premiers produits le montant à charge du réassureur vaut 0.5 par tête contre 1 dans les deux suivants. La prime doit être multipliée par deux. Le changement de priorité ne modifie pas le risque lié à la mortalité. Le chargement doit rester exactement le même.

Si l'on compare les produits trois et cinq, l'augmentation de la priorité pour les femmes entraîne une diminution de la prime mais une augmentation du chargement. Un portefeuille à majorité masculine est plus risqué. En comparant cette fois les produits trois et six, on arrive à la même conclusion. Simplement on remarque bien que l'augmentation du chargement est plus faible.

Nous souhaitons donner pour un produit en particulier un certain nombre d'informations supplémentaires telles que la densité de la provision du réassureur en date 0 ainsi que les tableaux de cash flows de la période de couverture.

Le produit que nous choisissons est un ∞ XS 4 dont la garantie débute au premier janvier 2008 jusqu'à l'extinction totale du portefeuille. La cédante s'attend à payer pour les rentiers à fort arrérage une série de flux sur [2008, 2013[de 4755, 4698, 4634, 4564 et 4486.

En 2012 l'erreur sur le montant est déjà de 5%. Si l'on s'intéresse à un portefeuille plus âgé à la génération 1932 par exemple - ce que nous conseillons pour ce produit - l'erreur sur le montant à régler en 2012 est de plus de 36%. Nous cotons ce produit.

La prime pure vaut 5692. L'intervalle de confiance de niveau 90% de la prime pure est [5605, 5778]. La prime technico financière vaut 5771. Le chargement est de 1.38%. Le taux de prime est égal à 2.79%.

La figure (7.10) permet de visualiser la densité de la prime pure du réassureur. Le taux d'actualisation est pris égal à 5%.

On constate que l'intervalle de confiance de la prime pure est beaucoup plus étroit pour ce produit que pour le produit Aggregate Excess of Loss ou encore l'Excess of Loss en durée. Pour le réassureur, il est bien moins risqué.

Nous proposons ensuite la série annuelle des cash flows mais uniquement sur une partie restreinte de la période de couverture. La charge est exprimée au 31 décembre de l'année, les provisions et le capital alloué par contre sont donnés au premier janvier de l'année. Il s'agit à chaque fois des quantités moyenne obtenues comme moyenne des 1000 simulations réalisées.

Nous testons ensuite les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital, TCE et pourcentage de rentiers à fort arrérage. Rappelons que nous utilisons la même

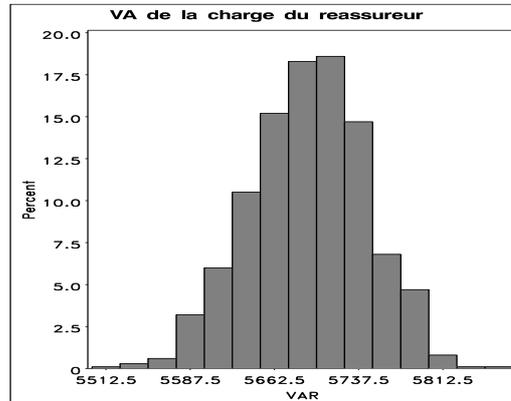


FIG. 7.10 – Densité de la provision du réassureur en 0 pour le produit ∞ XS 4

Graine pour initialiser le tirage des lois binomiales.

Effet génération. Le produit que nous sélectionnons est un ∞ XS 4 sur la période de couverture [2008, 2018]. La table (7.30) donne pour 4 générations différentes la prime technico-financière, le taux de prime et le taux de chargement.

Pour la génération de 1920 la cédante s'attend à verser fin décembre 2015 une somme de 1243 pour les rentiers à fort arrérage. D'après nos projections, elle doit en fait verser 2600 soit plus du double .

La prime technico-financière décroît notamment car le nombre d'individus traversant la période de couverture est moindre en fonction de la génération considérée.

Plus le portefeuille est âgé plus le capital à allouer est important. C'est lié à l'incertitude de la modélisation de la mortalité aux grands âges.

Effet composition. Le portefeuille de base que nous avons sélectionné pour les cotations est composé de 70% d'hommes et de 30% de femmes. L'effectif total est de 10000 assurés. De plus, 60% des hommes et 10% des femmes ont souscrits une rente de réversion.

Nous analysons successivement les effets mutualisation du risque en modifiant l'effectif initial total assuré E_0 , puis l'effet composition en féminisant ou en masculinisant le portefeuille. La génération de référence est la génération 1938. Les résultats obtenus pour l'analyse de sensibilité du facteur effectif sont donnés par le tableau (7.31).

Plus la cédante possède d'assurés en portefeuille plus le risque est mutualisé et donc moins le capital à allouer est important proportionnellement.

Nous constatons que 5000 assurés suffisent à assurer une mutualisation correcte des risques.

Année	Charge Réassureur	Provision cédante	Provision Réassureur	Capital alloué
2008	972	170550	7265	128
2009	966	162973	6656	125
2010	959	155305	6023	121
2011	952	147558	5364	114
2012	944	139745	4680	106
2013	936	131881	3969	95
2014	926	123983	3231	82
2015	917	116070	2466	67
2016	906	108165	1673	48
2017	893	100293	851	26

TAB. 7.29 – Cashflows annuels obtenus pour le produit ∞ XS 4

Génération	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
1935	5661	1.59%	2.99%
1930	5389	2.17%	3.37%
1925	4903	2.79%	3.77%
1920	4120	3.20%	4.07%

TAB. 7.30 – Effet génération

Effectif	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
1000	587	3.11%	2.83%
5000	2890	1.57%	2.79%
10000	5771	1.38%	2.79%
50000	28748	0.99%	2.78%
100000	57454	0.92%	2.77%

TAB. 7.31 – Effet mutualisation du risque

A titre indicatif nous donnons les intervalles de confiance empiriques à 90% des primes pures et les coefficients de variation pour quelques effectifs à la table (7.32).

Effectif	IDC empirique	Coefficient de variation
1000	[949, 1058]	3.33
10000	[9760, 10337]	1.79
100000	[98157, 102921]	1.47

TAB. 7.32 – Effet mutualisation du risque sur les intervalles de confiance empiriques de la prime pure

Nous étudions ensuite le même traité en faisant varier la proportion homme/femme dans le portefeuille. Le premier tableau donne la valeur de la prime technico-financière, le chargement et le taux de prime en fonction du pourcentage de femmes dans le portefeuille, la proportion de contrat sur deux têtes restant 60%/10%. Le deuxième tableau permet d'analyser l'influence de la proportion de contrats avec réversion dans le portefeuille.

Femmes	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
30%	5771	1.38%	2.79%
40%	5765	1.31%	2.79%
50%	5751	1.20%	2.79%
60%	5742	1.15%	2.79%

TAB. 7.33 – Effet proportion de femmes dans le portefeuille

La féminisation du portefeuille entraîne une très légère réduction de prime pour la cédante. Comparativement aux autres produits, la composition homme/femme a moins d'influence. L'analyse de sensibilité du facteur réversion nous amène aux mêmes conclusions. Nous ne présentons pas ces résultats en détail, ils n'apportent aucune information supplémentaire.

Coût du capital. Nous voulons tester le poids du paramètre coût du capital dans le prix demandé à la cédante. Nous cotons le produit ∞ XS 4 sur la période [2008, 2018[avec le portefeuille de référence en utilisant 5 taux différents pour le coût du capital. Une augmentation de 8% du coût du capital n'entraîne qu'une augmentation de 1.34% de la valeur de la prime.

La valeur du coût du capital n'influence que très légèrement le prix demandé à la cédante.

Coût du capital	P technico-financière.	Chargement	Taux de prime
14%	5801	1.90%	2.80%
12%	5788	1.67%	2.79%
10%	5771	1.38%	2.79%
8%	5750	1.02%	2.78%
6%	5724	0.55%	2.76%

TAB. 7.34 – Effet coût du capital

TCE. Nous souhaitons regarder ensuite l'influence du choix du quantile α dans la mesure de risque TCE_α sur la prime technico-financière. Le quantile de référence est le quantile 95%.

Quantile	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
90%	5760	1.19%	2.79%
95%	5771	1.38%	2.79%
99%	5789	1.70%	2.80%
99.5%	5799	1.87%	2.80%

TAB. 7.35 – Effet quantile du TCE

La table (7.35) donne une idée sur la dispersion des valeurs simulées. Lorsque l'on passe du quantile à 95% au quantile à 99.5% le chargement de la prime pure augmente de 0.5%. Le choix du niveau de la mesure de risque est pratiquement sans incidence sur le prix de la couverture.

Proportion de rentiers à haut niveau de rente. Nous souhaitons finalement regarder l'influence de la proportion de rentiers à haut niveau de rente sur le montant de la prime et le chargement. Nous rappelons que dans le portefeuille de référence le pourcentage choisi vaut 10%.

On s'aperçoit que plus la proportion de rentiers à fort arrérage est grande plus le taux de prime augmente et moins le chargement est élevé. Ce phénomène est lié à la mutualisation des risques. Il est dans l'intérêt du réassureur de travailler avec un portefeuille où cette catégorie de rentiers est nombreuse. Il encaisse plus de prime et prend moins de risque.

Nous souhaitons à présent mesurer l'impact de l'introduction du trigger financier sur la prime technico-financière et le chargement de la prime pure.

Pourcentage rentiers	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
10%	5771	1.87%	2.79%
20%	11567	1.60%	4.35%
30%	17305	1.35%	5.32%
40%	23073	1.34%	6.01%

TAB. 7.36 – Effet proportion de rentiers à fort arrérage

Rappelons qu'à chaque extinction du portefeuille - simulée avec une table prospective donnée - nous associons 1000 scénarios de rendement des actifs de la cédante. Le seuil de déclenchement sélectionné est 4.25%.

Garantie	Période	PTF	PTF	Chargement	Chargement
∞ XS 4	[2008, 2018]	5771.4	1737.2	1.4%	218.8%
∞ XS 4.5	[2008, ∞]	5223.7	1247.0	4.5%	221.6%

TAB. 7.37 – Prix de différentes couvertures Excess of loss en montant (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

Nous constatons que l'introduction du trigger financier divise le montant de la prime technico-financière par 3 pour le premier produit et 4 pour le second. Par contre, le chargement devient considérable. La prime pure devient beaucoup plus faible suite à l'introduction de la clause financière, elle passe de 5693 à 545. Nous présentons à la table (7.38) une partie des cashflows sur la période de couverture pour le produit ∞ XS 4 sur une période de couverture de 10 ans.

Nous constatons également que le capital à allouer est en moyenne 20 fois plus important que la charge moyenne du réassureur si l'on met en place le double trigger. Soit pour 1 unité décaissée en moyenne par le réassureur, il doit bloquer 20 unités.

Nous regardons pour conclure la sensibilité des prix et du chargement au seuil de déclenchement du trigger financier Φ .

Le choix du seuil déclencheur est primordial, il influence énormément les prix des couvertures de réassurance et surtout leur chargement.

Année	Charge Réassureur	Charge Réassureur	Capital alloué	Capital alloué
2008	972	115	128	1433
2009	966	103	125	1365
2010	959	88	121	1298
2011	952	97	114	1216
2012	944	90	106	1252
2013	936	85	95	1197
2014	926	76	82	1010
2015	917	83	67	843
2016	906	69	48	769
2017	893	74	26	791

TAB. 7.38 – Cashflows annuels pour le produit ∞ XS 4 sur la période [2008, 2018[(sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

Seuil	Prime technico-financière	Chargement
4.25%	1737	218.8%
4.75%	3252	60.6%
5.25%	5033	23.0%
5.75%	5660	5.9%

TAB. 7.39 – Effet seuil de déclenchement du trigger financier

Chapitre 8

Couverture sur insuffisance de provisions

Si les bases techniques de l'assureur sont insuffisantes, il existe au passif de son bilan un mali de provisionnement caché qui peut se révéler d'un montant important. Au vu d'une sinistralité observée aggravée, la cédante doit passer périodiquement des dotations aux provisions complémentaires. Pour les financer, elle puise en principe directement dans les bénéfices distribuables tant aux actionnaires qu'aux assurés.

Un trigger sur insuffisance de provisions permet donc de manière schématique de limiter le montant saisi sur les réserves destinées aux actionnaires et aux assurés, évitant en même temps des problèmes d'image sur les marchés à long terme. C'est au réassureur qu'il revient de doter les compléments de provisions nécessaires.

Ce type de couverture a un déclenchement court terme, ce qui présente l'avantage de minimiser le risque de flux financier.

Nous étudions une couverture Stop-loss et un Excess of Loss sur insuffisance de provisions. Il s'agit de couvertures contre des mali de provisionnement successifs dégagés soit sur l'ensemble du portefeuille soit par tête.

Nous souhaitons d'ores et déjà attirer l'attention du lecteur sur un point essentiel. La principale difficulté de ce type de garantie réside dans la définition de bases techniques objectives lors de la conclusion du traité. Le calcul d'un montant de provision dépend entièrement du taux technique utilisé d'une part, et de la table de mortalité choisie d'autre part.

Une solution consiste en l'introduction d'un organisme neutre tiers au contrat pour définir ces bases objectives. Cet organisme pourrait également être le constructeur de l'indice de longévité que nous avons évoqué dans un premier chapitre.

8.1 Adaptation de la notion de S/P

Nous souhaitons établir préalablement un parallèle avec l'assurance non-vie et les traités stop-loss classiques.

La notion de rapport Sinistre à Prime trouve sa justification dans une vision comptable de l'activité d'assurance. Le montant des sinistres est rapporté à une année de survenance. L'estimation du montant de la prime est basé sur une étude rétrospective du portefeuille. De même, la prime pure d'une rente est estimée à l'aide de la mortalité passée éventuellement extrapolée. P résume l'information disponible en date t . La prime correspond à ce que l'on encaisse et son montant est connu avec certitude.

A l'inverse de P , S est aléatoire. Le montant des sinistres s'estime comme la somme de trois termes essentiellement : le montant des sinistres réglés, la provision pour sinistres à payer et les IBNR (ou tardifs). La PSAP est évaluée en fonction des paiements déjà effectués au cours des exercices antérieurs et au titre de l'année de survenance considérée. A l'aide de méthodes actuarielles, on anticipe les règlements futurs. De manière analogue en assurance vie, c'est la sinistralité observée, à savoir le nombre de décès observés, qui permet de réévaluer et d'ajuster le montant des provisions des rentes. Et cela, en construisant de nouvelles tables d'expérience qui rendent mieux compte de la réalité. Ajoutons simplement que ce réajustement est annuel dans le cas de l'assurance non-vie. Il serait plutôt de type décennal en assurance vie où des tables d'expérience ne sont pas certifiées chaque année. Lors de ces rectifications, la compagnie dégage des boni ou des mali de provisionnement selon le cas.

Par analogie, une dérive du S/P correspond donc à une dérive de la mortalité observée par rapport à celle anticipée.

8.2 Formalisation du ratio S/P

Nous souhaitons formaliser la notion de ratio Sinistre à Prime.

Nous envisageons deux couvertures. La première se rapporte à la dérive des provisions de chaque tête assurée. La seconde se rapporte à la dérive de la provision totale du portefeuille. Nous notons $TP(t)$ la table de mortalité établie l'année t et qui résume toute l'information

sur la mortalité disponible à cette date. Remarquons que la table $TP(t)$ peut être prospective ou non, cela dépend essentiellement de l'assureur direct et du pays de souscription de la garantie.

8.2.1 Formalisation par tête

La prime pure d'un contrat de rente viagère à terme échu de montant annuel unitaire souscrit à l'âge x au 01/01/ t vaut,

$$a_x^{TP(t)}(t)$$

A partir de ces bases techniques, la table de mortalité $TP(t)$ et le taux technique garanti en date t , nous pouvons estimer la série des provisions futures pour chaque année $t + k$,

$$\forall k \quad a_{x+k}^{TP(t)}(t+k)$$

En date $t + k_0$, nous avons observé une certaine sinistralité à savoir un nombre de décès annuel pendant la période écoulée k_0 . L'assureur direct ou le législateur selon les pays a donc pu réviser ses anticipations. Il dispose alors d'une nouvelle table $TP(t + k_0)$ et le contrat vaut,

$$a_{x+k_0}^{TP(t+k_0)}(t+k_0)$$

La dérive du ratio sinistre à prime se formalise ainsi en date $t + k_0$,

$$\frac{a_{x+k_0}^{TP(t+k_0)}(t+k_0)}{a_{x+k_0}^{TP(t)}(t+k_0)}$$

8.2.2 Formalisation sur portefeuille

Soit $n(t)$ le nombre d'assurés dans le portefeuille en date t . Le nombre d'assurés pour les dates ultérieures $t + k$ est un variable aléatoire que nous notons $N(t + k)$. Soit x_i l'âge de l'assuré numéro i en date t . La dérive du ratio sinistre à prime s'énonce alors ainsi,

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t+k_0)} (a_{x_i+k_0}^{TP(t+k_0)}(t+k_0))}{\sum_{i=1}^{N(t+k_0)} (a_{x_i+k_0}^{TP(t)}(t+k_0))}$$

8.3 Les principales difficultés techniques

Nous avons formalisé la notion de rapport Sinistre à Prime ce qui nous permet d'introduire relativement naturellement la définition des garanties Stop Loss et Excess of Loss. Dans une couverture Stop Loss classique le réassureur intervient dès lors que la franchise est dépassée, soit lorsque le rapport S/P dépasse un certain pourcentage fixé contractuellement. Cette franchise est en général fixée contractuellement et définie comme un pourcentage. Pourtant la définition précise du périmètre de la couverture pose un certain nombre de difficultés techniques. Nous revenons sur tous ces points délicats.

8.3.1 Le choix de la priorité

Le choix de la priorité est délicat. Le plus simple consiste à fixer une franchise de $l\%$. Le réassureur peut limiter son intervention en fixant un plafond de $l + m\%$.

La priorité peut aussi être indexée sur les rendements d'actifs de la société. C'est une possibilité que nous avons déjà évoquée. Cela permet à la cédante de doter elle-même les compléments de provisions nécessaires si ses rendements financiers s'avèrent suffisants. La franchise de $l\%$ varie en fonction du rapport taux de rendements d'actifs sur taux minimum garanti.

8.3.2 Le calcul $a_x^{TP(t)}(t)$

De même qu'en assurance non-vie, on peut s'intéresser au rapport Sinistre sur Prime ou au combined ratio. Les réassureurs considèrent généralement que le transfert de risque

ne porte que sur les primes pures et non chargées des frais diverses acquisition et d'intermédiaires. Dans nos calculs, lors de l'estimation de la dérive du ratio S/P, on s'intéresse uniquement à la dérive du rapport des primes pures. Eventuellement, on peut inclure le chargement de sécurité de la cédante.

8.3.3 Le taux technique

Pour pouvoir calculer la valeur de $a_x^{TP(t)}(t)$ et par extension sa dérive, il faut impérativement définir de manière précise le taux technique utilisé lors de la conclusion du traité. La valeur de celui-ci pourrait être donné par la législation du pays de souscription. Cependant, le réassureur ne peut pas se permettre d'introduire dans la couverture un risque lié à la législation, d'autant que nous travaillons sur des horizons à moyen terme et qu'il n'existe aucun moyen d'anticiper des changements législatifs. Nous proposons d'introduire contractuellement un taux technique fixé qui sera utilisé quelle que soit la date de calcul $t + k_0$. On peut penser aussi à un taux indexé sur les taux de rendement des obligations européennes, mais nous choisissons volontairement d'écarter cette approche et de ne pas gérer ce risque de flux. Une telle clause est tout à fait envisageable lors de développements ultérieurs.

8.3.4 La table de mortalité

Le choix de la table de mortalité est le principal obstacle à la conception de ce produit. Examinons les différentes possibilités qui s'offrent à nous.

En ce qui concerne le choix de $TP(t)$ tout d'abord. Nous pouvons retenir une table réglementaire prospective ou non comme il en existe en France et en Belgique, une table d'expérience construite en interne et certifiée comme il en existe au Royaume-Uni, ou bien une tierce table déterminée à l'avance et certifiée par un acteur indépendant.

S'agissant du choix de $TP(t + k_0)$ à présent, la tâche est plus complexe. Il est en effet impossible de proposer une table réglementaire, car le traité de réassurance porterait alors sur un risque de nature législatif. Ce qui n'a pas de sens.

La deuxième option, à savoir le choix d'une table d'expérience certifiée établie en interne par l'assureur direct nous semble envisageable mais, cependant, pas dans tous les cas. Le risque moral est trop important. La cédante pourrait volontairement établir une table excessivement prudentielle et demander au réassureur de la financer. Un traité proposant ce type de conditions suppose la mise en place d'un réel partenariat entre les acteurs, partenariat qui vise à réduire le risque moral. Notons qu'en France par exemple, les tables

d'expérience sont construites puis certifiée par des organismes indépendants. Cette particularité législative rend plus accessible ce genre de couvertures. Mais ce n'est pas le cas dans tous les pays.

La troisième option consiste en l'intervention d'un tiers au traité. Il s'agirait d'un organisme indépendant qui construirait et certifierait des tables servant comme base à l'évaluation du rapport Sinistre à Prime. Nous consacrons tout un paragraphe sur ce sujet à la section 8.6 en expliquant également comment cet acteur pourrait intervenir parallèlement sur le marché financier en étant le constructeur d'indice des longevity bonds.

8.3.5 Les clauses de réversion

La clause de réversion présente dans plus de la moitié des contrats de rentes, complexifie encore l'évaluation de la prime pure. De ce fait, nous nous devons de travailler sur deux têtes, soit sur la dérive du $a_{x/y}^{TP(t)}(t)$ et non plus du $a_x^{TP(t)}(t)$. Toutes les cotations de traité se font par simulation. Si l'on admet l'hypothèse que les deux têtes ont même âge et que leur probabilités de décès sont indépendantes, l'évaluation ne pose plus de grandes difficultés. Mais il est vrai que ces hypothèses sont critiquables. Remarquons tout de même que du point de vue du réassureur, cela induit une marge de sécurité supplémentaire. Il est largement admis qu'une personne ayant perdu son conjoint diminue de manière substantielle son espérance de vie. Traiter les probabilités indépendamment fait donc augmenter le prix du traité.

8.3.6 La conversion en rente ou en capital

La plupart des contrats de rente proposent aux assurés des sorties en capital ou des conversions en rente. Selon les statistiques de la FFSA, la plupart des contrats de rente arrivant à échéance sont convertis en capital. Le sexe semble également avoir une influence sur le choix. Lors de développements ultérieurs, le réassureur pourra modéliser des lois de sorties en rente pour les assurés de moins de 65 ans. Cela ne pose pas de difficultés majeures. Les lois peuvent être ensuite incluse dans le programme de simulation. Cette particularité s'applique bien entendu aux traités qui incluent des assurés non encore rentiers.

8.3.7 Les contrats de rente en unité de compte

Dans ce type de contrat, c'est uniquement le capital à échéance qui est aléatoire. Le montant de la rente est alors déterminé en fonction du capital constitué puis fixe jusqu'au décès de l'assuré. L'approche par simulation permet de contourner cette difficulté. Il suffit de simuler jusqu'à 65 ans l'évolution du capital constitué à l'aide d'un modèle financier puis de calculer le montant de la rente obtenue. Ce paragraphe concerne les traités qui incluent des assurés non encore rentiers.

8.3.8 La clause de participation aux bénéfices

La clause de participation aux bénéfices qui, rappelons-le, n'existe pas dans la législation belge rend très difficile voire impossible la mise en place seule de couverture sur mali de provisionnement. Cette particularité législative peut en effet avoir pour conséquence une variation annuelle du montant de la rente assurée et modifier la valeur de $a_x^{TP(t)}(t)$. Selon les législations également, les conditions de revalorisation peuvent être très différentes. En France, il est impossible de simuler l'évolution des arrérages sans passer par la projection du solde du compte technique car il faut prendre en compte les produits financiers, les résultats techniques annuels et le solde du compte de réassurance cédée.

8.4 Stop Loss sur provisions

Le contrat de base

C'est une couverture Stop Loss classique. Seul l'objet de l'assurance est original. Il s'agit de protéger la cédante contre des malis de provisionnement successifs importants. Le réassureur s'engage à intervenir à une date préalablement fixée, si le rapport des provisions passées sur le rapport des provisions attendues en date de conclusion du traité dépasse un minimum fixé : la priorité. Cette priorité est exprimée en pourcentage des provisions annuelles calculées avec la table $TP(t)$.

Ce produit est à caractère rétrospectif. L'étude peut cependant être reprise de manière prospective à condition de travailler par génération de contrats.

La figure (8.1) propose une illustration de l'évolution possible des provisions de la cédante.

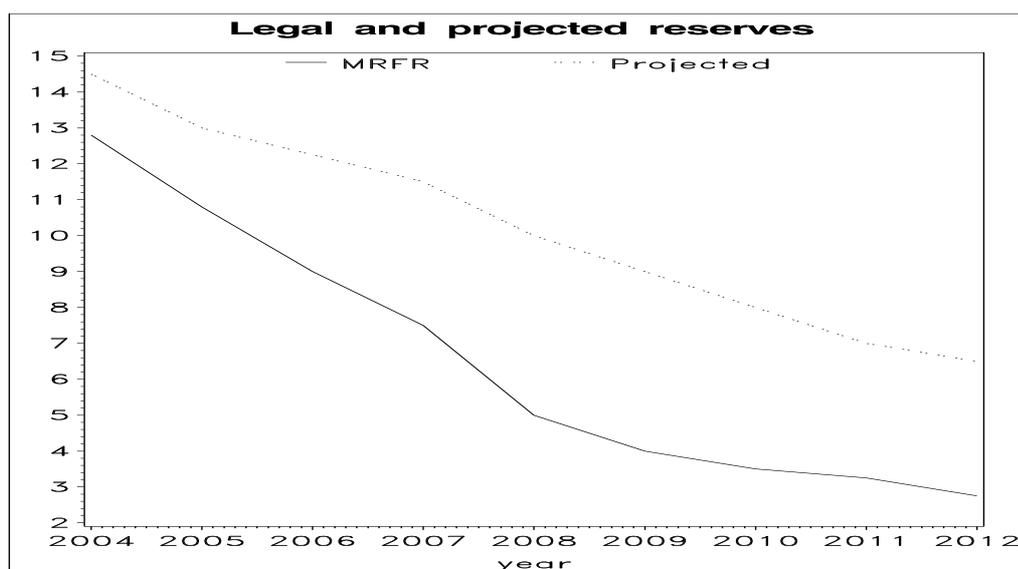


FIG. 8.1 – Couverture Stop Loss sur provisions

Lors de la rédaction du traité les deux partis conviennent d'une table $TP(t)$. Dans notre cas nous choisissons la table réglementaire belge qui sert à la tarification et au provisionnement des rentes viagères.

Le réassureur peut proposer deux mesures de dérive du rapport Sinistre à Prime. La cédante peut soit utiliser une table qu'elle aura construite en interne et faite certifier, soit se servir d'une table construite directement par un cabinet indépendant tiers au contrat.

Il faut encore déterminer la date $t + l$ de révision des données techniques, soit l'année durant laquelle le réassureur comblera les déficits techniques de la cédante si besoin est. L'échéance du contrat peut être relativement court terme par rapport à d'autres produits que nous étudions.

Variante

La cédante peut se voir accorder une option sur date, en cas de modification législative qui lui imposerait un réajustement des provisions immédiat en $t + m$ avec $m \leq l$. Cette option lui permettrait de disposer au moment opportun des financements nécessaires.

Illustration numérique

Toute la cotation est faite en utilisant la méthode générale décrite à la section 6.3. Nous revenons en détail sur l'obtention des montants à charge de la cédante.

Tout d'abord nous calculons la suite annuelle des provisions totales projetées par la cédante,

$$\left(\sum_{j=1}^{N(n)} a_{x_j+n}^{\text{réglementaire}}(2003+n) \right)_{n \geq 0}$$

où $N(n)$ est le nombre d'assurés en date n . Cette suite est construite pour les hommes, les femmes et les contrats sur deux têtes. Ensuite, pour chaque table prospective marché TP_i simulée on estime la suite,

$$\left(\sum_{j=1}^{N(n)} a_{x_j+n/y_j+n}^{TP_i}(2003+n) \right)_{n \geq 0}$$

où $N(n)$ est le nombre d'assurés en date n . Bien entendu pour les contrats sur deux têtes nous travaillons avec $a_{x_j+n/y_j+n}^{TP_i}(2003+n)$. Nous obtenons ainsi 3000 suites de valeurs sur la période qui s'étend de 2003 à

l'extinction du portefeuille.

Le taux technique que nous choisissons pour calculer $a_{x_j+n}^{TP_i}(2003+n)$ est 3.25%. C'est le même que celui utilisé pour le calcul de la valeur réglementaire des provisions. Nous ne souhaitons pas travailler avec un risque de flux. Pour plus de renseignements sur ce choix, le lecteur peut se reporter à la page 107.

Ensuite nous tirons l'évolution des effectifs en portefeuille à l'aide de lois binomiales. C'est la même méthode que pour les couvertures classiques. Chaque année nous disposons du montant hypothétique de provisions constituées par la cédante et du montant projeté de ces provisions obtenu pour chaque table prospective marché. Nous appliquons ensuite la franchise et le plafond pour déterminer la charge du réassureur l'année $t+l$.

A titre d'illustration, nous regardons l'expression de cette charge sur un Stop Loss 20% XS 120%. L'année de révision des données techniques est 2010.

L'expression de la partie à charge du réassureur est,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{n(2010)} (a_{x_i+8}^{TP}(2010))}{\sum_{i=1}^{n(2010)} (a_{x_i+8}^{reg}(2010))} \leq 1.2 \\ \sum_{i=1}^{n(2010)} a_{x_i+8}^{TP}(2010) - 1.2 \sum_{i=1}^{n(2010)} a_{x_i+8}^{reg}(2010) & \text{si } 1.2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n(2010)} (a_{x_i+8}^{TP}(2010))}{\sum_{i=1}^{n(2010)} (a_{x_i+8}^{reg}(2010))} \leq 1.4 \\ (1.4 - 1.2) \sum_{i=1}^{n(2010)} a_{x_i+8}^{reg}(2010) & \text{si } 1.4 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n(2010)} (a_{x_i+8}^{TP}(2010))}{\sum_{i=1}^{n(2010)} (a_{x_i+8}^{reg}(2010))} \end{array} \right.$$

D'après la table réglementaire l'âge ultime est 110 ans. Au-delà on considère que tous les assurés sont décédés. Soit $\forall t, \forall x \in [110, 120] \quad a_x^{\text{réglementaire}}(t) = 0$. Or nous avons sélectionné 120 ans comme âge ultime dans notre modèle. De 110 à 120 ans il est donc impossible de calculer le rapport Sinistre à Prime. Pour contourner cette difficulté, nous considérons que dans notre produit le réassureur prend entièrement à sa charge la provision à constituer au-delà de 110 ans.

Nous tarifons plusieurs couvertures puis procédons à une analyse de sensibilité. L'analyse de sensibilité propose de tester les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital, TCE.

La table (8.1) donne la prime technico-financière, le taux de chargement et le taux de prime de différents produits. Ce que nous appelons taux de chargement est le rapport entre la prime technico-financière et la prime pure calculée comme moyenne des 1000 simulations de la valeur actualisée de la charge du réassureur. Ces valeurs nous permettent d'observer l'influence du niveau de franchise et de l'année de garantie sur les prix.

Franchise	Année	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
10% XS 120%	2010	7493	0.31%	5.07%
20% XS 120%	2010	12832	21.83%	8.68%
∞ XS 120%	2010	12901	22.43%	8.73%
10% XS 110%	2010	7508	0%	5.08%
∞ XS 110%	2010	20409	13.10%	13.81%
60% XS 120%	2020	13805	4.58%	9.35%
∞ XS 120%	2020	16563	21.45%	11.21%
70% XS 110%	2020	16096	3.91%	10.90%
∞ XS 110%	2020	18854	18.36%	12.76%

TAB. 8.1 – Prix de différentes couvertures Stop loss

D'après nos projections, la probabilité que la tranche assurée du produit 10% XS 120% soit atteinte est 100%, qu'elle soit entièrement traversée 92.5%. Le rapport sinistre à prime moyen en 2010 vaut 134%. Pour le produit 60% XS 120%, la tranche assurée est entièrement traversée dans 47% des cas en 2020. Le rapport sinistre à prime moyen vaut 179%.

Le chargement du produit 10% XS 110% est nul car dans tous les cas simulés la tranche assurée est entièrement traversée. La charge du réassureur est certaine et vaut $0.1 \sum_{i=1}^{n(2010)} a_{x_i+8}^{reg}(2010)$. Dans tous les cas simulés, la valeur actualisée de la charge du réassureur est la même et donc il n'y a pas lieu de calculer le TCE_α .

Les taux de prime sont relativement importants si on les compare à ceux obtenus pour le Stop Loss classique au chapitre précédent alors que les chargements sont plus faibles bien que très variables.

Nous donnons pour un produit en particulier un certain nombre de résultats supplémentaires tels que la densité de la prime pure du réassureur en date 0 de conclusion du traité. Nous ne donnons pas la série des cash flows car la période de couverture est d'une seule année.

Le produit est un 20% XS 120% dont le déclenchement est au 31 décembre 2010. La cédante estime que le montant des provisions qu'elle doit posséder à cette date pour faire face à ses engagements futurs est de 110932. D'après nos projections elles devraient être en moyenne de 148688. Précisons par ailleurs que la tranche assurée n'est entièrement traversée que dans 1% des cas simulés.

La prime pure vaut 10532. L'intervalle de confiance de niveau 90% de la prime pure est

[7522, 13522]. La prime technico-financière vaut 12832 et le chargement 21.83%. Le taux de prime est égal à 8.68%. La capital à allouer au premier janvier 2010 est de 15560. La charge de la cédante au 31 décembre est de 5295 en moyenne.

La figure (8.2) permet de visualiser la densité de la prime pure du réassureur. Le taux d'actualisation est le taux de rendement des actifs pris égal à 5%, ce n'est pas le coût du capital.

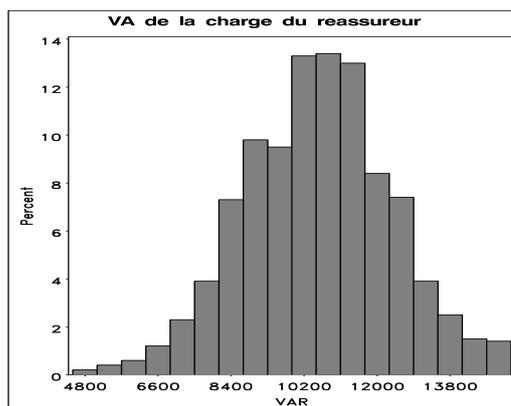


FIG. 8.2 – Densité de la prime pure du réassureur en 0

Nous testons ensuite les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital et TCE. Rappelons que nous utilisons la même *Graine* pour initialiser le tirage des lois binomiales.

Effet génération. Le produit que nous sélectionnons est un 20% XS 120%. A partir de la génération 1930 la tranche assurée est entièrement traversée avec une probabilité de 1. La table (8.2) ne présente pas la colonne des chargements car ils sont tous nuls excepté pour la génération de 1935 où le chargement sur prime pure est de 3.28%. Rappelons que cela est dû au fait que la charge du réassureur est certaine.

Nous proposons de présenter la valeur du ratio Sinistre à Prime moyen pour chaque génération.

Pour la génération de 1920 l'assureur direct devrait dégager un mali de provisionnement de plus de 200% en 2010. Il prévoit une provision de 29015 alors que d'après nos projections elle devrait être de 67331.

Plus les assurés sont vieux plus on observe les insuffisances de la table réglementaire par rapport à nos projections.

Effet composition. Le portefeuille de base que nous avons sélectionné pour les cotations

Génération	P technicofinancière	Ratio moyen	Taux de prime
1935	12805	140.05%	9.5%
1930	9798	154.46%	8.6%
1925	6673	179.57%	7.2%
1920	3927	232.05%	5.4%

TAB. 8.2 – Effet génération

est composé de 70% d’hommes et de 30% de femmes. L’effectif total est de 10000 assurés. De plus, 60% des hommes et 10% des femmes ont souscrit une rente de réversion.

Nous analysons successivement les effets mutualisation du risque en modifiant l’effectif initial total assuré E_0 , puis l’effet composition en féminisant ou en masculinisant le portefeuille. La génération de référence est la génération 1938. Les résultats obtenus pour l’analyse de sensibilité du facteur effectif sont donnés par le tableau (8.3).

Effectif	P technicofinancière	Chargement	Taux de prime
1000	1293	22.83%	8.75%
5000	6429	22.13%	8.70%
10000	12832	21.83%	8.68%
50000	64185	21.92%	8.69%
100000	128381	21.91%	8.69%

TAB. 8.3 – Effet mutualisation du risque

Plus la cédante possède d’assurés en portefeuille, plus le risque est mutualisé et donc moins le capital à allouer est important proportionnellement.

L’effet mutualisation est cependant moindre. A partir de 1000 assurés déjà, la mutualisation est correctement assurée. Le réassureur peut donc proposer ce produit sur des portefeuilles de très petite taille.

A titre indicatif nous donnons les intervalles de confiance empiriques à 90% des primes pures et les coefficients de variation pour quelques effectifs à la table (8.4).

Nous étudions ensuite le même traité en faisant varier la proportion homme/femme dans le portefeuille. Le premier tableau donne la valeur de la prime technicofinancière, le chargement et le taux de prime en fonction du pourcentage de femmes dans le portefeuille, la proportion de contrat sur deux têtes restant 60%/10%. Le deuxième

Effectif	IDC empirique	Coefficient de variation
1000	[747, 1370]	18.1
10000	[7522, 13522]	17.23
100000	[75397, 135239]	17.23

TAB. 8.4 – Effet mutualisation du risque sur les intervalles de confiance empiriques de la prime pure

tableau permet d’analyser l’influence de la proportion de contrats avec réversion dans le portefeuille.

Femmes	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
30%	12832	21.83%	8.68%
40%	12640	20.81%	8.57%
50%	12360	18.98%	8.40%
60%	12157	17.80%	8.27%

TAB. 8.5 – Effet proportion de femmes dans le portefeuille

Dans les deux cas, nous constatons que la féminisation du portefeuille entraîne une réduction du chargement de la prime pure.

Rentes avec réversion	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
60%/10%	12832	21.83%	8.68%
50%/20%	13111	21.35%	9.00%
40%/30%	13066	18.36%	9.12%
30%/40%	12938	15.31%	9.14%

TAB. 8.6 – Effet proportion de contrats avec rente de réversion

Nous remarquons un autre phénomène qui n’apparaît pas directement à travers la lecture des tables. La probabilité de traverser entièrement la tranche assurée augmente significativement lorsque la proportion de femme diminue dans le portefeuille. Ainsi lorsque la composition est de 60%/10% pour les rentes de réversion, la probabilité de traverser entièrement la tranche est de 1%. Si l’on applique les proportions 30%/40%, le probabilité passe à 14.2%. L’insuffisance des tables réglementaires porte donc principalement sur les hommes.

Coût du capital. Nous voulons tester le poids du paramètre coût du capital dans le prix demandé à la cédante. Nous cotons le produit 5 XS 90 avec le portefeuille de référence en utilisant 5 taux différents pour le coût du capital.

Coût du capital	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
14%	13858	31.58%	9.38%
12%	13386	27.10%	9.06%
10%	12832	21.83%	8.68%
8%	12177	25.62%	8.24%
6%	11402	8.26%	7.72%

TAB. 8.7 – Effet coût du capital

Une augmentation du coût du capital de 8% entraîne une augmentation de pratiquement 25% de la valeur de la prime technico-financière. Le prix de la couverture est à peu près aussi impacté par le coût du capital que le traité Aggregate Excess of Loss.

TCE. Nous souhaitons conclure l'analyse de sensibilité en regardant l'influence du quantile α sur le chargement de la prime pure. Le quantile de référence est le quantile 95%.

Quantile	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
90%	12477	18.46%	8.44%
95%	12832	21.83%	8.68%
99.5%	13272	26.02%	8.98%

TAB. 8.8 – Effet quantile du TCE

La table 8.8 nous donne une idée sur la dispersion des valeurs simulées. Lorsque l'on passe du quantile à 90% au quantile à 99.5% le chargement de la prime pure augmente de 7.5%. Le choix du niveau α a bien entendu une influence sur le prix demandé à la cédante mais elle n'est pas décisive.

Nous souhaitons à présent mesurer l'impact de l'introduction du trigger financier sur la prime technico-financière et le chargement de la prime pure.

Rappelons qu'à chaque extinction du portefeuille - simulée avec une table prospective donnée - nous associons 1000 scénarios de rendement des actifs de la cédante. Le seuil de déclenchement sélectionné est 4.25%.

Garantie	Période	PTF	PTF	Chargement	Chargement
20 XS 120	2010	12832	8884	21.8%	844.0%
∞ XS 120	2015	16249	14974	22.1%	1126.3%

TAB. 8.9 – Prix de différentes couvertures Stop Loss sur provisions (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

Nous constatons que l'introduction du trigger financier diminue la valeur de la prime technico-financière de 30% pour le premier produit et de 8% pour le deuxième. Au niveau des primes pures par contre, nous remarquons une différence considérable selon que le trigger financier soit enclenché ou non. Pour le produit 20 XS 120, la prime pure passe de 10532 à 941. La charge du réassureur en 2010 passe de 15560 à 1390 alors que le capital alloué cette année là passe de 5295 à 18624 selon que la garantie trigger soit mise en place ou non.

Nous analysons pour conclure la sensibilité des prix et du chargement au seuil de déclenchement du trigger financier Φ .

Seuil	Prime technico-financière	Chargement
4.25%	8884	844.0%
4.75%	10103	178.5%
5.25%	11603	57.3%
5.75%	12590	27.4%

TAB. 8.10 – Effet seuil de déclenchement du trigger financier

Le choix du seuil déclencheur est primordial, il influence considérablement le prix des couvertures de réassurance.

8.5 Excess of Loss sur provisions

Le contrat de base

C'est une couverture Excess of Loss classique, seul l'objet de l'assurance est original. Il s'agit de protéger la cédante contre des malis de provisionnement successifs dégagés par police. Le réassureur s'engage à intervenir en $t + k$, si le rapport entre les primes pures d'une rente viagère calculée avec la table $TP(t)$ et la table $TP(t + k)$ dépasse un minimum fixé : la priorité. Cette priorité est exprimée en pourcentage de la prime pure calculée avec $TP(t)$.

Nous travaillons avec une couverture rétrospective. Précisons qu'une couverture Excess of Loss permet de proposer à la cédante un produit souple. Il n'est pas difficile d'inclure dans le traité les nouveaux contrats entrant en portefeuille dans l'année car le montant à charge du réassureur est calculé police par police. Le réassureur peut facilement proposer une garantie prospective par génération de contrats.

Lors de la rédaction du traité les deux partis conviennent d'une table $TP(t)$ la table réglementaire belge ici. Ensuite ils conviennent d'une mesure du rapport Sinistre à Prime en utilisant soit une table construite en interne par la cédante et certifiée, soit une table construite par un cabinet indépendant.

Variante

L'option sur date est envisageable. Pour plus d'informations le lecteur peut se reporter à la section précédente.

Nous pouvons envisager de proposer une franchise et un plafond dépendant du sexe de l'assuré. Imaginons une cédante qui observe dans son portefeuille une dérive importante de la mortalité des hommes par rapport à la table réglementaire alors que pour les femmes le phénomène est moins inquiétant. Nous pouvons lui proposer une garantie ∞ XS 120% homme et 10% XS 120% femme.

Illustration numérique

Toute la cotation est faite en utilisant la méthode générale décrite à la section 6.3. Nous revenons sur l'obtention des montants à charge de la cédante.

Tout d'abord nous calculons la suite annuelle des primes pures réglementaires pour les hommes, les femmes et les contrats sur deux têtes,

$$(a_{x+n}^{\text{réglementaire}}(2003+n))_{n \geq 0}$$

Ensuite, pour chaque table prospective marché TP_i simulée on estime,

$$(a_{x+n}^{TP_i}(2003+n))_{n \geq 0}$$

Bien entendu pour les contrats sur deux têtes nous travaillons avec $a_{x_j+n, y_j+n}^{TP_i}(2003+n)$. Nous obtenons ainsi 3000 suites de valeurs sur la période qui s'étend de 2003 à l'extinction du portefeuille.

Le taux technique que nous choisissons pour calculer $a_{x_j+n}^{TP_i}(2003+n)$ est 3.25%. C'est le même que celui utilisé pour le calcul de la valeur réglementaire des provisions. Nous appliquons ensuite la franchise et le plafond pour déterminer la charge du réassureur l'année $t+l$. La franchise et le plafond sont les mêmes que l'on travaille avec les primes pures hommes, femmes ou sur deux têtes.

A titre d'illustration, nous regardons l'expression de cette charge sur un Excess of Loss 20% XS 120%. L'année de révision des données techniques est 2010.

L'expression de la partie à charge du réassureur est,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \frac{a_{x_i+8}^{TP}(2010)}{a_{x_i+8}^{reg}(2010)} \leq 1.2 \\ \sum_{i=1}^{n(2010)} [a_{x_i+8}^{TP}(2010) - 1.2a_{x_i+8}^{reg}(2010)] & \text{si } 1.2 \leq \frac{a_{x_i+8}^{TP}(2010)}{a_{x_i+8}^{reg}(2010)} \leq 1.4 \\ (1.4 - 1.2) \sum_{i=1}^{n(2010)} a_{x_i+8}^{reg}(2010) & \text{si } 1.4 \leq \frac{a_{x_i+8}^{TP}(2010)}{a_{x_i+8}^{reg}(2010)} \end{array} \right.$$

Ensuite nous simulons l'évolution des effectifs en portefeuille à l'aide de lois binomiales. Chaque année et pour chaque table prospective, nous disposons du montant à charge du réassureur.

D'après la table réglementaire l'âge ultime est 110 ans et nous avons sélectionné 120 ans dans notre modèle. Rappelons que pour contourner cette difficulté, nous considérons que dans notre produit le réassureur prend entièrement à sa charge la provision à constituer au-delà de 110 ans.

Nous tarifons plusieurs couvertures puis procédons à une analyse de sensibilité. L'analyse de sensibilité propose de tester les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital, TCE, année de garantie et une franchise définie par sexe.

La table (8.11) donne la prime technico-financière, le taux de chargement et le taux de prime de différents produits. Ce que nous appelons taux de chargement est le rapport entre la prime technico-financière et la prime pure calculée comme moyenne des 1000 simulations de la valeur actualisée de la charge du réassureur. Ces valeurs nous permettent d'observer l'influence du niveau de franchise et de l'année de garantie sur les prix.

Franchise	Année	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
10% XS 120%	2010	8322	3.55%	5.63%
20% XS 120%	2010	11386	16.33%	7.71%
∞ XS 120%	2010	12190	22.09%	8.25%
∞ XS 120%	2020	13942	18.80%	9.43%
∞ XS 110%	2010	20684	12.14%	14.00%
∞ XS 110%	2020	17460	15.24%	11.82%

TAB. 8.11 – Prix de différentes couvertures Excess of loss

Le rapport des primes pures est de 135.31% pour les hommes et 129.64% pour les femmes en 2010. Il est calculé comme moyenne du rapport obtenu pour chacune des 1000 simulations. En 2020 ce rapport est de 159.31% pour les hommes et 149.51% pour les femmes.

Si l'on s'intéresse plus particulièrement au produit 10% XS 120% on constate que la tranche assurée est entièrement traversée dans 84% des cas pour les hommes contre seulement 39.8% pour les femmes. Cela confirme notre intuition qu'il existe des insuffisances plus grande pour les hommes que pour les femmes dans la table réglementaire belge par rapport à notre modèle. Si l'on s'intéresse au produit 20% XS 120% on constate que la tranche assurée n'est jamais entièrement traversée pour les femmes alors qu'elle l'est dans 19% des cas pour les hommes.

Nous comparons le prix et la dangerosité des couvertures Excess of Loss et Stop Loss sur

provisions. Les résultats numériques dépendant de la composition du portefeuille, nos remarques ne valent que dans le cadre de notre portefeuille de référence. Nous constatons que les prix sont proches et les chargements comparables. En 2010, le Stop Loss 20% XS 120% cote 12832 avec un chargement de 21.83% contre une cote de 11386 et un chargement de 16.33% pour un traité Excess of loss libellé de la même manière.

Nous souhaitons donner pour un produit en particulier un certain nombre de résultats supplémentaires tels que la densité de la provision du réassureur en date 0. Nous ne donnons pas le tableau des cash flows car la couverture est annuelle.

Le produit que nous choisissons est un 20% XS 120% dont le déclenchement est au 31 décembre 2010.

La cédante estime que le montant de la prime pure pour un assuré à cette date est de 9.74 pour un homme et de 11.39 pour une femme. D'après nos projections, en moyenne elle vaut 13.18 et 14.77. La prime pure vaut 9788. L'intervalle de confiance de niveau 90% de la prime pure est [7112, 12018]. La prime technico-financière vaut 11386, le chargement 16.33%. Le taux de prime est égal à 7.71%, le capital alloué au premier janvier 3452 et la charge du réassureur au 31 décembre 11506.

La figure (8.3) permet de visualiser la densité de la prime pure du réassureur. Le taux d'actualisation est le taux de rendement des actifs pris égal à 5%.

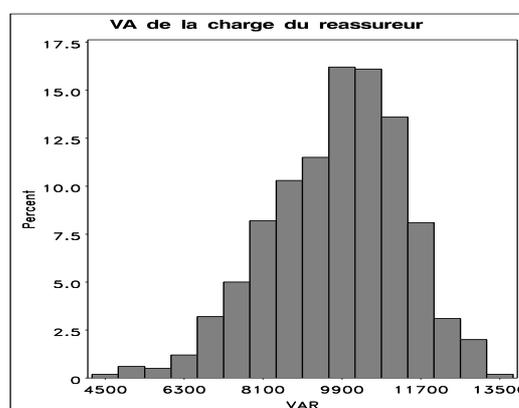


FIG. 8.3 – Densité de la prime pure du réassureur en 0

Nous testons ensuite les effets génération, composition du portefeuille, coût du capital, TCE, année de garantie et franchise. Rappelons que nous utilisons la même *Graine* pour initialiser le tirage des lois binomiales.

Effet génération. Le produit que nous sélectionnons est un 20% XS 120%. Le niveau de chargement décroît puis croît à nouveau. A partir de la génération 1925 la tranche assurée est traversée entièrement, avec une probabilité de 1. Contrairement au traité Stop Loss le chargement n'est pas nul dans ce cas car, bien que le montant à charge du réassureur soit certain par tête, il reste une incertitude sur le nombre total de têtes. La valeur du chargement entre les générations 1925 et 1920 augmente donc, car elle est liée au tirage des lois binomiales pour les grands âges. Ainsi plus la génération est ancienne plus le chargement est élevé dès que la tranche cédée est entièrement traversée.

Génération	Ptechnico financière	Chargement	Taux de prime
1935	12713	10.91%	9.96%
1930	11374	0.86%	9.39%
1925	8079	1.20%	8.71%
1920	5131	1.46%	7.10%

TAB. 8.12 – Effet génération

Pour la génération de 1920 le ratio des primes pures est de 193.92% pour les hommes et 175.67% pour les femmes.

Le montant des réserves de la cédante au 31 décembre 2010 doit être de 24085 selon la table réglementaire. Il manque 7405, soit plus du quart, d'après nos projections.

Effet composition. Le portefeuille de base que nous avons sélectionné pour les cotations est composé de 70% d'hommes et de 30% de femmes. L'effectif total est de 10000 assurés. De plus, 60% des hommes et 10% des femmes ont souscrit une rente de réversion.

Nous analysons successivement les effets mutualisation du risque en modifiant l'effectif initial total assuré E_0 , puis l'effet composition en féminisant ou en masculinisant le portefeuille. La génération de référence est la génération 1938. Les résultats obtenus pour l'analyse de sensibilité du facteur effectif sont donnés par le tableau (8.13).

L'effet mutualisation est presque inexistant. A partir de 1000 assurés la mutualisation est correctement assurée. Le réassureur peut donc proposer ce produit sur des portefeuilles de très petite taille.

A titre indicatif nous donnons les intervalles de confiance empiriques à 90% des primes pures et les coefficients de variation pour quelques effectifs à la table (8.14). Nous étudions ensuite le même traité en faisant varier la proportion homme/femme dans le portefeuille. Le premier tableau donne la valeur de la prime technicofinan-

Effectif	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
1000	1139	16.44%	7.7%
5000	5692	16.33%	7.7%
10000	11386	16.33%	7.7%
50000	56934	16.32%	7.7%
100000	113863	16.32%	7.7%

TAB. 8.13 – Effet mutualisation du risque

Effectif	IDC empirique	Coefficient de variation
1000	[711, 1205]	15.66
10000	[7112, 12018]	15.62
100000	[71031, 120238]	15.62

TAB. 8.14 – Effet mutualisation du risque sur les intervalles de confiance empiriques de la prime pure

cière, le chargement et le taux de prime en fonction du pourcentage de femmes dans le portefeuille, la proportion de contrat sur deux têtes restant 60%/10%. Le deuxième tableau permet d’analyser l’influence de la proportion de contrats avec réversion dans le portefeuille.

Femmes	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
30%	11386	16.33%	7.71%
40%	11252	16.22%	7.63%
50%	11126	16.00%	7.56%
60%	11020	16.08%	7.50%

TAB. 8.15 – Effet proportion de femmes dans le portefeuille

La féminisation du portefeuille entraîne une légère réduction de prime. La composition du portefeuille n’a en fait qu’un impact moindre sur le montant de la prime technico-financière car faire varier la composition du portefeuille ne joue que sur le nombre d’assurés en fin d’année, les montants à charge par tête restant les mêmes.

Coût du capital. Nous n’utilisons que 3 taux différents pour estimer l’influence de paramètre coût du capital sur la couverture.

Coût du capital	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
14%	12106	23.68%	8.19%
10%	11386	16.33%	7.71%
6%	10391	6.15%	7.03%

TAB. 8.16 – Effet coût du capital

Une augmentation du coût du capital de 8% entraîne une augmentation de 17.5% de la valeur de la prime technico-financière.

TCE. Nous regardons l'influence du quantile α sur le chargement de la prime pure. Le quantile de référence est le quantile 95%.

Quantile	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
90%	11165	14.06%	7.56%
95%	11386	16.33%	7.71%
99.5%	11773	20.28%	7.97%

TAB. 8.17 – Effet quantile du TCE

La table (8.17) nous donne une idée sur la dispersion des valeurs simulées. Lorsque l'on passe du quantile à 90% au quantile à 99.5% le chargement de la prime pure augmente de 6% environ. Le choix du niveau α a une influence sur le prix demandé à la cédante mais elle n'est pas décisive.

Année de garantie. Nous regardons l'impact de l'année de garantie sur le montant de la prime. Jusqu'à présent le produit 20% XS 120% était tarifé en 2010.

Année	P technico-financière	Chargement	Taux de prime
2008	10079	18.75%	7.56%
2010	11386	16.33%	7.71%
2012	12094	14.54%	8.19%
2014	11977	10.47%	8.10%
2016	10357	2.69%	7.01%

TAB. 8.18 – Effet année de garantie

Le chargement diminue progressivement car plus le temps passe, plus la probabilité que la tranche cédée soit entièrement traversée est grande. Or lorsque la tranche est

entièrement traversée le montant par tête est certain. La seule incertitude réside alors sur le nombre de têtes en portefeuille. Ainsi en 2016, la probabilité que la tranche assurée soit entièrement traversée par les hommes est de 89.9% alors qu'elle n'est que de 5% en 2008.

Franchise par sexe. Nous souhaitons pour conclure introduire une franchise par sexe et proposer soit pour les hommes soit pour les femmes des tranches illimitées. Nous avons utilisé un portefeuille fictif dans lequel il n'y avait pas de rentes avec réversion.

Hommes	Femmes	Année	Prime tf	Chargement	Taux de prime
∞ XS 120%	20 XS 120%	2010	13901	30.54%	10.61%
20 XS 120%	∞ XS 120%	2010	11659	14.75%	8.90%
∞ XS 120%	20 XS 120%	2020	11502	32.42%	8.78%
20 XS 120%	∞ XS 120%	2020	6894	10.80%	5.26%

TAB. 8.19 – Effet franchise définie par sexe

Prendre en charge les femmes sur une tranche illimitée est bien moins dangereux pour le réassureur que de prendre les hommes. Si l'on regarde le produit ∞ XS 120% et 20 XS 120% en 2010, selon que la tranche illimitée soit appliquée aux hommes ou aux femmes, le chargement de la prime pure peut être divisé par 2 alors que le volume de prime n'a lui diminué que de 20%. En 2020 nous constatons la même chose. Le chargement de la prime pure passe de 32% à 11% pour un taux de prime qui ne décroît que de 3.5%.

Nous souhaitons à présent mesurer l'impact de l'introduction du trigger financier sur la prime technico-financière et le chargement de la prime pure.

Rappelons qu'à chaque extinction du portefeuille - simulée avec une table prospective donnée - nous associons 1000 scénarios de rendement des actifs de la cédante. Le seuil de déclenchement sélectionné est 4.25%.

Garantie	Période	PTF	PTF	Chargement	Chargement
20 XS 120	2010	11386	7547	16.3%	656.6%
∞ XS 110	2010	20684	13413	12.4%	613.8%

TAB. 8.20 – Prix de différentes couvertures Excess of Loss sur provisions (sans trigger financier à gauche et avec trigger financier à droite)

Nous constatons que l'introduction du trigger financier diminue la valeur de la prime technico-financière de 35% environ pour les deux produits. Au niveau des primes pures par contre, nous remarquons une différence considérable selon que le trigger financier soit souscrit ou non. Pour le produit 20 XS 120, la prime pure passe de 9790 à 998. La charge du réassureur en 2010 passe de 11506 à 1027 alors que le capital alloué cette année-là passe de 3452 à 14287 selon que la garantie trigger est mise en place ou non.

Nous analysons pour conclure la sensibilité des prix et du chargement au seuil de déclenchement du trigger financier Φ .

Seuil	Prime technico-financière	Chargement
4.25%	7547	656.6%
4.75%	8656	150.6%
5.25%	10283	42.4%
5.75%	11148	20.8%

TAB. 8.21 – Effet seuil de déclenchement du trigger financier

Le choix du seuil déclencheur est primordial, il influence considérablement le prix des couvertures de réassurance.

8.6 Autre produit avec introduction d'un tiers au contrat

Dans ce produit, nous proposons la réassurance du risque de longévité pur, c'est à dire sans reprise du passif que nous considérons alors comme entièrement lié aux méthodes internes de provisionnement de la cédante.

Le réassureur couvre la compagnie d'assurance contre une dérive de la longévité postérieure à la date de conclusion du traité. Il ne couvre pas contre les conséquences de la dérive antérieure qui existe déjà intrinsèquement dans les provisions de la cédante.

Pour ce faire, nous proposons de nous référer à une table prospective construite en 2002 par un organisme indépendant sur base des données population Eurostat. La manière de quantifier l'antisélection est également prédéterminée. La garantie offerte est dans l'esprit similaire à celles que nous avons présentée précédemment. Il s'agit d'un couverture contre la dérive du rapport,

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t+k_0)} (a_{x_i+k_0}^{TP(t+k_0)}(t+k_0))}{\sum_{i=1}^{N(t+k_0)} (a_{x_i+k_0}^{TP(t)}(t+k_0))}$$

Où $TP(t+k_0)$ et $TP(t)$ sont établies par l'organisme indépendant cette fois.

Cela permet de mettre en place un lien direct avec le marché financier par l'intermédiaire de cet organisme. Celui-ci construit chaque année une table prospective, puis détermine ensuite les variations annuelles de l'indice de longévité.

L'introduction d'un troisième acteur neutre élimine tout hasard moral ainsi que tout aléa législatif. Des tables prospectives, construites annuellement par l'organisme tiers, permettent au réassureur de ne dépendre d'aucune table de mortalité fixée à l'avance qui changerait pour chaque cédante. Ce qui permet de standardiser l'offre. Elle devient alors facilement transposable d'une cédante à l'autre sans trop d'études complémentaires. Ainsi, les frais de gestion supplémentaires, consécutifs à la présence de ce troisième acteur, se trouvent compensés par la réduction des coûts de gestion et d'études.

8.7 Critiques et améliorations

Nous souhaitons proposer une amélioration quant à la simulation de l'extinction du portefeuille.

Ultérieurement les programmes de cotation devraient être repris avec une méthodologie légèrement différente. Jusqu'à présent l'extinction du portefeuille n'est simulée qu'avec le tirage d'une unique série de lois binomiales par table prospective. Ainsi nous sous-estimons la variabilité autour d'une table donnée ce qui peut avoir de fâcheuses conséquences pour les grands âges. Il aurait fallu pour être plus précis simuler au moins 100 fois l'extinction du portefeuille par table. Nous n'avons pu le faire en raison de temps de calculs prohibitifs qui n'auraient pas permis de procéder à une analyse de sensibilité.

L'idée est de créer une bibliothèque dans laquelle sont stockés des tirages aléatoires de durée de vie d'individus. Pour ce faire, il faut tout d'abord calculer les probabilités de survie cumulées des individus à l'aide des 1000 tables prospectives marché. Ensuite grâce à ces probabilités et au tirage d'une loi uniforme, nous pouvons déterminer l'âge au décès de l'individu. C'est cette information que nous stockons.

Au total nous devons générer au moins 1000 lois uniformes par tête et par table pros-

pective et cela pour un minimum de l individus. Le choix du nombre d'individus est bien évidemment arbitraire. Il dépend de la taille de la bibliothèque que l'on souhaite créer. Précisons également que l'opération doit être répétée pour chaque sexe et pour chaque génération d'individus.

Ensuite il ne nous reste plus qu'à tirer au hasard des individus dans cette bibliothèque pour obtenir une réalisation de l'extinction du portefeuille. Précisons encore que cette bibliothèque devra être créée par cédante, l'estimation de l'antisélection étant personnalisée pour chaque traité.

Conclusion

Nous avons proposé essentiellement cinq produits de réassurance. Les trois premiers visent à limiter le montant des annuités versées par l'assureur. Pour le traité Stop Loss, nous suggérons différentes périodes de couvertures - annuelles ou pluriannuelles - ainsi que des franchises fixes ou variables en fonction de la mortalité observée. L'introduction de clauses aggregate limites est également évoquée. Le traité Excess of Loss en montant quant à lui permet de travailler aisément par génération de contrat en limitant le montant des annuités versées par tête. Le produit Excess of Loss en durée consiste en la prise en charge totale du paiement de la rente par le réassureur dès lors que l'assuré atteint un âge spécifié. De plus, l'introduction d'une période de garantie limitée permet à l'assureur d'effectuer une opération assimilable à un report de provisions dans le temps.

Les deux autres produits développés visent à limiter le montant des dotations aux provisions complémentaires passées par l'assureur. Pour calculer le montant des prestations annuelles du réassureur, on définit un ratio sinistre à prime. Ce ratio est obtenu comme rapport de deux primes pures, l'une des primes pures étant calculée sur base de la législation en cours dans le pays de souscription des contrats de rente viagère. Ce ratio est donné tête par tête ou sur l'ensemble du portefeuille définissant ainsi une couverture Stop Loss et une couverture Excess of Loss sur mali de provisionnement.

A l'aide des techniques de simulation mises en place pour générer les tables de mortalité prospectives, nous calculons la prime pure de ces traités. Puis en utilisant une mesure de risque, nous obtenons la prime technico-financière incluant notamment la rémunération des actionnaires. Pour chacun des produits nous introduisons une garantie double trigger dont le déclenchement est lié à la réalisation simultanée de deux événements, l'un de nature financière, l'autre de nature assurantielle.

A travers les analyses de sensibilité, nous nous sommes efforcés de faire apparaître pour chacun des traités les avantages et les inconvénients des couvertures quant à leur prix ou leur dangerosité, et cela aussi bien pour le réassureur que pour l'assureur. Nous avons vu

en détail les effets liés à la génération à laquelle appartiennent les assurés, ceux liés à la taille du portefeuille et à la répartition homme femme de celui-ci, l'impact du nombre de rentes avec réversion mais aussi l'influence du coût du capital et de la mesure de risque sélectionnée.

Nous avons également évoqué les Longevity Bonds comme source de financement alternative pour le réassureur consistant à transférer une partie du risque de longévité au marché financier.

En France le chiffre d'affaires direct a augmenté de 24% en 2000 pour les contrats à souscription individuelle et les chiffres restent globalement à la hausse au premier semestre 2002 malgré le repli conjoncturel que connaît globalement le secteur. Ainsi si l'on s'en tient à cette tendance générale, il semble que le marché de la réassurance relatif aux portefeuilles de rentes viagères soit amené à se développer rapidement.

Références

- ARTZNER, P., DELBAEN, F., J-M ABER AND D. HEALTH (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9 3, 203-228.
- AUJOUX, D., & CARBONEL, G. (1996). Mortalité d'expérience et risque financier pour un portefeuille de rentes. *Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaire Français*, 1-18.
- BELL, W.R. (1997). Comparing and Assessing Time Series Methods for Forecasting Age-Specific Fertility and Mortality Rates. *Journal of Official Statistics* 13, 279-303.
- BENJAMIN, B., & POLLARD, J.H. (1993). *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics*. Institute and Faculty of Actuaries, Oxford.
- BREALEY, RICHARD A., & MYERS, STEWARD C. (2000). *Principles of Corporate Finance*. Mac Graw-Hill.
- BRILLINGER, D.R. (1986). The natural variability of vital rates and associated statistics. *Biometrics* 42, 693-734.
- BROCKWELL, P.J., & DAVIS, R.A. (1996). *Introduction to Times Series and Forecasting*. Springer Verlag, New York.
- BROUHNS, N., DENUIT, M. & VERMUNT, J. (2002a). A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. *Discussion Paper 207*. Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- BROUHNS, N., DENUIT, M. & DELWARDE, A. (2002). Elaboration de table de mortalité prospectives. *Rapport de l'ARAB*. Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- FRANTZ, C. (2002). Tarification actuarielle contre financière des contrats en unité de compte. *Mémoire*. Institut Louis Pasteur, Strasbourg.
- GOODMAN, L.A. (1979). Simple models for the analysis of association in cross-classifications having ordered categories. *Journal of the American Statistical Association* 74, 537-552.
- HUGUES, C. (2000). Analyse Actif Passif d'un contrat de retraite collective. *Mémoire*. Institut des Sciences Financières et d'Assurance, Lyon.
- LEE, R.D. (2000). The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal* 4, 80-93.

- LEE, R.D., & CARTER, L.R. (1992). Modeling and Forecasting the time series of U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87, 659-675.
- LEE, R.D. & MILLER, T. (2000). Assessing the performance of the Lee Carter approach to modelling and forecasting mortality. *see www.demog.berkeley.edu*
- QUITTARD-PINON, F. (1993). *Marché des capitaux et théorie financière*. Economica, Paris.
- RENSHAW, A.E. & HABERMAN, S. (2002). Lee Carter mortality forecasting, a parallel GLM Approach. *Actuarial Research Paper 140*. Department of actuarial science and statistics, City University, London.
- TERRIER, S. (2001). Les rentes viagères : mortalité et réassurance *Bulletin Français d'Actuariat*, 39.
- WALHIN, J.F., HERFURTH, L., & DE LONGUEVILLE, P. (2001). The practical pricing of Excess of Loss treaties : actuarial, financial, economic and commercial aspects. *Belgian Actuarial Bulletin* 7.