

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff CEDEX, FRANCE



Mémoire d'Actuariat - Promotion 2010

**Les Déflateurs stochastiques :
quelle utilisation en assurance ?**
Hugues Dastarac et Paul Sauveplane

MOTS-CLÉS : *Déflateurs Stochastiques, Prime de risque, Evaluation Best Estimate, Modèle d'Actif, Solvabilité II*

KEYWORDS: *Stochastic Discount Factors, Risk Premium, Best Estimate, Asset/Liability Model, Solvency II*

ENCADREMENT : Marc Juillard, Frédéric Planchet (WINTER & Associés)

CORRESPONDANT E.N.S.A.E. : Christian Yann Robert

MEMOIRE NON CONFIDENTIEL

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE

3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff CEDEX, FRANCE

Mémoire d'Actuariat - Promotion 2010

Les Déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ?

Hugues Dastarac et Paul Sauveplane

MOTS-CLÉS : *Déflateurs Stochastiques, Prime de risque, Evaluation
Best Estimate, Modèle d'Actif, Solvabilité II*

Résumé

La mise en œuvre du dispositif Solvabilité 2 nécessite à la fois de calculer des probabilités de ruine et de déterminer des prix pour l'ensemble des flux répliquables du passif. L'approche aujourd'hui privilégiée pour répondre à ce double objectif a été de modéliser l'actif de l'organisme assureur à la fois dans l'univers historique (pour la détermination du quantile à 99,5 % de la distribution du surplus) et dans l'univers risque-neutre (pour le calcul de la valeur de marché des engagements).

L'un des problèmes associés à cette double simulation est l'approche *a priori* non cohérente entre les différents paramètres utilisés, notamment pour les primes de risque, au contraire de ce qu'impose la directive. En particulier, la valeur des paramètres n'est pas la même dans les deux univers, tandis qu'il est possible d'avoir des incohérences en ce qui concerne les primes de risque.

Ainsi, deux actifs valorisés avec des modèles classiques (par exemple une action de type Black/Scholes et un zéro-coupon modélisé par un processus de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)) pourront impliquer des primes de risque différentes, toutes choses égales par ailleurs. De plus, on ne connaît pas théoriquement les liens qui peuvent exister entre primes de risque dans les univers

séparés et celles qui caractérisent la réunion des univers d'actifs.

Dans ce contexte, ces problèmes nous invitent à considérer les déflateurs¹, qui proposent un cadre unifié pour le calcul des primes de risque, et donc pour le calcul de la valeur de marché des engagements. L'objet du mémoire est dans un premier temps de donner une introduction à ces fonctions d'actualisation stochastiques, avant de montrer dans un second temps que l'impact de la modélisation retenue pour la prime de risque sur le calcul d'une valeur de marché (en particulier du *best estimate* d'un contrat d'assurance-vie) est très significatif.

Formellement, un déflateur est un facteur d'escompte stochastique, c'est-à-dire un processus qui est, à un facteur d'escompte purement temporelle au taux sans risque près, la dérivée de Radon-Nikodym de la probabilité risque-neutre par rapport à la probabilité historique. On peut ainsi voir le déflateur comme le produit d'un facteur d'escompte temporelle par un facteur d'escompte supplémentaire lié au risque des actifs évalués.

L'existence d'un tel déflateur est associée à une situation d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Un marché est en situation d'AOA si tout actif ou tout portefeuille garantissant des flux presque sûrement positifs, et strictement positifs avec une probabilité non nulle, a un prix strictement positif. Dans un tel marché, il existe un déflateur. Ces processus stochastiques possèdent plusieurs propriétés remarquables :

- un déflateur est un processus strictement positif;
- les prix déflatés (le produit d'un prix couvert par le modèle par un déflateur associé au modèle considéré) sont des martingales sous la probabilité historique;
- le marché est complet si et seulement si le déflateur associé est unique.

Les déflateurs existent dans le cadre de modèle mono- et multi-périodiques, en temps discret et en temps continu, pour des flux futurs prenant leurs valeurs dans un ensemble discret ou continu. En temps continu, pour des flux futurs continus, il importe que les facteurs de risque soient des processus càd-làg (continus à droite avec limite à gauche) : en particulier les processus à sauts (que l'on utilisera pas dans ce mémoire) infiniment actifs semblent exclus du cadre d'analyse. Quoiqu'il en soit, les déflateurs couvrent une classe

¹Ou déflateur d'état (*state-price deflator*), ou facteur d'escompte stochastique (*stochastic discount factor*), ou noyau d'évaluation (*pricing kernel*).

très générale de modèles.

On utilise ce cadre conceptuel pour la valorisation du *best estimate* d'un contrat d'assurance-vie en euros de type épargne avec taux minimum garanti. Un tel contrat garantit à l'épargnant un rendement minimal sur son capital ainsi qu'une participation aux bénéfices engrangés au-delà de ce taux minimal. Par ailleurs, il est possible à l'assuré de racheter son contrat moyennant des pénalités.

Le but est de comparer le *best estimate* lorsque la prime de risque est constante et lorsque la prime de risque est stochastique et qu'elle suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont la valeur de long terme est la valeur retenue lorsque la prime est supposée constante : on ne fait ainsi que rajouter un bruit autour de la tendance. Le facteur de risque sous-jacent est supposé indépendant des autres facteurs de risque du marché, de sorte qu'aucun actif n'y est sensible. Il nous semble que cette composante hors marché est essentielle car une modélisation spécifique de la prime suppose déjà la non-unicité du déflateur et donc l'incomplétude du marché. Le problème se situe en fait en amont : la restriction classique sur les primes de risque (supposées être des multiples fixes de la volatilité des paramètres sous-jacents) n'a aucune justification théorique, tandis que des études empiriques montrent qu'elles impliquent des dynamiques au pouvoir prédictif aussi faible que celui de simples marches aléatoires.

On pourrait se demander pourquoi on ne suppose pas plus simplement un facteur de risque supplémentaire dans le marché pour rendre compte de la structure de marché complexe observée dans la réalité. L'idée est qu'incorporer le facteur de risque supplémentaire dans la prime de risque permet de conserver, pour les modèles affines de taux, les formules fermées associées lorsque la valorisation est effectuée en probabilité risque-neutre.

On suppose dans ce mémoire que la population assurée est homogène (10 000 hommes, tous âgés de 40 ans) et que le contrat prend fin au bout de 8 ans. Le taux minimum garanti est de 3 %. Le rachat prématuré induit une rétention par l'assureur de 5 % de l'encours du contrat, tandis que l'événement de mort n'induit aucune pénalité (conservation du taux garanti) mais implique le reversement de l'épargne aux héritiers. La participation aux bénéfices est versée intégralement chaque année : cette hypothèse ne tient pas compte des provisions pour égalisation qui manifestent une rétention temporaire d'une partie des bénéfices par les assureurs. Néanmoins, une telle hypothèse nous permet de simplifier les calculs.

Enfin, on suppose que l'épargne est investie à 30 % sur un actif risqué suivant une dynamique brownienne géométrique et à 70 % sur un zéro-coupon de maturité égale au terme du contrat suivant une dynamique CIR.

Les simulations menées pour un contrat de valeur initiale 100 000 euros donnent un *best estimate* de 160 000 euros environ lorsque la prime de risque est constante et de 200 000 euros environ lorsqu'elle est stochastique. La différence est donc très significative (de l'ordre de 20 %) et intuitive : l'ajout d'un facteur de risque supplémentaire augmente de prix de marché de l'engagement associé au contrat.

En conclusion, il semble que la modélisation stochastique de la prime de risque, qui est conforme aux études empiriques, modifie de façon très significative le *best estimate* du passif d'un contrat d'épargne – dans notre cas, dans le sens d'une augmentation de 20 %. On peut imaginer que ce résultat s'étend à d'autres actifs, assuranciers ou non.

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff CEDEX, FRANCE

Actuarial Thesis - Year 2010

Stochastic discount factors: which use for insurance companies ?

Hugues Dastarac et Paul Sauveplane

KEYWORDS: *Stochastic Discount Factors, Risk Premium, Best Estimate, Asset/Liability Model, Solvency II*

Abstract

The Solvency 2 process requires to compute both ruin probabilities and prices for all liabilities replicable flows. The hitherto chosen approach has been to model the insurer's assets in both historical and risk-neutral universes, the former in order to compute the 99.5 % quantile of the own funds distribution, the latter to determine the market value of its liabilities.

One of the problems associated to this double simulation is that it lacks coherence between the parameter used (contrary to what Solvency 2 will require), especially for the risk premia associated to different assets modeled differently. As far as the other parameters are concerned, their values are not the same in the two universes.

Hence, two assets modeled in classical ways (*e.g.* a stock following geometric brownian dynamics and a zero-coupon bond following CIR dynamics) may imply incoherent risk premia, that is, risk premia that would correspond to different investor's preferences. Moreover, one does not know the theoretical links between the risk premia associated to the two separated universes (stock and bonds) and the ones associated to the gathering of the two (stock and bonds traded on the same market).

Such problems make a deflator-oriented² approach potentially valuable. Deflators give a coherent approach for all parameters and for risk premia, hence for market value computations. The purpose of this actuarial thesis is, first, to give an introduction to deflators and, second, to show that the impact of the risk premium model on the best estimate of a life-insurance contract is highly significant.

Formally, a state-price deflator is a discount factor that is stochastic, that is, a stochastic process which is the Radon-Nikodym derivative of the risk-neutral probability with respect to the historical probability, up to a purely temporal discount factor. Hence the deflator can be seen as the product of this purely temporal discount factor and a risk discount factor.

The existence of such a deflator is associated to a no-arbitrage condition. There is no arbitrage opportunity on a market if and only if every asset or every portfolio of assets that promise almost surely positive payoffs and strictly positive payoffs with non-zero probability have a strictly positive price. On such markets, there exists a deflator which has remarkable properties :

- it is almost surely strictly positive ;
- deflated prices (*i.e.* products of the deflator by a price process) are martingales under the historical probability ;
- the market is complete if and only if the associated deflator is unique.

Deflators are defined for mono and multi-period models, in discrete or continuous time, for payoff streams that take values in discrete or continuous sets. In continuous time with continuous payoffs, what matters is that the risk factors be càd-làg (right-continuous with a left limit) : in particular, infinitely active jump processes (which we will not use in this actuarial thesis) seem to be excluded from this framework. Hence deflators cover a wide class of models.

We use this framework to compute the best estimate of a euro life-insurance contract of saving type, with guaranteed minimal rate of interest. Such a contract guarantees a minimal rate of return plus a share on benefits above this minimal rate of return. It is also possible to buy one's contract back, but this is subject to financial penalties.

The goal is to compare the best estimate when the risk premium is constant and when it is stochastic, following an Ornstein-Uhlenbeck process whose long term value is the constant one (so that we do not introduce more

²Deflator, or state price-deflator, or stochastic discount factors, or pricing kernels.

than noise around around the constant trend). The underlying risk factor is supposed to be independent from other market factors so that no asset is sensitive to it – it seems to us that such a non-market factor is essential in order to be coherent with market incompleteness we already suppose by modeling the risk premia separately. The problem is in fact deeper than a completeness one : the classical restriction that the market price of risk (*i.e.* per unit of volatility) should be constant lies on no theoretical ground and has as much predictive power as pure random walks.

One could wonder why we do not simply introduce another market factor to account for the complex structure of real markets. The idea is that the "risk premium" way of introducing the additional market factor allows to keep the closed formulae when pricing a risk-neutral way.

We suppose that all insured people are homogenous (namely, they are 10,000 forty years old men) and that the contract ends within 8 years. The minimum rate of return is set at 3 %, whereas penalties for buying back before the 8 years maturity are set to 5 % of the market value of the funds behind the contract. Death imply end of the contract with no penalties and the minimum annual rate of return is stills guaranteed. Benefits above this minimum rate of return are payed each year to the insured with a rate of 85 % : although not realistic (direct payment of the benefits), this assumption allows to simplify the computations.

Finally, we suppose that the funds are invested in one stock following brownian geometric dynamics and in one CIR zero-coupon bond with time to maturity of 8 years at the beginning of the contract.

For an insured capital of €100,000, simulations give a best estimate of about €160,000 with a constant risk premium, and around €200,000 with a stochastic risk premium, that is, a 20 % gap between the models. This is indeed an intuitive result : adding a risk factor increases the market price of the liabilities associated to the contract.

To conclude, it seems that a stochastic modeling of the risk premia increases the best estimate of any asset, while this choice is consistent with empirical evidence.

Remerciements

Nous tenons à remercier très sincèrement Marc JUILLARD et Frédéric PLANCHET (WINTER & Associés) de nous avoir donné l'occasion de travailler sur ce sujet ainsi que pour leur soutien tout au long de cette étude. Tout en nous apportant constamment leurs conseils, ils ont su nous laisser beaucoup de liberté dans la réalisation de notre travail. Qu'ils soient enfin remerciés pour la confiance qu'ils nous ont montrés en nous invitant à intervenir dans le cadre des Séminaires Professionnels de l'Institut des Actuaire.

Table des matières

Introduction	17
1 La directive Solvabilité 2	21
1.1 La directive Solvabilité 1 : présentation et limites	21
1.1.1 Calcul de l'exigence de marge : organisme non-vie	21
1.1.2 Calcul de l'exigence de marge : organisme vie	22
1.1.3 Limites de la réglementation existante	23
1.2 La directive Solvabilité 2	24
1.2.1 Pilier 1 : exigences quantitatives	24
1.2.2 Pilier 2 : exigences qualitatives et surveillance prudentielle	26
1.2.3 Pilier 3 : Publication et reporting prudentiel	27
2 Les déflateurs	29
2.1 Absence d'opportunité d'arbitrage et prix d'état	29
2.1.1 Cadre de travail : notion de prix d'états	29
2.1.2 Illustration : modèle mono-périodique à deux états	30
2.2 Déflateur d'état	31
2.2.1 Cas mono-périodique	31
2.2.2 Extension à un cas multi-périodique	31
2.2.3 Passage en temps continu	34
2.3 Calcul du capital économique d'une compagnie dans le cadre de Solvabilité 2 : comparaison avec une approche risque-neutre	36
2.3.1 Equivalence formelle des deux approches	36
2.3.2 Avantages de l'approche par déflateurs sur l'approche risque-neutre	36
2.4 Pourquoi s'intéresser aux primes de risque ?	37
2.5 Forme générale des déflateurs pour un modèle simple	38
2.5.1 Hypothèses essentielles sur le modèle économique	38
2.5.2 Forme générale de la structure par terme des taux d'intérêt	39

2.5.3	Forme générale du déflateur	41
3	Applications	45
3.1	Modèle de Black et Scholes	45
3.1.1	Expression du déflateur	45
3.1.2	Prix d'une option d'achat européenne	47
3.1.3	Application à un contrat d'épargne	48
3.2	Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)	55
3.2.1	Expression du déflateur	56
3.2.2	Prix des zéro-coupon	56
3.3	Etude d'un portefeuille simple	59
3.4	Simulation d'un portefeuille simple	60
3.4.1	Court terme	60
4	Estimation des paramètres	65
4.1	Risque action : Calibration d'un modèle de type Black-Scholes	65
4.1.1	Estimation de la tendance et de la volatilité	65
4.1.2	Comparaison des approches risque-neutre et par les dé- flateurs : illustration à partir de données réelles	67
4.1.3	Evaluation du prix de marché du risque	69
4.2	Risque de taux : Calibration d'un modèle de type Cox, Inger- soll et Ross (CIR)	70
4.2.1	Justification de l'emploi d'un modèle CIR pour la mo- délisation de la dynamique des taux d'intérêt	70
4.2.2	Estimation des paramètres du modèle CIR	71
4.2.3	Evaluation du prix de marché du risque	72
5	Valorisation du passif d'une compagnie d'assurance vie	75
5.1	Réglementation et Capital économique	75
5.1.1	La Juste Valeur économique	75
5.1.2	Bilan économique et notion de Best Estimate	76
5.2	Générateurs de Scénarios économiques	77
5.3	Le contrat d'épargne	78
5.3.1	Présentation du contrat d'épargne en euros	78
5.3.2	Points particuliers de la gestion d'un contrat d'épargne	79
6	Détermination du <i>best estimate</i> d'un contrat d'épargne	83
6.1	Présentation du contrat et valorisation du passif associé	83
6.1.1	Caractéristiques du contrat	83
6.1.2	Valeur de marché des flux du passif	85
6.2	Prime de risque constante	85

6.2.1	Evaluation du <i>Best Estimate</i>	85
6.2.2	Sensibilité aux paramètres	86
6.3	Prime de risque stochastique	88
6.3.1	Le processus de prix de marché du risque	88
6.3.2	Modélisation de la prime de risque	89
6.3.3	Quelles explications théoriques pour des primes de risque variables?	91
6.3.4	Simulations et résultats	91
6.3.5	Interprétation et conclusions	92
6.3.6	Synthèse : De l'utilité du cadre offert par les déflateurs	92
Conclusion		95
A Quantiles empiriques - Horizon d'investissement de 1 an		101
B Codes Scilab utilisés pour les simulations		103
B.1	Etude d'un portefeuille simple	103
B.2	Calcul du Best Estimate	107

Introduction

La directive Solvabilité 2 impose le double objectif de calculer le capital économique nécessaire pour assurer la solvabilité des compagnies d'assurance à horizon d'un an ainsi que la valeur de marché de leurs engagements réglementés. Pour répondre à ces impératifs, les compagnies sont invitées à s'appuyer sur des modèles internes.

La méthode la plus couramment utilisée, en pratique, consiste à modéliser l'actif de l'assureur à la fois dans l'univers historique afin de déterminer le quantile à 99,5% de la distribution des fonds propres, et dans l'univers risque-neutre pour le calcul de la valeur de marché des engagements. Cette approche est particulièrement lourde en termes de mise en œuvre. En effet, elle nécessite une double simulation du passif de l'assureur, tout d'abord sur un an dans l'univers historique (pour la détermination du quantile des fonds propres) puis sur l'horizon de projection dans l'univers risque-neutre (pour le calcul de la valeur de marché des engagements). Si c'est une des approches les plus conformes aux critères de Solvabilité 2, elle conduit à des temps de calcul la rendant difficilement utilisable pour des compagnies d'assurance de taille importante, et les techniques qui ont été mises en place pour optimiser la méthode des simulations dans les simulations (SdS) restent complexes (*cf.* Devineau et Loisel (2009)).

Pour pallier cette difficulté, deux solutions ont été envisagées :

- Recourir à une approche de type "Replicating Portfolio", qui en ayant recours à un portefeuille d'actifs valorisables par des formules fermées contourne les problèmes posés par la méthode SdS.
- Contourner le problème en travaillant uniquement sous la probabilité historique grâce à l'utilisation des déflateurs d'état.

C'est à cette deuxième approche que se consacre notre étude. Le déflateur³ stochastique associé au modèle économique utilisé pour représenter les

³Egalement appelé dans la littérature facteur d'escompte stochastique, noyau d'évaluation, *etc.*, soit en anglais *deflator*, *stochastic discount factor*, *pricing kernel*.

actifs échangés dans l'économie, est une fonction d'actualisation *associée à une modélisation économique donnée* qui présente à la fois une composante temporelle (actualisation classique) et une composante risque. Une fois que le déflateur associé au modèle a été explicité, il devient alors possible de valoriser des flux futurs aléatoires sous la probabilité historique.

L'avantage des déflateurs est qu'ils permettent alors de prendre en compte de façon cohérente les primes de risque associées à l'ensemble des actifs évalués, contrairement à une approche actif par actif. En effet, on a l'habitude depuis Harrison et Pliska (1983) de ne pas s'en préoccuper, mais rien ne garantit que la prime de risque calibrée sur un ensemble d'actifs variés (ex : action *et* zéro-coupon) soit liée de façon simple aux primes de risques calibrée sur des sous-ensembles de ces actifs (ex : actions seules, obligations seules, en supposant même les mêmes processus de diffusion pour chaque facteur de risque que sur l'univers plus large).

Quel serait l'impact d'une modélisation non cohérente des primes de risque ? L'argument d'incohérence théorique peut se suffire à lui-même, sachant qu'il implique une mauvaise estimation de la valeur de marché du passif qui est *a priori* conditionné, dans le cadre d'un contrat d'assurance-vie (par exemple pour un taux garanti), par l'ensemble de l'actif placé en face. On remarquera que Devineau et Loisel (2009) présupposent l'existence d'un cadre unifié pour le calcul du capital économique requis pour un contrat d'épargne.

Plus précisément, dans le cadre standard de l'absence d'opportunité d'arbitrage sur un marché d'Itô, la prime de risque d'un actif est la somme des volatilités des facteurs de risque pondérées par des sensibilités appelées *prix de marché du risque*.

Le problème de ce mémoire est alors le suivant : **les modèles standard font l'hypothèse d'une prime de risque constante, alors même que le cadre théorique général ne garantit l'existence que d'un processus stochastique de prix de marché du risque : supposer constants ces processus est une hypothèse qui n'est pas neutre. De plus, à la lumière d'estimations des primes de risque sur des données récentes (cf. Ahmad et Wilmott (2007), Caja et Planchet (2010)) qui laissent supposer que les primes de risques ne sont pas constantes, est-il judicieux d'introduire un processus décrivant ces primes de risque dans le modèle de valorisation utilisé ?**

Sur le plan théorique, l'existence d'un déflateur est impliquée dès que le marché est supposé sans opportunité d'arbitrage (cf. Harrison et Kreps (1979) et Kreps (1981)). Une extension du cadre dans lequel l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'un déflateur est donnée dans Jouini, Napp et Schachermayer (2007). Dans cet article, le théorème de Kreps (1981) don-

nant l'existence d'un déflateur dans un cadre usuel (espace probabilisé des fonctions aléatoires continues) est en particulier étendu au cas où l'espace des processus est muni d'une mesure sigma-finie et non plus seulement finie comme pour un espace probabilisé : concrètement, il établit l'existence d'un déflateur pour des processus à sauts qui ne sont pas infiniment actifs⁴ ; pour ceux qui le sont, en revanche, le théorème n'est pas applicable en général. Cependant, notre mémoire ne fera pas usage de processus de Lévy qui n'apporteraient pas nécessairement de plus-value à une étude de processus à long terme.

Dans ce contexte, on a pu soit chercher à estimer des formes convenables mais non structurelles du déflateur (*cf.* en particulier Bansal et Viswanathan (1993), Gouriéroux et Montfort (2007) par exemple), soit, ce qui correspond à notre approche, chercher une modélisation structurelle du déflateur. La littérature est à ce sujet assez peu étoffée à notre connaissance, en dehors des modèles d'équilibre économique. Cox, Ingersoll et Ross (1985a) est un exemple de modèle d'équilibre fournissant des formules générales mais difficilement applicables sans hypothèses supplémentaires sur le comportement des actifs. En dehors de ces modèles, Fisher et Gilles (2000) se proposent de modéliser la structure de la densité de prix d'état (*i.e.* le déflateur) des taux d'intérêt, quelle que soit son origine (modèle d'équilibre général ou absence d'opportunité d'arbitrage).

D'un point de vue plus appliqué, on pourra trouver dans Jarvis, Southall et Varnell (2001) et de façon plus technique dans Smith (1996) une revue des techniques financières de valorisation à destination des actuaires.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, nous rappelons le contexte réglementaire dans lequel s'inscrivent les calculs de capital économique.

Puis nous présentons le cadre théorique d'absence d'opportunité d'arbitrage qui sous-tend l'utilisation des déflateurs. A partir du cas simple d'un modèle mono-périodique on introduit les notions de prix d'état puis de déflateur d'état. On peut alors étendre cette notion à un modèle multipériodique puis en temps continu et démontrer les principales propriétés des déflateurs. On trouve notamment que dans un marché sans opportunité d'arbitrage, on peut définir un déflateur comme étant un processus stochastique tel que sous la probabilité historique le produit du déflateur par le processus de diffusion

⁴*cf.* Cont et Tankov (2004) pour une introduction aux processus de Lévy et à leurs applications en finance)

du prix des actifs est une martingale. Si le marché est de plus complet, de même que la probabilité risque-neutre était unique, on a unicité du déflateur associé au modèle.

Après avoir étudié les différentes propriétés des déflateurs stochastiques, on propose une comparaison avec la méthode de valorisation utilisant un passage sous la probabilité risque-neutre. L'utilisation des déflateurs permet de conserver un cadre unifié pour l'ensemble des calculs requis pour l'évaluation du capital économique. Le fait de travailler dans un cadre homogène supprime notamment les incohérences en matière d'estimation des paramètres qui pouvaient naître de l'utilisation de deux univers différents : par exemple, alors que la volatilité d'un actif est un paramètre déterminé, l'approche risque-neutre (pricing) est menée avec un niveau de volatilité de l'actif différent de celui utilisé dans l'univers historique (calcul des quantiles).

Ensuite on s'intéresse à une économie composée de zéro-coupon de type CIR et à des actifs risqués suivant un mouvement brownien géométrique. On explicite la forme du déflateur associée aux modèles comprenant un seul de ces actifs (Black-Scholes, CIR) avant de d'explicitier la forme du déflateur associé au modèle complet. S'il est rarement possible de trouver une formule fermée, on obtient toutefois des formes en mesure d'être calculées numériquement.

La partie suivante est consacrée à la calibration du modèle mixte Black-Scholes et CIR que nous utilisons.

La cinquième partie présente les enjeux du calcul du *best estimate* d'un contrat d'épargne en assurance-vie.

Ainsi, nous pouvons dans la sixième partie appliquer la méthodologie des déflateurs à un contrat d'épargne avec garantie plancher : nous pouvons comparer les résultats lorsqu'on suppose les primes de risque constantes et lorsqu'elles sont modélisées par un processus d'Itô.

Chapitre 1

La directive Solvabilité 2

La directive Solvabilité 1, encore en vigueur au moment de la rédaction de ce mémoire, régule de façon très simple les compagnies d'assurance. Nous présentons dans une première partie cette réglementation et ses limites, avant de présenter de façon succincte la directive Solvabilité 2.

1.1 La directive Solvabilité 1 : présentation et limites

Sous Solvabilité 1, les compagnies d'assurance sont essentiellement tenues de respecter trois contraintes sur leur bilan :

1. les provisions techniques doivent être prudentes, ce qui suppose des hypothèses de calcul prudentes
2. les actifs du bilan doivent permettre le règlement intégral des engagements : en particulier, les engagements réglementés (provisions techniques et autres créances prioritaires) doivent être représentés par des actifs sûrs, liquides, rentables et la base de dispersion (actifs en représentation diminués des créances sur réassureurs) doit satisfaire des exigences de dispersion et de composition du portefeuille ;
3. les fonds propres doivent être supérieurs à un minimum appelé exigence de marge, dont le calcul est détaillé ci-après.

1.1.1 Calcul de l'exigence de marge : organisme non-vie

Deux méthodes sont retenues pour le calcul de l'exigence de marge : une fondée sur les primes donnant un montant M_1 , l'autre sur les sinistres

donnant un montant M_2 . L'exigence de marge est égale au maximum des deux montants obtenus.

Le montant M_1 obtenu par la méthode des primes se calcule de la manière suivante : le montant des primes est divisé en deux tranches, l'une égale au maximum à 53,1 millions d'euros (seuil en vigueur depuis le 1^{er} janvier 2008), l'autre prenant le reste des primes acquises. On prend alors 18 % de la première tranche et 16 % de l'éventuelle seconde, et on multiplie la somme de ces fractions par le coefficient de réassurance (provisions techniques non cédées à un réassureur divisées par les provisions techniques totales, moyenné sur 3 ans) minoré par 50 %. Les primes sont majorées de 50 % en responsabilité civile (RC) pour les branches 11, 12 et 13, sauf en RC auto : en effet, la RC peut impliquer des montants très élevés.

Le montant M_2 obtenu par la méthode des sinistres se calcule de la façon suivante : la charge de sinistre étant définie comme la somme des prestations versées, des frais accessoires payés et de la variation des PSAP (y compris les frais), on divise cette charge comme pour les primes en deux tranches, l'une de montant maximal 37,2 millions d'euros (depuis le 1^{er} janvier 2008) et l'autre prenant le reste. On somme 26 % de la première tranche et 23 % de la seconde, et on multiplie par le coefficient de réassurance minoré par 50 %. La charge de sinistres de la RC dans les branches 11, 12 et 13 sauf en RC auto est toujours majorée de 50 %.

La différence de taux entre la méthode des primes et la méthode des sinistres tient au chargement que comprend la prime commerciale par rapport à la prime pure.

1.1.2 Calcul de l'exigence de marge : organisme vie

Les contrats d'assurance-vie ont deux risques principaux qui leur sont associés :

- le risque de placement financier dans le cas de taux garantis ;
- le risque viager (c'est-à-dire lié à la durée de la vie humaine).

Chacun de ces risques fait l'objet d'un "matelas" séparé. En particulier, les contrats d'épargne et les contrats de prévoyance sont traités distinctement.

Pour un contrat d'épargne (risque financier, pas de risque viager), la provision mathématique est à chaque instant égale à la prestation possible. Pour chaque police, l'assureur a deux possibilités : s'il fait face à un risque de placement, le montant minimal de marge est égal à $M_1 = 4\%$ de la provision mathématique (PM) ; pour des contrats en UC, l'exigence de marge est $M_2 = 1\%$ de la PM, et ce à cause du risque de liquidité (risque de liquidité

de marché des actifs, risque opérationnel, risque d'inadéquation actif-passif à cause du droit de renonciation d'un mois à compter de la date de signature du contrat, et du risque de rachat : la date d'ordre n'est pas obligatoirement la date de son exécution). Ainsi, pour l'ensemble des contrats d'épargne, le minimum de marge est égale à la somme des M_1 et M_2 . Pour le cas particulier d'un contrat en UC avec garantie de reversement de la prime, on retient le montant M_1 .

Pour un contrat de prévoyance (ex : promesse d'une rente de x € en cas de vie ou de décès), le risque viager s'ajoute au risque financier. Pour chaque police, on fait la somme de l'exigence associée au risque de placement (4 % de la PM) et de l'exigence associée au risque viager (0,3 % du capital sous risque (CSR), où le CSR représente la différence entre la prestation garantie et la prestation constituée – pour une temporaire décès par exemple, la PM est quasi nulle, mais la prestation garantie est le montant des rentes versées si toutes les personnes assurées meurent).

Comme dans le cas de la non-vie, on peut prendre en compte la réassurance du risque financier par le coefficient de réassurance défini comme le rapport des PM conservées sur les PM totales, et qui est cette fois-ci minoré par 85 %. La réassurance du risque viager est aussi prise en compte, le ration correspondant étant le rapport du capital sous risque conservé sur le capital sous risque total, minoré par 50 %.

L'exigence de marge totale est la somme de tous les montants obtenus sur chaque contrat.

1.1.3 Limites de la réglementation existante

La réglementation Solvabilité 1 a, en premier lieu, l'avantage de sa grande simplicité : les exigences de marges sont facilement calculables, et facilement auditable.

Cependant, l'exigence de marge ne prend que très imparfaitement en compte les risques auxquels sont soumis les assureurs. En particulier :

1. les risques techniques ne sont pris en compte que de manière rudimentaire : 1 € de prime en assurance dommages auto mobilise autant de fonds propres que 1 € de prime en assurance responsabilité civile médicale, alors que les risques techniques sont d'une ampleur différente (une réponse partielle a été donnée, par la majoration des primes et sinistres en RC dans le calcul de l'exigence de marge)
2. la prise en compte de la réassurance n'est pas satisfaisante : le système actuel est en effet fondé sur un ratio forfaitaire de cession en réassurance, calculé sur la base de données relatives aux exercices précédents ;

le calcul effectué est donc rétrospectif et ne tient pas compte des éventuelles modifications du programme de réassurance intervenues entre temps ; par ailleurs, il n'est véritablement adapté que pour les traités en quote-part (proportionnels) et non pour les traités en excédent de sinistre, en *stop-loss*, etc.

3. la marge de solvabilité d'une entreprise est appréciée uniquement de manière quantitative, et non de manière qualitative : la qualité des systèmes de gestion des risques et de contrôle interne ne sont pas prises en compte — les assureurs sont toutefois tenus de remettre divers rapports sur la solvabilité et sur la réassurance à l'ACAM puis à l'ACP. Par ailleurs, un bon gage de solvabilité étant le constat de résultats positifs sur plusieurs exercices antérieurs, cet élément n'est pas pris en compte.

1.2 La directive Solvabilité 2

Face aux limites de Solvabilité 1, la directive Solvabilité 2 privilégie une approche responsabilisante de la gestion des risques du point de vue de l'assureur, lui laissant en particulier la possibilité de juger à partir d'un modèle qu'il aura lui-même élaboré de l'exigence de capital correspondant à son profil de risque.

Mais cette directive dépasse les exigences quantitatives. Nous présentons brièvement les trois piliers qui la composent. Le premier concerne les exigences quantitatives de l'assureur, le deuxième les exigences qualitatives (gouvernance interne, surveillance par le régulateur) et le troisième la communication d'informations au superviseur et au public.

1.2.1 Pilier 1 : exigences quantitatives

Avant de nous intéresser aux exigences en capital proprement dites, nous abordons le mode de comptabilisation et l'évaluation du reste du passif, par rapport auxquels les premières prennent leur sens. Enfin, nous envisageons les fonds propres admissibles.

On retient en premier lieu la comptabilisation *market consistent* de l'ensemble des postes du bilan, contrairement à la réglementation actuelle en valeur historique. Ce mode de comptabilisation, qui suit notamment l'approche de l'IASB et celle de la réglementation bancaire Bâle II, cherche à retenir une approche économique du bilan.

Par ailleurs et suivant la comptabilisation en *Mark-to-Market*, les provisions techniques doivent être calculées comme l'espérance des engagements

futurs actualisés, augmentée d'une marge pour risque définie réglementairement. Ainsi, en-dehors de cette marge, les provisions techniques doivent ne pas être trop conservatrices.

Les exigences en capital sont déterminées par deux seuils : le MCR (*Minimum Capital Requirement*) représente le seuil en-deça duquel l'assureur se voit retirer son agrément ; le SCR (*Solvency Capital Requirement*) est le montant minimal de fonds propres en-deça duquel il encourt une intervention du régulateur (rappel à l'ordre ou sanctions).

Le SCR est déterminé de sorte que la probabilité de ruine de la compagnie (l'événement de ruine correspondant à une valeur de marché des fonds propres négative), à horizon d'un an, soit inférieure ou égale à 0,5 %, ce qui correspond statistiquement à un événement de ruine tous les 200 ans, en supposant que les ruines des compagnies soient indépendantes et identiquement distribuées.

Les risques que doit couvrir le SCR sont par ailleurs d'ordre multiple : marché, souscription, crédit, opérationnel.

Enfin, le SCR peut être calculé suivant deux approches :

- soit par une formule standard fournie par la réglementation ;
- soit par un modèle interne de gestion des risques approuvé par le régulateur ; ce modèle interne est soit partiel (certains éléments ou paramètres sont fournis par la réglementation) ou complet.

Le MCR est quant à lui calculé de façon simple : il représente de 25 à 45 % du SCR.

Les fonds propres exigibles peut se décliner en deux catégories :

- les fonds propres de base, (*Basic Own Funds* ou BOF), présents au bilan, soit les fonds propres (actifs moins passifs) et les passifs subordonnés ;
- les fonds propres auxiliaires (*Ancillary Own Funds*, AOF), hors bilan, tels que capital ou fonds initial inscrit et non appelé, lettre de crédit ou autre engagement reçu satisfaisant les contraintes d'exigibilité.

De façon conjointe à cette distinction, les fonds propres sont aussi divisés en trois *Tiers* selon la séniorité des engagements. Le Tier 1 et le Tier 2 (hors AOF du Tier 2) doivent couvrir le MCR, tandis que les trois Tiers incluant tous les AOF sont éligibles pour couvrir le SCR.

Dans les modélisation, nous négligerons les fonds propres auxiliaires et les passifs subordonnés.

1.2.2 Pilier 2 : exigences qualitatives et surveillance prudentielle

Le deuxième pilier de la directive concerne la gouvernance de la compagnie et sa surveillance par le régulateur.

Exigences qualitatives

Les articles 41 à 48 de la directive définissent les conditions d'une bonne gouvernance.

1. les dirigeants doivent satisfaire des exigences en termes d'honorabilité et de compétence ;
2. la compagnie doit être dotée d'un service de gestion des risques ;
3. elle doit conduire régulièrement une analyse du risque et de la solvabilité, de sorte que ces évaluations soient intégrées en tant que telles dans les décisions stratégiques et communicables sur demande au superviseur ;
4. elle doit disposer d'un service de contrôle interne ;
5. elle doit disposer d'un service d'audit interne ;
6. elle doit comprendre une fonction actuarielle ;
7. la sous-traitance doit être gérée de façon appropriée.

Surveillance prudentielle

Cette partie du deuxième pilier vise à définir l'organisation du contrôle et de l'autorité en charge de la supervision. Elle donne à cette autorité des pouvoirs minima harmonisés entre les pays de l'Union Européenne s'articulant autour de contrôles sur place et de la possibilité de mener des *stress tests*. Elle autorise également le régulateur national à appliquer des *add-ons* aux exigences en capital du pilier 1, selon la situation de la compagnie.

Par ailleurs, elle vise à harmoniser les pratiques de contrôles entre les différents pays, afin d'éviter notamment l'arbitrage réglementaire "implicite".

1.2.3 Pilier 3 : Publication et reporting prudentiel

A destination du public, la directive prévoit la publication annuelle d'un rapport dit de solvabilité et de situation financière, ainsi que des dispositions particulières en cas de non-respect du SCR ou du MCR.

Le reporting prudentiel, à destination du superviseur national, est également encadré. Le superviseur européen est quant à lui tenu de publier un rapport annuel sur l'application des exigences de capital supplémentaires, ainsi qu'un rapport sur l'avancée de la convergence prudentielle au niveau européen, et ce au moins tous les deux ans.

Chapitre 2

Les déflateurs

Un déflateur est une fonction d'actualisation stochastique, comprenant à la fois une composante risque et une composante temps. L'utilisation de déflateurs permet donc de valoriser un actif au rendement aléatoire en utilisant un taux d'actualisation stochastique reflétant les préférences de l'investisseur¹.

On introduit, tout d'abord, le concept de déflateur économique à travers la notion de prix d'état.

2.1 Absence d'opportunité d'arbitrage et prix d'état

2.1.1 Cadre de travail : notion de prix d'états

Alors que les facteurs d'actualisation permettent de comparer les revenus à différentes dates, les prix d'état permettent de comparer des revenus dans différents états de la nature. On obtient immédiatement la valeur d'un prix d'état lorsqu'il existe un actif d'Arrow-Debreu : un tel actif est associé à un état de la nature s , et rapporte 1 si s se réalise et 0 sinon. Le prix d'un tel actif est donc appelé prix d'état et permet de valoriser les actifs financiers dans un marché sans opportunité d'arbitrage (*i.e.* tout actif ayant un flux positif ou nul dans tous les états de la nature et un flux strictement positif dans au moins un de ces états a un prix strictement positif). Mas-Colell *et al.* (1995, p. 702), entre autres, proposent une caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage :

¹Caractérisées bien entendu par l'aversion pour le risque, mais aussi pour les variations inter-temporelles, par la prudence (positivité de la dérivée troisième de la fonction d'utilité) et la tempérance (négativité de la dérivée quatrième de l'utilité), *etc.*

Théorème 1 *Un marché est sans opportunité d'arbitrage ssi il existe un vecteur E à composantes strictement positives tel que pour tout actif k ,*

$$P_k = \sum_{\text{etats } s} E_s F_{k,s}$$

où P_k est le prix de marché de l'actif k et $F_{k,s}$ le flux associé à cet actif dans l'état de la nature s .

E est appelé vecteur de prix d'états.

En effet, si E avait une coordonnée négative ou nulle, que l'on noterait $q(s_0)$, alors il y aurait un opportunité d'arbitrage : le prix de l'actif d'Arrow-Debreu associé à l'état s_0 serait négatif ou nul. La réciproque est évidente.

Si les marchés sont complets, alors le vecteur de prix d'états est unique².

2.1.2 Illustration : modèle mono-périodique à deux états

On considère le cas simple d'un marché sans opportunité d'arbitrage constitué de 2 actifs (A et B). On regarde ces actifs sur une période unique au bout de laquelle seuls deux états sont possibles (F et D).

	Actif A	Actif B
Prix de marché	1.65	1
Flux dans un an, état F	3	2
Flux dans un an, état D	1	0.5

Afin d'évaluer la valeur des prix d'état, on tache de répliquer les actifs d'Arrow-Debreu associés aux états F et D à l'aide des actifs A et B :

- un portefeuille constitué de -1 unité de A et 2 unités de B rapporte 1 dans l'état F et 0 dans l'état D
- un portefeuille constitué de 4 unités de A et -3 unités de B rapporte 1 dans l'état D et 0 dans l'état F

L'absence d'opportunité d'arbitrage nous permet alors d'affirmer que la valeur d'un actif d'Arrow-Debreu est la même que celle d'un portefeuille répliquant ses rendements dans chaque état.

Le prix de l'actif d'Arrow-Debreu associé à l'état F est donc : $-1 \times 1.65 + 2 \times 1 = 0.35$; et celui associé à l'état D est : $4 \times 1.65 + (-3) \times 1 = 0.6$. Ces prix sont les prix d'état associés aux états F et D. On a finalement :

²Les marchés sont complets ssi ils comportent autant d'actifs linéairement indépendants que d'états de la nature, de sorte que la matrice carrée $(F_{k,s})_{k,s}$ (flux futurs \times actifs) est de plein rang, ce qui est équivalent à l'unicité du vecteur de prix d'états

	Actif d'état F	Actif d'état D
Prix d'état	0.35	0.6

On peut alors valoriser tout actif à partir des prix d'états (Th.1) :

	Actif A'	Actif B' (sans risque)
Flux dans un an, état F	5	1
Flux dans un an, état D	-1	1
Prix de marché	1.15	0.95

Le théorème 1 permet d'étendre ce principe à plus de deux actifs.

2.2 Déflateur d'état

2.2.1 Cas mono-périodique

On introduit alors le déflateur d'état comme étant le ratio entre le prix d'état et la probabilité $p(s)$ de réalisation de l'état s :

$$D_s := \frac{E_s}{p(s)}$$

On remarque immédiatement qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage, un déflateur est une v.a. strictement positive. On obtient par ailleurs une valorisation simple :

$$P_k = \sum_{\text{etats } s} E_s F_{k,s} = \sum_{\text{etats } s} p(s) D_s F_{k,s} = \mathbb{E}[DF]$$

Appliquée à un zéro-coupon sans risque de défaut, cette formule indique que $\mathbb{E}[D]$ est le prix de l'actif sans risque.

Dans le cas mono-périodique, on utilise uniquement la composante du déflateur captant l'aversion pour le risque, on souhaite donc étendre cette notion à des cas multi-périodiques afin de cerner entièrement l'intérêt de la valorisation par le déflateurs.

2.2.2 Extension à un cas multi-périodique

On généralise le modèle précédent à n états en étendant le principe à un cas multi-périodique comprenant $T+1$ périodes³. On notera un léger changement par rapport au cas mono-périodique : un état de la nature s désigne une

³De sorte que l'horizon d'investissement est T , si aujourd'hui correspond à $t = 0$.

trajectoire complète du vecteur des grandeurs décrivant l'économie, et non seulement leurs valeurs à un instant donné. Ainsi, un état de la nature n'est que progressivement révélé, et c'est ce qui sous-tend le concept de filtration.

Il est toujours possible de stocker dans une matrice les valeurs des flux des actifs associés à l'état de la nature s à l'instant t . Cette matrice est simplement plus grosse que précédemment : elle est de taille $nT \times N$ où n est le nombre d'états et N le nombre d'actifs présents dans l'économie. Ainsi, l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente, d'après le théorème 1, à l'existence d'une suite aléatoire $(E(t))_{t \in \{0, T\}}$ telle que le prix de l'actif k est

$$P_k = \sum_{(s,t) \in \{1, \dots, S\} \times \{1, \dots, T\}} E_s(t) F_{k,s}(t) = \sum_{\text{etats } s} \sum_{\text{temps } t} E_s(t) F_{k,s}(t)$$

Connaissant les probabilités d'occurrence des différents états de la nature $p(s)$ et les prix des actifs d'état $E_s(t)$, on peut alors définir les déflateurs comme des fonctions aléatoires du temps :

$$\forall (s, t), D_s(t) := \frac{E_s(t)}{p(s)} > 0$$

On construit ainsi un processus stochastique de déflateurs prenant des valeurs différentes dans chacun des états de la nature. Connaissant les flux futurs $F(s, t)$ associés à un actif dans les différents états de la nature, on peut alors utiliser ce processus de déflateurs pour valoriser l'actif considéré à la date $t = 0$, de la même manière que dans le cas mono-périodique :

$$\begin{aligned} P_k(0) &= \sum_{\text{etats } s} \sum_{\text{temps } t} E_s(t) F_k(s, t) \\ &= \sum_{\text{etats } s} \sum_{\text{temps } t} p(s) D_s(t) F_k(s, t) \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{\text{temps } t} D(t) F_k(t) \right] \end{aligned}$$

Le prix de l'actif k est donc égal à l'espérance de ses flux futurs actualisés au taux stochastique impliqué par le déflateur D .

Plus généralement, on peut valoriser par la même méthode à une date future, un flux futur associé à un actif. On note, par ailleurs, que le processus de déflateurs utilisé est le même que celui calculé précédemment. Ce point est essentiel dans la perspective de limitation du nombre de simulations du passif

pour répondre aux impératifs de Solvabilité 2. Si on considère les instants t_1 et t_2 tels que $t_1 < t_2$ alors :

$$F_k(t_1) = \frac{\mathbb{E}[D(t_2)F_k(t_2)|\mathcal{F}_{t_1}]}{D(t_1)}$$

où \mathcal{F}_t est la tribu des événements possibles vu de la date t , *i.e.* l'information disponible à cette date. Alors, en sommant cette formule sur l'ensemble des états de la nature, on obtient une formule de valorisation de cet actif à la date t_1 :

$$P_k(t_1) = \frac{\mathbb{E}[D(t_2)P_k(t_2)|\mathcal{F}_{t_1}]}{D(t_1)}$$

ou encore

$$P_k(t_1)D(t_1) = \mathbb{E}[D(t_2)P_k(t_2)|\mathcal{F}_{t_1}]$$

Cette formule est essentielle car elle met en évidence une caractéristique fondamentale des déflateurs : puisque l'espérance de sa valeur à une date $T > t$, conditionnellement à l'information disponible à la date t , est égale à sa valeur à la date t ,

Proposition 1 *Le processus DP est une martingale.*

Remarque 1 *Wüthrich et al. (2007) proposent une autre formulation des déflateurs, conceptuellement identique mais à la formulation plus mathématique. On caractérise un actif par la série de ses flux en chaque période discrète $t \in \{0, 1, \dots, n\}$. En supposant le processus des flux de cet actif $X_k = (X_{k0}, \dots, X_{kn})$ de variance finie à chaque instant, **le prix de cet actif est une forme linéaire continue de $\mathbb{L}_{n+1}^2 = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) | \forall i \in \{0, \dots, n\}, X_i \in \mathbb{L}^2\}$. La linéarité de la fonctionnelle de prix est indispensable pour autoriser l'évaluation par arbitrage.***

Par ailleurs, pour assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage, cette forme linéaire doit être strictement positive dès l'instant que les flux futurs sont positifs ou nuls, et qu'il existe au moins un état de la nature pour lequel le flux est strictement positif à au moins un instant donné. La continuité résulte des deux hypothèses de stricte positivité et de linéarité.

Le théorème de Riesz assure l'existence d'un processus $\phi \in \mathbb{L}_{n+1}^2$ tel que le prix P de cet actif est le produit scalaire de ϕ par la suite des flux dans \mathbb{L}^2 , ce qui donne exactement les formules trouvées en sous-section 2.2 :

$$P_k = \langle \phi, X_k \rangle = \sum_{t=0}^n \mathbb{E}[\phi_t X_{kt}].$$

Ainsi, un déflateur est un processus de \mathbb{L}^2 associé par le théorème de Riesz au prix vu comme forme linéaire sur l'espace des processus \mathbb{L}^2 .

2.2.3 Passage en temps continu

Pour pouvoir effectivement servir dans la valorisation de portefeuilles complexes, les déflateurs doivent être utilisés dans des modèles suffisamment complets. Nous devons donc étendre ce concept à des modèles en temps continu, où nous verrons que les propriétés vues en temps discret restent valables.

Approche des déflateurs en temps continu. On peut proposer, à la lumière de notre étude sur des modèles en temps discret, la définition suivante :

Définition 1 *Dans un marché sans opportunité d'arbitrage, si $P = (P(t))_{t>0}$ est le processus de diffusion dans le temps du prix d'un actif, alors un déflateur $D = (D(t))_{t>0}$ est un processus stochastique tel que, sous la probabilité historique, le processus DS soit une martingale :*

$$\forall t, T \text{ s.t. } t < T, D(t)P(t) = \mathbb{E}[D(T)P(T)|\mathcal{F}_t]$$

Remarque 2 *Si le marché est, en plus, complet, on sait qu'il existe un unique vecteur de prix d'états dans le cas d'un nombre fini d'états et en temps discret. Dans la mesure où un déflateur induit une probabilité risque-neutre, Touzi [33] montre que lorsque le marché est complet au sens où tout actif du marché est atteignable^A, le déflateur est unique pour des variables à support continu en temps discret. En temps continu, Harrison et Pliska [17] montrent que l'équivalence entre complétude du marché et unicité de la probabilité risque-neutre, c'est-à-dire du déflateur.*

Cas d'un marché d'Itô : expression de l'absence d'opportunité d'arbitrage. On s'intéresse au cas des processus d'Itô, nous inspirant de la présentation qu'en font Fisher et Gilles (2007). Si le déflateur s'écrit sous forme différentielle :

$$dD(t) = \mu_D(t)dt + \sigma_D(t)'dW(t)$$

où $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$ est un mouvement brownien vectoriel (et X' désigne la transposée du vecteur X) et que le prix $P(t)$ (strictement positif) d'un actif suit de la même manière la dynamique :

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu_P(t)dt + \sigma_P(t)'dW(t)$$

^ARépliquable par un portefeuille auto-finançant.

alors on peut exprimer la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage de la manière suivante : en appliquant le lemme d'Itô au processus DP on trouve que le terme de dérive de ce processus vaut :

$$\mu_P(t) + \frac{\mu_D(t)}{D(t)} + \frac{1}{D(t)}\sigma_D(t)'\sigma_P(t)$$

On note $\lambda(t) = -\frac{\sigma_D(t)}{D(t)}$, et on introduit le taux sans risque $r(t)$ qui représente la dynamique d'un processus $\beta(t)$ de type "compte en banque" (de sorte que $d\beta(t)/\beta(t) = r(t)dt$). Alors le fait que le processus $D\beta$ soit une martingale se traduit par la nullité de son terme de dérive, *i.e.*

$$r(t) = -\frac{\mu_D(t)}{D(t)}$$

De même pour le processus DP :

$$\mu_P(t) = r(t) + \sigma_P(t)'\lambda(t) \tag{2.1}$$

Cette propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage signifie donc que le rendement de l'actif P est composé du taux sans risque $r(t)$ et de la prime de risque $\sigma_P(t)'\lambda(t)$. Cette prime de risque est composée d'une partie spécifique à P , synthétisée dans le vecteur $\sigma_P(t)$ et d'une partie systématique $\lambda(t)$ qu'on appelle *prix de marché du risque*⁵ : chaque composante $\lambda_i(t)$ ($i \in \{1, \dots, d\}$) représente la prime de risque par unité de volatilité associée au facteur de marché $W_i(t)$.

Changement de probabilité. A ce marché on peut associer une probabilité risque-neutre. Plus précisément, Karatzas et Shreve (1998, théorème 4.2 p. 12) indiquent que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'un processus $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ appelé *prix de marché du risque* tel que la prime de risque d'un actif de volatilité $\sigma(t)$ est $\sigma(t)\lambda(t)$. De façon équivalente, cela revient à trouver une probabilité dite risque-neutre⁶ sur l'ensemble des fonctions aléatoires caractéristiques de l'économie.

D'après le théorème de Girsanov –, en supposant que le processus λ vérifie la condition de Novikov pour tous t et T tels que $T > t > 0$:

$$\mathbb{E}_t \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_t^T \|\lambda(s)\|^2 ds \right) \right] < \infty.$$

⁵Si, bien sûr, le risque est mesuré par la volatilité.

⁶Ce terme vient de ce que, dans un modèle d'équilibre à fonctions d'utilité Von Neumann-Morgenstern, le déflateur est égal au rapport des utilités marginales de la consommation entre aujourd'hui et demain $u'(C(t=1))/u'(C(t=0))$, multiplié par le terme d'escompte au taux sans risque. Pour un individu neutre à l'égard du risque, on a $u' = cste$ et le prix d'un actif devient une martingale.

la probabilité \mathbb{Q} sur l'espace des trajectoires des variables décrivant l'économie, définie par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} par sa dérivée de Radon-Nikodym adaptée à la filtration induite par ces variables

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(t) = \exp\left(\int_0^t -\lambda(s)'dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda(s)\|^2 ds\right) \quad (2.2)$$

est une probabilité risque-neutre pour le marché. Dans le monde risque-neutre habituel, les prix actualisés au taux sans risque $\int_0^t r(s)ds$ sont des \mathbb{Q} -martingales.

Pour conserver des évaluations en phase avec le marché, on pourrait aussi renoncer à la composante systématique de la prime de risque d'un actif, et attribuer à chaque actif une prime *ad hoc*.

2.3 Calcul du capital économique d'une compagnie dans le cadre de Solvabilité 2 : comparaison avec une approche risque-neutre

2.3.1 Equivalence formelle des deux approches

Il convient en premier lieu de constater que l'approche par déflateurs n'apporte aucune nouveauté conceptuelle : le cadre d'évaluation des actifs et passifs est toujours celui de l'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans ce contexte, le prix de marché d'un actif est la somme actualisée des flux futurs, le taux d'actualisation étant stochastique et appelé déflateur.

L'approche risque-neutre est une technique consistant à voir le déflateur lui-même comme la densité d'une mesure de probabilité par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} , de sorte que l'on a :

$$D(t) \equiv e^{-\int_t^T r(s)ds} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(t) \quad (2.3)$$

Les différences entre les approches jouent donc sur l'implémentation.

2.3.2 Avantages de l'approche par déflateurs sur l'approche risque-neutre

Une évaluation risque-neutre ne peut rester en phase avec le marché (*market consistent*) au cours du temps, si elle l'est à un instant initial : en effet, le processus associé au changement de mesure sur les trajectoire est

lui-même stochastique, puisqu'il s'agit du déflateur (multiplié par le terme $\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$).

La démarche est donc de proposer un cadre unique pour la projection comme pour la valorisation des passifs des entreprises d'assurance, répondant ainsi de façon appropriée aux exigences de la directive Solvabilité 2 réclamant que ces deux étapes soient réalisées au sein d'un même modèle dans la mesure où le niveau *best estimate* des provisions doit être homogène au prix de la couverture financière.

Or, si l'approche par les déflateurs fait explicitement intervenir la prime de risque, dans l'approche risque-neutre on fait des choix de \mathbb{Q} (de prix de marché du risque) différents selon les actifs alors que les préférences sont identiques pour un même investisseur. Les paramètres utilisés ne correspondent pas aux valeurs observables sur le marché : l'évolution des prix n'est pas *market consistent*. A cet effet, on consultera la partie du chapitre 3 illustrant sur une série historique du CAC 40 les variations du niveau de volatilité mesuré suivant le produit valorisé (*smile* de volatilité implicite à partir d'une série d'options sur le CAC 40). Dès lors, il devient impossible dans un tel contexte de savoir quel niveau de volatilité utiliser alors que cette volatilité, bien que nous directement observable sur le marché, a une valeur donnée. L'approche risque-neutre manque donc de cohérence sur ce sujet, ce qui justifie le développement de la théorie des déflateurs. L'objectif de ce mémoire est donc de tester l'approche par déflateurs, par comparaison avec l'approche risque-neutre, dans le calcul du capital économique tel que défini par Solvabilité 2.

2.4 Pourquoi s'intéresser aux primes de risque ?

Nous commençons par une remarque théorique : dans le cadre d'un marché d'Itô décrit précédemment, la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'un *processus stochastique* (noté λ_t) qui est le prix de marché du risque (*cf.* Karatzas et Shreve (1998), théorème 4.2 p. 12). Ainsi, aucun résultat n'est disponible sur ce processus sans hypothèse supplémentaire sur le marché.

Les modèles classiques de taux supposent que ce prix de marché du risque est constant, ce qui est la forme la plus simple, de sorte que la prime associée à un risque est rigoureusement proportionnelle à la volatilité de ce risque. Mais ces modèles ne rendent pas compte des variations de prix de marché du risque observées sur les marchés : Duffee (2002) trouve qu'un modèle complètement

affine⁷ ne prédit pas mieux les rendements observés qu'un marché aléatoire ! De même, Ahmad et Wilmott (2006) trouvent que la calibration de la prime de risque dépend étroitement de la fenêtre temporelle utilisée : en d'autres termes, le prix de marché du risque semble stochastique.

On peut remarquer le point suivant : ce que ne capturent pas les modèles classiques n'est pas simplement un facteur de risque particulier (Duffee (2002) n'impose pas de limitation sur le nombre de facteurs et n'en retient que trois après avoir montré qu'en conserver quatre n'améliorait pas la situation), mais bien un problème au niveau de la structure du modèle.

Partant de ce constat, deux possibilités sont envisageables :

- s'orienter vers des modèles non affines ;
- conserver une forme affine dans la dynamique risque-neutre, mais ne pas imposer de contrainte sur les primes de risque telles que leur proportionnalité fixe à la volatilité (ou, ce qui revient au même, autoriser plus de latitude sur l'expression du prix de marché du risque).

La première solution a déjà été explorée, son principal problème est qu'elle nécessite de lourds calculs et impose l'abandon de formules fermées des modèles affines.

La seconde solution permet de conserver les formules fermées, tout en permettant un pouvoir prédictif bien meilleur que lorsque le prix de marché du risque est supposé constant (comme dans les modèles classiques de taux. Voilà pourquoi nous choisissons de modéliser séparément les primes de risque dans ce mémoire.

2.5 Forme générale des déflateurs pour un modèle simple

2.5.1 Hypothèses essentielles sur le modèle économique

Nous cherchons à déterminer la forme des déflateurs associés aux modèles financiers les plus classiques. L'économie que nous considérons est constituée d'actifs sans risque (on s'intéressera plus précisément à la structure par terme des taux d'intérêts) et d'un actif risqué. Ce cadre englobe une grande partie des modèles utilisés habituellement en finance.

⁷Affine : le terme de dérive et la volatilité dans la dynamique d'Itô du taux court sont des fonctions affines des variables d'état. Et "complètement affine" : la dynamique est affine et le prix de marché du risque est un multiple de la volatilité.

Hypothèse 1 *Le marché considéré est complet et sans opportunité d'arbitrage.*

D'après la partie précédente, on sait qu'il existe un unique déflateur de prix d'état pour cette économie.

Hypothèse 2 *Le prix des obligations sans risque ne dépend que de la dynamique du taux d'intérêt instantané ($P(t, T) = P(r(t), t, T)$) de sorte qu'on exclut par exemple les primes de liquidité.*

Hypothèse 3 *Les prix des actifs suivent des processus d'Itô, continus et de carrés intégrables :*

- *taux court :*

$$dr(t) = \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dW(t)$$

- *obligation zéro-coupon sans risque d'échéance T :*

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \tilde{\mu}(r(t), t)dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dW(t)$$

- *actif risqué*

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW(t)$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien vectoriel.

2.5.2 Forme générale de la structure par terme des taux d'intérêt

L'application directe du lemme d'Itô à $P(r(t), t)$ donne :

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial t}dt + \alpha(r(t), t)\frac{\partial P}{\partial r}dt + \frac{1}{2}\beta(r(t), t)^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}dt + \beta(r(t), t)\frac{\partial P}{\partial r}dW(t) \\ &= \left(P_t + \alpha(r(t), t)P_r + \frac{1}{2}P_{rr}\beta(r(t), t)^2 \right) dt + \beta(r(t), t)P_r dW(t) \end{aligned}$$

avec la notation usuelle $P_x \equiv \frac{\partial P}{\partial x}$.

Cette formulation nous donne une autre formulation de dP déjà donnée à l'Hypothèse 3. En identifiant terme à terme (en dt et $dW(t)$) on obtient le système d'équations :

$$P(t, T)\tilde{\sigma}(r(t), t) = P_r\beta(r(t), t) \quad (2.4)$$

$$P(t, T)\tilde{\mu}(r(t), t) = P_t + \alpha(r(t), t)P_r + \frac{1}{2}P_{rr}\beta(r(t), t)^2 \quad (2.5)$$

Si on définit le prix d'un zéro coupon actualisé au taux sans risque $\tilde{P}(r(t), t) = P(r(0), 0) \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$ alors, on peut écrire sous forme différentielle, en utilisant la forme différentielle de P :

$$\frac{d\tilde{P}(t, T)}{\tilde{P}(t, T)} = [\tilde{\mu}(r(t), t) - r(t)]dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dW(t)$$

On a vu plus haut que l'absence d'opportunité d'arbitrage dans le cas d'un marché de type Itô se traduisait par la possibilité de définir un processus $\lambda(r(t), t)$ (prix de marché du risque), tel que le passage de la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} (sous laquelle les prix actualisés au taux sans risque $\int_0^t r(s) ds$ sont des \mathbb{Q} -martingales) à la probabilité historique \mathbb{P} s'obtenait facilement de la façon suivante :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(t) = \exp\left(\int_t^T -\lambda(s)'dW(s) - \frac{1}{2}\int_t^T \|\lambda(s)\|^2 ds\right)$$

Le théorème de Girsanov, permet d'introduire facilement la relation simple entre les formes différentielles des browniens sous la probabilité historique dW et sous la probabilité risque-neutre $d\hat{W}$:

$$d\hat{W}(t) = dW(t) - \lambda(r(t), t)dt$$

On peut alors écrire :

$$\frac{d\tilde{P}(t, T)}{\tilde{P}(t, T)} = [\tilde{\mu}(r(t), t) - r(t) - \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)]dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)d\hat{W}(t)$$

Comme on le rappelait précédemment, le processus du prix actualisé au taux sans risque d'un zéro-coupon est une martingale. Le théorème de représentation des martingales browniennes assure alors la nullité du coefficient devant dt pour tout t . Soit : $\tilde{\mu}(r(t), t) - r(t) - \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)$ ou encore :

$$\tilde{\mu}(r(t), t) = r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)$$

En éliminant $\tilde{\mu}$ dans le système d'équations (2.4,2.5) on trouve finalement la forme suivante pour la structure par terme des taux d'intérêt :

$$P(t, T)(r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)) = P_t + \alpha(r(t), t)P_r + P_{rr} \frac{\beta(r(t), t)^2}{2} \quad (2.6)$$

$$P(t, T)\tilde{\sigma}(r(t), t) = P_r \beta(r(t), t) \quad (2.7)$$

On tire de la seconde équation la relation $\tilde{\sigma}(r(t), t) = \frac{P_r}{P} \beta(r(t), t)$. En injectant cette relation ainsi que la nouvelle forme de $\tilde{\mu}$ dans la forme différentielle de dP on trouve finalement la structure par terme attendue :

$$\frac{dP}{P} = [r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)]dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dW(t)$$

2.5.3 Forme générale du déflateur

Toujours dans le cadre d'une économie avec un actif risqué et une courbe des taux stochastique, on cherche désormais à donner la forme générale du déflateur. Nous reprenons ici les calculs de Descure et Borean (2006).

Quitte à donner une expression convenable aux fonctions β et σ_S ⁸, on peut considérer les structures suivantes pour l'actif risqué et pour les taux d'intérêts :

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dW_r(t) \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW_S(t) \end{aligned}$$

On introduit la possibilité que les mouvements browniens décrivant l'aléa dans l'économie soient corrélés :

$$dW_r dW_S = \rho dt$$

ou encore

$$dW_S = \rho dW_r + \sqrt{1 - \rho^2} dW_r^\perp$$

où dW_r^\perp est un mouvement brownien orthogonal à dW_r ($dW_r \cdot dW_r^\perp = 0$).

On s'intéresse ensuite à l'évolution des trois classes d'actifs dans l'économie : le titre risqué S , le titre d'épargne court terme B le zéro-coupon P d'échéance terme T . On a alors, d'après ce qui précède, et en posant $\tilde{\sigma}(r(t), t) = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} \beta(r(t), t)$, les dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)(\rho dW_r + \sqrt{1 - \rho^2} dW_r^\perp) \\ \frac{dB(t)}{B(t)} &= r(t) \\ \frac{dP}{P} &= [r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)]dt + \sigma_S(t)(r(t), t)dW_r(t) \end{aligned}$$

Puisqu'on a vu que le déflateur pouvait lui aussi s'écrire sous la forme d'un processus d'Itô, on peut proposer la dynamique suivante :

$$dD = \Omega(D, r(t), t)dt + \Phi(D, r(t), t)dW_r(t) + \Psi(D, r(t), t)dW_r^\perp(t)$$

⁸Dans les hypothèses on a supposé que les processus d'Itô étaient conduits par un terme aléatoire $dW(t)$ vectoriel commun à tous les actifs. Les processus de coordonnées de W_t sont donc indépendants, mais on peut se ramener à des mouvements browniens corrélés à l'aide de combinaisons linéaires adéquates des coordonnées.

On utilise alors la propriété des déflateurs garantissant que les processus DS , DB et DP sont des \mathbb{P} -martingales afin de déterminer les formes des fonctions : Ω, Φ, Ψ . En effet, le théorème de représentation des martingales browniennes garantit que le terme en dt (le *drift*) de chacune des formes différentielles des trois processus est nul, ce qui nous donne un système permettant d'exprimer facilement les valeurs des trois fonctions recherchées et d'obtenir, ainsi, la forme générale des déflateurs.

Ainsi, pour chacun des trois processus on a la forme suivante :

$$d(DX) = XdD + DdX + dXdD$$

Alors, en isolant simplement les composantes en dt , on obtient, en n'oubliant pas que $dW_1dW_2 = \rho dt$, le système fonctionnel suivant :

$$\begin{aligned} \mu_S SD + \Omega S + S\sigma_S \rho \Phi + S\sigma_S \sqrt{1 - \rho^2} \Psi &= 0 \\ Dr(t) + \Omega &= 0 \\ P\Omega + DP[r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)] + P\Phi\tilde{\sigma}(r(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

De la seconde équation on tire :

$$\Omega(D, r(t), t) = -Dr(t).$$

En injectant ce résultat dans la troisième, on trouve :

$$\Phi(D, r(t), t) = -D\lambda(r(t), t).$$

Enfin on obtient en substituant ces deux équations dans la première :

$$\Psi(D, r(t), t) = D \frac{r(t) - \mu_S(t) + \lambda(r(t), t)\rho\sigma_S(t)}{\sigma_S(t)\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Ou encore :

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t)dt - \lambda(r(t), t)dW_r(t) + \frac{r(t) - \mu_S(t) + \lambda(r(t), t)\rho\sigma_S(t)}{\sigma_S(t)\sqrt{1 - \rho^2}}dW_r^\perp(t)$$

Posons alors $y = \ln(D)$, *i.e.*

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dD}{D} - \frac{1}{2D^2}dDdD \\ &= \frac{dD}{D} - \frac{1}{2D^2} \left(D^2\lambda^2 + D^2 \left(\frac{r(t) - \mu_S(t) + \lambda(r(t), t)\rho\sigma_S(t)}{\sigma_S(t)\sqrt{1 - \rho^2}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

On trouve alors, en injectant la forme obtenue pour $\frac{dD}{D}$:

$$dy = - \left(r(t) + \frac{\lambda^2(r(t), t)}{2} + \frac{K^2(r(t), t)}{2} \right) dt - \lambda(r(t), t) dW_r(t) - K(r(t), t) dW_r^\perp(t)$$

où on a posé

$$K(r(t), t) = - \frac{r(t) - \mu_S(t) + \lambda(r(t), t) \rho \sigma_S(t)}{\sigma_S(t) \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

En intégrant entre 0 et t , on obtient la forme générale souhaitée :

$$\begin{aligned} D(t) &= D(0) \exp \left[- \int_0^t r(s) ds - \int_0^t \frac{\lambda^2(r(s), s)}{2} ds - \int_0^t \frac{K^2(r(s), s)}{2} ds \right] \\ &\quad \times \exp \left[- \int_0^t \lambda(r(s), s) dW_r(s) - \int_0^t K(r(s), s) dW_r^\perp(s) \right] \end{aligned}$$

Chapitre 3

Applications

Dans un premier temps, on montre qu'on retrouve, dans le cas du modèle de Black et Scholes et dans le modèle CIR, qu'on peut retrouver les formules de changement de mesure. Ensuite, on cherche à simuler l'évolution d'un portefeuille simple constitué d'un actif risqué suivant une dynamique brownienne géométrique et d'un zéro-coupon de maturité donnée de type CIR : on est alors capable de trouver les quantiles de ce portefeuille.

3.1 Modèle de Black et Scholes

3.1.1 Expression du déflateur

Dans ce modèle, l'actif risqué suit bien un mouvement brownien géométrique, comme supposé à l'Hypothèse 2 :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_S dt + \sigma_S dW(t)$$

Le taux sans risque est fixe et égal à r . La dynamique du zéro-coupon s'écrit $\frac{dP(t)}{P(t)} = r dt$ et la prime de risque λ associée à l'actif sans risque est donc nulle. Celle associée à l'actif risqué K se réécrit :

$$K(r, t) = K(r) = \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}.$$

Dans ce cas, la formule générale calculée précédemment donne, en prenant en compte le fait que $D(0)=1$:

$$D(t) = \exp \left(-rt - \frac{(r - \mu_S)^2}{2\sigma_S^2} t + \frac{r - \mu_S}{\sigma_S} W_S(t) \right) \quad (3.1)$$

Dans le modèle de Black-Scholes l'actif et le zéro-coupon suivent les dynamiques :

$$\begin{aligned}
S_T &= S_0 \exp(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_T) \\
&= S_t \exp(\mu - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)) \\
B_T &= B_t \exp(r(T - t))
\end{aligned}$$

On peut donc vérifier que la forme trouvée est bien le déflateur associé au modèle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t[D(T)B(T)] &= \mathbb{E}_t[D(T)B_t \exp(r(T - t))] \\
&= B(t)\mathbb{E}_t \left[\exp\left(-rT - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}T + \frac{r - \mu}{\sigma}W_T + r(T - t)\right) \right] \\
&= B(t) \exp\left(-rt - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}T + \frac{r - \mu}{\sigma}W_t\right) \mathbb{E}_t \left[\exp\left(\frac{r - \mu}{\sigma}(W_T - W_t)\right) \right] \\
&= B(t) \exp\left(-rt - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}T + \frac{r - \mu}{\sigma}W_t + \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}(T - t)\right) \\
&= B(t) \exp\left(-rt - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}t + \frac{r - \mu}{\sigma}W_t\right) \\
&= B(t)D(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t[D(T)S(T)] &= \mathbb{E}_t \left[D(T)S(t) \exp\left((\mu - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\right) \right] \\
&= S(t)\mathbb{E}_t \left[D(T) \exp\left((\mu - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\right) \right] \\
&= S(t)\mathbb{E}_t \left[\left(\exp\left(-rT - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}T\right) \right) \right] \\
&\quad + S(t)\mathbb{E}_t \left[\frac{r - \mu}{\sigma}W_T + (\mu - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right] \\
&= S(t) \exp\left(-rT - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}T + \frac{r - \mu}{\sigma}W_t + \mu(T - t) + \frac{(r - \mu + \sigma)^2}{2}(T - t)\right) \\
&= S(t) \exp\left(-rt - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}t + \frac{r - \mu}{\sigma}W_t\right) \\
&= S(t)D(t)
\end{aligned}$$

où, pour alléger les notations dans ce contexte où elles ne sont pas ambiguës, on a posé pour tout τ $W_\tau = W_S(\tau)$, $\sigma = \sigma_S$, $\mu = \mu_S$.

3.1.2 Prix d'une option d'achat européenne

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'on retrouve la formule classique de Black et Scholes avec les déflateurs.

Le flux associé à un *call* européen de maturité T et de prix d'exercice K sur l'actif risqué de prix S_t est $(S_T - K)^+$, où a^+ désigne la partie positive de a .

Le prix de ce *call* est donc à l'instant t

$$D(t)p_C(K, t, T) = \mathbb{E}_t [D(T)(S_T - K)^+]$$

Par ailleurs, (3.1) montre que le déflateur de Black et Scholes est le produit d'un facteur d'escompte au taux sans risque e^{-rt} et d'une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la probabilité historique \mathbb{P}

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := \exp \left(\frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}(T - t) + \frac{r - \mu}{\sigma}(W_S(T) - W_S(t)) \right)$$

(cf. la formule (2.2) en posant $\lambda = \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}$, le taux sans risque étant constant). La mesure \mathbb{Q} ainsi définie est donc bien une mesure de probabilité : on retrouve l'approche risque-neutre.

On s'attend donc en menant les calculs avec les déflateurs à retrouver la formule de Black-Scholes donnant la valeur à tout instant d'un call européen :

$$\begin{aligned} D(t)p_C(K, t, T) &= \mathbb{E}_t \left[\frac{D(T)}{D(t)} (S_T - K)^+ \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[D_0 \exp \left(-rt - \frac{\lambda^2}{2}t - \lambda W_t \right) \left(S_0 \exp \left\{ \sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} - K \right)^+ \right] \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{W_t^2}{2t} \right\} dW_t \right] \end{aligned}$$

Si on pose $B = \frac{\log(K/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma}$, alors on a alors :

$$D(t)p_C(K, t, T) = D_0 S_0 \exp \left(-rt - \frac{\lambda^2}{2}t - \lambda W_t \right) \int_B^{\infty} \left[\frac{\exp \left((\sigma - \lambda)W_t - \frac{W_t^2}{2} \right)}{\sqrt{2\pi t}} dW_t \right]$$

$$-D_0K \exp \left\{ -\left(r + \frac{\lambda^2}{2}t\right) \right\} \int_B^\infty \left[\frac{\exp(-\lambda W_t) - W_t^2/2}{\sqrt{2\pi t}} dW_t \right]$$

ou encore :

$$D(t)p_C(K, t, T) = D_0S_0\Phi \left(\frac{(-B+(\sigma-\lambda)t)}{\sqrt{t}} \right) - D_0K \exp^{-rt} \Phi \left(\frac{(-B-\lambda t)}{\sqrt{t}} \right)$$

En remplaçant B par sa valeur, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} D(t)p_C(K, t, T) &= D_0S_0\Phi \left(\frac{\log(K/S_0) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \\ &\quad - D_0K \exp^{-rt} \Phi \left(\frac{\log(K/S_0) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

On reconnaît la formule fermée de Black-Scholes pour la valorisation d'un *call* européen, confirmant ainsi l'équivalence des approches par les déflateurs et risque-neutre, mais la forme obtenue par les déflateurs reflète mieux la réalité économique (on a l'espérance du rendement réel des flux) :

$$\begin{aligned} C_{BS}(t) &= S_0\Phi \left(\frac{\log(K/S_0) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \\ &\quad - K \exp^{-rt} \Phi \left(\frac{\log(K/S_0) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

3.1.3 Application à un contrat d'épargne

Mise en place du modèle

On se propose d'étudier dans ce paragraphe l'application de ce cadre théorique à un contrat d'épargne en euros classique. Dans un premier temps, on ne modélise pas les phénomènes de rachat et on suppose qu'il n'y a aucun frais. On cherche à déterminer le niveau de capital réglementaire nécessaire à la détention de ce contrat. On veut donc déterminer la Juste Valeur (Fair Value) à un an des flux dégagés par le fonds.

On va non seulement chercher ici à illustrer le calcul de cette valeur par la méthode des déflateurs stochastiques mais on va aussi en profiter pour effectuer ce calcul avec une approche risque-neutre et l'approche exacte donnée par la formule de Black-Scholes. On illustrera ainsi l'intérêt de l'utilisation des déflateurs stochastiques pour la valorisation des passifs des compagnies d'assurance.

La valeur du fonds varie chaque année en fonction des résultats suivant le taux minimum garanti et la participation aux bénéfices. On retient les hypothèses de base suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Valeur initiale } V_0 &= 50000e \\ \text{Participation aux Bénéfices } Pb &= 90\% \\ \text{Taux Minimum Garanti } Tmg &= 3,00\% \end{aligned}$$

L'investissement est réparti entre une fraction α d'actifs risqués (Action) et $(1 - \alpha)$ d'obligation sans risque. La dynamique du processus de l'action est décrite par un processus de Black-Scholes comme exposé ci-dessus. On choisit les paramètres de modèle suivant :

$$\begin{aligned} \text{Tendance de l'actif risqué } \mu &= 0,1 \\ \text{Volatilité de l'actif risqué } \sigma &= 20\% \\ \text{Taux sans risque } Tmg &= 5,00\% \end{aligned}$$

On peut écrire la valeur du fonds à un instant t :

$$F_t = V_0[1 + Tmg + \text{Max}(\rho; 0)]$$

où ρ est le taux de rendement en excès du fonds par rapport au taux minimum garanti. En écrivant ν comme étant le rendement annuel du fonds tel que : $\alpha S_1 + (1 - \alpha)P_1 = (1 + \nu)(\alpha S_0 + (1 - \alpha)B_0)$, on peut écrire : $\rho = \nu Pb - Tmg$. Pour simplifier le problème, on se place dans le cas particulier où $B_0 = S_0 = 1$. Ce qui nous conduit à :

$$F_t = V_0[1 + Tmgt/T + \text{Max}((\alpha S_t + (1 - \alpha)B_t - 1)Pb - Tmg; 0)]$$

On considère que le portefeuille composé d'une fraction $\alpha = 20\%$ d'actions et de 80% d'obligations. On souhaite donc calculer la valeur du fonds à un an (F_1) ainsi que la valeur actualisée de ce montant par les différentes méthodes disponibles.

A titre d'illustration, on représente ci-dessous la distribution finale des valeurs du fonds dans les cas d'un contrat de type épargne sans minimum garanti ($PB = 90\%$), avec Taux minimal garanti ($PB = 90\%$, $Tmg = 3\%$) et d'un contrat d'épargne présentant une garantie Plancher ($PB = 100\%$, $Tmg = 0\%$).

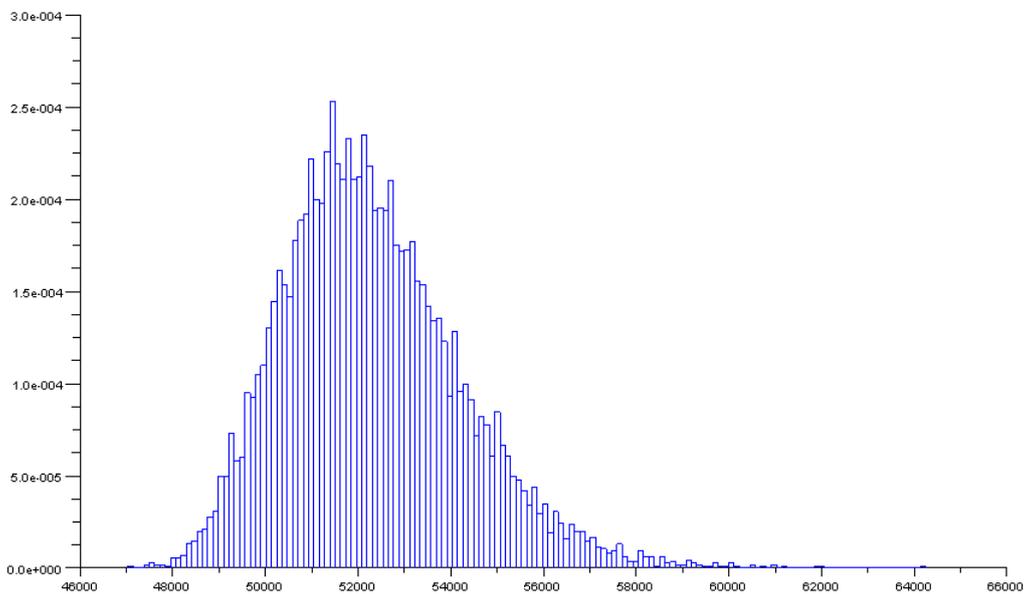


FIGURE 3.1 – Distribution de la valeur terminale du fonds (contrat sans Garantie Plancher)

Valeur exacte : Utilisation de la formule de Black-Scholes

La valeur du fonds F_t est la somme d'une partie déterministe (correspondant à la partie garantie) et d'une partie aléatoire (correspondant à la participation aux bénéfices en cas de rendement de l'action supérieur au taux minimum garanti). On s'intéresse particulièrement à la valeur du fonds au bout d'un an F_1 . Compte tenu de la forme de cette partie aléatoire (Maximum entre deux flux), on cherche à la réécrire sous la forme d'un call européen

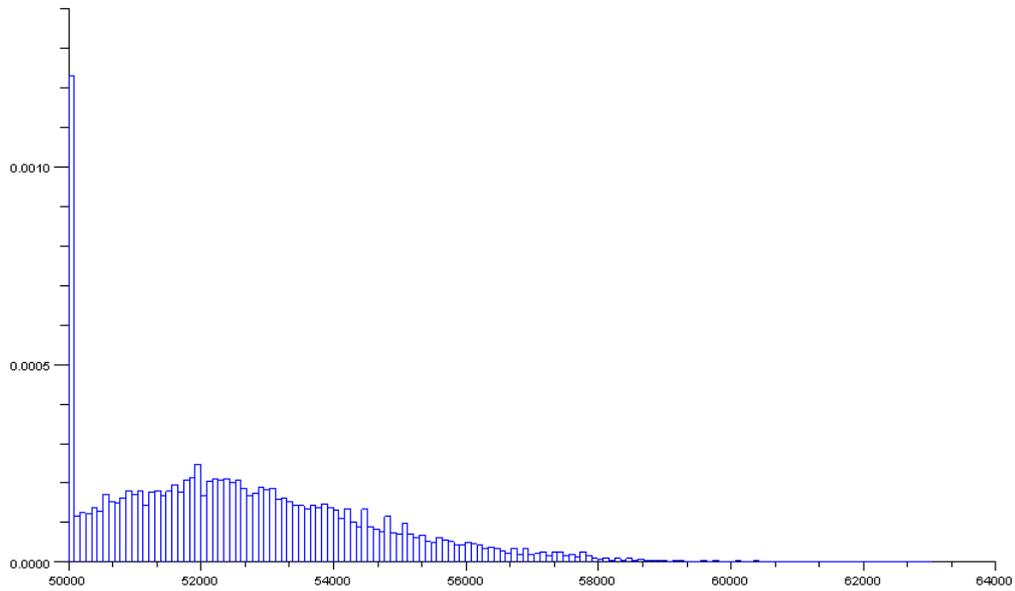


FIGURE 3.2 – Distribution de la valeur terminale du fonds (contrat avec Garantie Plancher)

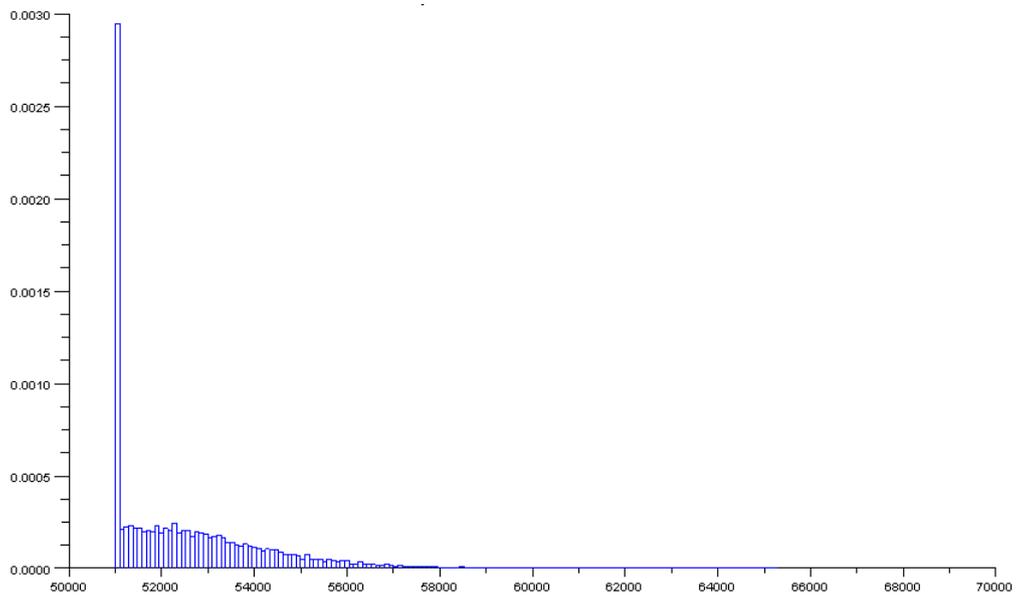


FIGURE 3.3 – Distribution de la valeur terminale du fonds (contrat avec Taux Minimal Garanti)

afin d'obtenir une formule fermée pour sa valorisation.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= V_0[1 + Tmg + \text{Max}((\alpha S_1 + (1 - \alpha)B_1)Pb - Tmg; 0)] \\
 &= V_0[1 + Tmg + Pb\text{Max}((\alpha S_1 + (1 - \alpha)B_1 - 1) - Tmg/Pb; 0)] \\
 &= V_0(1 + Tmg) + \alpha V_0 Pb \text{Max}(S_1 - \frac{1}{\alpha}(1 + Tmg/Pb + (1 - \alpha)\exp^r); 0)
 \end{aligned}$$

On peut trouver que la partie aléatoire peut bien s'écrire sous la forme d'un call européen de payoff $C_T = \text{Max}(S_T - K; 0)$ avec pour sous-jacent l'action S , pour strike $K = \frac{1}{\alpha}(1 + Tmg/Pb + (1 - \alpha)\exp^r)$ et de maturité $T = 1$. En utilisant la formule de Black-Scholes exprimée au paragraphe précédent, on est capable de donner le prix de ce call européen à la date $t = 0$. On trouve : $C_0 = 0,12634 \text{ €}$.

On obtient les valeurs exactes de F_1 et F_0 (valeur actualisée) en utilisant la valeur de C_0 :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= V_0[1 + Tmg] + \alpha V_0 Pb C_0 \exp^r \\
 F_0 &= F_1 e^{-r}
 \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues sont présentées dans le tableau ci-dessous. On note que la valeur actualisée du fonds vaut plus que sa valeur en $t = 0$, ceci s'explique par le fait que la présence d'un taux minimal garanti (Tmg) est une option qui a un coût pour l'assureur.

Valeur à un an F_1	Valeur actualisée F_0
52695	50125

Univers risque-neutre : approche par la méthode de Monte-Carlo

On se place ici dans l'univers risque-neutre. La dynamique de l'action s'écrit :

$$S_t = S_0 \exp((r + \sigma^2/2)t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}})$$

Dans le cadre particulier choisi ici, les simulations à effectuer sont particulièrement faciles et il nous suffit de générer un grand nombre de trajectoires action (en pratique on ne génère qu'une série de valeurs terminales qui sont

les seules à entrer en jeu) à horizon d'un an. On calcule alors directement la valeur du fonds pour chacune des trajectoires et la moyenne nous donne la valeur F_1 recherchée. On note que plus le nombre de simulations est important plus la valeur obtenue est proche de la valeur exacte calculée à partir de la formule fermée.

	Valeur à un an F_1	Valeur actualisée F_0	Ecart BS
1000 simulations	52654	50086	41 (0,08%)
10000 simulations	52706	50135	-11 (-0,02%)
100000 simulations	52691	50121	4 (0,008%)

Approche par les déflateurs stochastiques

On a de nouveau recours à une méthode de Monte-Carlo mais cette fois ci, il n'est pas nécessaire de simuler des trajectoires action dans les univers historiques et risque-neutre. En effet, on se place uniquement sous probabilité historique et à chaque trajectoire de prix d'action, on simule le déflateur stochastique associé.

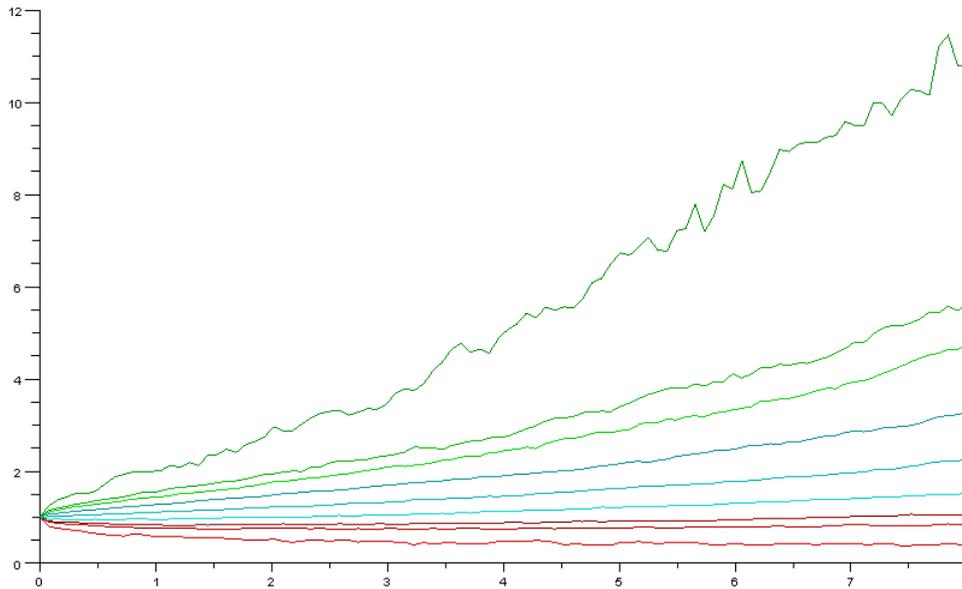


FIGURE 3.4 – Simulation à 8 ans du rendement des actions (de bas en haut quantiles à 5-10-25-50-75-90-95%)

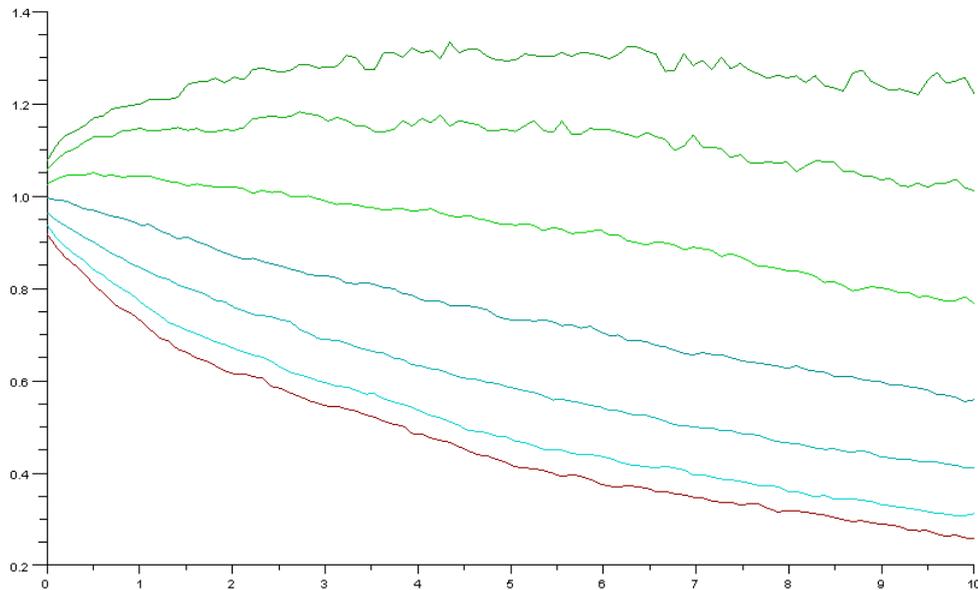


FIGURE 3.5 – Simulation à 8 ans du déflateur-action (de bas en haut quantiles à 5-10-25-50-75-90-95%)

On a tracé pour 10000 simulations différents quantiles associés aux projections de la valeur de l'actif risqué et du déflateur sur un horizon de 8 ans. note deux éléments caractéristiques de ces simulations :

- La moyenne du processus de déflateurs (quantile à 50%) décroît avec le temps. Ce résultat s'explique simplement par le fait que compte tenu de la propriété de martingale on a pour chaque année t : $D_0 * P(0, t) = \mathbb{E}[D_t * 1]$ si $P(0, t)$ est le prix en 0 d'un zéro-coupon de maturité t . Ce prix est décroissant avec la maturité du zéro-coupon (ici $P(0, t) = \exp(-rt)$).
- Le déflateur accorde des valeurs très importantes aux mauvaises situations (quantile à 95% correspondant aux situations de plus forte baisse pour les actions) qu'aux situations de hausse de l'actif risqué. On retrouve bien graphiquement l'idée selon laquelle le déflateur prend en compte véritablement la prime de risque en plus de l'actualisation.

On peut ensuite représenter le processus des prix déflatés de l'actif risqué DF . C'est l'espérance de la valeur terminale de ce processus qui nous donne la valeur du fonds F_1 attendue :

	Valeur à un an F_1	Valeur actualisée F_0	Ecart BS
1000 simulations	52610	50044	84 (-0,2%)
10000 simulations	52892	50312	197 (0,03%)
100000 simulations	52683	50113	-11 (-0,02%)

Comparaison des résultats

Quelle que soit la méthode utilisée on constate l'équivalence des résultats obtenus dans l'évaluation de la valeur dans à un an d'un contrat simplifié ne présentant qu'un seul sous-jacent de type "action". Mais si les méthodes conduisent à des résultats identiques, leur philosophie et donc leur utilisation est différente en pratique :

- Dans le cadre d'une approche de type risque neutre, on voit que le résultat est particulièrement aisé à obtenir (ici on dispose même d'une formule fermée) à condition d'être capable d'estimer correctement les paramètres du modèle (volatilité implicite)
- Dans le cadre d'une approche par les déflateurs, on complète le calcul de la distribution du sous-jacent dans l'univers historique par la détermination de la prime de risque pour le taux d'actualisation. Dans notre exemple, cette approche peut paraître plus lourde que la précédente (malgré le fait qu'on n'a même pas eu besoin d'estimer la prime action qui se calcule directement à partir des paramètres de dérive et de volatilité). Pourtant dès lors qu'il faudra estimer un quantile (pour le calcul d'un SCR par exemple), alors il faudra aussi passer par une estimation dans l'univers historique pour l'approche risque-neutre. C'est dans ce cadre que l'utilisation des déflateurs permet d'éviter les difficultés liées à une double simulation dans des univers différents.

3.2 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

On note que l'on justifiera l'utilisation d'un modèle CIR pour la modélisation du taux d'intérêt r dans le chapitre 3 à travers l'étude de données historiques.

3.2.1 Expression du déflateur

Le modèle CIR suppose comme dynamique du taux instantané le processus en racine carrée, sous la probabilité historique

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt - \sigma_r \sqrt{r(t)}dW_r(t)$$

On peut ainsi déduire la forme du déflateur associé à l'économie sans actif risqué en supprimant les termes en dW_1^\perp dans les calculs généraux de la section précédente, ce qui a pour effet premier de fixer $\Psi = 0$. On trouve ainsi directement

$$\begin{aligned} \frac{dD(t)}{D(t)} &= - \left(r(t) + \frac{(\lambda(r(t), t))^2}{2} \right) dt + \lambda(r(t), t)dW_r(t) \\ &= - \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_r^2} \right) r(t)dt + \frac{\lambda}{\sigma_r} \sqrt{r(t)}dW_r(t) \end{aligned}$$

Le prix de marché du risque vaut ici $\lambda(r(t), t) = \lambda \frac{\sqrt{r(t)}}{\sigma_r}$, où λ est une constante dépendant des préférences de l'investisseur (c est une prime de risque sur les facteurs qui conduisent la dynamique de la technologie des entreprises, dans Cox, Ingersoll et Ross (1985b), dont la forme dépend de la forme logarithmique des préférences des investisseurs). Cette fonction provient du modèle d'équilibre de CIR. La forme du déflateur associé à l'économie avec une courbe des taux suivant un modèle CIR est donnée par :

$$D(t) = \exp \left[- \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_r^2} \right) \int_0^t r(s)ds - \frac{\lambda}{\sigma_r} \int_0^t \sqrt{r(s)}dW_r(s) \right]. \quad (3.2)$$

L'équation différentielle comme la forme intégrale de la dynamique du déflateur mettent en relief, une nouvelle fois, une décomposition en un terme d'escompte temporel ($r(t)dt$ dans l'équation différentielle) et en un terme de prime de risque ($\lambda^2/\sigma_r^2 r(t)dt + \lambda/\sigma_r \sqrt{r(t)}dW_r(t)$).

3.2.2 Prix des zéro-coupon

On veut retrouver la formule classique de CIR (1985b) pour le prix en t du zéro-coupon de maturité T

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)C(t, T)}$$

où

$$C(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + \kappa + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= (\varphi(T-t))^{2\kappa\theta/\sigma_r^2} \\
\varphi(T-t) &= \frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa+\lambda)(T-t)/2}}{(\gamma+\kappa+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \\
\gamma &= \sqrt{(\kappa+\lambda)^2+2\sigma_r^2}
\end{aligned}$$

Le processus DP étant une martingale¹, on a, puisque $P(T, T) = 1$:

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= \mathbb{E}_t \left[\frac{D(T)}{D(t)} \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_r^2} \right) \int_t^T r(s) ds - \frac{\lambda}{\sigma_r} \int_t^T \sqrt{r(s)} dW_r(s) \right) \right]
\end{aligned}$$

La seconde intégrale peut se transformer, puisque la dynamique du taux instantané $r(s)$ s'écrit :

$$\sqrt{r(s)} dW_r(s) = \frac{dr(s)}{\sigma_r} + \frac{\kappa}{\sigma_r} (r(s) - \theta) dt$$

En intégrant cette expression entre t et T , on trouve :

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_r^2} + \frac{\lambda\kappa}{\sigma_r^2} \right) \int_t^T r(s) ds - \frac{\lambda}{\sigma_r^2} (r(T) - r(t)) + \frac{\lambda\kappa\theta}{\sigma_r^2} (T-t) \right) \right]$$

Dans ce modèle, le prix de marché du risque de taux $\lambda(r(t), t)$ vaut $\frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma_r}$. Dans ce cas on peut écrire la dynamique des taux d'intérêts dans l'univers risque-neutre :

$$dr(t) = (\kappa(\theta - r(t)) - \lambda r(t)) dt + \sigma_r \sqrt{r(t)} dW_r(t)$$

soit

$$dr(t) = \hat{\alpha}(r(t), t) dt + \hat{\beta}(r(t), t) dW_r(t)$$

avec $\hat{\alpha}(r(t), t) = \hat{\alpha}(r(t)) = \kappa\theta - (\kappa + \lambda)r(t)$ et $\hat{\beta}(r(t), t) = \hat{\beta}(r(t)) = \sqrt{\sigma_r^2 r(t)}$. Le modèle CIR est un modèle affine puisque $\hat{\alpha}(r(t), t)$ et $\hat{\beta}^2(r(t), t)$ sont affines.

On avait :

$$P(t, T)(r(t) + \tilde{\sigma}_r(r(t), t)\lambda(r(t), t)) = P_t + \alpha(r(t), t)P_r + P_{rr} \frac{\beta(r(t), t)^2}{2} \quad (3.3)$$

Ici, on a : $\alpha(r(t), t) = \kappa(\theta - r(t))$ et $\beta(r(t), t) = \sqrt{\sigma_r^2 r(t)}$

¹Sous \mathbb{P} . Le contexte n'étant toutefois pas ambigu, on s'abstient de le préciser.

Dès lors, on peut reprendre l'équation différentielle générale vérifiée par P en injectant la forme trouvée pour $\hat{\alpha}$:

$$P(t, T)r(t) = P_t + \hat{\alpha}(r(t), t)P_r + P_{rr} \frac{\beta(r(t), t)^2}{2}$$

Dans ce cadre particulier des modèles affines, Duffie (1992) montre que la solution de cette équation différentielle, pour un zéro-coupon d'échéance T est de la forme :

$$P(r(t), t, T) = \exp[-\tilde{a}(T-t) - \tilde{b}(T-t)r(t)]$$

où les fonctions $\tilde{a}(t)$ et $\tilde{b}(t)$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_r^2(\tilde{b}(t))^2 + (\kappa + \lambda)\tilde{b}(t) + \frac{d\tilde{b}}{dt} - 1 &= 0 \\ \frac{d\tilde{a}}{dt} - \kappa\theta\tilde{b}(t) &= 0 \end{aligned}$$

La première équation est une équation de type Riccati dont la solution générale est de forme connue. Avec la condition initiale $\tilde{b}(0) = 0$ on trouve en posant $\gamma = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + \sigma_r^2}$:

$$\tilde{b}(t) = \frac{2 \exp(\gamma t - 1)}{(\gamma + \alpha + \lambda)(\gamma t - 1) + 2\gamma}$$

De l'expression de $\tilde{b}(t)$ on peut tirer celle de $\tilde{a}(t)$ en n'oubliant pas la condition initiale $\tilde{a}(0) = 0$. Le calcul formel de cette expression ne nous intéresse toutefois pas ici. En effet, compte tenu de la forme de P obtenue on en déduit facilement celle de ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned} P_r(r(t), t, T) &= -\tilde{b}(T-t)P(r(t), t, T) \\ P_{rr}(r(t), t, T) &= \tilde{b}^2(T-t)P(r(t), t, T) \end{aligned}$$

En reportant ces résultats dans l'équation générale $dP = (P_t + \alpha(r(t), t)P_r + \frac{1}{2}P_{rr}\beta(r(t), t)^2)dt + \beta(r(t), t)P_r dW(t)$ et en remplaçant α et β par leur valeur ($\alpha(r(t), t) = \kappa(\theta - r(t))$ et $\beta(r(t), t) = \sqrt{\sigma_r^2 r(t)}$), on trouve :

$$\frac{dP}{P} = [r(t)(1 - \tilde{b}(T-t))]dt - \sigma_r \tilde{b}(T-t) \sqrt{r(t)} dW_r(t)$$

Finalement, la dynamique du prix du zéro-coupon est donnée par :

$$\frac{dP}{P} = [r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)]dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dW_r(t)$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(r(t), t) &= -\sigma_r \tilde{b}(T-t) \sqrt{r(t)} \\ \tilde{b}(t) &= \frac{2 \exp(\gamma t - 1)}{(\gamma + \kappa + \lambda)(\gamma t - 1) + 2\gamma} \\ \gamma &= \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + \sigma_r^2}\end{aligned}$$

3.3 Etude d'un portefeuille simple

L'objet de cette section est d'étudier le comportement d'un portefeuille constitué de deux positions fixées longues sur un actif risqué et une obligation zéro-coupon d'échéance T . Le prix S de l'actif risqué suit une dynamique brownienne géométrique à volatilité indépendante du temps ($\sigma_S(t) = \sigma_S$), tandis que le prix P zéro-coupon suit une dynamique de type CIR :

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu_S dt + \sigma_S dW_S(t) \\ dr(t) &= \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r \sqrt{r(t)} dW_r(t) \\ dP(t, T) &= P(t, T)(1 - \lambda C(t, T))r(t)dt - P(t, T)C(t, T)\sigma_r \sqrt{r(t)} dW_r(t)\end{aligned}$$

Comme précédemment, on suppose les mouvements browniens W_r et W_S corrélés au niveau ρ ($dW_S dW_r = \rho dt$). On peut ainsi écrire :

$$W_S = \rho W_r + \sqrt{1 - \rho^2} W_r^\perp.$$

Le processus de la valeur V de ce portefeuille est donc pour tout t

$$V(t, T) = (1 - a)P(t, T) + aS(t) \quad (3.4)$$

où a est une constante positive. L'application du lemme d'Itô au processus permet de trouver la dynamique de la richesse :

$$\begin{aligned}dV(t, T) &= ((1 - a)P(t, T)(1 - \lambda C(T - t))r(t) + aS(t)\mu_S) dt \\ &\quad + \left(\rho aS(t)\sigma_S - (1 - a)P(t, T)\sigma_r C(T - t)\sqrt{r(t)} \right) dW_r(t) \\ &\quad + \sqrt{1 - \rho^2} aS(t)\sigma_S dW_r^\perp(t)\end{aligned} \quad (3.5)$$

A maturité du zéro-coupon ($t = T$), on a par définition $P(T, T) = 1$ et la richesse suit une distribution log-normale. La loi est en revanche indéterminée

pour $t < T$, puisqu'alors $P(t, T)$ est aléatoire et ne suit pas de loi connue par une formule fermée.

Le but est d'étudier en particulier la distribution des $V(t, T)$ de la richesse avant la maturité T du zéro-coupon. On procède pour cela à des simulations des processus (r_t) et (S_t) en utilisant le schéma d'Euler usuel : le temps est discrétisé de façon uniforme² et on remplace les mouvements browniens entre ces instants par les gaussiennes appropriées (centrées, volatilité égale au pas de temps). Puis on déduit $P(t, T)$ de $r(t)$ et de la formule fermée de CIR. Finalement, on réinjecte $S(t)$ et $P(t, T)$ dans la formule fermée (3.4).

On retient les valeurs suivantes pour les paramètres, en faisant varier l'horizon d'investissement T :

a	1 ; 0.5 ; 0
P_0	1
S_0	1
μ_S	0.01
σ_S	1
κ	1.5
θ	0.01
σ_r	0.1
λ	1

La valeur initiale du portefeuille est donc $(1 - a) \times 1 + a \times 1 = 1$, ce qui permet de confondre fraction de richesse investie et montant investi dans chaque actif. De plus, les valeurs terminales sont ainsi les rendements.

3.4 Simulation d'un portefeuille simple

3.4.1 Court terme

On retient un horizon d'investissement de $t = 5$ pour une maturité du zéro-coupon $T = 30$. On simule 10 000 trajectoires de 450 points chacune. L'histogramme des valeurs du portefeuille présentant autant d'actif risqué que de zéro-coupon ($a = 0.5$) est présenté en 3.4.1.

Pour les trois valeurs polaires de a (actif risqué seul : 1, actif risqué et zéro-coupon : 0.5, zéro-coupon seul : 0), la distribution des valeurs n'est

²On trouve une subdivision t_1, \dots, t_n de $[0, t]$ avec

$$\forall i, t_i = t_0 + i \frac{t}{n}.$$

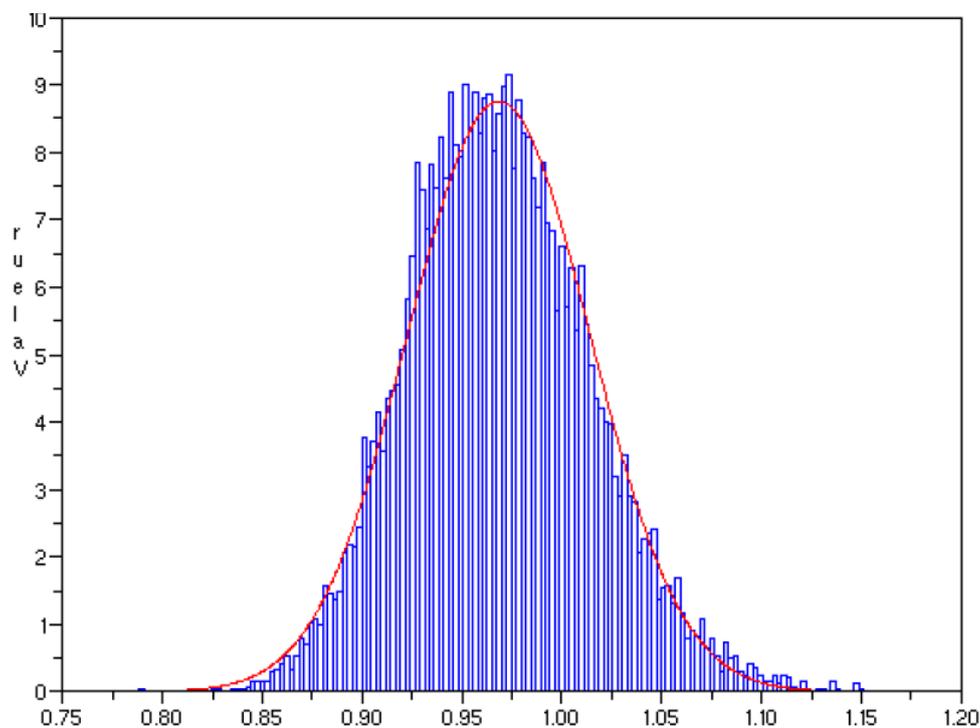


FIGURE 3.6 – Histogramme des valeurs terminales du portefeuille et distribution gaussienne associée

pas très différente de celle d'une gaussienne (dont la densité est représentée en traits pleins, avec pour moyenne et variance les estimateurs usuels du maximum de vraisemblance). Cependant, on peut noter une légère asymétrie (mesurée par une skewness empirique positive légèrement supérieure à 0.1, robuste à de nouvelles simulations), tandis que la kurtosis empirique n'est pas très différente de celle d'une v.a. normale ($\hat{k} = 3.08$, contre 3 pour la loi normale)³.

Ces caractéristiques ne sont pas surprenantes : le processus du taux court a en effet une distribution de valeurs $r(s)$ à l'instant s ; conditionnellement à une valeur initiale $r(t)$ à l'instant initial t , qui fait intervenir une fonction de Bessel modifiée du premier type (*cf.* CIR (1985b)) :

$$f(r(t), t, r(s), s) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2})$$

³En l'absence de caractérisation de la loi du portefeuille, il est impossible de tester les hypothèses de nullité de la skewness ou d'égalité de la kurtosis à 3.

avec

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{2\kappa}{\sigma_r^2 (1 - e^{-\kappa(s-t)})} \\
 u &= cr(t)e^{-\kappa(s-t)} \\
 v &= cr(s) \\
 q &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma_r^2} - 1
 \end{aligned}$$

Cette distribution est représentée en figure 2.

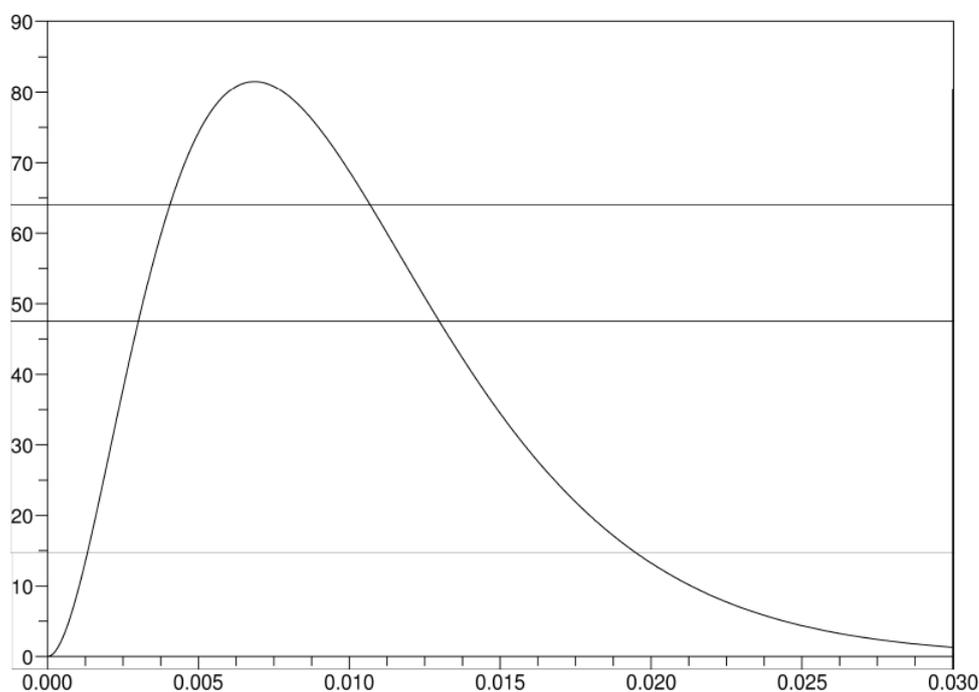


FIGURE 3.7 – Distribution des valeurs en $t = 1$ d'un processus CIR, $\kappa = 1.5$, $\theta = 0.01$, $\sigma_r = 0.1$ conditionnellement à une valeur en $t = 0$ $r(0) = \theta$.

Par ailleurs, lorsque s devient grand, cette distribution tend vers une distribution Gamma (de paramètre de forme $k = \frac{2\kappa\theta}{\sigma_r^2}$ et de paramètre d'échelle $\frac{2\kappa}{\sigma_r^2}$). Avec le choix de paramètres $\kappa = 1.5$, $\theta = 0.01$, $\sigma_r = 0.1$, on trouve que le paramètre de forme vaut 3 : la comparaison avec une gaussienne peut être supportée qualitativement autour de la valeur moyenne du taux d'intérêt.

Il est pourtant d'usage de faire l'approximation suivante : à court terme, les valeurs conditionnelles d'un processus de taux court CIR sont gaussiennes. Il était donc prévisible, quoique non évident *a priori*, que la distribution des

valeurs terminales du processus s'apparente à une gaussienne dans le cas d'un horizon d'investissement court.

On s'intéresse maintenant aux quantiles empiriques, qui sont d'importance dans le cadre de Solvabilité 2.

On présente les quantiles empiriques à différents niveaux de probabilité, et on les compare à ceux d'une gaussienne de moyenne et variance données par les estimateurs du maximum de vraisemblance, pour $a = 0.5$. Les quantiles correspondant aux autres valeurs de a sont donnés en annexe. On convient que le quantile q_α de niveau α est la valeur telle qu'une fraction α des valeurs est *inférieure* à q_α .

Probabilité	Quantile empirique	Quantile loi normale	Différence relative
0,005	1,0872792	1,083364585	0,36 %
0,01	1,0965631	1,09394301	0,24 %
0,02	1,1066794	1,105501656	0,11 %
0,03	1,119101	1,112835246	0,56 %
0,04	1,123339	1,11835202	0,44 %
0,05	1,123339	1,122839491	0,04 %
0,1	1,1385744	1,138244098	0,03 %
0,5	1,1920953	1,192584	-0,04 %
0,9	1,2467372	1,246923902	-0,01 %
0,95	1,2632186	1,262328509	0,07 %
0,96	1,2688062	1,26681598	0,16 %
0,97	1,2749673	1,272332754	0,21 %
0,98	1,2832447	1,279666344	0,28 %
0,99	1,2961618	1,29122499	0,38 %
0,995	1,3074037	1,301803415	0,43 %

On constate que la gaussienne sous-estime de façon systématique les quantiles, pour les petites et pour les grandes probabilités, mais dans des proportions très faibles (moins de 1 % pour les trois valeurs de a étudiées, voir en annexe pour $a = 0$ et $a = 1$) : l'hypothèse de normalité conduit ainsi à surestimer de l'ordre de 1 % l'exigence en fonds propres pour couvrir la ruine dans 99.5 % des cas. Il est néanmoins évident que cette assertion n'est vraie que dans le cadre du modèle simpliste que nous utilisons et à "court terme".

On effectue les mêmes simulations à long terme (on conserve une maturité de trente ans pour le zéro-coupon et on prend une échéance à 20 ans). On vérifie que la distribution des valeurs terminales conserve une forme semblable à celle obtenue à court terme.

Chapitre 4

Estimation des paramètres

Afin de construire un générateur de *scenarii* économiques utilisable pour la projection et la valorisation des passifs de l'entreprise, on doit calibrer les modèles théoriques mis en place précédemment. Pour ce faire, on estime les différentes valeurs des paramètres associés aux modèles présentés à partir d'une série de données historiques. Toutefois, on ne peut pas se limiter à la seule estimation de ces paramètres. En effet, que si la mise en œuvre des déflateurs permettait de proposer un cadre unique de modélisation, le prix à payer était l'estimation d'un paramètre supplémentaire : la prime de risque. Si cette prime de risque est facile à calculer dans le cadre d'un modèle de type Black-Scholes, elle est particulièrement compliquée à mesurer pour des modèles plus développés.

4.1 Risque action : Calibration d'un modèle de type Black-Scholes

4.1.1 Estimation de la tendance et de la volatilité

A partir d'une série journalière du CAC 40 de 2005 à 2010 on estime tout d'abord les paramètres liés à l'actif risqué (action) dont l'évolution est régie par un processus de type Black-Scholes ($\xi_t = \log(S_t)$ et $d\xi_t = \mu dt + \sigma dW_t$).

Par hypothèse, le modèle de Black-Scholes suppose que le logarithme du cours du sous-jacent suit un mouvement brownien décentré. On peut utiliser directement sur ces données historiques les estimateurs standards de la dérive et de la variance par unité de temps du logarithme du cours du sous-jacent.

On observe à N instants déterministes $t_i = i\frac{T}{N}$, $i = 1 \dots N$, le processus S et on cherche à estimer $\theta = (\mu, \sigma)$. La vraisemblance associée au modèle

discrétisé s'écrit :

$$L(\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma\frac{T}{N}}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2\frac{T}{N}} \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i - \mu\frac{T}{N})^2\right)$$

La log-vraisemblance est donc de la forme :

$$l(\theta) = -N\log(2\pi) - \frac{N}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2\frac{T}{N}} \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i - \mu\frac{T}{N})^2$$

On en déduit alors simplement l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ en trouvant les valeurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ annulant $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu}$ et $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma^2}$.

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu} = 0 &= \frac{1}{2\sigma^2\frac{T}{N}} \sum_{i=0}^{N-1} -2\frac{T}{N} (\xi_{i+1} - \xi_i - \hat{\mu}\frac{T}{N}) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i - \hat{\mu}\frac{T}{N}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i - \hat{\mu}\frac{T}{N}) \\ &= -T\hat{\mu} \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i) \\ &= -T\hat{\mu}(\xi_N - \xi_0) \end{aligned}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}(\log(S_T) - \log(S_0))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma^2} = 0 &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}^2)^2\frac{T}{N}} \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i - \mu\frac{T}{N})^2 \\ &= -\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i - \mu\frac{T}{N})^2 \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} (\log(S_{i+1}) - \log(S_i) - \hat{\mu}\frac{T}{N})^2$$

On présente dans le tableau suivant les résultats obtenus pour les estimations de la tendance et de la volatilité sur le CAC 40 sur différentes périodes. Selon le flux financier à valoriser, on choisira une période de calibration plus ou moins importante. On remarque, en particulier en ce qui concerne la tendance de long terme, que la valeur des paramètres dépend beaucoup des choix de la période de calibration.

Période de calibration	Tendance μ	Volatilité annuelle σ
2005-2010	0,01191	24,90%
2009-2010	0,17571	24,99%
2010	0,10997	17,73%

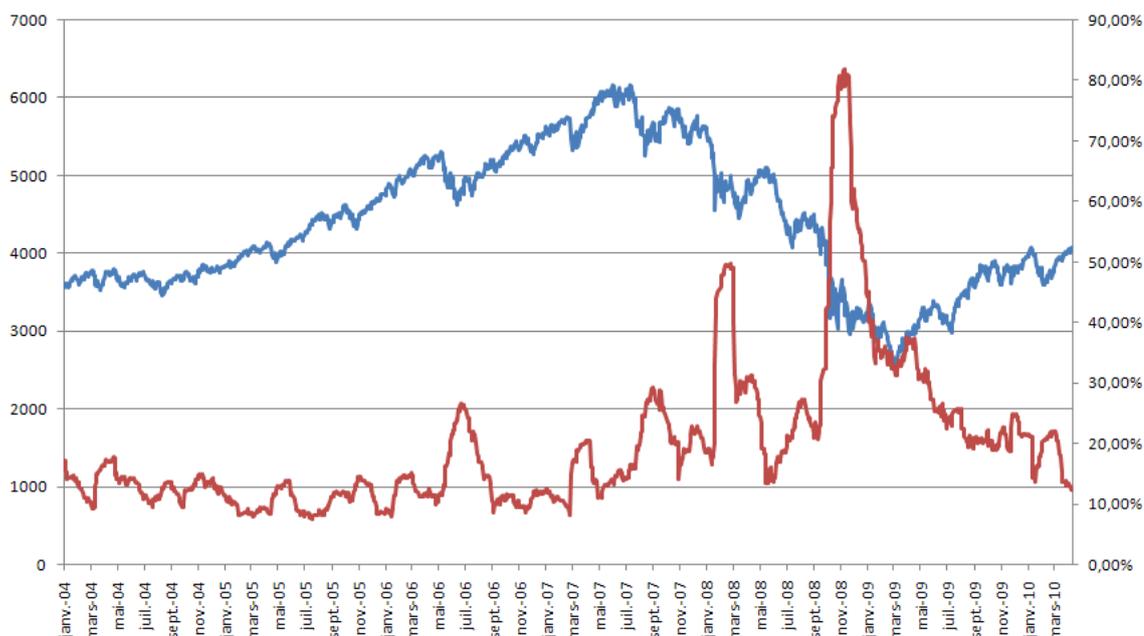


FIGURE 4.1 – Historique du CAC40 (bleu) et volatilité estimée (rouge)

4.1.2 Comparaison des approches risque-neutre et par les déflateurs : illustration à partir de données réelles

Comme on le mentionnait dans la première partie, il est possible d'illustrer, grâce aux données de marché, les différences existant entre l'approche

par les déflateurs et l'approche risque-neutre. On vient en effet d'estimer le niveau de volatilité historique à l'aide de la série des niveaux du CAC40 sur les 5 dernières années. On est ainsi capable d'estimer le niveau réel de la volatilité sur le marché par une estimation dans l'univers historique. Mais on peut aussi tenter de déterminer ce niveau de volatilité dans la logique de l'approche risque-neutre. On connaît cette fois des formules fermées pour la valorisation de produits financiers simples comme des options européennes. En observant le prix des actifs financiers et en inversant ces formules fermées (formule de Black-Scholes dans le cas d'options européennes), on détermine le niveau de volatilité "implicite" sur le marché.

En pratique, on utilise une série de calls européens (*cf.* Breeden et Litzenberger (1978), Descure et Borean (2006)) sur le CAC 40 à échéance du 30 avril 2010, pour différentes valeurs de *strike*. Connaissant le niveau du CAC40 du taux d'intérêt sans risque au moment de la valorisation (On prend l'EU-RIBOR 1 mois), on peut inverser simplement la formule de Black-Scholes (en mettant en place un algorithme de type Newton-Raphson) et déterminer le niveau de volatilité correspondant.

En théorie, la valeur du niveau de la volatilité est unique et on devrait obtenir une seule valeur pour tous les produits financiers. En réalité, lorsque l'on trace ce niveau de volatilité en fonction du *strike* des options, on n'observe pas du tout une droite mais une courbe convexe. On parle de "smile de volatilité implicite". Notons que la valeur obtenue pour la volatilité implicite est assez éloignée de celle déterminée pour les niveaux de volatilité historique. Ceci s'explique par le fait que les périodes de calibration sont différentes (profondeur historique beaucoup plus grande pour l'estimation de la volatilité historique), ce qui souligne à nouveau la sensibilité du modèle au choix des paramètres initiaux et appelle donc à une certaine prudence dans le choix de la période de calibration des paramètres.

Ce résultat n'est pas cohérent avec le modèle de Black et Scholes et est la conséquence de l'utilisation d'une approche risque-neutre : en faisant disparaître l'existence de la prime de risque, ce sont désormais formellement les paramètres du modèle (μ et σ) qui prennent en compte cette prime de risque et ne sont donc plus constants. La calibration du niveau de volatilité pour le modèle de Black-Scholes relève alors d'un choix arbitraire puisqu'on dispose d'un intervalle de valeurs possibles.

Pourtant, la volatilité, bien qu'inobservable directement, est un paramètre unique que l'on sait déterminer à partir des données historiques. L'utilisation

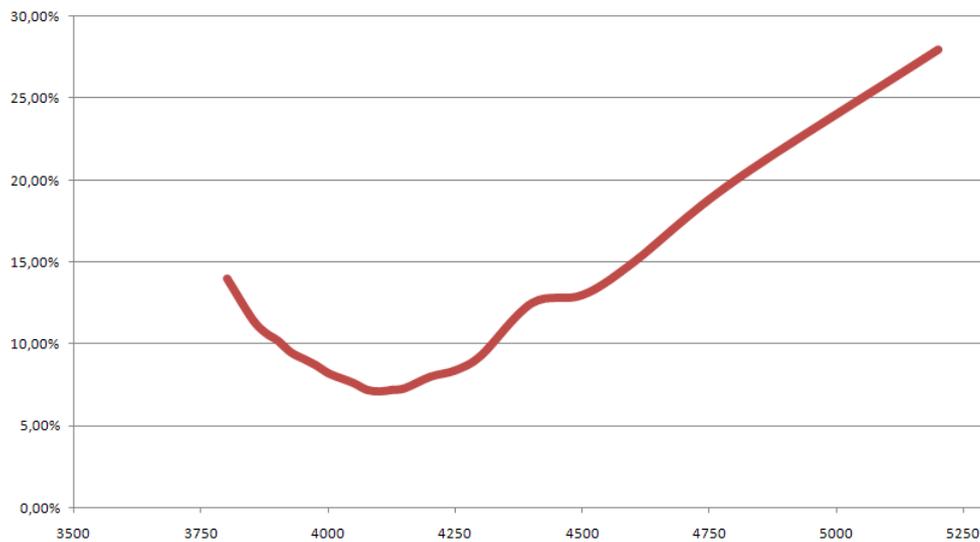


FIGURE 4.2 – Smile de volatilité implicite sur une série d'options sur le CAC40

de déflateurs stochastiques est la seule méthode qui permettent de travailler dans ce cadre unique où les paramètres prennent des valeurs cohérentes avec celles observées sur le marché.

4.1.3 Evaluation du prix de marché du risque

La seule estimation des paramètres de volatilité et de tendance ne suffit pas à calibrer nos modèles. Il nous reste encore à estimer la prime de risque sur les actions. La prime, ou le prix de marché, du risque est liée à la nature du risque modélisé. Il est déterminé en analysant l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert. Celle-ci s'obtient donc facilement dans le cadre d'un modèle de Black-Scholes car elle se calcule directement à partir des paramètres μ , σ et du taux d'intérêt sans risque r : $\lambda = \frac{r-\mu}{\sigma}$. On peut donc tracer cette prime de risque sur les actions.

La prime de risque action est donc loin d'être constante et fluctue beaucoup en fonction de la tendance du marché. On constate que dans certains moments de taux d'intérêts particulièrement bas et de marchés haussiers, cette prime peut même être négative. L'exemple de la période 2009-2010,



FIGURE 4.3 – Prime de risque Action estimée

période de flambée du marché action en réaction à la chute de 2008, en est la meilleure illustration. Les investisseurs ont un appétit particulièrement fort pour les produits risqués en ces périodes. Toutefois, sur le long terme, on retrouve bien une prime de risque positive (de l'ordre de 100%).

4.2 Risque de taux : Calibration d'un modèle de type Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

On s'intéresse maintenant à la calibration du modèle pour le taux d'intérêt court r . On rappelle que le modèle utilisé est de la forme :

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt - \sigma_r \sqrt{r(t)}dW_r(t)$$

On choisit comme taux de référence le taux EURIBOR 3 mois. On dispose, pour calibrer le modèle, de son historique journalier sur les 7 dernières années.

4.2.1 Justification de l'emploi d'un modèle CIR pour la modélisation de la dynamique des taux d'intérêt

La littérature propose un grand nombre de modèles pour la représentation de la courbe des taux. Partant d'un modèle à un facteur de type $dr(t) = u(r)dt - \nu r^\beta dW_r(t)$ pour la dynamique du taux d'intérêt court, on

cherche, à estimer les paramètres de ce modèle. On s'intéresse en particulier au coefficient β qui nous permettra de déterminer quel modèle de taux "classique" préférer : par exemple, pour un modèle de type CIR, on a $\beta = 0,5$, alors que pour un modèle de type Vasicek, on a $\beta = 0$.

On s'appuie ici en particulier sur la méthodologie développée par Ahmad et Wilmott (2007). En discrétisant simplement ce modèle à un facteur on a :

$$\mathbb{E}[\delta r^2] = \nu^2 r^{2\beta}$$

On utilise donc les données historiques du taux EURIBOR 3 mois et on décide de regrouper mensuellement les incréments de la valeur du taux d'intérêt δr . Pour chaque mois on calcule l'espérance du carré de ces incréments et on est donc capable du tracer l'ensemble des points $(\ln(\mathbb{E}[\delta r^2]); \ln(r))$. En théorie on obtient une droite de coefficient directeur 2β ce qui nous permet d'obtenir une estimation pour l'exposant du taux r dans la volatilité du modèle à un facteur.

En pratique, sur la période 2003-2010, on trouve un nuage de point dispersé autour d'une droite moyenne d'équation $\ln(\mathbb{E}[\delta r^2]) = 1,283 \ln(r) - 12,989$. On estime donc à partir de ces valeurs que le coefficient β vaut 0,64. Sachant que Ahmad et Wilmott ont constaté empiriquement que ce coefficient était d'autant plus faible que les taux d'intérêts sont bas, il n'est pas absurde de choisir un modèle de type CIR ($\beta = 0,5$) pour modéliser la dynamique des taux d'intérêt.

4.2.2 Estimation des paramètres du modèle CIR

Après avoir discrétisé le modèle CIR sous la forme simple $r(t) - r(t-1) = \kappa(\theta - r(t-1))dt - \sigma_r \sqrt{r(t-1)}\xi$, on peut réaliser facilement une régression de la série différenciée des $\Delta r(t) = r(t) - r(t-1)$ sur les séries des $r(t-1)$ et $\sqrt{r(t-1)}$. Les coefficients obtenus sont significatifs et on a sur la période avril 2008 - mars 2010 (soient 500 jours), les résultats suivants :

Paramètre	Valeur estimée
κ	0,0489
θ	1,996 %
σ	24,56 %

Deux éléments semblent importants à noter :

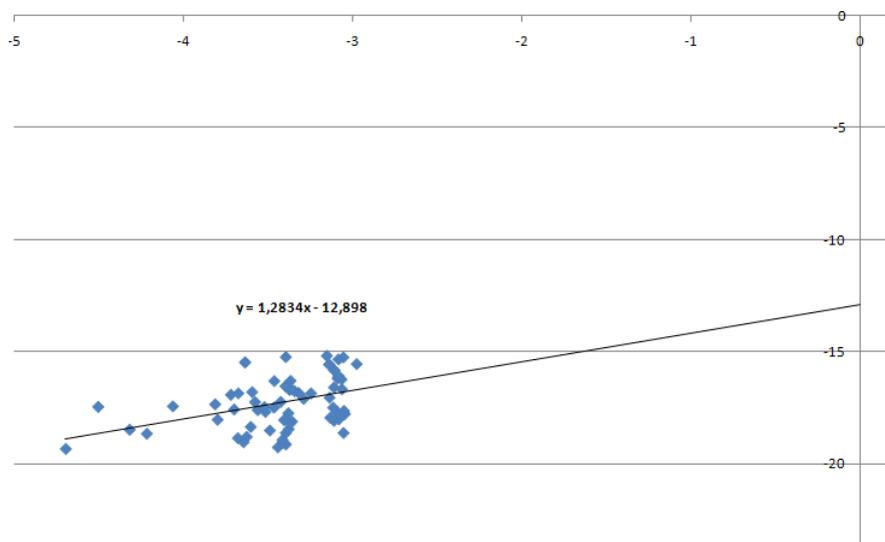


FIGURE 4.4 – Estimation du coefficient Beta

- Le taux d'intérêt à long terme (valeur moyenne θ) estimé est à 2% ce qui semble être un bon ordre de grandeur.
- Le niveau de volatilité estimé semble particulièrement élevé pour des taux d'intérêt, mais il ne faut pas oublier que la période choisie pour la calibration dans cet exemple est particulièrement instable puisqu'en un peu plus d'un taux l'EURIBOR 3 mois a chuté de plus de 5% à moins de 1% (cf.graphique historique de l'EURIBOR 3 mois sur es deux dernières années ci-dessous).

4.2.3 Évaluation du prix de marché du risque

Les taux d'intérêt ne sont pas directement négociables. L'évaluation de la prime de risque (excès de rendement pour une unité de risque supérieure) est donc particulièrement complexe pour les taux d'intérêt car elle ne repose pas sur l'évaluation des taux directement mais des dérivés de taux. Ce sont les seuls produits à contenir de l'information sur la manière dont la marché valorise le risque de taux dans la mesure où ce sont les seuls à avoir un prix. Toutefois la littérature récente offre une approche approfondie du problème de l'estimation de ce prix de marché du risque. A la suite de la méthodologie développée par Ahmad et Wilmott (2007), Caja et Planchet (2010) proposent une synthèse de la mesure des prix de marché du risque et de leur utilisation dans les modélisations en assurance et mettent notamment en application le

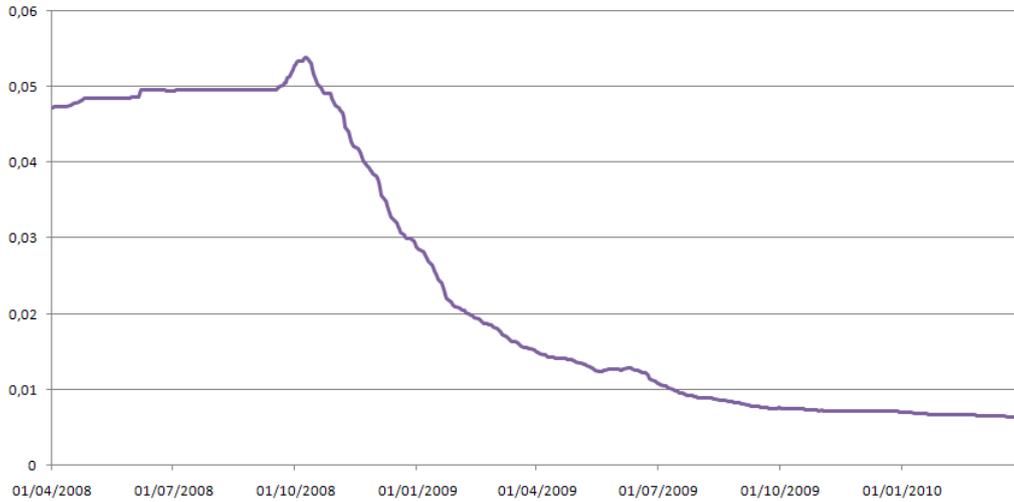


FIGURE 4.5 – Historique du taux EURIBOR 3 mois sur la période :avril 2008-avril 2010

cadre monofactoriel général proposé par Ahmad et Wilmott. C'est ce travail qui a été repris pour calibrer la prime de risque de taux.

Partant d'un modèle monofactoriel $dr(t) = u(r)dt - \nu r^\beta dW_r(t)$, on a vu qu'on était capable d'estimer les paramètres de dérive et de volatilité. On choisit de calibrer la prime de risque à l'aide d'obligations zéro-coupons (produit dérivé de taux simple) : c'est la forme de la courbe des rendements qui va nous permettre d'estimer λ .

On sait que le prix d'un zéro-coupon P vérifie classiquement l'équation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nu r^\beta)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (u - \lambda(\nu r^\beta)) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0$$

Caja et Planchet (2010) montrent qu'en effectuant un développement de Taylor pour des zéros-coupons proches de la maturité ($t \rightarrow T$), on a :

$$P(r, t) \approx 1 - r(T - t) + \frac{1}{2}(T - t)^2(r^2 - u + \lambda(\nu r^\beta)) + \dots$$

Et donc :

$$-\frac{\ln(P)}{T - t} = r + \frac{1}{2}(T - t)(u - \lambda(\nu r^\beta)) + \dots$$

Au voisinage de la maturité du zéro-coupon, on a une approximation au deuxième ordre de la courbe des rendements (yield curve). Connaissant les structures de la dérive et de la volatilité (estimées précédemment), on peut

alors obtenir une valeur de λ à partir de la valeur de la pente à l'origine de la yield curve pour des zéro-coupon proches de la maturité.

On applique cette méthode en approchant le taux sans risque par l'EURIBOR 3 mois (on a déjà estimé dans la partie précédente la dérive et la volatilité à partir du taux EURIBOR 3 mois). A partir du rendement d'obligations à 3 mois d'échéance fin mars 2010, on trouve une valeur de la prime de risque à cette date :

$$\lambda = -1,56$$

Cette valeur semble cohérente avec l'ordre de grandeur trouvé par Caja et Planchet (2010) pour le début d'année 2010 (entre -1 et -5). On note que cette valeur est bien négative car il s'agit bien de la prime de risque que le marché associe au taux sans risque. Cette prime est proportionnelle à la sensibilité du prix du zéro-coupon aux variations du taux court r . Or le prix P du zéro-coupon diminue si le taux d'intérêt sans risque augmente.

Chapitre 5

Valorisation du passif d'une compagnie d'assurance vie

Ce chapitre constitue une synthèse des éléments essentiels à la compréhension de la suite de notre travail. L'approche par les déflateurs stochastiques peut être utilisée pour calculer facilement le *best estimate* d'un contrat d'épargne. Cette valeur est essentielle pour une compagnie d'assurance-vie afin d'obtenir une valorisation correcte de son passif et donc de bien connaître ses risques. On regroupe donc dans cette partie l'ensemble des notions nécessaires à l'appréhension de cette problématique.

5.1 Réglementation et Capital économique

5.1.1 La Juste Valeur économique

La nouvelle réglementation a conduit les compagnies d'assurance à s'intéresser à leur exposition réelle au risque et à la communiquer au public. La mesure d'une telle exposition passe par l'évaluation à la "juste valeur" économique (*fair value*), c'est-à-dire l'espérance de la somme actualisée des flux futurs d'un actif ou d'un passif. Le dispositif Solvabilité 2 prévoit la détermination d'un capital économique réglementaire correspondant au montant minimal de fonds propres que la compagnie doit détenir pour faire face à un risque de ruine à un an avec une probabilité supérieure à 99,5%. Trois éléments sont importants à noter dans cette définition :

- le risque de ruine correspond au risque d'une situation dans laquelle la valeur *market consistent* du passif (des engagements) de l'assureur est

supérieure à la valeur de marché de l'actif de la compagnie ;

- la nécessité de disposer d'une distribution de la valorisation des fonds propres de l'assureur dans un an, puisqu'ils sont une variable aléatoire vu d'aujourd'hui ;
- la distribution des fonds propres est aussi nécessaire à connaître afin de déterminer le quantile à 99,5% des pertes ;

5.1.2 Bilan économique et notion de Best Estimate

A tout instant, une compagnie d'assurance doit savoir si elle dispose d'une richesse suffisante pour tenir ses engagements et assurer sa survie même dans une période difficile à horizon d'un an. Cela repose sur l'évaluation la plus juste possible des engagements de la compagnie, c'est à dire de son passif.

Le bilan économique de la société est le plus adapté pour évaluer les risques de la compagnie. On peut écrire sous forme simplifiée le bilan économique d'une compagnie d'assurance sous la forme suivante :

ACTIF	PASSIF
Actifs	Fonds Propres Provisions

L'actif ne présente pas de difficulté majeure. Il est facilement valorisé grâce aux prix obtenus sur chacun des marchés où s'échangent chacun des actifs. Finalement la valeur de l'actif correspond à la valeur de cession de l'ensemble des actifs qui le compose.

En revanche, il est plus délicat d'évaluer correctement le passif de la société dans la mesure où il est composé majoritairement des engagements que la compagnie a envers ses assurés et pour lequel il n'existe donc pas de marché liquide permettant de donner un prix. On valorise alors, par exemple, le passif d'une compagnie d'assurance-vie comme étant la valeur actualisée des flux futurs liés aux contrats d'épargne détenus : c'est le *Best Estimate*.

Ce *Best Estimate* est particulièrement complexe à déterminer pour des contrats d'assurance-vie qui sont des contrats de long terme et qui présentent la plupart du temps des garanties pour l'assuré (contractuelles comme une garantie plancher ou réglementaire comme la participation aux bénéfices).

Afin d'obtenir une valorisation satisfaisante du passif, il faut avoir recours à des projections sur un ensemble de scénarios financiers différents. L'utilisation des déflateurs stochastiques se prête très bien à ce type de valorisation issue de projections stochastiques : on projette tout d'abord l'ensemble de l'actif à un horizon donné (un an) puis on valorise en projetant les flux du passif jusqu'à l'échéance du contrat ainsi que le déflateur stochastique associé.

5.2 Générateurs de Scénarios économiques

En pratique, le calcul du *Best Estimate* du passif va de pair avec une modélisation globale du bilan de la compagnie d'assurance, c'est-à-dire une modélisation de l'actif, du passif et des interactions actif/passif (comme par exemple, l'allocation stratégique des investissements ou l'attribution de dividendes). Construire un modèle prenant en compte l'ensemble des paramètres régissant l'évolution de l'actif et du passif ainsi que leurs interactions est particulièrement lourd.

L'approche par les déflateurs stochastiques est adaptée pour la détermination du *Best Estimate* du passif c'est pourquoi nous concentrons ce mémoire sur la valorisation d'un contrat d'épargne. Toutefois cette étape s'inscrit dans le cadre plus global des Générateurs de Scénarios Economiques (Economic Scenarios Generator, ou ESG) que nous présentons donc rapidement en nous appuyant sur la présentation complète faite par Planchet *et al.* (2009).

Les générateurs de scénarios économiques sont des modèles intégrant à la fois les actifs et les paramètres macroéconomiques avec lesquels ils interagissent, permettant d'effectuer des projections stochastiques de l'actif de la société dans un cadre cohérent avec les équilibres macroéconomiques reliant la dynamique des actifs (obligations, actions, monétaire, immobilier), l'inflation, les taux d'intérêt et le taux de croissance de l'économie. Planchet *et al.* (2009) distinguent deux catégories d'ESG en fonction de leur mode de construction :

- Les modèles intégrés où découle de l'évolution d'une variable explicative l'ensemble des dynamiques des actifs (par exemple, l'inflation dans le cadre du le modèle de Wilkie (1995))
- Les modèles composites où chaque classe d'actif est décrite indépendamment puis l'ensemble est agrégé dans un modèle global

Les auteurs retiennent *a posteriori* l'approche proposée par Ahlgrim *et al.* (2005). Dans ce modèle composite, c'est la conjugaison du taux d'inflation et

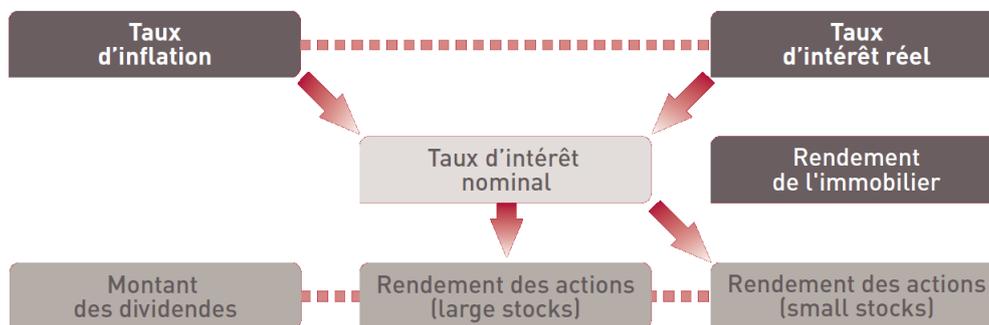


FIGURE 5.1 – Structure du modèle d’Ahlgrim (Documentation WINTER & Associés)

du taux d’intérêt réel qui donne le taux d’intérêt nominal qui commande lui même le rendement des actions. Le modèle d’Ahlgrim prend aussi en compte une modélisation des prix de l’immobilier.

5.3 Le contrat d’épargne

5.3.1 Présentation du contrat d’épargne en euros

Le passif d’une compagnie d’assurance vie, comme nous cherchons à estimer, peut se résumer à un ensemble de contrats d’épargne en euros. On présente donc dans ce paragraphe les caractéristiques de ces contrats d’assurance vie.

Le contrat d’épargne en assurance-vie est typiquement un contrat d’épargne de longue durée où le capital est bloqué pendant une durée importante (comme pour le Plan d’Épargne Populaire ou le Plan d’Épargne Action), et ce par opposition aux contrats de court terme de type Livret d’Épargne ou Codévi. Mais le contrat d’épargne est surtout particulier par le fait qu’il reste un contrat d’assurance et est donc aléatoire : il présente non seulement un paramètre financier (taux d’intérêt) mais aussi un paramètre viager dans la mesure où le versement est conditionné à la réalisation d’un événement sur la vie de l’assuré (décès, survie,...).

Le Code des Assurances régit l’aspect financier de ce contrat en encadrant le taux d’intérêt technique utilisé pour la capitalisation (Art. A. 132-1). Ce taux doit être inférieur à 75% du TME pour les contrats de durée maximale

inférieure à 8 ans et de $\min(3.5\%, 60\%TME)$ pour les autres, le TME étant le Taux Moyen des Emprunts d'État (avec comme référence le taux maximal entre les taux à l'émission et le rendement sur le marché secondaire).

On distingue deux grands types de supports pour les contrats d'épargne en assurance-vie :

- les supports en euros : les contrats en euros , investis majoritairement en obligations, présentent globalement peu de risque (et donc un rendement faible) d'autant que l'assureur garantit un taux minimal (TMG) (conformément à l'art. A. 132-1 du Code des Assurances) et un effet cliquet grâce auquel l'assuré conserve intégralement les intérêts qui lui ont été versés une année ;
- les supports en unité de compte (UC) : investis en actifs *a priori* plus risqués, l'intégralité du risque de placement étant supportée par l'assuré.

5.3.2 Points particuliers de la gestion d'un contrat d'épargne

On insiste ici sur les points qu'il sera important à prendre en compte dans notre modélisation des flux associés à la gestion d'un contrat d'épargne (frais, rachats, ...).

Frais

On distingue trois grandes catégories de frais liés à un contrat d'épargne :

- les frais d'acquisition :A chaque versement un pourcentage ou une somme forfaitaire est prélevée (Rémunération de l'intermédiaire, frais de publicité, etc.)
- les frais d'administration ;
- les frais de gestion : liés au placement du fonds et prélevés sur l'épargne (sur les intérêts générés), ils sont souvent prélevés sur l'encours du contrat donné.

Compte tenu de leur forme, seuls les frais de gestion constituent un point important dans la modélisation des flux liés à un contrat d'épargne.

Rachat

On a vu que le contrat d'assurance-vie est un contrat de long-terme pour lequel le capital est bloqué un certain nombre d'années. Pourtant l'assuré peut avoir besoin de recouvrer tout ou partie de son épargne. Le contrat présente donc une valeur de rachat et il est possible de le racheter partiellement ou totalement. Évidemment le rachat est généralement associé à des pénalités (dégressives avec l'ancienneté du contrat) et impérativement nulles au-delà de 10 ans.

La modélisation des rachats partiels est particulièrement complexe (car l'assuré peut racheter le pourcentage qu'il souhaite de son contrat) et n'apporte finalement pas grand chose de plus que la modélisation des rachats totaux. On distinguera toutefois deux phénomènes de rachat au comportement différents :

- les rachats conjoncturels : ils sont liés aux paramètres de marché et résultent d'opérations d'arbitrage avec d'autres produits financiers ;
- les rachats structurels : ils interviennent pour des raisons indépendantes des conditions de marché (besoin de liquidité pour financer par exemple un achat immobilier, *etc.*).

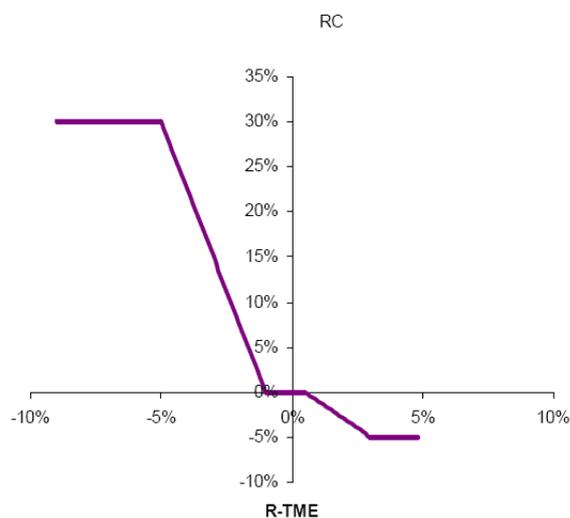


FIGURE 5.2 – Taux de Rachat Conjoncturel QIS 5 (Documentation WINTER & Associés)

A titre d'illustration, la figure suivante présente la courbe de rachat conjoncturel présentée par le QIS 5 (*Quantitative Impact Study* n° 5) pour l'élaboration de Solvabilité 2.

Dans ce mémoire, nous ne chercherons pas à modéliser le rachat conjoncturel, par souci de simplicité. On se donnera en revanche un profil de rachat structurel.

Revalorisation du contrat et participation aux bénéfices

En premier lieu, un contrat d'épargne en euros est souvent associé à un taux minimum garanti (TMG) éventuellement nul (garantie plancher), c'est-à-dire à un rendement minimal annuel de l'épargne. Ce taux est limité par la réglementation et fixée de façon annuelle en fonction du taux moyen des emprunts d'Etat.

Par ailleurs, si le rendement effectif du fonds sur lequel est investi l'épargne est supérieur au taux minimum garanti, l'assureur est tenu de faire participer l'assuré aux bénéfices (art. L. 331-3 du Code des Assurances) dans des conditions fixées contractuellement. En pratique, le taux est au minimum de 85 % des bénéfices dégagés en surplus du TMG.

Chapitre 6

Détermination du *best estimate* d'un contrat d'épargne

Dans cette partie, on cherche à comparer l'approche standard dans laquelle les prix de marché du risque sont constants, avec une modélisation stochastique de ces derniers.

Sur le plan théorique, rien ne garantit d'emblée que la prime de risque sera constante sur un marché d'Itô : Karatzas et Shreve (1998, théorème 4.2 p. 12) trouvent que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'un *processus stochastique* progressivement mesurable appelé prix de marché du risque.

Différentes études (Duffee (2002), Ahmad et Wilmott (2006), Caja et Planchet (2010) en particulier) suggèrent également que l'hypothèse de constance du prix de marché du risque n'est pas justifiable empiriquement.

On cherche ici à appliquer les deux approches sur un contrat d'épargne à garantie plancher investi sur actions et zéro-coupon.

6.1 Présentation du contrat et valorisation du passif associé

6.1.1 Caractéristiques du contrat

On étudie un contrat d'épargne à garantie plancher à un horizon de $T = 8$ ans, investi sur un fonds constitué de 70 % de zéro-coupons de maturité $T = 8$ ans et de 30 % d'actif risqué. L'investissement est effectué à $t = 0$ pour un montant total V_0 . Les calculs sont menés au 1^{er} janvier de l'année considérée.

Les assurés sont supposés être 1000 hommes âgés de 40 ans pour simplifier. Le rachat anticipé induit une rétention par l'assureur de 5 % de la valeur

du montant épargné au moment du rachat. En revanche, l'événement de mortalité provoque la sortie, mais n'induit pas de pénalité et conserve le taux minimum garanti au moment de la sortie ; on verse également aux héritiers la participation aux bénéfices éventuelle. Ils décèdent suivant la table de mortalité suivante et rachètent leur contrat pour des raisons non conjoncturelles au taux suivant :

t (années)	1	2	3	4	5	6	7	8
taux de rachat structurel τ (%)	2.28	2.87	2.93	2.85	2.90	2.49	2.14	6.51
q_{40+t}	0.24	0.26	0.29	0.33	0.36	0.40	0.43	0.9769

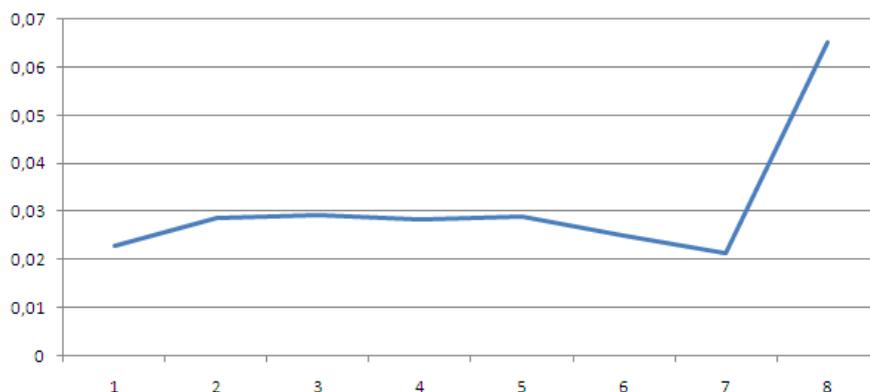


FIGURE 6.1 – Evolution des taux de rachat

On remarquera la valeur de q_{48} , qui correspond à la sortie de tous les épargnants, puisque nous avons supposé que mortalité et sortie au terme étaient équivalentes.

Une sortie ou un rachat structurel provoquent un désinvestissement dans chaque actif au *pro rata* de sa part dans le fonds.

La participation aux bénéfices est versée tous les ans, avec un taux $PB = 85\%$. Il n'y a donc pas de mécanisme d'égalisation des PB.

On suppose enfin que l'assureur prélève 0.5 % de frais de gestion sur l'encours net des sorties et rachats de l'année, et que ces prélèvements n'alimentent pas les fonds propres : ils ne servent par exemple qu'à rémunérer le gestionnaire du fonds.

6.1.2 Valeur de marché des flux du passif

A la date t , le montant des flux F_t est la somme des sorties structurelles non dues à la mortalité, la somme des sorties dues à la mortalité (y compris la sortie de tous les assurés au terme $t = 8$ ans), des flux de gestion (0.5 % de l'encours du fonds).

On note $V(t)$ la valeur du fonds à la date t brute de l'ensemble des sorties et rachats (la valeur du fonds s'il n'y avait aucun rachat ni sortie).

$$\begin{aligned}
 F(1) &= 0.005 \cdot V(1) + 0.95 \cdot \tau_1 \cdot V(1) + q_{41} \cdot V_0 + PB \cdot \max(V(1) - V_0 \cdot (1 + Tmg), 0) \\
 F(t) &= 0.005 \cdot \left(V(t) - \sum_{s=1}^{t-1} F(s) \right) + 0.95 \cdot \tau_t \cdot V(t) \\
 &\quad + q_{40+t} (V_0 + PB \cdot \max(V(t) - V_0(1 + Tmg), 0)) \\
 &\quad + \left(1 - \sum_{s=1}^t (q_{40+s} + \tau_s) \right) \cdot PB \cdot \max \left(V(t) - \sum_{s=1}^{t-1} F(s) - V_0(1 + Tmg), 0 \right) \quad t \geq 2
 \end{aligned}$$

La valeur de marché à $t = 0$ de l'ensemble de ces flux est alors, sachant que $D(0) = 1$:

$$FV(0) = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=1}^8 D(t) F(t) \right]$$

6.2 Prime de risque constante

6.2.1 Evaluation du *Best Estimate*

On suppose que le prix de marché du risque est constant et vaut $\lambda = 0.3$. On utilise les paramètres calibrés au chapitre 4, et on résume l'ensemble des paramètres des simulations dans le tableau ci-dessous :

Taux d'intérêt court $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r dW$	κ θ σ_r	12,25 1,96% 24,5%
Actif risqué $\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dW_s$	μ_s σ_S ρ	0,05 25% 0,5
Contrat	α Proportion d'actif risque PB TMG Pénalité de rachat	0,3 85% 3% 5%
Prime de risque Nombre d'assures Capital par contrat	λ N V	0,3 1000 100

On effectue 5000 simulations pour des trajectoires de 1200 points intermédiaires chacune. Le montant initialement investi dans le fonds est de 100 000 €.

On trouve pour ces paramètres un *Best Estimate* de 161 968 €.

6.2.2 Sensibilité aux paramètres

On étudie dans ce paragraphe la sensibilité des différents paramètres de la modélisation. A chaque test, on reprend les valeurs des paramètres du calcul initial exposées au paragraphe précédant et on ne fait varier que le paramètre dont on souhaite étudier l'influence.

Prime de risque

Paramètre	<i>Best Estimate</i>	Sensibilité
$\lambda = 0.3$	161968	Référence
$\lambda = 0.2$	146943	+13,1%
$\lambda = 0.4$	183144	-9,4%

On constate immédiatement que le niveau du *Best Estimate* dépend fortement du niveau de la prime de risque retenu. En pratique on verra que la prime de risque est loin d'être constante. Les fortes variations des estimations avec le niveau de la prime de risque nous incitent donc à étudier l'impact sur les résultats d'une modélisation dynamique du niveau de la prime de risque.

Corrélation

Paramètre	<i>Best Estimate</i>	Sensibilité
$\rho = 0.5$	161968	Référence
$\rho = 0$	171207	+5,7%
$\rho = -0.5$	196921	+21,6%

Lorsque la corrélation entre les deux dynamiques de l'actif risqué et du zéro-coupon diminue on constate que le *Best Estimate* augmente sensiblement. Cela se comprend aisément dans la mesure où lorsque les actifs sont corrélés positivement et fortement, leurs dynamiques sont ressemblantes et la volatilité du portefeuille est moins forte que lorsque les actifs ont une dynamique contradictoire. D'où un niveau d'engagements significativement moins important.

Taux Minimum Garanti

Paramètre	<i>Best Estimate</i>	Sensibilité
=3%	161968	Référence
=1%	159842	-1,3%
=5%	167843	+3,5%

On s'attendait à ce que lorsque le Taux minimum garanti aux assurés diminue, le prix de l'option cachée contenue dans le contrat d'épargne diminue (l'assureur s'engageant à un niveau moindre de rentabilité du contrat). Il semble toutefois intéressant de noter dans notre cas (actif risqué avec une tendance haussière importante) le prix de cette option est relativement faible dans le coût total des engagements car le TMG retenu est de 3% alors que la tendance des actions est de 5% de croissance annuelle sur les huit ans.

Proportion en actifs risqués

Paramètre	<i>Best Estimate</i>	Sensibilité
$\alpha = 0,3$	161968	Référence
$\alpha = 0,15$	1138284	-29,7%
$\alpha = 0,6$	228869	+41,3%

Si les obligations offrent un rendement annuel certain et proche du niveau du taux minimum garanti, c'est bien la proportion en actif risqué qui guide la structure de l'histogramme des valeurs terminales possibles du portefeuille et donc des flux des engagements de l'assureur. Quand cette proportion double

les engagements sont très importants car la valeur du portefeuille final est elle-aussi très grande et largement au-dessus, en moyenne, de la valeur minimale garantie.

Pénalité de rachat

Paramètre	<i>Best Estimate</i>	Sensibilité
PR=5%	161968	Référence
PR=20%	158782	-1,9%

Le sens de variation du *Best estimate* avec la pénalité de rachat est évident : Si cette pénalité augmente, les engagements de l'assureur envers les assurés rachetant leurs contrats avant le terme diminuent. Il est en revanche plus intéressant de constater que cette prime a relativement peu d'influence sur le niveau final du *Best estimate* dans la mesure où la proportion des assurés rachetant leur contrat est assez peu élevée.

6.3 Prime de risque stochastique

6.3.1 Le processus de prix de marché du risque

On a vu dans le chapitre 4 comment il était possible d'estimer le niveau de la prime de risque relative aux taux d'intérêt. Le modèle CIR supposait que ce λ était constant et que la prix de marché du risque associé était de la forme $\frac{\lambda\sqrt{r}}{\sigma}$. Or, lorsqu'ils réalisent l'estimation du prix de marché du risque de taux à l'aide de prix de zéro-coupon sur la période 1986-2008, Caja et Planchet (2010) constatent que cette prime suit un processus qui varie beaucoup au cours du temps et qui est particulièrement erratique.

Si les modèles classiques supposent aisément que le prix de marché du risque est constant, cela revient à dire que l'on considère donc que les marchés évaluent de façon identique au cours du temps. Ceci ne va pas de soit, et le comportement estimé du prix de marché du risque révèle bien que celui-ci n'est ni nul (hypothèse parfois retenue dans la mesure où la prime de risque est difficile à estimer) ni même constant.

Une modélisation correcte de la prime de risque en fonction du temps s'impose. Le modèle proposé par Ahmad et Willmott (2006) est un modèle mono-factoriel, ce qui leur permet d'appliquer la méthode d'estimation de

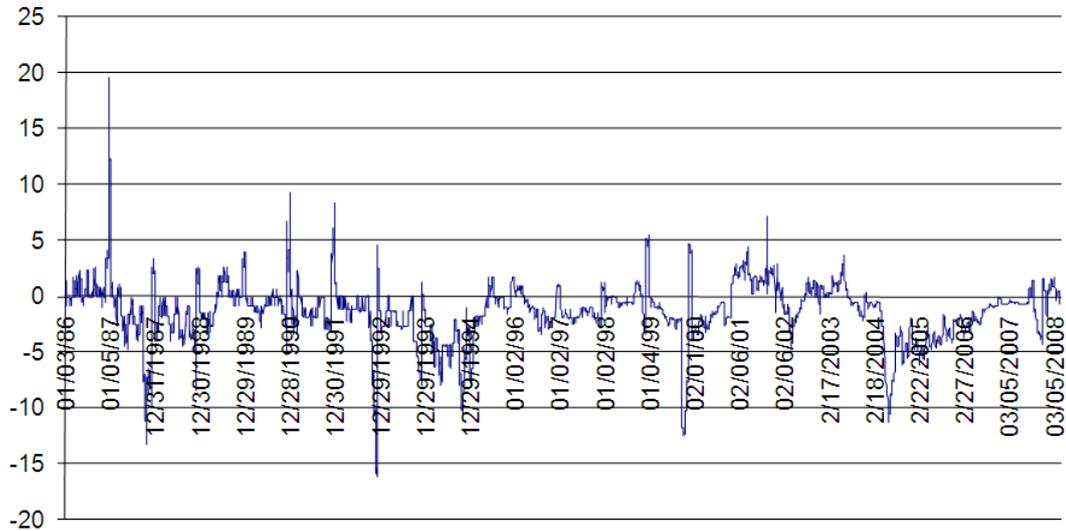


FIGURE 6.2 – Prix de marché du risque de taux estimé (Caja et Planchet [2010])

la dynamique des taux courts à celle des taux d'intérêt pour en trouver la structure de tendance et de volatilité. On retiendra une dynamique de type CIR (comme pour la modélisation du taux d'intérêt court).

6.3.2 Modélisation de la prime de risque

On modélise la prime de risque de la manière suivante :

$$d\lambda(t) = a(\lambda_0 - \lambda(t))dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)} dW_\lambda(t)$$

où W_λ est un mouvement brownien sous la probabilité historique indépendant de W_r et W_r^\perp .

A titre d'illustration, on donne l'allure d'une simulation du processus de la prime de risque obtenu avec les paramètres suivants : $a = 0,5$; $\lambda_0 = 0,3$; $\sigma_\lambda = 40\%$.

A ce stade il convient de s'arrêter sur une question théorique importante. En ajoutant un degré de liberté à la prime de risque sans ajouter d'actif dans notre marché, celui-ci n'est plus complet et il n'y a donc plus unicité du déflateur. Ceci n'est pas contraignant dans la mesure où l'on se place tout de même dans un cadre respectant l'absence d'opportunité d'arbitrage

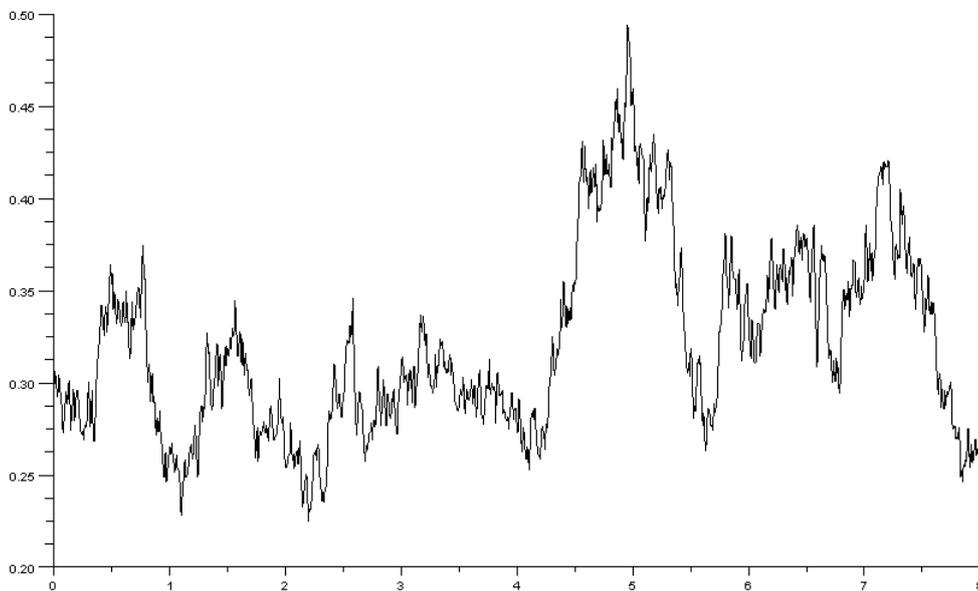


FIGURE 6.3 – Prix de marché du risque stochastique

lorsque le prix de marché du risque est stochastique, or ceci n'a rien d'évident.

En pratique la modélisation proposée ici se rapproche de celles des modèles d'arbitrage à plusieurs facteurs comme le modèle HJM(Heath, Jarrow et Morton) ou LMM (Libor Market Model). En s'appuyant sur les travaux déjà menés sur ce type de modèles, et en particulier sur celui de Racicot et Théoret (2006), on a une condition nécessaire et suffisante pour rester dans le cadre de l'absence d'opportunité d'arbitrage : le prix de marché du risque de taux doit être le même pour toutes les obligations, c'est-à-dire que celui-ci ne dépend que de la date courante et pas de la maturité. Dès lors, spécifier la forme de la prime de risque de la manière dont ne le faisons dans cette partie nous garantit que nous restons dans le cadre de l'absence d'opportunité d'arbitrage (il existe une mesure équivalente sous laquelle les processus des prix des obligations est une martingale).

Le cadre théorique que nous avons construit pour le cas d'une prime de risque constante est alors facilement transposable avec un processus de prix de marché du risque dynamique.

6.3.3 Quelles explications théoriques pour des primes de risque variables ?

La théorie économique néo-classique ne peut rendre compte, dans ses fondements, de la variabilité du prix de marché du risque qui suppose une aversion pour le risque non constante au cours du temps.

Que manifeste alors une variation du prix de marché du risque ? Les explications potentielles sont nombreuses.

Danielsson, Shin et Zigrand (2001) proposent un modèle dans lequel les intervenants sur les marchés financiers sont soumis à des contraintes de Value-at-Risk. Les rendements sous-jacents étant supposés gaussiens, ils sont capables de mener des calculs explicites qui leur permettent de dériver une demande d'actifs risqués analogue à la demande classique, le dénominateur étant la somme de l'aversion pour le risque de l'investisseur et d'un paramètre variable lié à cette contrainte de VaR : tout se passe comme si les investisseurs avaient une aversion pour le risque variable.

On peut également penser au risque de liquidité, dans lequel une unité de richesse est davantage valorisée dans une situation de stress de liquidité : un actif payant davantage lorsque le marché est bas pourra être valorisé avec une prime de liquidité (*cf.* par exemple Holmström et Tirole (1996 et 2001)). Dans ce contexte, la prime de liquidité associée à un actif liquide en période de stress de liquidité se manifesterait comme une diminution du prix de marché du risque.

6.3.4 Simulations et résultats

On présente ici les résultats du calcul du *best estimate* pour différentes valeurs des paramètres régissant la dynamique des prix de marché du risque. Puisqu'on rajoute un aléa, on vérifie que les simulations convergent bien pour 5000 trajectoires et 1200 points par trajectoire. Cette vérification est concluante dans la mesure où l'on trouve pour 5000 tirages un *best estimate* de 212394€ face à un résultat de 212425€ pour 1000 trajectoires de 2000 points intermédiaires.

On présente les différentes valeurs trouvées dans le tableau ci-dessous :

	PR Long terme λ_0	a_λ	σ_λ	Best Estimate	Sensibilité
PR Constante	0,3	—	—	161968	Référence
PR Stochastique	0,3	35%	40%	212394	+31%
	0,3	100%	40%	172091	+6,7%
	0,3	100%	20%	164177	+1,9%

6.3.5 Interprétation et conclusions

Les valeurs de *best estimate* calculées sont très sensibles au comportement de la prime de risque. Si, pour une prime variant relativement peu autour d'un niveau moyen les résultats sont comparables à ceux trouvés avec une prime de risque constante, lorsque la dynamique de la prime de risque est particulièrement erratique, le niveau obtenu est sensiblement plus élevé.

A titre d'illustration, on donne deux trajectoires de la prime de risque obtenues pour des valeurs de paramètres différents : si l'approximation de prime de risque constante est acceptable dans la cas de la trajectoire claire ($a = 1; \lambda_0 = 0,3; \sigma_\lambda = 20\%$), comme le confirme le calcul du *best estimate* supérieur de moins de 2% au résultat avec un prix de marché du risque constant, il est important de prendre en compte la variation de la prime de risque pour des trajectoires semblables à la noire ($a = 0,5; \lambda_0 = 0,3; \sigma_\lambda = 40\%$), où la prime varie dans un intervalle $[0,05; 1]$ et le niveau de *best estimate* est bien plus élevé.

Il semble bon de rappeler que ce calcul de *best estimate* des engagements de l'assureur est une première étape pour déterminer la solvabilité de l'assureur en période difficile. Or, on constate empiriquement qu'en période de crise le prix de marché du risque explose littéralement, rendant obsolète une approche du calcul du *best estimate* à l'aide d'une prime de risque constante.

Si la détermination du niveau du prix de marché du risque (et en particulier la calibration des paramètres dirigeant sa dynamique) sont assez complexes, il semble toutefois important de consacrer du temps à l'étude du processus des primes de risque afin de le modéliser correctement.

6.3.6 Synthèse : De l'utilité du cadre offert par les déflateurs

Les trois pôles de notre étude que constituent les déflateurs stochastiques, l'étude de la prime de risque et le calcul de *best estimate* se rejoignent dans un cadre cohérent. Nous venons de voir qu'il était important de se consacrer

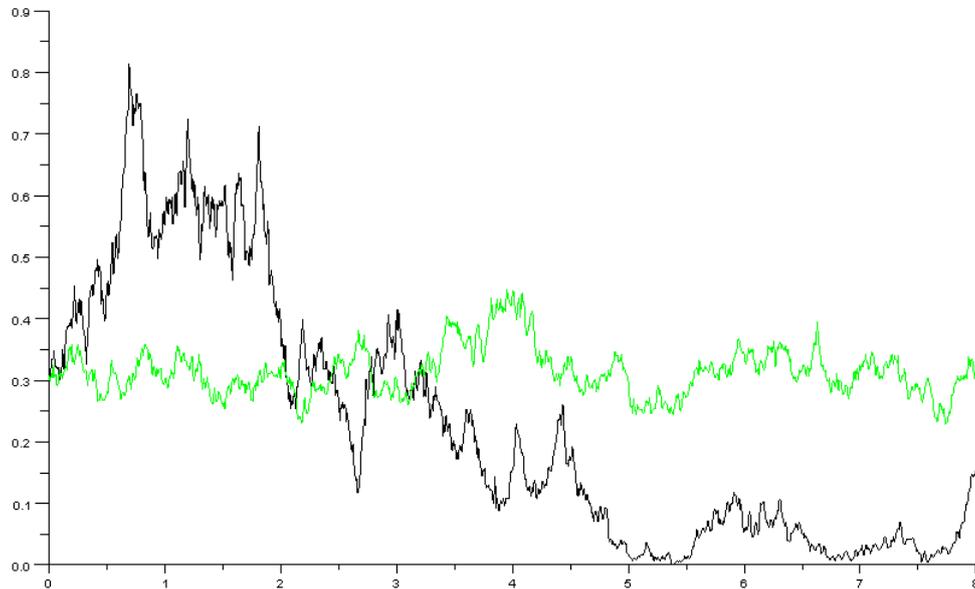


FIGURE 6.4 – Deux trajectoires de primes de risque stochastiques (en noir : $a = 0,5$; $\lambda_0 = 0,3$; $\sigma_\lambda = 40\%$, en vert clair : $a = 1$; $\lambda_0 = 0,3$; $\sigma_\lambda = 20\%$)

à une modélisation correcte du prix de marché du risque et de sa dynamique faute de quoi la détermination *best estimate* des engagements de l'assureur et donc du niveau de capital réglementaire nécessaire (SCR).

Si la prise en compte de la dynamique de la prime de risque est encore absente de la plupart des modèles (notamment par la complexité de l'estimation des paramètres qui régissent son évolution), un travail important doit être effectué pour la généraliser. Il semble en effet difficilement concevable de construire des Générateurs de Scénarios Économiques de plus en plus complexes et intégrant de plus en plus de paramètres et de ne pas s'intéresser à l'évolution du prix de marché du risque (voire parfois de le considérer comme nul).

Dès lors, dans la perspective d'une réelle prise en considération de la prime de risque, le cadre théorique offert par les déflateurs semble tout adapté. L'approche risque-neutre, dans la mesure où elle se place dans un univers où la prime de risque est justement perçue comme nulle, n'offre pas un cadre de travail adapté à une prise en compte de la dynamique des primes de risque. Offrant à la fois une dynamique explicite du prix de marché du risque, un modèle cohérent pour les projections et la valorisation des engagements

ainsi qu'un cadre où les paramètres utilisés sont en accord avec les valeurs observées sur le marché (estimations dans l'univers historique), l'utilisation des déflateurs stochastique apparaît alors comme tout indiquée.

Conclusion

Ce mémoire consacré à l'évaluation du *best estimate* des contrats d'assurance-vie, dans une logique *market consistent* imposée par la directive Solvabilité 2, s'est attaché en premier lieu à décrire un cadre conceptuel pertinent pour la valorisation, puis dans un second temps à discuter de l'impact de la modélisation du prix de marché du risque sur ce *best estimate*.

Après un rappel des principes de la directive Solvabilité 2, nous nous sommes intéressé au cadre conceptuel d'absence d'opportunité d'arbitrage. Un marché ne présente aucune opportunité d'arbitrage si et seulement si tout actif ou tout portefeuille promettant des flux presque sûrement positifs, et strictement positifs avec probabilité non nulle, a un prix strictement positif.

Dans ce contexte, on montre qu'il existe alors un noyau d'évaluation de tous les actifs traités appelé déflateur. Ce déflateur est une fonction d'actualisation stochastique, de sorte que le prix d'un actif est l'espérance du produit du déflateur par le flux futur. On peut également voir, de façon équivalente, le déflateur comme le lien (la dérivée de Radon-Nikodym) entre la probabilité risque-neutre associée au marché et la probabilité historique, au terme d'escompte au taux sans risque près.

On montre que ce processus est strictement positif, et qu'il est unique si et seulement si le marché est complet. Par ailleurs, le produit d'un déflateur par un prix est une martingale sous la probabilité historique.

Dans le cadre d'un marché dans lequel les processus suivent des dynamiques d'Itô, on montre alors que le rendement espéré d'un actif (le terme de dérive dans la dynamique de son prix) est la somme du taux sans risque et d'une prime de risque, cette prime de risque étant indépendante de l'actif considéré. Par ailleurs, elle est le produit du processus des volatilités des facteurs de marché et d'un processus de dimension le nombre de ces facteurs appelé *prix de marché du risque*. Aucun résultat n'est disponible sur la forme de ce processus sans plus d'hypothèses, ce qui laisse la liberté au modélisateur de spécifier la forme de prix de marché du risque qu'il juge la plus intéressante.

Dans les modèles classiques de taux, ce prix de marché du risque est supposé constant, pour des raisons évidentes de simplicité des calculs et peut-être de sagesse méthodologique (il s'agit d'éviter des modèles d'emblée trop riches, qui expliqueraient tout et son contraire). Néanmoins, cette hypothèse forte est au fondement théorique discutable n'est pas validée empiriquement.

Il importe donc de la relâcher et de chercher une modélisation autre. La perspective de notre mémoire étant bien celle du calcul du *best estimate* d'un contrat d'assurance-vie, notre but a été d'évaluer l'impact d'une modélisation stochastique : cet impact est-il significatif ? Et quel est son signe ?

La modélisation que nous avons retenue pour le prix de marché du risque est celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui permet d'introduire des oscillations autour d'une tendance avec retour à cette tendance. Ainsi, nous n'avons pas introduit de dérive supplémentaire dans ce prix de marché du risque.

Nous avons appliqué cette modélisation à un contrat d'épargne avec taux minimum garanti et participation aux bénéfices sur une population homogène, l'épargne étant investie sur un fonds composé d'une action suivant une dynamique brownienne géométrique et d'une obligation zéro-coupon de dynamique CIR.

La valeur de marché des engagements est alors sous-estimée de 20 % lorsque le prix de marché du risque est supposé constant, par rapport au cas où la prime de risque est stochastique. Il nous semble alors qu'une évaluation prudente des engagements passe par une modélisation adéquate des primes de risque associées au marché considéré. En particulier, les Générateurs de Scénarios économiques (ESG) devraient incorporer la modélisation de la prime de risque qu'autorise seule l'utilisation des déflateurs.

Bibliographie

- [1] Ahmad, et Paul Wilmott (2007). "The Market Price of Interest-rate Risk : Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets", *Wilmott Magazine*.
- [2] Alvarez, Alexander, et Pablo Olivares (2005). "Méthodes d'estimation pour des lois stables avec des applications en finance", *Journal de la Société Française de Statistique*, tome 146, n° 4.
- [3] Breeden, Douglas T., et Robert H. Litzenberger (1978). "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", *The Journal of Business*, Vol. 51, No. 4 (Oct., 1978), pp. 621-651.
- [4] Caja, Anisa et Frédéric Planchet (2010). "La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?", document de travail ISFA.
- [5] Choi, S.C. et R. Wette (1969). "Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Gamma Distribution and Their Bias", *Technometrics*, Vol. 11, No. 4 (Nov., 1969), pp. 683-690
- [6] Cont, Rama et Peter Tankov (2004). *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC
- [7] Cox, John C, Johnathan E Ingersoll et Stephen 1 Ross (1985b). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, Vol. 53, No. 2 (Mar., 1985), pp. 385-407
- [8] Descure, Charles et Cristiano Borean (2006). "Gestion actif-passif et solvabilité", Proceedings of the 28th International Congress of Actuaries.
- [9] Danielsson, Jon, Hyun Song Shin et Jean-Pierre Zigrand (2001). "Asset Price Dynamics with Value-at-Risk Constrained Traders", document de travail.

- [10] Devineau, Laurent et Stéphane Loisel [2009] "Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II", *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, no. 17.
- [11] Duffee, Gregory R. (2002). "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models", *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 1 (Feb., 2002), pp. 405-443.
- [12] Duffie D.(1992). "TDynamic Asset Pricing Theory", *Princeton University Press*.
- [13] El Karoui, Nicole (2003) *Modèles stochastiques en finance - Deuxième partie : finance*, Cours de l'Ecole polytechnique.
- [14] Fofack, Hippolyte, and John P. Nolan (1999). "Tail Behavior, Modes and Other Characteristics of Stable Distributions", working paper.
- [15] Fisher, Mark et Christian Gilles (2000) "Modeling the state-price deflator and the term structure of interest rates", Working paper.
- [16] Harrison, J. Michael, et David M. Kreps (1979). "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets" *Journal of Economic Theory*, Volume 20, Issue 3, June 1979, Pages 381-408
- [17] Harrison, J. Michael, et Stanley R. Pliska (1983). "A stochastic calculus model of continuous trading : complete markets", *Stochastic Processes and their Applications*, 15(3) : 313-316.
- [18] Hill B. (1975). A simple approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, 3, 1163-1174.
- [19] Holmström, Bengt et Jean Tirole (1996). "Modelling Aggregate Liquidity", *The American Economic Review*, Vol. 86, No. 2, Papers and Proceedings of the Hundredth and Eighth Annual Meeting of the American Economic Association San Francisco, CA, January 5-7, 1996 (May, 1996), pp. 187-191.
- [20] Holström, Bengt, and Jean Tirole (1998). "LAPM : A Liquidity-Based Asset Pricing Model", *The Journal of Finance*, Vol. 56, No. 5 (Oct., 2001), pp. 1837-1867.
- [21] Jarvis S. ; Southall F. ; Varnell E. (2001) "Modern valuation techniques", working paper, Staple Inn Actuarial Society.

- [22] Karatzas, Ioannis, et Steven E. Shreve (1998). *Methods of Mathematical Finance*, Springer.
- [23] Kogon, Stephen M., et Douglas B. Williams (1998). "Characteristic Function Based Estimation of Stable Distribution Parameters", in Robert J. Adler, Raisa E. Feldman, Murad S. Taqqu (1998), *A Practical Guide to Heavy Tails*, Birkhäuser.
- [24] Koutrouvelis, Ioannis A. (1980). "Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 75, No. 372 (Dec., 1980), pp. 918-928.
- [25] Kreps, David M. (1981). "Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities", *Journal of Mathematical Economics* Volume 8, Issue 1, March 1981, Pages 15-35
- [26] Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston and Jerry R. Green (1995). *Microeconomic Theory*, New York, Oxford University Press.
- [27] McCulloch, John Huston (1986). "Simple consistent estimators of stable distribution parameters", *Comm. in Statistics-Simulation and Computation*, 15(4) :1109-1138.
- [28] Planchet, Frédéric, Pierre Thérond et Aymeric Kamega (2009). *Scénarios économiques en assurance*, Economica, coll. "Assurance, Audit, Actuariat".
- [29] Racicot F-E. et R. Théorêt(2006). *Les modèles HJM et LMM revisités et leurs versions étendues*, ESG UQAM Université du Québec à Montréal, Cahier de recherche .
- [30] Sijlamassi M., Ouaknine Y. (2004) "Valorisation par les déflateurs stochastiques", Mémoire d'actuariat, ENSAE.
- [31] Smith A.D. [1996] "(Document link : Articles actuariels)How Actuaries Can use Financial Economics", *British Actuarial Journal*, Volume 2, Number 5, pp. 1057-1193(137).
- [32] Smith A.D. ; Southall F.E. [2001] "A Stochastic Asset Model for Fair Values in Pensions and Insurance", CAS Convention.
- [33] Touzi, Nizar (2008) *No-arbitrage Theory for Derivative Pricing*, Cours de l'Ecole polytechnique.

- [34] Wüthrich M.V., Bühlmann H., Furrer H. (2007) *Market consistent actuarial valuation*, EAA Lecture Notes, Springer.

Annexe A

Quantiles empiriques - Horizon d'investissement de 1 an

Rappel : on a simulé 10000 trajectoires du portefeuille, avec 450 points chacune. Pour $a = 0$:

Probabilité	Quantile empirique	Quantile loi normale	Différence relative
0,005	1,2736534	1,267801574	0,46 %
0,01	1,2823127	1,278027574	0,33 %
0,02	1,2928478	1,289201139	0,28 %
0,03	1,3083105	1,296290408	0,92 %
0,04	1,3048329	1,301623388	0,25 %
0,05	1,3083105	1,305961357	0,18 %
0,1	1,3212614	1,320852754	0,03 %
0,5	1,3723993	1,3733823	-0,07 %
0,9	1,4260661	1,425911846	0,01 %
0,95	1,4422487	1,440803243	0,10 %
0,96	1,4472536	1,445141212	0,15 %
0,97	1,4530615	1,450474192	0,18 %
0,98	1,4601218	1,457563461	0,18 %
0,99	1,4725987	1,468737026	0,26 %
0,995	1,4844163	1,478963026	0,37 %

Pour $a = 1$:

Probabilité	Quantile empirique	Quantile loi normale	Différence relative
0,005	0,8953737	0,889234024	0,69 %
0,01	0,9053244	0,901214069	0,45 %
0,02	0,9165091	0,914304214	0,24 %
0,03	0,9348589	0,92260949	1,31 %
0,04	0,9301569	0,928857227	0,14 %
0,05	0,9348589	0,933939278	0,10 %
0,1	0,9519289	0,951384966	0,06 %
0,5	1,012511	1,0129248	-0,04 %
0,9	1,0748439	1,074464634	0,04 %
0,95	1,0933404	1,091910322	0,13 %
0,96	1,0994403	1,096992373	0,22 %
0,97	1,1063446	1,10324011	0,28 %
0,98	1,1147101	1,111545386	0,28 %
0,99	1,129498	1,124635531	0,43 %
0,995	1,1418493	1,136615576	0,46 %

Annexe B

Codes Scilab utilisés pour les simulations

B.1 Etude d'un portefeuille simple

```
// Génération d'un processus CIR
// dr=kappa(theta-r)dt+sigmar*sqrt(r)dWt
kappa=1.5;
theta=0.01;
sigmar=0.1;
function z=CIR(n,r0,T)
    e=grand(1,n,'nor',0,T/n);
    z=zeros(1,n+1);
    z(1)=r0;
    for i=1:n
        z(i+1)=(1-kappa*T/n)*z(i)+kappa*theta*T/n+sigmar*sqrt(z(i))*e(i);
    end
endfunction

// Densité théorique d'un processus CIR (r(s) conditionnellement à r(t))
// cf. CIR (1985b) pp. 391-392 pour la forme et les notations
function y=CIRDensity(rs,s,rt,t)
    c=2*kappa/(sigmar^2*(1-exp(-kappa*(s-t))));
    u=c*rt*exp(-kappa*(s-t));
    v=c*rs;
    q=2*kappa*theta/sigmar^2-1;
    y=c*exp(-u-v).*(v./u)^(q/2).*besseli(q,2*sqrt(u*v));
endfunction
```

```

// Valeurs terminales de CIR. m nombre de trajectoires
// n nb de pts par trajectoire
function v=CIRterm(m,n,r0,T)
    v=zeros(1,m);
    for i=1:m
        val=CIR(n,r0,T);
        v(i)=val(n+1);
    end
endfunction

// Représentation graphique de m simulations d'un processus CIR
function a=CIRplot(m,n,r0,T)
    xset('window',1);
    xtitle("Simulations de processus CIR")
    z=zeros(m,n+1);
    for i=1:m
        z(i,:)=CIR(n,r0,T);
        plot2d(1:(n+1),z(i,:))
    end
    a="terminé"
endfunction

// Simulation du processus de richesse (cf. section 3.3)
lambda=1;
muS=0.01;
sigmaS=1;
rho=0.5; // corrélation entre les browniens
// constante gamma=g
g=sqrt((kappa+lambda)^2+sigmar^2);
// On a le prix du zéro-coupon CIR  $P=A(T-t)*\exp(-r(t)C(T-t))$ 
//fonction A(t)
function y=A(t)
    y=(2*g*exp((kappa+lambda+g)*t/2)/((kappa+lambda+g)*...
        (exp(g*t)-1)+2*g))^(2*kappa*theta/sigmar^2)
endfunction
// fonction C(t)
function y=C(t)
    y=2*(exp(g*t)-1)/((g+kappa+lambda)*(exp(g*t)-1)+2*g);
endfunction
// dynamique de la richesse

```

```

function z=Vt(n,a,P0,S0,T)
    Ws=grand(2,n,'nor',0,T/n);
    r=ones(1,n+1); r(1)=0.01;
    S=ones(1,n+1); S(1)=S0;
    P=ones(1,n+1); P(1)=P0;
    z=ones(1,n+1); z(1)=(1-a)*P0+a*S0;
    for i=1:n
        r(i+1)=(1-kappa*T/n)*r(i)+kappa*theta*T/n-sigma*r*sqrt(r(i))*Ws(1,i);
        S(i+1)=S(i)*(1+mu*S*T/n)+sigma*S*Ws(2,i);
        P(i+1)=A(T*(1-i/n))*exp(-r(i)*C(T*(1-i/n)));
        z(i+1)=z(i)+((1-a)*(1-lambda*C(T*(1-i/n)))*r(i)+a*mu*S*S(i+1))*T/n+...
            (a*rho*sigma*S*S(i+1)-(1-a)*sigma*r*C(T*(1-i/n))*sqrt(r(i)))*Ws(1,i)+...
            sqrt(1-rho^2)*sigma*S*S(i+1)*Ws(2,i);
    end
endfunction

function v=Vt_plot(m,n,a,P0,S0,T)
    xset('window',1);
    xtitle("Simulations : portefeuille simple","Temps","Valeur");
    v=zeros(m,n+1);
    for i=1:m
        v(i,:)=Vt(n,a,P0,S0,T);
        plot2d(1:(n+1),v(i,:));
    end
endfunction

function v=Vt_term(m,n,a,P0,S0,T)
    v=zeros(m,1);
    for i=1:m
        val=Vt(n,a,P0,S0,T);
        v(i)=val(n+1);
    end
endfunction

// tracé d'un histogramme avec la gaussienne (ou gamma)
// associée à la distribution empirique
function z=Vt_histo(v,r0,T)
    m=length(v);
    moy=mean(v);
    var=1/(m-1)*sum((v-moy).^2);
    skewness=m/((m-1)*(m-2))*sum((v-moy).^3)/var^(1.5);

```

```

XSkurtosis=1/m*sum((v-moy).^4)/var^2-3;
vmin=min(v); vmax=max(v);
x=vmin:(vmax-vmin)/1000:vmax;
xset('window',2);
// xtitle(['Histogramme des valeurs terminales du portefeuille simple';...
// 'et distribution gaussienne associée'],'Classes','Valeur');
xtitle(['Histogramme des valeurs terminales du portefeuille simple'; ...
'et distribution gamma associée par EMV'],'Classes','Valeur');
histplot(150,v,style=2);
// plot2d(x,gaussian(x,moy,var),style=5);
// plot2d(x,CIRdensity(x,T,1,0),style=4);
k=gamma_emv(v);
plot2d(x,gammad(x,k(1),k(2)),style=5);
z=[moy; var; skewness; XSkurtosis];
endfunction

function y=gaussian(x,moy,var)
y=exp(-(x-moy*ones(1,length(x))).*(x-moy*ones(1,length(x)))/(2*var))...
/sqrt(2*%pi*var);
endfunction

// Estimation Gamma par le maximum de vraisemblance (cf. Choi et Wette 1969)
// Retire les valeurs négatives, supposées aberrantes.
// v1 est un vecteur colonne.
function z=gamma_emv(v1)
z=zeros(2,1);
v=lex_sort(v1);
if min(v)<0 then disp(["Attention, présence de valeurs négatives.";...
"Valeurs négatives retirées."]); end
while v(1)<0
v=v(2:length(v));
end
s=log(mean(v))-mean(log(v));
a=(3-s+sqrt((s-3)^2+24*s))/(12*s);
for i=1:1000
a=a-(log(a)-dlogamma(a)-s)/(1/a-trigamma(a));
i=i+1
end
z(1)=a; // k
z(2)=mean(v)/a; // theta

```

```

endfunction

// Approximation de la fonction trigamma (= psi'=dlgamma')
function y=trigamma(k)
    if k>=8 then
        y=(1+(1+(1-(0.2-1/(7*k^2)))/k^2)/(3*k))/(2*k)/k;
    else y=trigamma(k+1)+1/k^2;
    end
endfunction

// Densité de la loi gamma(k,theta)
function y=gammad(x,a,b)
// k paramètre de forme, b = theta paramètre d'échelle
    if x<0 then y=0;
    else
        y=1/b^a*x^(a-1).*exp(-x/b)/gamma(a);
    end
endfunction

// Quantiles empiriques
// v : vecteur des réalisations à analyser;
// l : vecteur-ligne des niveaux des quantiles inférieurs (ex : [0.01 0.05])
function z=quantile(v,l)
    m=length(v);
    vs=sort(v); //tri par ordre décroissant
    L=length(l);
    z=zeros(L,2);
    z(:,1)=b';
    for i=1:L
        a=floor(l(i)*m);
        z(i,2)=vs(m-a);
    end
endfunction

```

B.2 Calcul du Best Estimate

```

clear();
rand('normal');

```

```

// *****
//   Génération d'un processus CIR
//   dr=kappa(theta-r)dt+sigmar*sqrt(r)dWt
//*****

kappa=0.0489*250;
theta=0.0196;
sigmar=0.0155*sqrt(250); // Volatilité annuelle = journalière * sqrt(250)
lambda=0.3;//ATTENTION A FAIRE VARIER LE LAMBDA

// constante gamma=g
g=sqrt((kappa+lambda)^2+ 2*sigmar^2);//
//A(t) de CIR
function [d]=A(t)
    d=(2*g*exp((kappa+lambda+g)*t /2)
    //((kappa+lambda+g)*(exp(g*t)-1)+2*g))^(2*kappa*theta/sigmar^2);
endfunction
// fonction C(t)
function [z]=C(t)
    z=2*(exp(g*t)-1)/((g+kappa+lambda)*(exp(g*t)-1)+2*g);
endfunction

// *****
//           Actif Risqué
//*****

muS=0.05;
sigmaS=0.249; // Volatilité annuelle, 250 jours de trading annuels
rho=0.5; // corrélation entre les browniens

//*****
// CONTRAT D'EPARGNE
//*****

N0=1000;

// Caractéristiques :
// alpha=30 % actif risqué, 70 % zéro-coupon maturité T=8 ans
alpha=0.3;
// Frais de gestion : tous les ans, 0,5 % de l'encours se détachent

```

```

// Participation aux bénéfices : taux tPB
tPB=0.85;
// TMG
TMG=0.03;
// Rachat structurel : selon profil type str (en fraction de la
//population), en attente ; induit rétention par l'assureur d'une
//fraction rs du contrat
rs=0.05;
str=[2.28 2.87 2.93 2.85 2.90 2.49 2.14 6.51]/100;
// Effet de la mortalité : un mort équivaut à une sortie sans frais
// du contrat : diminution chaque année t de q(40+t)*encours
//à l'année t
qx=[0.24 0.26 0.29 0.33 0.36 0.40 0.43 (1-str(8))*100]/100;//
// Flux de l'année t : F(t)=V0

S0=1;
r0=0.02;

//*****
// Best Estimate Avec une prime de risque constante
// Projection à horizon T de S, r, D (déflateur) du
// portefeuille en continu
//*****

function[R]=BE2(n,k,T)// n simulations, k pas de temps
P0=1;
V0=100*(alpha+(1-alpha)*P0);
S=S0*ones(k);
r=r0*ones(k);
D=ones(k);
V=ones(8);// Valeurs annuelles du fonds
VPB=ones(n,8);
F=ones(8);
DAnn=ones(8);
Res=ones(n);
N=N0*ones(8);
N(1)=N0*(1-qx(1)-str(1));
N(8)=0;

```

```

for a=2:1:7;
N(a) =N(a-1)*(1-qx(a)-str(a));
end
for i =1:1:n;
e1=rand(2,k)*sqrt((T)/k);
e1(1,1)=0;
e1(2,1)=0;
Wr=cumsum(e1(1,:));
Wrort=cumsum(e1(2,:));
Ws=rho*Wr+sqrt(1-rho^2)*Wrort;

for j=1:1:k-1;
r(j+1)=(1-kappa*T/k)*r(j)+kappa*theta*T/k+sigmar*sqrt(r(j))
*(Wr(j+1)-Wr(j));
S(j+1)=S(j)*exp(muS*(T)/k + sigmaS*(Ws(j+1)-Ws(j)));
lbda=lambda * sqrt(r(j))/sigmar;
K= - (r(j)- muS + lbda *rho*sigmaS)/(sigmaS*sqrt(1-rho^2));
D(j+1)=D(j)* exp( (-r(j) + 0.5 * lbda^2 + 0.5*K^2) *(T)/k -
lbda* (Wr(j+1)-Wr(j)) - K * (Ws(j+1)-Ws(j)));
end;

for l =1:1:8;
V(l)=V0*(alpha*S(l*k/8)+(1-alpha)*A(T-l)*exp(-r(l*k/8)*C(T-l))
/P0);// Valeur d'un contrat
VPB(l)=tPB*max(V(l)-V0*(1+TMG)^l,0);
DAnn(l)=D(l*k/8);
end

F(1)=-0.005*N(1)*V(1)+ tPB*N0*(1-str(1))*max(V(1)-V0*(1+TMG),0)
+ N0*qx(1)*V0*(1+TMG) + 0.95*N0*str(1)*V(1);

for l=1:1:7;
F(l+1)=-0.005*N(l+1)*V(l+1)+ tPB*N(l)*(1-str(l+1))*max(V(l+1)-
V0*(1+TMG)^(l+1),0) + N(l)*qx(l+1)*V0*(1+TMG)^(l+1)
+ 0.95*N(l)*str(l+1)*V(l+1);
end
Res(i)=sum(DAnn.*F);
end
R=[V0*N0 mean(Res)]
endfunction

```

```

//*****
// Best Estimate Avec une prime de risque stochastique
//dL = AL(L0 - L) + SL SQRT(L) dW
// Projection à horizon T de S, r, D (déflateur) du
//portefeuille en continu
//*****

        AL=1;
        L0=0.3;
        SL=0.4;

function[R]=BestEstimateLST0(n,k,T)// n simulations, k pas de temps
        // P0=A(T)*exp(-r0*C(T));
        P0=1;
        V0=100*(alpha+(1-alpha)*P0);
        S=S0*ones(k);
        r=r0*ones(k);
        L=0.3*ones(k);
        D=ones(k);
        V=ones(8);// Valeurs annuelles du fonds
        VPB=ones(n,8);
        F=ones(8);
        DAnn=ones(8);
        Res=ones(n);
        N=N0*ones(8);
        N(1)=N0*(1-qx(1)-str(1));
        N(8)=0;
        for a=2:1:7;
            N(a) =N(a-1)*(1-qx(a)-str(a));
        end

        for i =1:1:n;

            e1=rand(3,k)*sqrt((T)/k);
            e1(1,1)=0;
            e1(2,1)=0;
            e1(3,1)=0;

```

```

        Wr=cumsum(e1(1,:));
        Wrort=cumsum(e1(2,:));
        WL=cumsum(e1(3,:));// Brownien de la prime de risque
        Ws=rho*Wr+sqrt(1-rho^2)*Wrort;

for j=1:1:k-1;
r(j+1)=(1-kappa*T/k)*r(j)+kappa*theta*T/k+sigmar*sqrt(r(j))
*(Wr(j+1)-Wr(j));
L(j+1)=(1-AL*T/k)*L(j)+AL*L0*T/k+SL*sqrt(L(j))*(WL(j+1)-WL(j));
S(j+1)=S(j)*exp(muS*(T)/k + sigmaS*(Ws(j+1)-Ws(j)));
lbda=L(j) * sqrt(r(j))/sigmar;
K= - (r(j)- muS + lbda *rho*sigmaS)/(sigmaS*sqrt(1-rho^2));
D(j+1)=D(j)* exp( (-r(j) + 0.5 * lbda^2 + 0.5*K^2) *(T)/k
- lbda* (Wr(j+1)-Wr(j)) - K * (Ws(j+1)-Ws(j)));
end;

for l =1:1:8;
V(l)=V0*(alpha*S(l*k/8)+(1-alpha)*A(T-l)
*exp(-r(l*k/8)*C(T-l))/P0);// Valeur d'un contrat
VPB(l)=tPB*max(V(l)-V0*(1+TMG)^l,0);
DAnn(l)=D(l*k/8);
end

F(1)=-0.005*N(1)*V(1)+ tPB*N0*(1-str(1))*max(V(1)-V0*(1+TMG),0)
+ N0*qx(1)*V0*(1+TMG) + 0.95*N0*str(1)*V(1);

for l=1:1:7;
F(l+1)=-0.005*N(l+1)*V(l+1)+ tPB*N(l)*(1-str(l+1))*max(V(l+1)
-V0*(1+TMG)^(l+1),0) + N(l)*qx(l+1)*V0*(1+TMG)^(l+1)
+ 0.95*N(l)*str(l+1)*V(l+1);
end
Res(i)=sum(DAnn.*F);

end
R=[V0*N0 mean(Res)];
endfunction

```