



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et l'Assurances
le _____
pour l'obtention
du Diplôme d'ACTUAIRE de l'Université de LYON

Par : Sadeck HAMI

Titre : LES MODELES DFA : PRESENTATION, UTILITE ET APPLICATION

Confidentialité : _____

Composition du jury des mémoires :

Membre du Jury I.A.

M. J. VIGNANCOUR

Membres du jury I.S.F.A.

M. AUGROS Jean-Claude

M. LAURENT Jean-Paul

M. LEBOISNE Nicolas

M. PARTRAT Christian

M. QUITTARD-PINON François

M. SERANT Daniel

Entreprise :

Joël WINTER & Associés

Directeur de mémoire :

M. PLANCHET Frédéric

Invité :

Secrétariat :

Mme GARCIA Marie-José

Mme ANDRES Laurence

Mme BRUNET Marie-Christine

Mme MOUCHON Marie-Claude

Bibliothèque :

Mme SONNIER Michèle

Je tiens à remercier tout particulièrement Mr. Frédéric PLANCHET (associé JWA Actuaire, Professeur ISFA) pour son aide, ses conseils et surtout pour m'avoir supporté pendant tous ces mois !

Je remercie aussi Mr. Didier RULLIERE, professeur à l'ISFA, pour son suivi et l'intérêt qu'il a montré à l'égard de mon travail. J'adresse également ma profonde gratitude à toute l'équipe de JWA ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Résumé

Mots clés

Assurance non vie, stochastique, actif, passif, inflation, taux d'intérêt, obligations, actions, immobilier, corrélation, allocation stratégique, provisionnement, primes, marge de solvabilité, résultat, probabilité de ruine.

Les méthodes sophistiquées de mesure du risque intégrant des approches stochastiques prennent le pas sur les méthodes déterministes, qui par le biais d'études de sensibilité de certains facteurs ne comblent plus les besoins d'analyse des décideurs. La Dynamic Financial Analysis (DFA), qui repose sur la modélisation stochastique du bilan et du compte de résultat, suscite de plus en plus l'intérêt des actuaires non vie. L'objet de ce mémoire est de présenter ce domaine d'activité en plein essor et certaines modélisations et méthodes qui permettent d'aboutir à des indicateurs de risque tels que la probabilité de ruine ou la probabilité d'insuffisance du capital.

Certaines des variables aléatoires, qui interviennent dans l'obtention de ces résultats, font déjà l'objet de modélisations stochastiques standards. Il est possible de citer à titre d'illustration les modèles de Cox – Ingersoll – Ross (taux d'intérêt), Wilkie (inflation), Black et Scholes (actions), qui comptent parmi les plus connus. En revanche d'autres domaines, comme les méthodes stochastiques de provisionnement, connaissent un développement rapide. La méthode standard Chain Ladder est désormais « légitimée » par les méthodes plus évoluées telles que le modèle lognormal ou les méthodes basées sur les modèles linéaires généralisés.

Une fois tous les postes du bilan modélisés et agencés, un algorithme et une méthodologie permettant d'aboutir à l'indicateur souhaité sont mis en place. Etant basés sur des variables aléatoires, les modèles DFA font appel aux simulations et à un choix de générateur de nombres aléatoires performant.

L'application qui a été retenue pour illustrer ces méthodes est axée sur l'évaluation de la probabilité de ruine et de la probabilité d'insuffisance. L'étude de l'influence de certains facteurs sur ces indicateurs permet de fournir des alternatives de détermination du capital en terme de gestion contre le risque (augmentation des fonds propres, diminution des dividendes payés aux actionnaires, augmentation du chargement,...) et par le même biais illustre les capacités d'aide à la décision de cet outil.

Abstract

Keywords

Properties and casualties insurance, stochastic, assets, liabilities, inflation, interest rate, bonds, shares, the real-estate business, correlation, strategic allocation (or best-of-breed allocation), reserving, premiums, solvency margin, economic result (or bottom line), ruin probability.

Sophisticated methods (that include stochastic approaches) for assessing risk supplant conventional ones. Indeed, one has to emphasize that deterministic methods which, by means of contingency analysis of some factors, do not fulfil any more decision-makers' analysis needs. Dynamic Financial Analysis which rests on the stochastic financial modelling of the balance sheet and profit and loss account arouse the utmost interest among properties and casualties actuaries. The purpose of this report is to set out this developing field of activity and some financial modelling and methods which result in risk indicators such as the ruin probability or the capital inadequacy probability.

Some of these stochastic variables, which intervene in the achievement of these economic results, are subjected to stochastic financial modelling regarded as "running well thoroughly". One can quote by way of example the Cox – Ingersoll - Ross model (interest rate), the Wilkie model (inflation), the Black and Scholes model (shares), which rank among the most famous ones. On the other hand, reserving stochastic methods are considered as fast-expanding fields of activity. The Chain Ladder standard method is henceforth legitimated by more advanced methods such as the lognormal model or the methods based on general linear models.

Once all the balance sheet items have been modelled and organized, an algorithm and a method, which lead to the wished indicator, are set up. Since they are based on stochastic variables, DFA models have resort to simulations and to a choice of high performance random number generator.

With regard to the application, which has been selected in order to illustrate these methods, it is focused on the ruin probability and the inadequacy probability evaluation. The influence analysis of some factors on these indicators enable us to supply options for the way capital and risk are managed (increase in the shareholder funds, decrease in the dividends paid to shareholders...) and hence, it illustrates the decision support capacities of this tool.

Sommaire

Introduction.....	9
--------------------------	----------

PARTIE 1 : INTRODUCTION A LA DYNAMIC FINANCIAL ANALYSIS

SECTION 1 : PRESENTATION DES MODELES DFA.....	12
A - DEFINITION.....	12
B - HISTORIQUE DE LA DFA.....	13
SECTION 2 : LES DIFFERENTES APPROCHES DE LA DFA.....	14
A - COMPARAISON AVEC LA GESTION ACTIF-PASSIF EN ASSURANCE VIE.....	14
B - OBJECTIFS DE LA DFA.....	14
C - SCENARIO TESTING CONTRE SIMULATIONS STOCHASTIQUES.....	15
SECTION 3 : LES ETAPES DE CONSTRUCTION DES MODELES DFA.....	17
A - CHOIX DE L'HORIZON TEMPOREL.....	17
B - DEFINITION DE L'OBJECTIF FIXE PAR LA COMPAGNIE.....	17
C - CHOIX DES ELEMENTS VARIABLES ET DES ELEMENTS DETERMINISTES.....	17
D - SIMULATIONS.....	18
E - ANALYSE DES « OUTPUTS ».....	18
SECTION 4 : SCHEMA RECAPITULATIF.....	20

PARTIE 2 : SPECIFICITES DE L'ASSURANCE NON VIE

CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE L'ASSURANCE NON-VIE.....	22
SECTION 1 : LES PLACEMENTS.....	23
A - LISTE DES PLACEMENTS AUTORISES.....	23
B - REGLES DE DISPERSION.....	24
C - REGLES DE CONGRUENCE (R332-1 et R332-1-1).....	24
D - EVALUATION DES ELEMENTS D'ACTIFS.....	24
SECTION 2 : LES PROVISIONS.....	26
A - LA RESERVE DE CAPITALISATION.....	26
B - LA PROVISION POUR EGALISATION.....	26
C - LA PROVISION POUR RISQUE D'EXIGIBILITE DES ENGAGEMENTS TECHNIQUES.....	27
D - LA PROVISION MATHEMATIQUE DES RENTES.....	27
E - LA PROVISION POUR PRIMES NON ACQUISES.....	27
F - LA PROVISION POUR RISQUES EN COURS.....	27
G - LA PROVISION POUR SINISTRES A PAYER.....	27
H - LA PROVISION POUR RISQUE CROISSANT.....	28
I - LA PROVISION POUR FRAIS D'ACQUISITION REPORTES.....	28
SECTION 3 : LA MARGE DE SOLVABILITE.....	29
A - PRESENTATION DE LA MARGE DE SOLVABILITE.....	29
B - MODALITES DE CALCUL.....	29
C - AVANTAGES DE LA MSR.....	30
D - INCONVENIENTS DE LA MSR.....	30
SECTION 4 : BILAN SIMPLIFIE.....	31

CHAPITRE 2 : IDENTIFICATION DES RISQUES	32
SECTION 1 : INVENTAIRE DES RISQUES.....	33
A - FREQUENCE ET GRAVITE.....	33
B - LES RISQUES ASSOCIES A LA TARIFICATION.....	34
C - RISQUES ASSOCIES AU VOLUME DES PRIMES.....	34
D - RISQUES ASSOCIES AUX DEPENSES.....	35
E - RISQUES ASSOCIES AU TAUX D'INFLATION.....	36
F - RISQUES ASSOCIES AU TAUX D'INTERET.....	37
G - RISQUES ASSOCIES A LA DEPRECIATION DE LA VALEUR DE L'ACTIF.....	37
H - RISQUES ASSOCIES A LA REASSURANCE.....	38
I - RISQUES ASSOCIES AUX INITIATIVES GOUVERNEMENTALES ET POLITIQUES.....	39
J - RISQUES HORS BILAN.....	39
SECTION 2 : RISQUES A PRENDRE EN COMPTE.....	40
A - LES RISQUES TECHNIQUES.....	40
B - LES RISQUES D'INVESTISSEMENT.....	40
C - LES RISQUES « NON TECHNIQUES ».....	40
 PARTIE 3 : MODELISATION DE L'ACTIF	
CHAPITRE 1 : MODELISATION DE L'INFLATION.....	42
SECTION 1 : APPROCHE DE KAUFMANN - GADMER - KLETT.....	43
A - PRESENTATION.....	43
B - METHODE DES MOINDRES CARRES ORDINAIRES.....	43
C - TESTS DE VALIDITE.....	44
D - METHODE DES MOINDRES CARRES QUASI GENERALISES.....	44
E - TESTS DE VALIDITE.....	45
SECTION 2 : APPROCHE DE WILKIE.....	46
A - PRESENTATION.....	46
B - MODELISATION.....	46
C - EXEMPLE DE RESULTAT NUMERIQUE.....	47
CHAPITRE 2 : MODELISATION DES TAUX D'INTERET.....	48
SECTION 1 : DYNAMIQUE DES TAUX EN TEMPS CONTINU.....	49
A - EQUATION DIFFERENTIELLE DU PRIX D' UN ZERO-COUPON.....	49
B - MODELE DE VASICEK.....	50
C - MODELE DE COX, INGERSOLL ET ROSS.....	51
D - LIMITES DE CES DEUX MODELES.....	53
E - MODELE DE HEATH-JARROW-MORTON.....	53
SECTION 2 : DYNAMIQUE DES TAUX EN TEMPS DISCRET.....	58
A - LE MODELE DE HO ET LEE.....	58
B - LE MODELE DE BLACK, DERMAN ET TOY.....	60
C - LE MODELE DE HULL ET WHITE.....	61
CHAPITRE 3 : MODELISATION DES ACTIONS.....	66
A - MODELISATION DANS L'UNIVERS HISTORIQUE.....	66
B - MODELISATION DANS L'UNIVERS RISQUE NEUTRE.....	67
C - MODELISATION DANS L'UNIVERS FORWARD NEUTRE.....	68
CHAPITRE 4 : MODELISATION DE L'IMMOBILIER.....	70

CHAPITRE 5 : CORRELATION ENTRE LES ACTIFS	71
A - PRESENTATION.....	71
B - DECORRELATION DES ACTIFS.....	72
CHAPITRE 6 : MARKOVITZ A 'N' ACTIFS	74

PARTIE 4 : MODELISATION DU PASSIF

CHAPITRE 1 : PROVISIONS.....	78
SECTION 1 : PRESENTATION DE LA PROBLEMATIQUE.....	79
A - PRESENTATION.....	79
B - PROBLEMATIQUE.....	80
SECTION 2 : CHAIN LADDER STANDARD	82
A - PRESENTATION.....	82
B - AUTRES METHODES DETERMINISTES.....	83
SECTION 3 : LES METHODES STOCHASTIQUES.....	84
A - PRESENTATION.....	84
B - LE MODELE LOGNORMAL	84
C - LES MODELES STOCHASTIQUES GLM.....	86
SECTION 4 : APPROCHE PAR SIMULATIONS	90
A - PRINCIPES.....	90
B - AVANTAGES.....	90
C - NOTATIONS.....	90
D - METHODE.....	91
SECTION 5 : PRISE EN COMPTE DE L'INFLATION	93
A - PRESENTATION.....	93
B - METHODOLOGIE.....	93
SECTION 6 : LA TECHNIQUE DU BOOTSTRAP	95
A - PRESENTATION.....	95
B - METHODOLOGIE.....	95
CHAPITRE 2 : SINISTRES ET PRIMES.....	98

PARTIE 5 : APPLICATION

CHAPITRE 1 : SIMULATIONS.....	102
CHAPITRE 2 : MISE EN PLACE, PARAMETRAGE ET RESULTATS	103
SECTION 1 : CHOIX DES MODELES.....	104
A - LE MODELE DE TAUX D'INTERET DE CIR.....	104
B - LE MODELE D'INFLATION DE KAUFMANN, GADMER ET KLETT	105
C - LE MODELE DE BLACK ET SCHOLES POUR LES ACTIONS	105
D - SINISTRALITE.....	107
E - PAS DE DISCRETISATION.....	107
SECTION 2 : DETERMINATION DE LA PROBABILITE DE RUINE	108
A - LES DIFFERENTES ETAPES.....	108
B - SCHEMA RECAPITULATIF.....	112
SECTION 3 : CALCUL DU RENDEMENT DU PORTEFEUILLE.....	113

A - INFORMATIONS A DISPOSITION ET OBJECTIFS	113
B - LES DIFFERENTES ETAPES	114
SECTION 4 : PARAMETRAGE ET ELEMENTS COMPTABLES	119
A - PARAMETRAGE	119
B - ELEMENTS COMPTABLES	120
SECTION 5 : RESULTATS DE PROBABILITES	124
A - COURBE DE RUINE ET COURBE D'INSUFFISANCE	124
B - DATE DE SURVENANCE	125
C - COÛT MARGINAL DES PROBABILITES	125
D - INFLUENCE DU TAUX DE CHARGEMENT SUR LES PRIMES	126
E - INFLUENCE DE L'AUGMENTATION ANNUELLE DU MONTANT DES PRIMES	127
F - INTERVALLE DE CONFIANCE	129
G - INFLUENCE DES CADENCES DE REGLEMENT	131
H - PRISE EN COMPTE DE SINISTRES CATASTROPHIQUES	132
Conclusion	135
Bibliographie.....	136
 ANNEXES	
Annexe 1 : Théorèmes financiers	140
Annexe 2 : Temps de simulation.....	141

Introduction

Devenue une activité incontournable en assurance vie, la gestion actif / passif (ALM) a suscité la création d'un domaine comparable en assurance non vie. En effet, la Dynamic Financial Analysis (DFA) est un outil de gestion et d'aide à la décision qui est de plus en plus usité dans les sociétés d'assurance IARD. Cette transition du modèle de l'assurance vie à l'assurance non vie s'est effectuée en tenant compte des spécificités des risques inhérents aux deux domaines d'activité : le risque de passif joue un rôle primordial en assurance non vie alors que la volatilité du passif d'une société d'assurance vie peut être qualifiée de « faible » comparée à celle de l'actif.

La DFA est une activité relativement flexible qui procure diverses opportunités d'analyse ; des indicateurs de natures relativement distinctes (probabilité de ruine, allocation stratégique d'actifs, etc.) peuvent être obtenus à partir d'implémentations spécifiques de modèles DFA en vue de répondre à un certain nombre d'interrogations :

- * Quel est le montant et le capital nécessaires pour « légitimer » le niveau et la diversité des risques ?
- * Quelles sont les branches qui créent de la valeur pour les actionnaires ?
- * Quel est le niveau approprié de risque catastrophique ?
- * Quelle est la stratégie optimale de réassurance ?

Globalement, la DFA peut être présentée comme la modélisation stochastique de la vie et de l'activité de la société sur un horizon temporel donné. A une époque où les modélisations déterministes ne satisfont plus les besoins d'analyse des sociétés, cet aspect stochastique suscite l'intérêt des décideurs qui souhaitent avoir une meilleure compréhension des liens entre le risque et le capital et vérifier l'adéquation entre le capital et le niveau d'activité.

La mise en place d'une analyse dynamique s'oriente autour de trois pôles : l'actif, le provisionnement, les primes et tarifs. Ces différents postes regroupent un ensemble de variables aléatoires (corrélées ou non), qui, une fois « reliées », concourent à donner à l'outil sa dimension stochastique. Le nombre de facteurs à prendre en compte peut évoluer sensiblement selon le niveau de complexité de modélisation souhaité. Idéalement, l'ensemble des facteurs qu'il serait souhaitable d'incorporer aux modèles sont les suivants :

- * évolution des taux d'intérêt et des taux d'inflation ;
- * évolution de la valeur des différents actifs : monétaire, obligations, actions et immobilier ;
- * évolution de la sinistralité des différentes branches considérées et des cadences de règlement associées ;
- * distinction entre sinistres catastrophiques et sinistres récurrents ;
- * cycles de souscription.

Le présent développement détaille la façon dont le secteur actuariel a pris en compte ces différents aspects et les modélisations, maintenant classiques, qui peuvent être proposées.

PARTIE 1

Introduction à la Dynamic Financial Analysis¹

¹ Cette partie a été réalisée à partir de la synthèse des documents suivants :

- × BEHAN D.F., FELDBLUM S., GATTIS D., [1995], *"Dynamic financial models of property-casualty insurers"*. The Casualty Actuarial Company.
- × D'ARCY S.P., GORVETT R.W., HERBERS J.A., HETTINGER T., [1997], *"Building a DFA Analysis model that flies"*. The Casualty Actuarial Company.
- × D'ARCY S.P., GORVETT R.W., HETTINGER T.E., LEHMANN S.G., MILLER M.J., [1998], *"Building a public access PC-Based DFA model"*. The Casualty Actuarial Company.
- × HETTINGER T., *"Dynamic Financial Analysis in the new millennium"*. The Casualty Actuarial Company.
- × ISAAC D., BABCOCK N., *"Beyond the frontier: using a DFA model to derive the cost of capital"*. Swiss Re investors.
- × KAUFMANN R., GADMER A., KLETT R., [2001], *"Introduction to Dynamic Financial Analysis"*, Astin Bulletin.
- × SHAH H., NAKADA P., [1999], *"Deconstructing DFA"*. Global Reinsurance.

SECTION 1 : PRESENTATION DES MODELES DFA

A - DEFINITION

Plutôt que de ne s'intéresser qu'à un nombre restreint d'aspects du bilan, cette nouvelle méthodologie considère le spectre complet des éléments financiers de la compagnie et analyse sa santé bilantielle dans un univers incertain et changeant. Même si de plus en plus d'articles et de conférences sont dédiés à la DFA, de nombreux actuaires ne sont pas au fait de ces méthodes d'analyses. Dès lors de nombreux professionnels du domaine de l'assurance ne sont pas au fait de la définition des différents termes qui composent la mention Dynamic Financial Analysis :

- « *Dynamic* » signifie stochastique ou variable. Ce terme s'oppose à déterministe ou statique et est utilisé de façon à refléter l'incertitude inhérente aux revenus futurs.
- « *Financial* » reflète l'intégration, dans les modèles, des postes d'actifs et de passif des sociétés d'assurance. Les approches de type DFA s'opposent aux modèles qui ne visent que la partie souscription.
- « *Analysis* » se définit comme l'examen des différents éléments du modèle et leurs interactions.

En combinant ces différents éléments, nous pouvons constituer une définition de travail qui se présente comme suit : « La DFA est le procédé d'analyse et d'examen de la structure financière complète d'une compagnie d'assurance, en considérant non seulement les relations entre les différents postes pris en compte, mais aussi la nature stochastique des facteurs qui peuvent affecter le résultat ».

La Dynamic Financial Analysis a connu, en quelques années, un intérêt grandissant dans le secteur de l'assurance non vie. Elle combine des méthodes et concepts non seulement économiques mais aussi mathématiques. Il paraît irréaliste d'identifier et de décrire un seul type de méthodologie DFA ; nous allons donc focaliser notre attention sur les éléments communs à la majorité des modèles DFA. On peut légitimement se demander pour quelles raisons les assureurs montrent un intérêt grandissant pour la DFA. La réponse à cette question peut nous aider à présenter le modèle dans les meilleures conditions et à indiquer quels devraient être les objectifs du procédé.

B - HISTORIQUE DE LA DFA²

Au cours des années 1980, la volatilité des taux d'intérêts s'est accrue et a mis à mal les revenus de nombreuses banques américaines. Ces dernières ont dû s'intéresser de près à la structure de leurs actifs et passifs et à leurs relations avec les séries des revenus futurs. Elles se sont donc trouvées dans l'obligation de mettre en place des outils qui permettent d'estimer ces séries et d'étudier leurs stabilités par rapport aux variations des taux. Le risque de taux et le risque de liquidité sont donc apparus comme les deux principaux types de risques sur lesquels les banquiers ont porté leur attention.

L'activité d'assurance étant également affectée par la fluctuation des taux et les mouvements des marchés financiers, les assureurs ont été contraints, dans les années 1990, de prévoir une analyse Actif \ Passif. Cependant le domaine de l'assurance présente des spécificités qui ont rendu délicate l'application de la gestion Actif \ Passif tel qu'il est connu dans le secteur bancaire. En premier lieu, l'inversion du cycle de production oblige les assureurs à prendre en compte le comportement des assurés. De plus, la réglementation en vigueur les oblige à constituer des provisions mathématiques, des réserves suffisantes, une marge de solvabilité... Ce sont toutes ces spécificités qui ont conduit à la mise en place d'une méthode de gestion Actif \ Passif propre à l'assurance³. Enfin, ces modèles se sont spécialisés aux deux grandes branches d'assurance : la gestion actif\passif pure pour l'assurance vie et les modèles DFA pour l'assurance non vie.

² Cf. D'ARCY S.P., GORVETT R.W., HERBERS J.A., HETTINGER T., [1997], "*Building a DFA Analysis model that flies*". The Casualty Actuarial Company.

³ Tous ces éléments sont détaillés en partie 2 de ce mémoire.

SECTION 2 : LES DIFFERENTES APPROCHES DE LA DFA

A - COMPARAISON AVEC LA GESTION ACTIF-PASSIF EN ASSURANCE VIE

Un modèle DFA est une modélisation stochastique des principaux facteurs financiers d'une compagnie d'assurance. Un bon modèle devrait donc simuler stochastiquement les éléments d'actif, les éléments de passif mais aussi les relations entre les deux types de facteurs aléatoires. De nombreuses approches GAP⁴ traditionnelles en assurance vie considèrent les dettes comme plus ou moins déterministes en considération de leur faible variabilité. Une hypothèse de ce type pourrait s'avérer assez pernicieuse en assurance dommage, dans la mesure où les cash flows du passif ont une nature plus volatile. D'autre part, les compagnies d'assurance dommage sont fortement sensibles à l'inflation (même si l'assurance vie est également tributaire de ce paramètre), aux conditions macroéconomiques, sans oublier les cycles de souscription et la réglementation ; tous ces facteurs compliquent la modélisation et rendent le résultat moins certain qu'en assurance vie.

B - OBJECTIFS DE LA DFA

La DFA est encore loin d'être une discipline académique. Elle se sert de nombreux concepts et méthodes tirés des mathématiques et statistiques. D'autre part, n'oublions pas que dans le domaine de l'assurance plusieurs intérêts sont en conflit : ceux des actionnaires, ceux des assurés, ceux des commissaires contrôleurs, sans oublier ceux des inspecteurs du FISC. Les modèles DFA prennent en considération ces différents points de vue et tentent de mettre en évidence les éléments suivants :

- allocation stratégique des actifs,
- allocation du capital,
- mesure de la performance,
- stratégies de marché,
- tarification,
- création de produits,
- etc.

L'implémentation concrète et l'application des modèles DFA dépendent de deux questions fondamentales auxquelles nous allons tenter de donner réponse.

- Quels sont les principaux bénéficiaires de l'analyse DFA (actionnaires, managers ou assurés) ?
- Quels sont les objectifs principaux de la compagnie ?

⁴ GAP : Gestion Actif Passif

En effet, la mise en oeuvre des méthodes DFA repose principalement sur les objectifs que la compagnie souhaite atteindre : si une compagnie d'assurance est seulement intéressée par l'implémentation d'un outil dont le but est d'améliorer de manière globale l'allocation des actifs, il n'est vraisemblablement pas nécessaire de viser un modèle particulièrement détaillé.

C - SCENARIO TESTING CONTRE SIMULATIONS STOCHASTIQUES

Le domaine de l'assurance dommage est actuellement sujet à des résultats plus volatils, des pertes de type « catastrophiques » plus importantes (sans oublier la morosité des marchés financiers). Ces différents facteurs impactent directement la position de solvabilité de l'entreprise ainsi que le moral de l'actionnariat. Or, l'un des objectifs de ce type de compagnie est de satisfaire les détenteurs d'actions et d'augmenter la valeur des parts dans le temps. A cet égard, il est indispensable de s'intéresser aux paramètres (plus précisément à leur nature aléatoire) qui influent directement sur le coût du capital.

Il existe actuellement deux types de méthodes permettant d'analyser les différentes stratégies financières entreprises par la société sur un horizon temporel déterminé :

- Scenario testing : quelques situations potentielles spécifiques sont sélectionnées. Le scenario testing a longtemps été utilisé par les actuaires, même avant l'accroissement de la volatilité des taux d'intérêts (à la fin des années 70). Les prises de décisions basées sur une telle approche ne sont pas forcément sans intérêt ; étant plus simples que les modélisations stochastiques, leur mise en œuvre est plus rapide et moins coûteuse. Elles sont cependant plus dangereuses. En effet, ce procédé projette dans le futur les résultats obtenus à partir d'une sélection de scénarii déterministes. Ainsi, les outputs obtenus pour un des scénarii ne sont valables que pour ce seul et unique scénario et ne sont exploitables que dans la mesure où le scénario choisi est correct.
- La simulation stochastique : cette approche repose sur des modèles qui reflètent l'incertitude de facteurs tels que le taux d'intérêt, la fréquence et le coût des sinistres...Basées sur les distributions associées à ces modèles, les valeurs sont sélectionnées au hasard et utilisées pour calculer un large éventail d'outputs. La distribution complète de ces outputs peut alors être utilisée pour l'analyse. Une utilisation commune de cette approche est la détermination de la proportion des résultats « inacceptables ». Si cette proportion est considérée comme trop importante, des modifications dans la position financière de la société doivent être envisagées en vue de réduire cette proportion.

La simulation stochastique fournit beaucoup plus d'informations que le scenario testing ; les résultats obtenus avec cette dernière approche indiquent seulement si l'assureur est dans une position viable, si un événement ou une série d'événements déterminés surviennent. Généralement, les modèles

DFA sont basés sur des simulations stochastiques. A cet égard, il faut être en mesure d'estimer⁵ les lois qui gouvernent les différentes variables modélisées ; cet exercice peut s'avérer assez délicat.

⁵ En matière d'estimation, on pourra consulter DUPIN G., MONFORT A., VERLE J.P., *"Robust inference in rating models"*. Astin 2003.

SECTION 3 : LES ETAPES DE CONSTRUCTION DES MODELES DFA

A - CHOIX DE L'HORIZON TEMPOREL

La première étape à mettre en place avant de comparer les différentes stratégies est de fixer l'horizon temporel sur lequel elles doivent s'appliquer. L'idéal serait d'effectuer la modélisation sur une période aussi longue que possible afin d'observer les effets à long terme de la stratégie choisie. Cette remarque s'applique plus particulièrement aux risques à « queue lourde » (déroulement long), dont les réalisations n'apparaissent qu'après plusieurs années.

Cependant, plus l'horizon de temps est important, moins les valeurs simulées sont fiables. Il y a donc une opération d'arbitrage à effectuer. Une période de projection de 5 à 10 ans semble être un choix raisonnable. Plusieurs fractionnements peuvent être envisagés annuel, semestriel, trimestriel et même mensuel.

B - DEFINITION DE L'OBJECTIF FIXE PAR LA COMPAGNIE

Un modèle de travail doit être une version simplifiée de la réalité ; tous les risques ne sont pas forcément modélisés. En premier lieu, il convient de se demander comment le modèle sera utilisé. Les modèles DFA peuvent réaliser un grand nombre de tâches⁶. Si un modèle est mis en place uniquement pour réaliser des tests de solvabilité, la seule question à laquelle nous pouvons répondre est la suivante « Avec quelle fréquence la société se trouve dans une situation financière préoccupante ». Si elle est mise en place de façon appropriée, une approche DFA peut fournir non seulement des informations sur les éléments qui placent la compagnie dans des situations financières délicates mais aussi sur les distributions de variables clés.

C - CHOIX DES ELEMENTS VARIABLES ET DES ELEMENTS DETERMINISTES

L'étape suivante consiste à choisir les éléments qui auront une nature variable et ceux qui seront retenus comme étant déterministes. Comme l'un des objectifs de la DFA est de projeter le bilan et les états financiers, nous devons être en mesure d'identifier les variables nécessaires à la modélisation et à la simulation de la valeur de la compagnie. Tous les risques qui affectent l'actif, le passif, la souscription et les investissements financiers doivent être considérés. Mais seuls les facteurs les plus significatifs sont généralement retenus.

En ce qui concerne les actifs des sociétés d'assurances, ils sont essentiellement composés d'obligations, d'actions, d'actifs immobiliers. Les facteurs les plus importants à prendre en compte

⁶ Celle-ci doivent être envisagées, dans la mesure du possible, au cours de la phase de conception du modèle.

sont les taux d'intérêts, le risque de défaut, les mouvements des marchés financiers. En revanche, les risques du passif dépendent des garanties proposées par la compagnie et sont donc propres à chaque assureur ou réassureur. Généralement, la modélisation consiste en la représentation des provisions et réserves.

D - SIMULATIONS

Les simulations⁷ deviennent incontournables dans l'actuariat moderne que ce soit dans le domaine de l'assurance vie (où le coût du sinistre est le plus souvent totalement déterminé, et c'est donc l'aspect de la survenance, qui est aléatoire) ou de l'assurance non vie (où les modèles servent principalement à simuler la charge sinistre annuelle d'un portefeuille d'assurance).

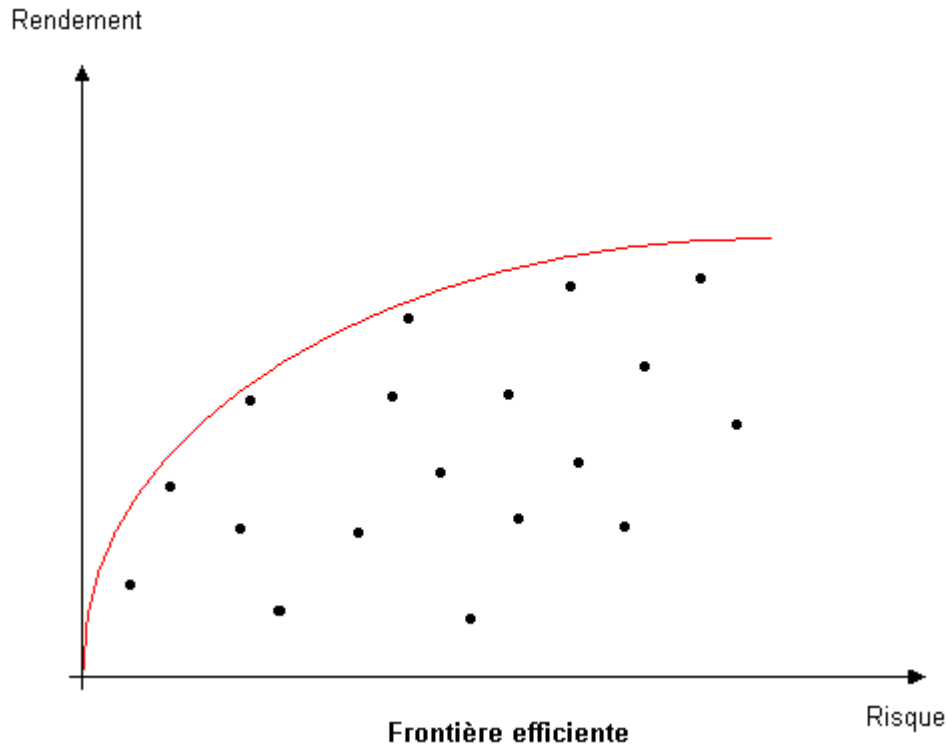
En ce qui concerne les modèles DFA, l'appel aux méthodes de simulations est incontournable. En effet, la modélisation stochastique de différents items du bilan (inflation, taux d'intérêts, provisions, etc) pousse à s'intéresser de près aux différentes méthodes de simulation utilisées actuellement. Certes la mise en place de telles procédés est fastidieuse, le modèle y gagne néanmoins en précision dans le sens où il permet d'aboutir à la loi de distribution d'une variable, l'intervalle de confiance d'une autre, etc.

E - ANALYSE DES « OUTPUTS »

Parmi les stratégies simulées, il faut mettre en évidence celle qui permet d'optimiser le critère prédéterminé. L'entreprise doit donc disposer d'un outil de décision qui permet d'analyser les résultats des différents scénarii testés.

L'outil le plus commun est celui de la frontière efficiente, amplement utilisé dans la théorie du portefeuille de Markowitz. En premier lieu, la compagnie doit choisir une mesure du retour sur investissement (rendement) et une mesure du risque. Pour chaque stratégie, ces mesures peuvent être représentées graphiquement (cf ci dessous).

⁷ Le premier chapitre de la partie 5 est entièrement consacré aux méthodes de simulations.



Chaque stratégie correspond à un point dans le graphe rendement-risque. Une stratégie est qualifiée d'efficiente si on ne peut trouver une autre stratégie qui vérifie l'une des caractéristiques suivantes

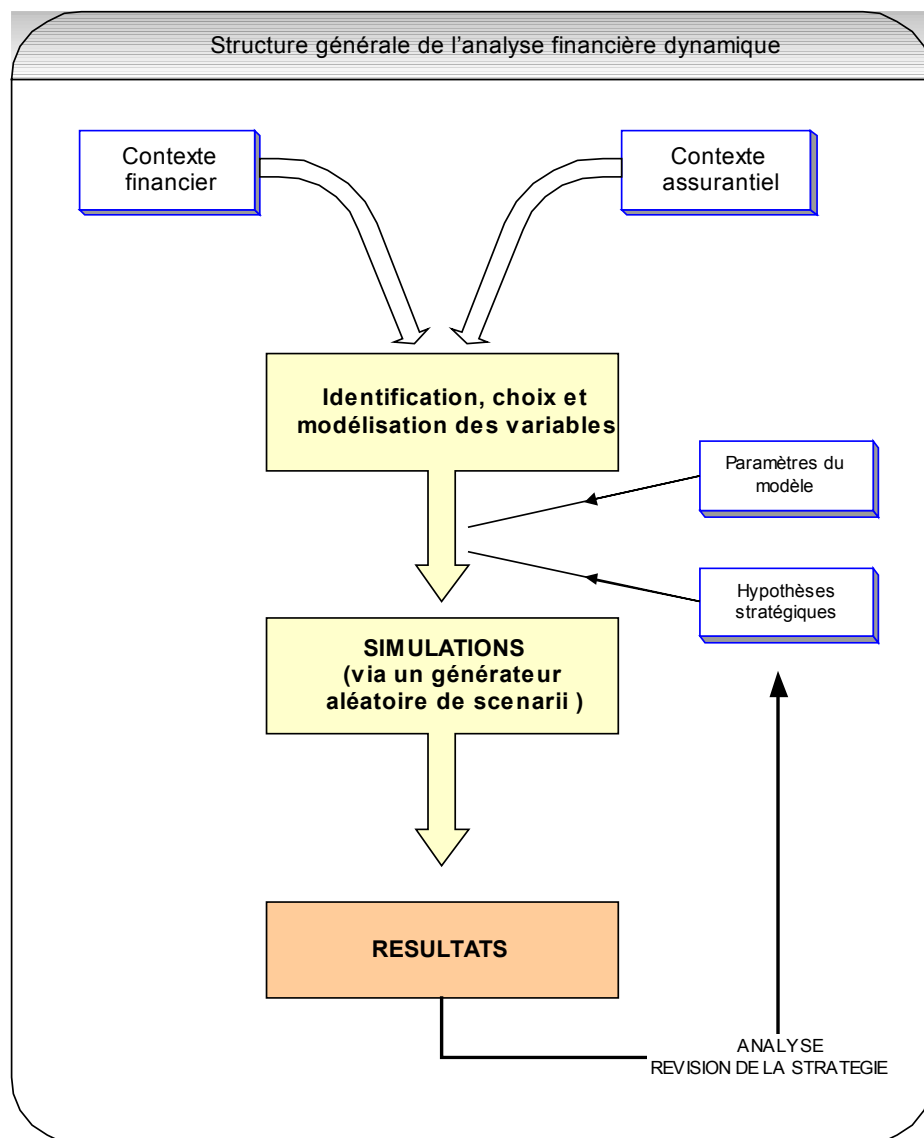
- pour un rendement donné, le niveau de risque est inférieur.
- pour un niveau de risque donné, le rendement est supérieur.

Pour chaque niveau de risque, il existe un rendement de risque maximal qui ne peut être excédé. Mais la position exacte de la frontière efficiente est inconnue. Avec cette méthode, il n'y a donc pas de certitude absolue que la stratégie soit vraiment efficiente ou pas. Même si la méthode de la frontière efficiente est un bon moyen de comparer les résultats car connu de tous, il n'en reste pas moins qu'il est sujet à critiques.

SECTION 4 : SCHEMA RECAPITULATIF

L'organigramme suivant récapitule l'ensemble des éléments et des choix qui permettent d'aboutir à un modèle DFA. La majorité des modèles DFA se composent de trois parties principales :

- un générateur stochastique de scenarii qui produit des réalisations des variables aléatoires des principaux facteurs du modèle,
- les données propres à la compagnie, les hypothèses relatives aux paramètres du modèle, les hypothèses stratégiques,
- les outputs fournis par le modèle. Ils doivent être analysés par le manager et éventuellement conduire à la modification des hypothèses stratégiques, de manière à faire apparaître la stratégie optimale.



PARTIE 2

Spécificités de l'assurance non vie

CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE L'ASSURANCE NON-VIE

De manière schématique, l'activité d'assurance non-vie comprend trois types d'activités :

- Les assurances de choses ou de biens.
- Les assurances de responsabilité ou de dette.
- Les assurances de personnes (incapacité, invalidité, frais de santé,...)

Celles-ci ne sont pas homogènes : pour certaines, le préjudice provient de l'atteinte aux biens. Pour d'autres, il résulte d'une atteinte à la personne physique de l'assuré suite à un accident corporel ou une maladie.

Ce chapitre récapitule des informations primordiales relatives à l'assurance non-vie et à la réglementation. Celle-ci repose sur trois modalités étroitement complémentaires : une évaluation prudente des engagements des assureurs (provisions techniques), le contrôle des actifs admis en représentation de ces engagements et enfin les exigences de fonds propres suffisants.

L'objectif de ce développement est de donner une vue globale de l'activité d'assurance non-vie et d'identifier les éléments significatifs qui contribueront à la mise en place des méthodes DFA. A cet égard, nous nous intéresserons plus particulièrement :

- aux placements,
- aux provisions,
- à la marge de solvabilité,
- au bilan.

SECTION 1 : LES PLACEMENTS

En vue de protéger les intérêts des assurés, des bénéficiaires de contrats et des actionnaires, l'assureur est tenu de respecter les articles du Code des Assurances qui imposent des règles prudentielles. Le développement suivant rappelle quelques règles relatives aux placements que les sociétés d'assurances sont autorisées à effectuer en représentation de leurs engagements.

A - LISTE DES PLACEMENTS AUTORISES

Les actifs autorisés par l'article R332-2 du Code des Assurances sont les suivants⁸ :

- Valeurs mobilières et titres assimilés :
 - ✓ obligations,
 - ✓ titres participatifs,
 - ✓ titres de créances négociables,
 - ✓ actions,
 - ✓ fonds communs de placement à risque,
 - ✓ SICAV.
- Actifs immobiliers :
 - ✓ droits réels immobiliers,
 - ✓ parts ou actions des sociétés à objet strictement immobilier.
- Prêts et dépôts :
 - ✓ prêts obtenus ou garantis par les Etats membres de l'O.C.D.E.,
 - ✓ prêts hypothécaires aux personnes physiques ou morales,
 - ✓ autres prêts ou créances,
 - ✓ dépôts.

Il est important de préciser que ces placements sont soumis à des limitations. Ainsi, le Code des Assurances dicte « Rapportée à la base de dispersion constituée par la différence entre le montant total des engagements réglementés mentionnés à l'article R. 331-1, toutes monnaies confondues, et le montant total des actifs mentionnés aux articles R. 332-3-4 à R. 332-10, toutes monnaies confondues, la valeur au bilan de chacune des catégories d'actif énumérées ci-après ne peut excéder » :

- ✓ 65% pour les actions,
- ✓ 40% pour les actifs immobiliers

⁸ Pour le détail des conditions de validité des placements, on pourra consulter le Code des Assurances.

- ✓ 10% pour les prêts,
- ✓ aucune proportion n'est mentionnée pour les obligations.

B - REGLES DE DISPERSION

D'autres précisions sont données quant aux règles de dispersion ; le Code des Assurances précise que, rapportée au montant défini à l'article R. 332-3, la valeur au bilan des actifs mentionnés ci-après ne peut excéder⁹ :

- ✓ 5% pour l'ensemble des valeurs émises, dépôts placés, prêts obtenus ou garantis par un même organisme,
- ✓ 10% pour un même immeuble ou pour les parts ou actions d'une même société immobilière ou foncière,
- ✓ 0,5% pour l'ensemble des actions non cotées et des fonds communs de placements à risque.

C - REGLES DE CONGRUENCE (R332-1 et R332-1-1)

Les compagnies d'assurances peuvent prendre des engagements libellés dans différentes monnaies. A ce titre, elles doivent mettre en place une couverture par le biais d'actifs congruents¹⁰. Le Code des Assurances ajoute néanmoins :

- ✓ les entreprises d'assurances peuvent, à concurrence de 20% de leurs engagements, ne pas couvrir ceux-ci par des actifs congruents.
- ✓ C'est également le cas lorsqu'elles détiennent dans une monnaie des éléments d'actifs d'un montant ne dépassant pas 7% des éléments d'actifs existant dans l'ensemble des autres monnaies.

D - EVALUATION DES ELEMENTS D'ACTIFS

Les méthodes et principes d'évaluation des actifs sont précisés aux articles R332-19 et R332-20.

- ✓ Les valeurs amortissables, autres que les obligations indexées, les parts de fonds communs de créance et les titres participatifs sont inscrites à leur prix d'achat à la date d'acquisition. La différence entre le prix d'achat des titres et leur prix de remboursement est portée sur la durée de vie résiduelle des titres.
- ✓ Les autres placements sont retenus pour leur prix d'achat.. Si la valeur de réalisation est inférieure à la valeur d'achat, une provision pour risque d'exigibilité est constituée.

⁹ Pour le détail des conditions de validité, on pourra consulter le Code des Assurances.

¹⁰ I.e. par des actifs libellés ou réalisables dans la monnaie de l'engagement.

- ✓ Les immeubles et les parts ou actions des sociétés immobilières ou foncières sont retenus pour leur prix d'achat ou de revient ou, dans les conditions fixées dans chaque cas par la CCA¹¹, pour une valeur déterminée après expertise.

¹¹ CCA : Commission de Contrôle des Assurances. Autorité administrative indépendante créée par la loi n° 89-1014 du 31 décembre 1989, la Commission de contrôle des assurances est chargée du contrôle des entreprises d'assurance, de réassurance et de participations d'assurance.

SECTION 2 : LES PROVISIONS¹²

L'essentiel du passif d'une compagnie d'assurance est composé de provisions techniques et de réserves diverses. Dans l'optique de proposer un modèle représentant ces dernières, nous devons nous astreindre à examiner la nature de ces postes du passif.

Certaines des provisions présentées ci-après sont communes à l'assurance vie et l'assurance non-vie (réserve de capitalisation, la provision pour égalisation, la provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques), les autres étant plus spécifiques à l'assurance non-vie.

A - LA RESERVE DE CAPITALISATION

Alors même que cette réserve est inscrite au bilan dans les fonds propres, il s'agit en fait par nature d'une provision technique ayant pour objectif de parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu. Cette réserve est constituée lors des sorties (vente ou conversion) réalisées avant leur échéance des valeurs amortissables réglementées. La réserve de capitalisation permet ainsi (grâce à la constitution de provisions) de ne pas imposer les plus values réalisées dans le cadre de cessions obligataires intervenant avant échéance.

Le Code des Assurances précise lui même l'objectif de cette réserve : « le montant des versements et des prélèvements effectués sur la réserve de capitalisation (...) doit être tel que le rendement actuariel des titres soit, après prélèvement ou versement, égal à celui qui en était attendu lors de l'acquisition de ces mêmes titres ». L'évolution du cours des obligations variant en sens inverse du taux d'intérêt, les plus values dégagées en période de hausse des cours (baisse des taux) procurent un bénéfice immédiat, mais au détriment de la rentabilité à terme du portefeuille-titres (réinvestissement sur des titres à rendement moins élevé). Inversement, lorsque les cours baissent (hausse de taux), le réinvestissement du montant de la vente (qui a dégagé une moins-value) est effectué sur des titres plus rentables.

B - LA PROVISION POUR EGALISATION

Elle est destinée à équilibrer les résultats de certains risques où la probabilité de survenance d'un sinistre sur un exercice n'a pas de signification statistique et où il convient de constituer des réserves les années fastes pour faire face à des sinistres rares mais de montants élevés¹³. La constitution des provisions pour égalisation obéit à des règles précises de nature fiscale.

¹² Cours ISFA 2003, Assurance non vie, Ch. PARTRAT

¹³ Principalement catastrophes naturelles, grêle, tempête, risque atomique, pollution, assurance crédit.

Comme il s'agit d'un bénéfice reporté, il y a nécessité de réintégration dans le résultat de la part non utilisée pour le paiement des sinistres au plus tard au bout de dix ans.

C - LA PROVISION POUR RISQUE D'EXIGIBILITE DES ENGAGEMENTS TECHNIQUES

Créée en 1994, elle est destinée à faire face à une insuffisance dans la liquidité des placements, notamment en cas de modification du rythme de règlement des sinistres. Elle est égale à la différence constatée entre la valeur globale des placements en actions et immobiliers évaluée dans le bilan et selon le marché. Son utilité provient du besoin de réconciliation entre valeur de marché des placements et valeurs historiques figurant au bilan.

D - LA PROVISION MATHEMATIQUE DES RENTES

Elle représente à l'inventaire la valeur des rentes mises à la charge de la société.

E - LA PROVISION POUR PRIMES NON ACQUISES

Elle est destinée à constater, pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et les primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date d'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut du terme du contrat. Elle correspond dans les faits à un partage mécanique des primes prorata temporis.

F - LA PROVISION POUR RISQUES EN COURS

Elle a pour objet de pallier une éventuelle insuffisance des tarifs ; c'est donc une provision destinée à couvrir, pour l'ensemble des contrats en cours, la charge des sinistres et des frais afférents au contrat pour la période s'écoulant entre la date d'inventaire et la date de la première échéance de prime pouvant donner lieu à révision de la prime par l'assureur, ou entre la date d'inventaire et le terme du contrat pour la part de ce coût qui n'est pas couvert par la provision pour prime non acquise.

G - LA PROVISION POUR SINISTRES A PAYER

C'est la valeur estimative en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaire au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs de rentes non encore mis à la charge de l'entreprise. Cette provision doit comprendre :

- ✓ Une provision pour sinistres inconnus ou déclarés tardivement (après la date d'inventaire).

- ✓ Une provision de gestion, couvrant les frais futurs liés aux sinistres en suspens, y compris les frais internes tels que les salaires versés aux personnes affectées au service sinistre.

Elle est estimée dossier par dossier par le gestionnaire de sinistres. Le montant comptabilisé sur un dossier donné par le gestionnaire dépend :

- ✓ Soit de sa connaissance et de son expérience du type de sinistre concerné (estimation forfaitaire « au nez »).
- ✓ Soit d'un compte rendu d'expertise.
- ✓ Soit de l'application d'un coût moyen d'ouverture (quand il ne dispose pas d'éléments lui permettant d'estimer précisément la charge du dossier, il utilise des indicateurs moyens calculés par l'actuaire).
- ✓ Soit d'un calcul procédurier propre à la société (on rentre les paramètres du sinistre et le système sort un montant de PSAP à comptabiliser pour le sinistre concerné).

H - LA PROVISION POUR RISQUE CROISSANT

Elle permet de lisser les résultats et les tarifs dans les branches où le risque va croissant au cours du temps. C'est le cas en assurance non-vie des assurances santé où le vieillissement de l'assuré accroît le risque (en se situant dans le cas où la cotisation croît moins vite que le risque).

I - LA PROVISION POUR FRAIS D'ACQUISITION REPORTEES

Cette provision est destinée à couvrir les charges résultant du report des frais d'acquisition constatés en application de l'article R 332-35.

Les frais d'acquisition à reporter sont inscrits à l'actif du bilan en fonction de la durée de vie résiduelle des contrats. Le montant des frais d'acquisition reportés est au plus égal à l'écart entre les montants des provisions mathématiques inscrites au passif et le montant des provisions mathématiques qui seraient à inscrire si les chargements d'acquisition n'étaient pas pris en compte dans les engagements des assureurs. Les frais d'acquisitions reportés sont admis en représentation des provisions techniques.

Le principe de Zillmèrisation consiste à déduire du montant des provisions mathématiques initialement calculées, la valeur actuelle des chargements d'acquisition inclus dans les primes périodiques futures. L'écart correspondant détermine le montant maximum des frais d'acquisition reportés qu'il est possible d'inscrire à l'actif du bilan et d'amortir sur la durée de vie du contrat.

L'objectif recherché est un meilleur rattachement des charges aux produits.

SECTION 3 : LA MARGE DE SOLVABILITE

A - PRESENTATION DE LA MARGE DE SOLVABILITE¹⁴

Les réglementations prudentielles encadrent l'activité des assureurs pour garantir la sécurité des contrats. Il s'agit essentiellement de protéger les assurés contre le risque d'insolvabilité de leurs assureurs en exigeant de ces derniers qu'ils se plient à diverses exigences qui portent notamment sur le niveau de fonds propres dont ils doivent disposer. La réglementation européenne impose aux assureurs de détenir un montant minimal de fonds propres qui permet d'amortir les chocs affectant soit le rapport sinistres/primes, soit la rentabilité des placements. Ce montant minimal de fonds propres est appelé "marge de solvabilité". Il représente une garantie supplémentaire qui vient s'ajouter aux actifs détenus en contrepartie des provisions techniques. En assurance de dommages et de responsabilité, ce surplus minimal d'actifs est calculé en pourcentage des primes émises ou des sinistres.

Par ailleurs, la réglementation en vigueur définit les fonds propres susceptibles d'être pris en compte dans le calcul de la marge de solvabilité¹⁵. De plus, la marge de solvabilité ne peut tomber en dessous d'un certain montant absolu appelé "fonds minimal de garantie".

B - MODALITES DE CALCUL

Les législateurs imposent une capitalisation minimale fonction des primes et des sinistres appelés :

a) Méthode sur les primes :

18% des primes brutes de réassurance reçues durant une année dans la limite des 10 premiers millions d'euros souscrits
+
16% du montant au dessus de 10 millions d'euros.

Exception en assurance santé : 6% jusqu'à 10 millions d'euros puis 5,33% au-delà.

b) Méthode sur les sinistres

26% de la moyenne de la charge de sinistre brutes de réassurance survenues dans l'année dans la limite de 7 millions d'euros
+
23% de la moyenne de la charge de sinistre brutes de réassurance survenues dans l'année au delà de 7 millions d'euros

Exception en assurance santé : 8,67% jusqu'à 7 millions d'euros puis 7,67% au-delà.

¹⁴ Cours ISFA 2003, Comptabilité des assurances, O. REIZ.

¹⁵ Pour plus de détails, consulter l'article R334-17 du code des impôts

La moyenne de la charge sinistre est calculée sur les trois dernières années dans le cas général et sur les sept dernières années dans le cas particulier de l'assurance tempête, grêle ou gel.

c) Montant de la MSR

$$\text{MSR} = \% \text{ de rétention} \times \text{Max} \{ \text{méthode sur les primes ; méthode sur les sinistres} \}$$

La formule de la MSR retient un minimum de 50% pour le taux de rétention.

C - AVANTAGES DE LA MSR

Cette méthode :

- prend en compte l'expérience individuelle de chaque société.
- est simple à administrer.

D - INCONVENIENTS DE LA MSR

La méthode de calcul de la MSR présente les inconvénient suivants :

- elle pénalise les sociétés qui ne sont pas suffisamment provisionnées et/ou qui ne sous-tarifient pas.
- elle ne distingue pas les sociétés qui souscrivent des montants identiques pour des risques totalement différents.
- elle n'offre pas de distinction assureur/réassureur.
- elle prend comme hypothèse implicite que l'expérience passée est un bon guide pour estimer le futur, sans possible ajustement.

SECTION 4 : BILAN SIMPLIFIE

Le bilan recense la situation patrimoniale de la société d'assurance à une date donnée. Le tableau ci-dessous fournit l'architecture du bilan ainsi que les principales rubriques propres à l'assurance non-vie et permet d'identifier les postes les plus importants du bilan.

Actif	Passif
Immobilisations (placements) (70% à 80%)	Capitaux propres (10% à 20%)
	Provisions techniques (brutes de réassurance) (60% à 80%)
Part des réassureurs dans les provisions techniques (10% à 20%)	
Créances et autres actifs (10% à 20%)	Dettes et autres passifs (10% à 20%)

Chacun des éléments du bilan est détaillé ci-après :

- ✓ Les placements : ils sont constitués de biens immobiliers, d'obligations, d'actions, des prêts, etc.
- ✓ Part des réassureurs dans les provisions techniques : c'est le deuxième poste le plus important.
- ✓ Créances et autres actifs : on y trouve diverses créances sur les assurés, intermédiaires de contrats.
- ✓ Les capitaux propres : ils se composent du capital social, des réserves, des résultats de l'exercice avant affectation, sans oublier la réserve de capitalisation.
- ✓ Les provisions techniques : elles représentent les engagements de la société d'assurance vis à vis des assurés et des bénéficiaires de contrat. La nature des différentes provisions a été précisée dans un chapitre précédent.
- ✓ Les autres postes du passif sont constitués de diverses dettes vis à vis des assurés, de l'Etat, des intermédiaires...

CHAPITRE 2 : IDENTIFICATION DES RISQUES

L'activité d'assurance est par nature une activité risquée : la fonction économique globale des entreprises d'assurance est d'assumer des risques qu'une personne physique ou morale ne pourrait supporter en mutualisant un grand nombre de risques similaires. Néanmoins, une entreprise d'assurance est elle-même exposée à un certain nombre de risques globaux qui peuvent menacer son existence et, dans des cas extrêmes, la ruiner.

La section 1 de ce chapitre fournit un inventaire des risques auxquels une société d'assurance non-vie peut être exposée. Enfin, la section suivante présente une classification relativement « classique » de ces risques :

- les risques techniques,
- les risques d'investissement,
- les risques « non techniques ».

SECTION 1 : INVENTAIRE DES RISQUES

L'actuaire doit être en mesure de comprendre la sensibilité de la situation financière de l'assureur et d'appréhender chacune des grandes catégories de risques ayant une importance significative pour la société d'assurance. Dans la présente section, nous présenterons les principales catégories de risques¹⁶ qui pourraient faire l'objet d'un examen et être inclus dans un modèle DFA.

A - FREQUENCE ET GRAVITE

a - Présentation

Les taux de sinistres et les sinistres futurs peuvent fortement diverger par rapport aux scénarii et estimations de base, et ce pour diverses raisons :

- augmentation non prévue de la fréquence de sinistres importants,
- augmentation non prévue de la fréquence ou de la gravité accrue des sinistres « habituels »,
- mauvaise tarification...

b - Evénements contribuant au risque

- *Evénements catastrophiques* : Tremblements de terre, tempêtes, inondations, grêle ou tout autre événement qui pourrait avoir des répercussions importantes sur l'activité de l'assureur doivent être pris en compte. Idéalement, l'estimation des montants de ces événements devrait reposer sur des modèles de simulation. Les conséquences de tels événements sur la gestion de l'assureur peuvent être les suivantes :
 - ✓ l'insolvabilité d'un ou plusieurs réassureurs auxquels l'assureur a confié une partie importante de sa réassurance,
 - ✓ une augmentation du passif des polices,
 - ✓ une augmentation des taux de réassurance au prochain renouvellement,
 - ✓ une inflation ultérieure à l'événement,
 - ✓ une liquidité réduite de l'actif.
- *Sinistres « habituels »* : Il convient de modéliser le taux de sinistre par année de survenance ou encore la fréquence et la gravité des sinistres. Etant donné que les sinistres importants ou catastrophiques sont évalués séparément, il peut paraître judicieux d'éliminer les sinistres inhabituels de ces données avant de procéder à une analyse. Il est généralement prudent

¹⁶ Cf. DEMPSTER M.A.H., "Risk Management : Value at Risk and beyond". Cambridge University Press.

d'examiner soit la variabilité des taux de sinistres par année de survenance ou par année de souscription, soit la distribution conjointe de la fréquence et de la gravité.

B - LES RISQUES ASSOCIES A LA TARIFICATION

a - Présentation

La tarification des produits IARD est principalement basée sur l'étude de données historiques. Or il arrive que celles-ci ne reflètent pas les conditions qui prévaudront dans l'avenir ou contiennent des erreurs. D'autre part, il arrive souvent que les tarifs déterminés par l'actuaire soient modifiés pour répondre à des impératifs commerciaux ou à des exigences réglementaires. La compagnie d'assurance peut donc se trouver, dans certains cas, dans une situation d'insuffisance des tarifs et il pourra s'écouler parfois un an ou plus avant que des mesures correctives ne soient adoptées. Généralement, les lignes d'affaires les plus susceptibles d'être mal tarifées sont celles qui sont nouvelles pour l'assureur ou dont le volume d'affaires a évolué de manière significative.

b - Evénements contribuant au risque

Les principaux facteurs contribuant à l'apparition de ce type de risque sont les suivants :

- × Gel des tarifs : La compagnie peut se trouver dans l'impossibilité d'augmenter certains tarifs. En effet, pour certaines lignes d'affaires et juridictions, la tarification doit être approuvée par un organisme réglementaire.
- × Contexte favorisant une concurrence accrue : En période de forte concurrence, les compagnies doivent tout mettre en œuvre pour conserver leurs parts de marché ; cela les oblige généralement à faire des efforts au niveau de la tarification de leurs produits.
- × Risque lié au paramètre, erreur d'estimation ou données erronées : Les répercussions possibles du risque lié au paramètre, d'une erreur d'estimation (risque de procédé) et de données erronées quant au taux de sinistres dépendraient de la qualité et de la crédibilité des données de la société et de l'industrie ainsi que de la connaissance que possède l'actuaire-tarificateur des lignes d'affaires.

C - RISQUES ASSOCIES AU VOLUME DES PRIMES

a - Présentation

L'une des incertitudes d'une société d'assurance concerne le volume des nouvelles ventes qu'elle sera en mesure de souscrire à l'avenir. Des volumes qui divergent considérablement de ceux prévus au terme du plan d'affaires peuvent se répercuter de façon imprévue sur la gestion de la société et avoir des conséquences négatives.

Il y a plusieurs types d'événements susceptibles d'affecter considérablement le montant et le type d'affaires que peut souscrire une société d'assurance, notamment :

- l'entrée d'un fort concurrent sur le marché,
- une compétitivité accrue sur le marché en raison d'un accroissement de la publicité,
- la perte d'un important distributeur ou même d'un réseau complet de distribution, auparavant responsable d'une partie importante des affaires d'une société,
- la perte d'un important client (par exemple, un groupe représentant une portion significative du portefeuille d'assurance collective d'une société d'assurance),
- un amendement à une loi ou à un règlement ayant des répercussions directes sur une ligne de produits importante,
- une cote défavorable sur les marchés financiers ou tout autre événement susceptible de ternir la réputation de l'assureur,
- le succès imprévu d'une nouvelle ligne de produit ou par rapport à un concurrent qui était jusqu'alors plus important.

b - Eléments contribuant au risque

Les principaux facteurs contribuant à l'apparition de ce type de risque sont les suivants :

- Diminution importante du volume des primes souscrites
- Augmentation du volume des primes

D - RISQUES ASSOCIES AUX DEPENSES

a - Présentation

Les hypothèses de dépenses sont une considération affectant la situation financière prévue de chaque assureur. Ces hypothèses sont particulières car, jusqu'à un certain point, la direction de la société exerce un plus grand contrôle sur les dépenses que sur les facteurs liés aux sinistres. Même les assureurs ayant géré de façon stricte leurs dépenses afin d'être en mesure d'atteindre leurs objectifs budgétaires peuvent être confrontés à des problèmes liés aux dépenses¹⁷.

b - Eléments contribuant au risque

Les principaux facteurs contribuant à l'apparition de ce type de risque sont les suivants :

¹⁷A la suite d'une variation imprévue de la croissance des affaires ou d'une poursuite par exemple.

- Contexte fortement inflationniste : Ce scénario peut entraîner une augmentation rapide des frais absolus et de coûts unitaires .
- Volume des primes plus faible que prévu : Un faible volume des primes peut précipiter une augmentation des coûts unitaires lorsqu'une partie des dépenses sont considérées comme étant fixes.
- Désuétude technologique.
- Jugements de tribunaux liés aux pratiques commerciales : L'actuaire devrait tenir compte de toute augmentation des frais attribuables à un changement relatif aux pratiques commerciales à la suite de jugements rendus par les tribunaux. Les effets des retombées éventuelles comprendraient notamment une atteinte à la réputation de l'assureur, suscitant une dévaluation de la cote ou une mauvaise position concurrentielle.

E - RISQUES ASSOCIES AU TAUX D'INFLATION

a - Présentation

Dans le domaine de l'assurance, le coût des sinistres et des frais de règlement a tendance à être très sensible au taux d'inflation général. Celui-ci peut être fonction de variation de coûts spécifiques à d'autres secteurs, de l'augmentation du coût des matières premières et de la main d'oeuvre à la suite de dommages catastrophiques imputables à des sinistres de biens, et de l'augmentation des coûts d'assurance individuelle automobile, etc...

b - Eléments contribuant au risque

Les principaux facteurs contribuant à l'apparition de ce type de risque sont les suivants :

- Augmentation importante, rapide et soutenue du taux d'inflation général : Ce scénario aurait tendance à faire augmenter le coût ultime de règlement des sinistres non payés et entraînerait une hausse soutenue du coût de règlement des sinistres à venir et des frais divers. Le scénario serait normalement lié à une augmentation rapide et soutenue des taux d'intérêt du marché.
- Augmentation importante et temporaire du coût de la main d'oeuvre et des matières premières en raison de dommages matériels catastrophiques : Ce scénario aurait tendance à faire augmenter le coût ultime de règlement des dommages matériels non payés et le coût des dommages matériels à venir pendant un certain temps..
- Grave récession de l'économie en général : Ce scénario aurait tendance à faire augmenter le nombre et le coût ultime de règlement des sinistres non payés liés à des sinistres d'assurance individuelle automobile, de biens et de garanties et il entraînerait une augmentation du nombre et du coût de règlement des sinistres futurs liés à des sinistres d'assurance

automobile, de biens, d'assurance de responsabilité professionnelle et de garantie ainsi que les frais de règlement.

F - RISQUES ASSOCIES AU TAUX D'INTERET

a - Présentation

En cas d'augmentation des taux d'intérêt, la valeur marchande des titres de créance fluctuerait également et se répercuterait, le cas échéant, sur l'examen de l'actif minimal. En cas de disparités entre les flux monétaires de l'actif et du passif, il sera nécessaire de réinvestir les flux monétaires positifs ou de capitaliser les flux monétaires négatifs par des emprunts ou liquidation d'éléments d'actif. Ainsi, les taux d'intérêt futurs peuvent fluctuer considérablement et avoir des répercussions négatives sur l'excédent. La valeur des instruments dérivés sera également affectée ; ceux-ci aident à atténuer les répercussions défavorables lorsqu'ils sont utilisés comme instruments de couverture.

b - Eléments contribuant au risque

Les principaux facteurs contribuant à l'apparition de ce type de risque sont les suivants :

- Une fluctuation des taux d'intérêt futurs : L'évolution future des taux d'intérêt se répercutera non seulement sur les taux de réinvestissement et les valeurs marchandes futures mais aussi sur le comportement des flux monétaires, notamment en regard de titres adossés à des créances et d'obligations rachetables. Les réactions possibles de la direction comprendraient notamment la vente ou le réinvestissement d'éléments d'actifs.
- Un changement dans le modèle de règlement des sinistres : L'actuaire devrait tenir compte d'un nouveau modèle de règlement des sinistres, qui pourrait entraîner une disparité entre les flux monétaires de l'actif et du passif.

G - RISQUES ASSOCIES A LA DEPRECIATION DE LA VALEUR DE L'ACTIF

Les scénarii susceptibles de réduire la valeur de l'actif peuvent provenir de diverses sources, notamment :

- une augmentation des pertes imputables à des défauts de paiement sur les titres de créances,
- un faible rendement ou une diminution de la valeur des biens mobiliers, immobiliers et autres,
- un faible rendement ou une diminution de la valeur d'une filiale.

Les effets des retombées éventuelles comprendraient possiblement :

- un défaut de paiement de la contrepartie à l'égard des instruments dérivés,
- une perte ou une diminution appréciable de la valeur de toute autre grande catégorie d'actif,
- des fluctuations des valeurs des monnaies,
- une dévaluation de la cote qui pourrait à son tour avoir de sérieuses répercussions,
- une crise de liquidité provoquée par d'importantes pertes soutenues à la suite de défaut de paiement.

H - RISQUES ASSOCIES A LA REASSURANCE

a - Présentation

Les risques associés à la réassurance peuvent être liés à l'incapacité d'un assureur de respecter ses engagements, à un changement au niveau des conditions du marché donnant lieu à une augmentation des tarifs, à des limites insuffisantes ou enfin à une protection autrement insuffisante ou inabordable.

b - Eléments contribuant au risque

Les principaux facteurs contribuant à l'apparition de ce type de risque sont les suivants :

- **Insolvabilité du réassureur :** L'effet de l'insolvabilité du réassureur devrait comprendre un « pourcentage recouvrable » présumé de l'actif par rapport au passif du réassureur insolvable et de toute autre façon de traiter les diverses sommes que le réassureur doit à la société. Il est possible que les répercussions soient atténuées par le droit de compensation des sommes à rembourser en vertu de tous les traités conclus entre les deux sociétés, par la position privilégiée des assureurs par rapport à d'autres créanciers de réassureurs en faillite, par le droit de reprise en cas de faillite, par les sommes en dépôt ou en fiducie auprès de la société d'assurance, ou encore les lettres de crédit à l'égard d'un réassureur non agréé. Les effets des retombées éventuelles comprendraient notamment une augmentation des tarifs de réassurance attribuable à la nécessité de remplacer la protection de réassurance.
- **Augmentation des tarifs de réassurance ou diminution de la commission du réassureur :** Lorsqu'une mesure d'un réassureur touche tous les autres assureurs sur les mêmes marchés, elle ne devrait pas nécessairement causer de problèmes sur le plan de la concurrence (en raison du nombre de sociétés susceptibles d'être touchées par une semblable modification des modalités). Toutefois, si la mesure d'un réassureur ne vise qu'une société en raison de sa mauvaise expérience, la nouvelle tarification imposée pourra influencer sur le volume des

nouvelles ventes ou sur la rentabilité de ses affaires si la commission du réassureur a été réduite.

- Diminution de capacité : une diminution de la capacité de réassurance pouvant servir à financer de nouvelles ventes risque d'entraîner une augmentation des coûts de réassurance ou de freiner la croissance de la société.
- Différents au sujet des dispositions des polices : Les différents entre une société et ses réassureurs pourraient avoir le même effet qu'une insolvabilité des réassureurs.

I - RISQUES ASSOCIES AUX INITIATIVES GOUVERNEMENTALES ET POLITIQUES

Lorsque le gouvernement modifie ses politiques ou ses règlements, leur mise en oeuvre prend habituellement beaucoup de temps, ce qui donne l'occasion d'en analyser les répercussions et de prendre les mesures appropriées. Cependant certaines modifications peuvent survenir très rapidement et s'imposer de façon imprévue. D'autres peuvent même avoir un effet rétroactif. Citons pour illustration :

- augmentation du taux de taxation des primes,
- augmentation des cotisations ,
- augmentation des taux d'imposition ou règles applicables aux sociétés,
- création possible de nouveaux réseaux de distribution,
- révision des normes prescrites de solvabilité pouvant faire augmenter le montant de capital requis des assureurs IARD,
- instabilité politique : en vertu de ce scénario, l'actuaire devrait tenir compte de l'instabilité politique qui pourrait entraîner une confiscation d'actif, la cessation de nouvelles ventes, un contrôle des changes, etc., particulièrement dans les pays étrangers,
- modification de la protection imposée par la loi.

J - RISQUES HORS BILAN

Plusieurs postes hors bilan pourraient comporter des risques pour un assureur. Souvent, ces postes hors bilan découlent de pratiques nouvelles ou changeantes du secteur, qui au cours des années subséquentes, sont admises au bilan par les organismes de réglementation. Il est donc nécessaire que l'actuaire soit conscient de tous les nouveaux risques qui pourraient affecter l'assureur pendant la période de projection afin d'évaluer ceux qui peuvent compromettre la solvabilité.

SECTION 2 : RISQUES A PRENDRE EN COMPTE

Alors que la section précédente proposait un inventaire des risques, les paragraphes suivant proposent un regroupement de ceux-ci en catégories de risques.

A - LES RISQUES TECHNIQUES

Ces risques sont généralement liés au passif et correspondent à des risques associés directement ou indirectement aux bases techniques et actuarielles de calcul des primes et des provisions techniques. Ces risques dépendent directement du type d'assurance considéré. Ils menacent la capacité de l'assureur à remplir ses obligations (par exemple, en cas de fréquence ou de montant de sinistre plus importants que prévus). Bien que nombre de ces risques dépendent largement de facteurs macroéconomiques (taux d'intérêt) et démographiques (mortalité), l'assureur peut mettre en oeuvre des mesures préventives dans le domaine de la tarification, des risques assurés ou du provisionnement. L'un des plus importants moyens de prévention de ces risques est par ailleurs la réassurance.

B - LES RISQUES D'INVESTISSEMENT

Les risques d'investissement sont quant à eux l'ensemble des risques liés à la gestion d'actifs de l'assureur (performance, liquidité...). On trouve au premier rang de ces risques le risque de taux. Ces risques peuvent être limités par une diversification des actifs et une évaluation prudente de leur valeur.

C - LES RISQUES « NON TECHNIQUES »

Enfin, les risques « non techniques » sont les risques qui ne peuvent être classés dans une des deux catégories précédentes. Ils comprennent notamment :

- les risques légaux et fiscaux,
- les risques opérationnels . Ceux-ci peuvent être détaillés comme suit :
 - ✓ erreur humaine,
 - ✓ mauvaise décision,
 - ✓ procédure de gestion inadéquate,
 - ✓ fraude des dirigeants,
 - ✓ etc...

Ces risques sont bien sûr très difficiles à inclure dans une modélisation.

PARTIE 3

Modélisation de l'actif

Le développement suivant a pour ambition de valoriser les différents constituants de l'actif de la société. Cette partie du bilan peut se décomposer de manière synthétique, en 4 catégories principales :

- ↳ Placements monétaires.
- ↳ Obligations Zéro-Coupon.
- ↳ Actions.
- ↳ Immobilier.

L'évaluation et la modélisation des deux premières catégories d'actifs passent inévitablement par une étape de choix et de modélisation de la structure des taux d'intérêt ; c'est l'objet du Chapitre 2. Dans un second temps, nous nous intéresserons plus amplement à la modélisation de la valeur des actions.

CHAPITRE 1 : MODELISATION DE L'INFLATION

Pour un même sinistre survenant à des dates différentes, les montants versés en guise d'indemnisation sont sensiblement différents. De manière générale, les montants des règlements augmentent avec le temps. Ceux-ci peuvent dépendre de divers facteurs : des décisions politiques (réglementation), de la jurisprudence, de l'évolution de la médecine...Mais un facteur déterminant dans l'évolution des coûts est indéniablement l'inflation.

Il intervient dans les deux parties du bilan :

- A l'actif : L'observation des données historiques fait apparaître un lien relativement fort entre l'évolution du taux d'inflation et celle du taux d'intérêt. Cette corrélation peut s'expliquer par le fait que le taux d'inflation d'une année considérée sert de base de renégociation des salaires de l'année suivante ; cela crée un impact au niveau de l'inflation de cette même année¹⁸.
- Au passif : Le règlement des sinistres peut s'étaler sur une période plus ou moins longue selon la branche considérée. Les montants indemnisés étant fonction de l'inflation, cette dernière va jouer sur le niveau de la provision pour sinistre à payer.

L'objet de ce chapitre est de donner un aperçu global des principales dynamiques qui permettent de modéliser l'inflation :

- L'approche de Kaufmann, Gadmer et Klett présentée dans l'article « Introduction to dynamic financial analysis ».
- L'approche de Wilkie (1986).

Les deux modélisations présentées sont différentes dans le sens où la première propose d'exprimer, de manière linéaire, le taux d'inflation en fonction du taux d'intérêt court terme. En revanche, la deuxième suppose que l'incertitude est contenue dans l'inflation, les taux d'intérêts étant ensuite exprimés à partir de l'inflation.

¹⁸ Cf. LAFAILLE A., GOACHET O., THEROND P., TRANCHARD A., [2003], "Dynamic Financial Analysis". Groupe de travail ISFA.

SECTION 1 : APPROCHE DE KAUFMANN - GADMER - KLETT

A - PRESENTATION

Dans l'article « Introduction to dynamic financial analysis »¹⁹, les auteurs mentionnés précédemment choisissent de simuler la valeur du taux d'inflation (i_t) à partir de celle du taux court terme (r_t) :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t$$

où

- α , β et σ sont des paramètres qui peuvent être estimés à partir de données historiques ;
- et ε_t correspond à un bruit blanc de variance σ^2 .

B - METHODE DES MOINDRES CARRES ORDINAIRES

Les paramètres présentés ci-dessus peuvent être estimés selon la méthode des moindres carrés ordinaires. La formule présentée précédemment peut en effet se réécrire de la façon suivante :

$$i = X\lambda + \varepsilon$$

avec $\lambda = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ et X une matrice de dimension $(n,2)$ (n correspond au nombre d'observations. i et ε sont ainsi des vecteurs colonnes de dimension n). La première colonne est l'intercept et la deuxième correspond aux valeurs successives de r_t . Notons également que ε est de matrice de variance covariance égale à $\sigma^2 I_n$.

Le coefficient λ est calculé de façon à minimiser la variance du terme des résidus :

$$Var(\varepsilon) = \frac{1}{n} \times (i - X\lambda)'(i - X\lambda) = \frac{1}{n} \times [i' \cdot i - 2 \cdot \lambda' \cdot X' \cdot i + \lambda' \cdot X' \cdot X \cdot \lambda]$$

On en déduit ensuite

$$\frac{\partial Var(\varepsilon)}{\partial \lambda} = \frac{1}{n} \times [-2 \cdot X' \cdot i + 2 \cdot X' \cdot X \cdot \lambda]$$

Ce dernier résultat, nous permet de trouver l'expression des estimateurs des moindres carrés :

$$\hat{\lambda} = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot i$$

Ces estimateurs ont pour caractéristiques d'être sans biais et de variance minimum. Pour les résidus, on obtient :

$$\hat{\varepsilon} = i - X \cdot \hat{\lambda}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{n}{n-2} \times var(\hat{\varepsilon})$$

¹⁹ Cf. KAUFMANN R., GADMER A., KLETT R., [2001], "Introduction to Dynamic Financial Analysis", Astin Bulletin.

C - TESTS DE VALIDITE

Grâce au test de Durbin-Watson, on peut analyser l'indépendance des résidus. Plus précisément, on teste :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Non corrélation des résidus.} \\ \text{contre} \\ H_1 : \text{Les résidus suivent un processus autorégressif d'ordre 1}^{20}. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, la statistique s'écrit :

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}$$

Dans le cas où l'hypothèse nulle est refusée, on ne peut considérer que les résidus sont identiquement distribués et que l'estimateur des moindres carrés ordinaires n'est pas de variance minimale.

Il faut alors faire appel à des moindres carrés quasi généralisés.

D - METHODE DES MOINDRES CARRES QUASI GENERALISES

Le modèle s'écrit (en gardant les dimensions des matrices utilisées en paragraphe B)

$$i = X\lambda + \varepsilon$$

où ε est cette fois de matrice de variance \ covariance Σ (symétrique, définie positive, inversible). D'autre part, nous avons pris comme hypothèse que les résidus suivaient un processus autorégressif d'ordre 1 ; on peut alors écrire :

$$\text{Var}(\varepsilon) = \rho^2 \cdot \text{Var}(\varepsilon) + v^2$$

ce qui fournit

$$\text{Var}(\varepsilon) = \frac{v^2}{1 - \rho^2}$$

Dans ces conditions, la matrice de variance \ covariance s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma = \frac{v^2}{1 - \rho^2} \times \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} = v^2 \times \Omega$$

²⁰ On peut l'écrire sous la forme $\varepsilon_i = \rho \cdot \varepsilon_{i-1} + u_i$ où u_i suit une loi normale $N(0, v^2)$.

Les valeurs exactes des différents éléments de cette matrice n'étant pas connus, il faut faire appel aux estimations. Et pour retrouver la valeur de $\hat{\lambda}$, on utilise la méthode des moindres carrés quasi généralisés :

La matrice $\hat{\Omega}$ étant symétrique, il en est de même pour la matrice $\hat{\Omega}^{-1}$. Celle-ci peut alors s'écrire sous la forme $\hat{\Omega}^{-1} = D'D$. On multiplie ensuite $i = X\lambda + \varepsilon$ par D pour obtenir $Di = DX\lambda + D\varepsilon$. On vérifie que $E(D\varepsilon) = 0$ et $E((D\varepsilon).(D\varepsilon)') = I$.

Dans ces conditions, on peut se référer à la méthode des moindres carrés généralisés et aboutir, après simplifications, à :

$$\hat{\lambda} = (X' \cdot \hat{\Omega}^{-1} \cdot X)^{-1} (X' \cdot \hat{\Omega}^{-1} \cdot i_t)$$

avec

$$\hat{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

E - TESTS DE VALIDITE

- Pour vérifier le caractère explicatif du modèle, nous pouvons nous intéresser à la statistique du R^2 . Celle-ci fait apparaître la valeur estimée du taux d'inflation ($\hat{i}$) et la valeur moyenne de l'inflation observée ($\bar{i}$) :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t (i_t - \hat{i}_t)^2}{\sum_t (i_t - \bar{i})^2}$$

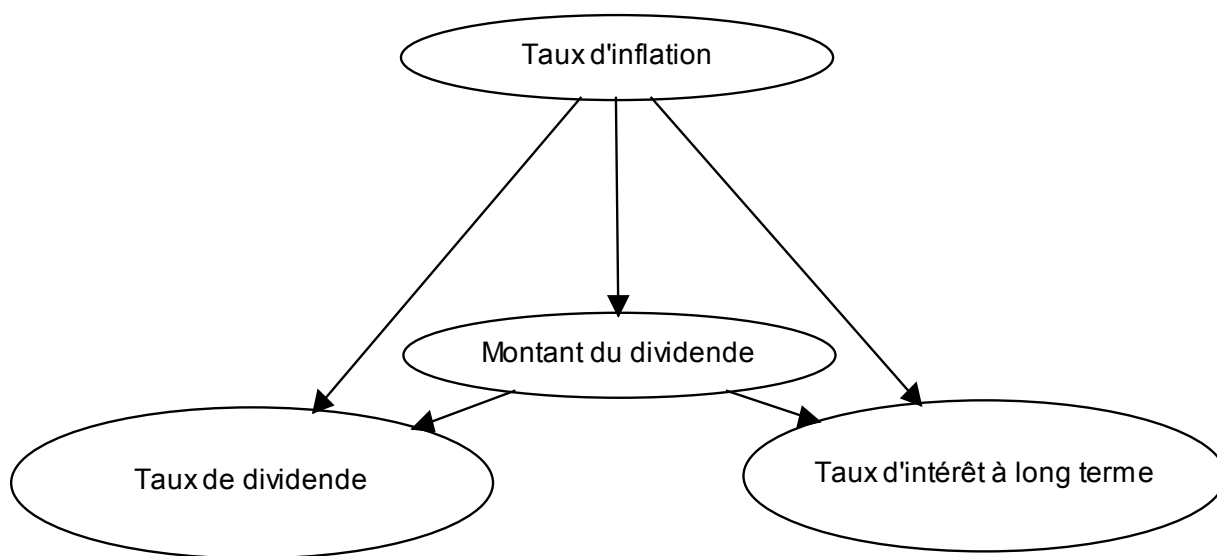
Nous pouvons rappeler que dans le cas où le modèle est parfait, la précédente statistique est égale à 1.

- On peut tester la validité de la régression. Sous l'hypothèse que β soit nul, le rapport $\frac{R^2}{1-R^2} \times (n-2)$ suit une loi de Fisher de paramètres (1,n-2). L'hypothèse de nullité de β est rejetée si le rapport est plus grand qu'un certain seuil.

SECTION 2 : APPROCHE DE WILKIE

A - PRESENTATION

Dans le modèle de Wilkie²¹, le taux d'inflation joue un rôle majeur, dans la mesure où la valeur de nombreux paramètres économiques en découle.



Le modèle de Wilkie est principalement un modèle empirique, établi sur des données économiques du Royaume Uni de 1919 à 1982. L'une des premières modélisations du taux d'inflation fut celle de la « marche aléatoire » (développée par Bachelier en 1900). Même si ce modèle apparaît cohérent dans le cadre de l'étude du cours d'une action, ces limites se font ressentir lorsqu'il s'agit de rendre compte de l'évolution du taux d'inflation.

B - MODELISATION

Wilkie a, quant à lui, opté pour un modèle autorégressif. L'évolution de ce processus est régie par l'équation suivante :

$$i(t) - i_m = a \times [i(t-1) - i_m] + \sigma \times \varepsilon_t$$

avec les notations suivantes :

- ✓ $i(t)$: taux d'augmentation de l'indice des prix,
- ✓ i_m : taux d'inflation long terme,
- ✓ a : coefficient de retour à la moyenne,

²¹ Cf. WILKIE A.D., [1995], "More on a stochastic asset model for actuarial use". British Actuarial Journal.

- ✓ σ : écart type du bruit,
- ✓ ε : variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée réduite.

Cependant Wilkie n'utilise pas ce modèle tel quel ; il préfère travailler sur le logarithme de l'indice des prix. En effet, il observe que seules les variations relatives de l'indice des prix sont importantes et non les variations absolues. En se référant à des données empiriques de plusieurs pays de l'OCDE, il remarque que la variable $\delta(t) = \ln I(t) - \ln I(t-1)$ suit une distribution qui peut être approchée par une loi normale centrée.

Finalement, le modèle proposé par Wilkie peut être présenté de la façon suivante :

$$\ln \left[\frac{I(t)}{I(t-1)} \right] = i_m + a \cdot \left[\ln \left[\frac{I(t-1)}{I(t-2)} \right] - i_m \right] + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

où $I(t)$ correspond à l'indice des prix de l'année t .

Cette même équation peut être réécrite sous une autre forme :

$$\ln[1 + i(t)] = i_m + a \cdot [\ln[1 + i(t)] - i_m] + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

C - EXEMPLE DE RESULTAT NUMERIQUE

En se basant sur les données empiriques du Royaume Uni de 1919 à 1982, Wilkie a obtenu les valeurs numériques suivantes :

- ✓ $i_m = 5,75\%$
- ✓ $a = 0,6\%$
- ✓ $\sigma = 0,05$

Remarquons que, sur le long terme, l'inflation peut connaître des évolutions radicalement différentes. Il est donc important de bien choisir la période sur laquelle on estime les différents paramètres et de faire en sorte qu'elle ne comporte pas de phénomène économique exceptionnel.

On peut alors se demander si le choix de Wilkie de baser son estimation sur une aussi longue période est réellement judicieux.

CHAPITRE 2 : MODELISATION DES TAUX D'INTERET

L'objectif principal d'une structure de taux d'intérêt est de reproduire l'évolution des titres du marché obligataire. Mais elle offre en outre l'opportunité d'évaluer le prix d'une obligation sans risque de défaut, des produits dérivés sur le titre ainsi que les obligations avec risque de défaut.

Les modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt peuvent être classés en trois catégories selon l'approche utilisée :

- ↳ Les modèles d'équilibre partiel reposant sur un raisonnement d'arbitrage. Citons, par exemple, celui de Vasicek (1977) qui comporte une variable d'état et celui de Brennan et Schwartz qui en comporte deux (1979)
- ↳ Les modèles d'équilibre général, tel que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985) basés sur une description globale de l'économie.
- ↳ Les modèles de déformation qui partent de la structure des taux d'intérêt observée et lui font subir des chocs. Le modèle de Ho et Lee (1986) ainsi que sa généralisation proposée par Heath, Jarrow et Morton (1987) sont sans aucun doute les plus connus dans cette catégorie.

Avant de présenter les différents modèles de taux en temps continu, il faut préalablement préciser quelles sont les principales hypothèses retenues pour leur détermination :

- Pas de coûts de transaction ;
- Titres parfaitement divisibles ;
- Les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information ;
- Les marchés sont efficients : ils ne permettent pas de possibilité d'arbitrage ;
- Les taux d'emprunts et de prêts sont identiques.

Indiquons également, qu'outre les différentes modélisations présentées dans ce chapitre, il existe des approches de calcul de taux d'intérêt purement empiriques comme celle de Wilkie (dont nous détaillons le modèle d'inflation dans le chapitre 1 de la présente partie).

SECTION 1 : DYNAMIQUE DES TAUX EN TEMPS CONTINU

A une date donnée t , on fait l'hypothèse que le taux instantané r suit un processus de diffusion caractérisé par l'équation suivante :

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW_t$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} dr : \text{variation du taux } r \text{ au cours de l'instant } dt \\ \mu(r, t) : \text{moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de dérive)} \\ \sigma(r, t) : \text{écart-type des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de diffusion, ou encore volatilité)} \\ dW_t : \text{un processus standard de Gauss-Wiener vérifiant } E(dW_t) = 0 \text{ et } E(dW_t^2) = dt \end{array} \right.$$

Cette formule est la structure de base qui permet de retrouver les principales dynamiques continues de taux (les principales étant référencées dans le tableau suivant).

Libellés	Dynamiques
Vasicek	$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$
Cox, Ingersoll et Ross	$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r} dz$
Dothan	$dr = ardt + \sigma rdz$
Black, Derman et Toy	$dr = \theta(t)rdt + \sigma(t)rdz$
Ho et Lee	$dr = \theta(t)dt + \sigma(t)dz$
Hull et White : Vasicek	$dr = (\theta(t) - a(t)r)dt + \sigma(t)dz$
Hull et White : CIR étendu	$dr = (\theta(t) - a(t)r)dt + rdz$

A - EQUATION DIFFERENTIELLE DU PRIX D'UN ZERO-COUPON²²

L'équation différentielle régissant le prix d'un zéro coupon est obtenue de manière classique en utilisant en premier lieu le lemme d'Itô, puis le théorème de Girsanov.

Soit $P(t, T)$ le prix du Zéro-Coupon qu'on souhaite évaluer. L'application du lemme d'Itô fournit l'équation vérifiée par le prix du Zéro-Coupon :

²² Cf. AUGROS J.C., [1989] "Les options sur taux d'intérêt : dynamique des taux et évaluation". Economica.

$$dP = [P_t + \mu(r, t)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r, t)P_{rr}]dt + \sigma(r, t)P_r dW$$

où P_t , P_r , P_{rr} désignent respectivement la dérivée partielle première par rapport à t , la dérivée partielle première par rapport à r et la dérivée du second ordre par rapport à r .

En appliquant le théorème de Girsanov avec $d\tilde{W} = dW_t + \lambda(r, t)dt$ (λ correspondant au prix du marché du risque), la formule précédente devient :

$$dP = [P_t + \mu(r, t)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r, t)P_{rr} - \lambda(r, t)\sigma(r, t)P_r]dt + \sigma(r, t)P_r d\tilde{W}$$

Or dans un univers risque neutre la relation $dP = rPdt$ doit être vérifiée. Cette remarque nous conduit donc à poser :

$$P_t + [\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t)]P_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r, t)P_{rr} = 0$$

Cette relation est primordiale dans la mesure où elle permet (lorsqu'elle est complétée par une condition aux limites) la détermination de la valeur du taux r modélisé par différentes dynamiques.

B - MODELE DE VASICEK²³

L'une des premières modélisations stochastiques des taux a été développée par Vasicek en 1977. Cette modélisation du taux instantané à court terme utilise le processus autorégressif (dit d'Orstein-Uhlenbeck) défini comme suit :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW_t$$

où les paramètres a , b et σ (tous positifs) représentent respectivement le taux limite (valeur moyenne à long terme), la vitesse de convergence et la volatilité. Il convient aussi d'indiquer que le taux du marché λ est supposé constant et que W_t correspond à un processus de Wiener standard.

Une méthode de résolution assez classique propose d'affecter à $P(t, T)$ la forme suivante :

$$P(t, T) = \exp(A(t, T) + B(t, T)r(t))$$

Cette structure affine permet alors d'obtenir la valeur du Zéro-Coupon :

$$P(t, T) = \exp \left\{ \frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau}) [R(\infty) - r(t)] - \tau R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \right\}$$

avec les notations suivantes :

²³ Cf. VASICEK O., [1977], "An equilibrium characterisation of the term structure". Journal of financial economics.

$$\begin{cases} \tau = T - t, \tau > 0 \\ R(\infty) = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \\ \lambda \text{ indépendant de } r \end{cases}$$

La relation $r(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t,T)$ conduit finalement à la valeur de r :

$$r(t,\tau) = R(\infty) + [r(t) - R(\infty)] \frac{1}{a\tau} (1 - e^{-a\tau}) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - e^{-a\tau})^2$$

Ce modèle permet d'obtenir la plupart des formes de courbe des taux :

- Structure ascendante si $r(t) \leq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$
- Structure inversée si $r(t) \geq R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2}$
- Structure bosselée si $R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2} < r(t) < R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$

Valeurs remarquables :

- $r(T,0) = r(T) + \frac{\sigma^2}{4a^2}$
- $r(t,\infty) = R(\infty)$

Ce modèle dit de déport normal présente néanmoins des inconvénients :

- Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants.
- Il n'est pas possible d'obtenir une courbe de taux en forme de cuvette.
- Les valeurs négatives du taux d'intérêt ne sont pas censurées.

Pour éviter ce désagrément, il faut faire appel à une modélisation proposant une barrière réfléchissante à zéro ; c'est l'objet du processus de Cox, Ingersoll et Ross (CIR).

C - MODELE DE COX, INGERSOLL ET ROSS²⁴

Ce modèle, établi en 1985, introduit un processus en racine carrée qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives, tout en conservant la simplicité du processus d'Ornstein-

²⁴ COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., [1985], "A theory of the term structure of interest rate". Econometrica.

Uhlenbeck. En reprenant les notations de la partie précédente, le processus de taux s'écrit sous la forme :

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$$

La valeur du Zéro-Coupon est déterminée par la formule suivante :

$$P(r, t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t))$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} t < T \\ A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+a+\lambda)\frac{T-t}{2}}}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ \gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2} \\ \lambda(r, t) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r} \end{array} \right.$$

La relation $R(r, t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(r, t, T)$ permet d'aboutir à la structure par terme des taux :

$$R(r, t, T) = \frac{B(t, T)r(t) - \ln A(t, T)}{T - t}$$

Comme pour le modèle de Vasicek, il est possible d'obtenir plusieurs formes pour la courbe des taux

- Structure ascendante si $r(t) \leq R(r, t, \infty)$
- Structure inversée si $r(t) \geq \frac{ab}{a+\lambda}$
- Structure bosselée si $R(r, t, \infty) \leq r(t) \leq \frac{ab}{a+\lambda}$

Remarques diverses :

- La variance du processus croît avec r .
- Le taux ne peut prendre une valeur nulle que si la condition $\sigma^2 > 2ab$ est satisfaite.
- Cette approche est très utilisée de part sa simplicité.

D - LIMITES DE CES DEUX MODELES

Ces modèles présentent l'inconvénient de stabiliser la queue de la structure des taux ; le taux à long terme est réduit à une constante indépendante de la forme de la structure. Or, d'un point de vue purement économique, il n'est pas toujours approprié d'expliquer le marché des titres obligataires par une seule variable explicative, le taux sans risque instantané. Ces processus mono-factoriels, ne dépendant que d'une variable d'état, supposent une parfaite corrélation entre les taux $r(t, T)$, non satisfaite dans la pratique. Toutes ces limites ont poussé certains théoriciens à construire des modèles prenant en considération plusieurs facteurs (notamment par Schwartz, Brennan et Longstaff).

E - MODELE DE HEATH-JARROW-MORTON²⁵

La méthodologie HJM permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage. L'approche HJM prend en considération les différentes limites énoncées pour les structures de taux énoncées précédemment. Il faut bien comprendre que HJM ne propose pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail.

Après avoir présenté la structure générale de la méthodologie HJM, nous nous intéresserons à deux modèles qui répondent aux caractéristiques de l'approche HJM : les modèles de Ho et Lee et de Vasicek généralisé.

a) Notations :

Il est indispensable d'introduire certaines notations avant de se concentrer sur la méthodologie HJM :

↪ $P(t, T)$: prix d'une obligation sans coupon définie par la valeur en t de un euro qui sera payé en T .

↪ $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$: le taux de rendement continu.

↪ $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$: le taux sans risque instantané.

↪ $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$: le taux forward instantané. $f(t, T)$ représente le taux d'intérêt sans risque pour un prêt contracté au temps t débutant à T pour une période infinitésimale.

↪ Ces diverses définition conduisent à poser deux relations assez élémentaires : $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$ et $r(t) = f(t, t)$.

²⁵ Cf. HEATH D., JARROW R., MORTON K., [1990], "Bond pricing and the term structure of interest rate: a discrete time approximation". Journal of financial and quantitative analysis.

b) La méthodologie

On suppose que la dynamique du taux forward instantané est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

dW_t étant un processus de Wiener standard sous la probabilité historique $\mathbf{P}$.

La forme intégrée donne $f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T)ds + \int_0^t \sigma(s, T)dW_s$. Il faut également préciser l'hypothèse initiale de la méthodologie HJM : $f(0, T) = f^*(0, T)$ où $f^*(0, T)$ représente le taux forward instantané observable sur le marché.

D'autre part, l'hypothèse d'absence d'arbitrage impose une condition sur $\mu(.,.)$ et sur $\sigma(.,.)$. Plus précisément, si $\lambda(t, T)$ est le processus vérifiant la relation $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \left[\int_t^T \sigma(t, s)ds - \lambda(t, T) \right]$, la condition d'absence d'arbitrage s'exprime par l'indépendance de $\lambda(t, T)$ vis à vis de T ($\lambda(t, T) = \lambda(t)$). Mais la complexité d'estimation de la prime de risque $\lambda(t)$ à partir du marché des titres obligataires pose problème. Pour contourner le problème, HJM propose de faire appel à la mesure risque neutre $\mathbf{Q}$. Sous cette mesure, l'évaluation du prix d'une obligation ne fait pas intervenir $\lambda(t)$.

Dorénavant, on suppose que la dynamique du taux forward instantané dans l'univers risque neutre est donnée par :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t$$

L'hypothèse d'absence d'arbitrage impose également une relation entre $\mu(.,.)$ et $\sigma(.,.)$, néanmoins celle ci ne fait plus apparaître la prime de risque : $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds$. Ainsi, pour déterminer la valeur d'une obligation sans risque de défaut, il suffit de suivre les différentes étapes détaillées ci-après :

- ❶ On observe sur le marché la courbe des taux forward instantanés $f^*(0, T)$.
- ❷ On choisit un processus de volatilité $\sigma(t, T)$.
- ❸ Via la relation donnée quelques lignes plus haut, on en déduit la valeur de $\mu(t, T)$
- ❹ On détermine le taux forward instantané dans l'univers risque neutre :

$$\begin{cases} f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T)ds + \int_0^t \sigma(s, T)d\tilde{W}_s \\ \text{avec } f(0, T) = f^*(0, T) \end{cases}$$

- ❺ On retrouve le taux court terme en utilisant la relation suivante

$$\begin{cases} r(t) = f(t, t) \\ \text{soit } r(t) = f(0, t) + \int_0^t \mu(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s \end{cases}$$

- ⑥ Finalement, l'expression du prix d'une obligation sans coupon et sans risque de défaut s'écrit comme suit :

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \left(\int_t^T f(0, u) du + \int_0^t \int_t^T \mu(s, u) du ds + \int_0^t \left(\int_0^T \sigma(s, u) du \right) d\tilde{W}(s) \right) \right\}$$

Le grand avantage de la méthodologie HJM est d'introduire comme paramètre de départ la courbe des taux forward instantanés au temps 0. Les parties suivantes sont des illustrations de cette méthodologie ; nous allons choisir un modèle pour $\sigma(t, T)$ (Ho et Lee, Vasicek généralisé), puis appliquer la méthodologie décrite antérieurement.

c) Le modèle de Ho et Lee

Ce modèle est l'application la plus connue de la méthodologie de HJM. L'hypothèse de base de ce modèle consiste à considérer le coefficient de diffusion comme constant :

$$\sigma(t, T) = \sigma.$$

La relation $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$ nous permet d'obtenir le coefficient de dérive :

$$\mu(t, T) = \sigma^2 (T - t)$$

L'équation différentielle stochastique régissant la valeur du taux forward instantané s'écrit alors :

$$df(t, T) = \sigma^2 (T - t) dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

Après intégration, cette relation devient :

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) + \sigma \tilde{W}_t$$

La valeur du taux à court terme s'en déduit aisément :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma \tilde{W}_t$$

Et la relation $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$ permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \left(f(0, s) + \sigma^2 t \left(s - \frac{t}{2} \right) + \sigma \tilde{W}(t) \right) ds \right) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(- \frac{\sigma^2}{2} T t (T - t) - \sigma (T - t) \tilde{W}(t) \right)$$

Remarques :

- $f(t, T)$ possède une distribution normale d'espérance $f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right)$ et de variance $\sigma^2 t$.
- r possède une distribution normale d'espérance $f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$ et de variance $\sigma^2 t$.

- $P(t,T)$ possède une distribution lognormale.
- $f(0,T)$ et $P(0,T)$ sont directement observés sur le marché.

d) Modèle de Vasicek généralisé

En suivant ce modèle, le processus de volatilité vérifie la relation suivante, où k est une constante positive :

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-k(T-t)}$$

Cette forme est facilement interprétable ; plus on se rapproche de l'échéance, plus la volatilité diminue. Comme pour le modèle de Ho et Lee, le processus de dérive se déduit de l'expression de $\sigma(t,T)$:

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s) ds = \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)})$$

On retrouve ensuite l'équation stochastique forward instantané :

$$df(t,T) = \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)}) dt + \sigma e^{-k(T-t)} d\tilde{W}_t$$

L'intégration de cette équation donne :

$$f(t,T) = f(0,T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(T-s)} d\tilde{W}_s$$

On déduit ensuite la valeur du taux court terme à partir de la valeur du taux forward :

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s$$

Comme dans la section précédente, relation $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s) ds}$ permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp \left[-\frac{K^2(t,T)}{2} L(t) + K(t,T)(f(0,t) - r(t)) \right]$$

avec les notations suivantes :

$$K(t,T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \quad L(t) = \int_0^t \sigma^2 e^{-2k(T-s)} ds$$

Remarques :

- $f(t,T)$ possède une distribution normale d'espérance $f(0,T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT})^2$ et de variance $\sigma^2 \int_0^t e^{-2k(T-s)} ds$.

- $r(t)$ possède une distribution normale d'espérance $f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - e^{-kt})^2$ et de variance $\sigma^2 \int_0^t e^{-2k(t-s)} ds$.
- $P(t,T)$ possède une distribution lognormale.
- $f(0,T)$ et $P(0,T)$ sont directement observés sur le marché.

SECTION 2 : DYNAMIQUE DES TAUX EN TEMPS DISCRET

Les taux continus étant définis par des équations différentielles, le nombre d'états du monde est maîtrisé. En effet, pour obtenir n états du monde, il faut établir n trajectoires de taux. En ce qui concerne les taux discrets, les états du monde sont représentés sur des treillis par des nœuds.

A - LE MODELE DE HO ET LEE²⁶

a) Présentation

Les travaux de Ho et Lee (1986) marquent une avancée certaine dans le domaine des modèles de valorisation des options de taux. Les hypothèses de leur modèle sont plus cohérentes avec le comportement du marché obligataire que celles des modèles précédents. Il prend en compte les phénomènes discrets et sa mise en œuvre est simple.

$P_i(t, T)$ représente le prix d'une obligation Zéro-Coupon de maturité $T-t$ (où l'indice i représente le nombre de mouvements à la hausse). On construit un « treillis binomial » de l'évolution des $P_i(t, T)$, qui à chaque stade du treillis peuvent suivre une évolution à la hausse ou à la baisse.

L'organigramme suivant illustre cette logique pour un treillis comportant trois mouvements successifs.

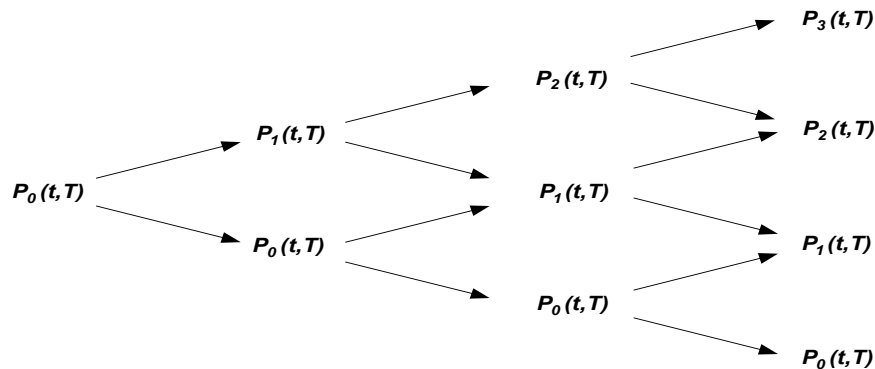


Illustration de l'évolution de la valeur du Zéro- Coupon dans le cadre de Ho et Lee discrétisé

L'évolution dans le treillis se fait à partir de fonction de perturbations définies ci-après :

- $P_{i+1}(t, T) = \frac{P_i(t-1, T)}{P_i(t-1, t)} h(t, T-t)$ pour une évolution à la hausse.
- $P_{i+1}(t, T) = \frac{P_i(t-1, T)}{P_i(t-1, t)} h^*(t, T-t)$ pour une évolution à la baisse.

avec $h^*(0) = 1$ et $h(0) = 1$.

²⁶ Cf. HO et LEE, [1986], "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims". Journal of finance.

Cf. BONNASSIEUX M., BRUNEL V., "Modèle de Ho et Lee généralisé".

b) Indépendance du chemin suivi

Il est également indispensable de préciser la contrainte classique des modèles de pricing financiers : la courbe des taux résultant d'un mouvement haut puis d'un mouvement bas est la même que celle résultant d'un mouvement bas puis haut (Up Down = Down Up). Il s'agit en fait de l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi :

$$h(t, T - t + 1)h^*(T - t)h^*(1) = h^*(T - t + 1)h(T - t)h(1)$$

c) Absence d'opportunité d'arbitrage

La démarche consiste à créer un portefeuille comportant un Zéro-Coupon d'échéance T et α Zéro-Coupon²⁷ d'échéance T'. La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage se matérialise alors par la relation suivante :

$$\frac{1 - h^*(T - t)}{h(T - t) - h^*(T - t)} = \frac{1 - h^*(T' - t)}{h(T' - t) - h^*(T' - t)}$$

Cette dernière valeur, notée π , correspond à la probabilité risque neutre. La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage se réécrit

$$\pi h(T - t) + (1 - \pi)h^*(T - t) = 1$$

d) Détermination des fonctions de perturbation

Ces dernières s'obtiennent en combinant les deux conditions décrites précédemment.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad h(T - t) &= \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{T-t}} \\ \blacksquare \quad h^*(T - t) &= \frac{\delta^{T-t}}{\pi + (1 - \pi)\delta^{T-t}} \end{aligned}$$

avec $\delta = \frac{h^*(1)}{h(1)}$.

e) Prix du Zéro - Coupon

Les expressions des fonctions perturbatrices obtenues en début de paragraphe permettent de retrouver de manière récursive la valeur de l'obligation Zéro-Coupon à l'état i et à la date t.

$$P_i(t, T) = \frac{P_0(0, t + T) \times h(T + t - 1) \times h(T + t - 2) \times \dots \times h(T)}{P_0(0, t) \times h(t - 1) \times h(t - 2) \times \dots \times h(1)} \delta^{T(t-i)}$$

²⁷ α étant choisi de façon à ce que la valeur du portefeuille soit la même dans un état haut ou dans un état bas.

f) Critiques

La construction de ce modèle repose sur une hypothèse forte, qui n'est pas forcément respectée dans la pratique : l'indépendance du chemin suivi. D'autre part, le modèle n'interdit pas la négativité des taux (sauf contrainte spécifiée).

B - LE MODELE DE BLACK, DERMAN ET TOY²⁸

a) Présentation

Black, Derman et Toy supposent que la structure du taux court peut être modélisée par la dynamique suivante :

$$\Delta \ln r(t) = \mu(r, t)\Delta t + \sigma(t).\Delta w$$

Les différents paramètres retenus pour cette modélisation sont listés ci-après :

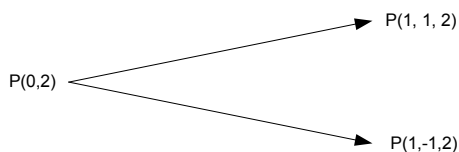
- μ est une fonction de r et de t .
- σ correspond à la volatilité conditionnelle du logarithme du taux court.

La dynamique des taux des Zéro-Coupon permet de définir la structure de volatilité. Si $y(t, s)$ représente le taux en t pour l'échéance s , y suit la dynamique suivante :

$$\Delta \ln y = f(r, t) + \sigma_y(t, s).\Delta w$$

b) Arborescence

L'évolution du taux s'effectue selon un branchage binomial et la principale hypothèse retenue est la suivante : la probabilité de hausse est égale à la probabilité de baisse (soit $\frac{1}{2}$). Pour déterminer $P(0, 2)$, nous devons considérer l'évolution suivante :



Elle fournit

$$P(0, 2) = \frac{P(1, 1, 2) + P(1, -1, 2)}{2} \times \frac{1}{1 + r(0).\Delta t}$$

où $P(1, 1, 2)$ et $P(1, -1, 2)$ prennent les valeurs suivantes :

$$P(1, 1, 2) = \frac{1}{1 + r(1, 1).\Delta t} \qquad P(1, -1, 2) = \frac{1}{1 + r(1, -1).\Delta t}$$

²⁸ Cf. BLACK F., DERMAN E., TOY W., [1990], "A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options". Journal of political economy.

On obtient également :

$$\sigma_y(0,2) = \frac{1}{2} \ln \frac{r(1,1)}{r(1,-1)}$$

Les valeurs de $P(0,2)$ et de $\sigma_y(0,2)$ permettent de retrouver celles de $r(1,1)$ et $r(1,-1)$. En introduisant la condition de constance de la volatilité des taux, on retrouve les valeurs suivantes (en utilisant le même procédé que celui décrit précédemment).

Remarque : La condition de constance de la volatilité des taux se matérialise par la relation suivante :

$$r^2(i,j) = r(i,j+2) \times r(i,j-2)$$

C - LE MODELE DE HULL ET WHITE ²⁹

a) Présentation

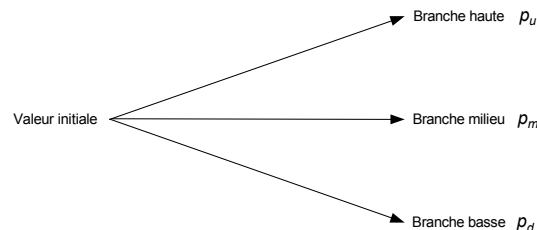
Hull et White supposent que la structure du taux court peut être modélisée par la dynamique suivante :

$$\Delta r = (\theta(t) - ar)\Delta t + \sigma \cdot \Delta w$$

Les différents paramètres retenus pour cette modélisation sont listés ci-après :

- Δr correspond à l'accroissement du taux entre t et $t + \Delta t$.
- θ est une fonction positive de t .
- a (positif) représente la vitesse de retour à la valeur moyenne.
- σ (positif) est la volatilité.
- w est la fonction aléatoire associée au mouvement brownien.

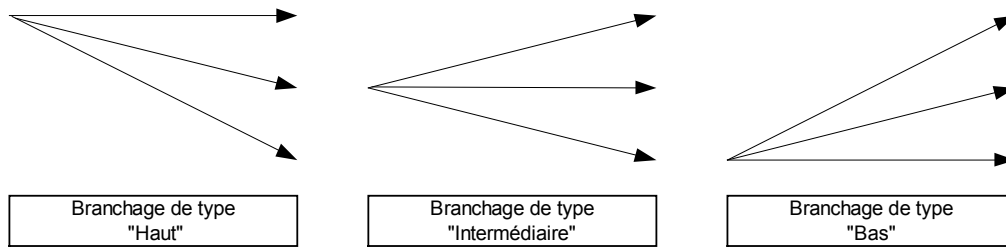
L'évolution du taux ne s'effectue pas selon un branchage binomial (comme pour le modèle de Ho et Lee), mais selon un schéma trinomial. A chacune des trois branches du treillis de taux est associée une probabilité de changements d'état, comme indiqué ci-dessous.



- p_u : probabilité de passer par la branche haute
- p_m : probabilité de passer par la branche du milieu
- p_d : probabilité de passer par la branche basse

²⁹ Cf. HULL J., WHITE A., [1996] "Using Hull-White interest-rate trees". Journal of derivatives.

D'autre part, il faut préciser que plusieurs types de branchages peuvent apparaître dans le treillis de taux :



b) Arborescence :

L'algorithme retenu par Hull et White pour déterminer les différentes valeurs définitives se décompose en deux étapes principales :

- 1 - construction d'un arbre compatible avec la structure des taux
- 2 - détermination de la fonction θ via la structure initiale

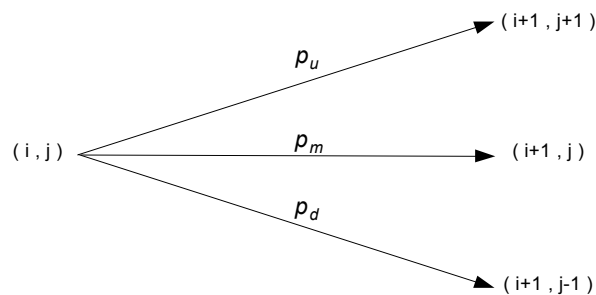
La détermination des résultats repose encore une fois l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi. Le pas de temps est choisi de façon à ce que :

$$\Delta r = \sigma \sqrt{3 \cdot \Delta t}$$

Etape 1

En premier lieu, on considère $\theta(t) = 0$ et $r(0) = 0$. Nous pouvons donc illustrer l'algorithme sur un branchage de type « intermédiaire ».

♦ Probabilité de changements d'état



Si on s'intéresse à la dynamique, on obtient :

$$\begin{cases} E[r(t + dt) / r(t) = j \cdot \Delta r] = -a \cdot r(t) \cdot \Delta t = -aj \cdot \Delta r \cdot \Delta t \\ Var[r(t + dt) / r(t) = j \cdot \Delta r] = \sigma^2 \cdot \Delta t \end{cases}$$

Si on s'intéresse au branchage, on obtient :

$$\begin{cases} E[r(t + dt) / r(t) = j \cdot \Delta r] = (p_u - p_d) \cdot \Delta r \\ \text{Var}[r(t + dt) / r(t) = j \cdot \Delta r] = (p_u + p_d) \cdot (\Delta r)^2 - a^2 \cdot j^2 (\Delta t)^2 (\Delta r)^2 \end{cases}$$

En posant $A = -a \cdot \Delta t$ et en considérant les différentes conditions énoncées précédemment, il est possible de fournir un système assez simple :

$$\begin{cases} p_u - p_d = j \cdot A \\ p_u + p_d = \frac{1}{3} + j^2 \cdot A^2 \end{cases}$$

Après résolution nous obtenons les différentes probabilités pour le branchage de type intermédiaire :

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2 A^2 + jA}{2} \quad p_m = \frac{2}{3} - j^2 A^2 \quad p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2 A^2 - jA}{2}$$

Un raisonnement analogue permet d'obtenir, les probabilités de passage des autres types de branchage :

Branchage « Haut »

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{j^2 A^2 + 3jA}{2} \quad p_m = -\frac{1}{3} - j^2 A^2 - 2jA \quad p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2 A^2 + jA}{2}$$

Branchage « Bas »

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2 A^2 - jA}{2} \quad p_m = -\frac{1}{3} - j^2 A^2 + 2jA \quad p_d = \frac{7}{6} + \frac{j^2 A^2 - 3jA}{2}$$

♦ Condition de basculement

Si on se situe sur un branchage de type « Intermédiaire », on peut basculer sur un branchage de type « Haut » si la valeur de j est « grande ». De la même manière, on peut basculer sur un branchage de type « Bas » si la valeur de j est négative et « grande » en valeur absolue. Ainsi, on note $j_{\max}$ la valeur de j à partir de laquelle on passe d'un branchage de type « Intermédiaire » à un branchage de type « Haut » et $j_{\min}$ la valeur limite de j qui permet de passer d'un branchage de type « Intermédiaire » à un branchage de type « Bas ».

Hull et White fournissent, pour ces deux valeurs, les conditions suivantes :

$$-\frac{0.1835}{A} < j_{\max} < -\frac{0.8165}{A} \quad \text{et} \quad \frac{0.8165}{A} < j_{\min} < \frac{0.1835}{A}$$

Ils proposent, en outre, de faire correspondre à j_{max} le plus petit majorant entier de $\frac{0.184}{A}$ et de prendre $j_{min} = -j_{max}$.

Étape 2

La dérive des taux est calculée à partir de la structure initiale des taux. L'arbre de taux construit à l'issue de l'étape 1 est modifié de la façon suivante : on ajoute aux taux de la date i la valeur α_i ($\alpha_0 = r(0)$).

♦ Introduction d'un actif Arrow – Debreu

Rappelons qu'Arrow et Debreu sont à l'origine d'un modèle de représentation mathématique du marché concurrentiel. C'est principalement à eux que l'on doit le développement de la théorie d'équilibre général des prix qui maximise l'espérance de chacun.

L'actif d'Arrow-Debreu, noté $Q(i, j)$, vaut 1 au nœud (i, j) et 0 dans les autres cas. Dès lors, on obtient :

$$P(0, \Delta t) = (p_u + p_d + p_m) \cdot e^{-r(0) \cdot \Delta t} = e^{-r(0) \cdot \Delta t} = Q(0, 0) \cdot e^{-r(0) \cdot \Delta t}$$

et

$$\begin{cases} Q(1, 1) = p_u \cdot e^{-r(0) \cdot \Delta t} \\ Q(1, 0) = p_m \cdot e^{-r(0) \cdot \Delta t} \\ Q(1, -1) = p_d \cdot e^{-r(0) \cdot \Delta t} \end{cases}$$

On introduit les α_i au pas de temps suivant :

$$P(0, 2\Delta t) = \left[p_u \cdot e^{-(\alpha_1 + \Delta r) \cdot \Delta t} + p_d \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \Delta t} + p_m \cdot e^{-(\alpha_1 - \Delta r) \cdot \Delta t} \right] e^{-r(0) \cdot \Delta t}$$

Soit

$$P(0, 2\Delta t) = Q(1, 1) \cdot e^{-(\alpha_1 + \Delta r) \cdot \Delta t} + Q(1, 0) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \Delta t} + Q(1, -1) \cdot e^{-(\alpha_1 - \Delta r) \cdot \Delta t}$$

De ces relations, on peut déduire la valeur de α_1 . Cette dernière valeur permet d'obtenir $Q(2, j)$ (avec j dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$) et de calculer $P(0, 3\Delta t)$. On peut alors en déduire $\alpha_2 \dots$ ainsi de suite.

La formule générale permettant d'obtenir les valeurs successives des α_i est la suivante :

$$P(0, (i+1)\Delta t) = \sum_{j=-n(i)}^{n(i)} Q(i, j) \cdot e^{-(\alpha_i + j \cdot \Delta r) \cdot \Delta t}$$

soit

$$\alpha_i = \frac{\ln \left[\sum_{j=-n(i)}^{n(i)} Q(i, j) \cdot e^{-j \cdot \Delta r \cdot \Delta t} \right] - \ln[P(0, (i+1) \Delta t)]}{\Delta t}$$

Les prix des actifs Arrow - Debreu sont donnés ci-après :

$$Q(i, j) = \sum_k Q(i-1, k) \cdot p(k, j) \cdot e^{-(\alpha_{i-1} + k \cdot \Delta r) \cdot \Delta t}$$

où les $p(k, j)$ désignent la probabilité de joindre le noeud (i, j) en partant du noeud (i-1, k).

CHAPITRE 3 : MODELISATION DES ACTIONS

A - MODELISATION DANS L'UNIVERS HISTORIQUE

En ce qui concerne les actions, la modélisation la plus couramment utilisée est celle de Black et Scholes³⁰. On considère que le cours des actions suit le mouvement brownien géométrique suivant (où μ et σ sont des constantes) :

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz_t$$

La résolution de cette équation est assez classique. Il convient de poser $y = \ln(S)$, et on obtient ensuite par dérivation :

$$\begin{cases} y_t = 0 \\ y_s = \frac{1}{S} \\ y_{ss} = -\frac{1}{S^2} \end{cases}$$

L'application du lemme d'Itô fournit :

$$dy = \left(\mu S \times \frac{1}{S} - \frac{1}{2} [\sigma S]^2 \times \frac{1}{S^2} \right) \cdot dt + \frac{1}{S} \times \sigma S \cdot dz_t$$

ce qui donne après simplification :

$$dy = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t$$

L'intégration de cette équation prend la forme suivante :

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot \int_0^t dz(s)$$

Soit

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot z_t \right\}$$

La résolution de l'EDS présentée précédemment est devenue commune pour ceux qui s'intéressent de près à la modélisation et à l'évaluation des prix d'actions ou d'options. Il arrive néanmoins que la résolution d'EDS soit plus délicate ou fastidieuse.

³⁰ Pour plus de détails, on pourra consulter BLACK F., SCHOLLES M., [1973], "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of political economy.

Les paragraphes suivants introduisent des concepts qui permettent de remédier à cette difficulté. Le calcul de la valeur de certaines variables dans un univers corrigé du risque (univers risque neutre) ou dans un univers forward neutre permet de ramener la valorisation d'un actif contingent (produit dérivé), dont le sous jacent est régi par une EDS, à un calcul d'espérance. Ce dernier peut être plus ou moins compliqué. Dans tous les cas, il est possible d'aboutir à un résultat en faisant appel à des méthodes de simulations.

B - MODELISATION DANS L'UNIVERS RISQUE NEUTRE

a - Présentation

En supposant que les marchés soient complets, la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité risque neutre, notée Q, telle que les processus de gains (X ; dans ce cas précis, cette variable aléatoire correspond au sous jacent S) actualisés ont pour caractéristique d'être des martingales sous Q :

$$\frac{X(t)}{\beta(t)} = E_Q \left(\frac{X(T)}{\beta(T)} \middle| F_t \right) \text{ avec } \beta(t) = \exp \left(\int_0^t r(s).ds \right)$$

Précisons que cette nouvelle probabilité, équivalente à P, n'est pas unique si l'hypothèse des marchés complets n'est pas respectée.

b - Application

Soit r le taux d'actualisation supposé constant et $\bar{S}(t) = S(t).e^{-rt}$ le cours actualisé de l'action.

L'application du lemme d'Itô permet de retrouver la dynamique de $\bar{S}$.

$$\frac{d\bar{S}}{\bar{S}} = (\mu - r).dt + \sigma.dz$$

On applique ensuite le théorème de Girsanov qui nous permet de « passer » à l'univers risque neutre :

$$d\hat{z} = dz - \frac{r - \mu}{\sigma}.dt$$

$$d\bar{S} = \bar{S}.(\mu - r).dt + \bar{S}.\sigma.(d\hat{z} + \frac{r - \mu}{\sigma}.dt) = \bar{S}.\sigma.d\hat{z}$$

En effet, on vérifie bien, que dans l'univers risque neutre, les pris actualisés sont des martingales. La

dernière étape consiste à intégrer $\frac{d\bar{S}}{\bar{S}} = \sigma.d\hat{z}$. L'application du lemme d'Itô fournit :

$$\begin{aligned} \bar{S}(t) = \bar{S}(0). \exp \left\{ \int_0^t \sigma.d\hat{z} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2.ds \right\} & \Rightarrow S(t).e^{-rt} = S(0). \exp \left\{ \int_0^t \sigma.d\hat{z} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2.ds \right\} \\ & \Rightarrow S(t) = S(0). \exp \left\{ \left(r(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma.\hat{z}(t) \right\} \end{aligned}$$

C - MODELISATION DANS L'UNIVERS FORWARD NEUTRE

a - Présentation

En supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage, il est possible d'établir une nouvelle mesure de probabilité : la probabilité forward neutre. Dans cet univers, le prix forward de n'importe quel actif financier est une martingale de même volatilité que dans l'univers historique.

Soulignons également l'importance du théorème de changement de numéraire³¹ qui constitue une généralisation du concept précédent et permet d'effectuer des calculs d'espérance sous une probabilité « propre » au numéraire choisi.

b - Application³²

Les hypothèses retenues pour cet exemple sont les suivantes :

- Le prix d'un Zéro-Coupon d'échéance T suit la diffusion suivante :

$$\frac{dP}{P} = \mu(t, T).dt - \sigma(t, T).dz_1$$

- En ce qui concerne l'actif S, nous pouvons écrire :

$$\frac{dS}{S} = \mu.dt + \sigma.dz_2$$

- $dz_1.dz_2 = \rho.dt$

Après décorrélation (procédé détaillé au niveau du chapitre 5 de la présente partie), il advient :

- $\frac{dP}{P} = r.dt - \sigma(t, T).d\hat{z}_1$

- $\frac{dS}{S} = r.dt + \sigma.\rho.d\hat{z}_1 + \sigma\sqrt{1 - \rho^2}.d\hat{z}_2$

Soit Q_S , la probabilité définit comme suit : $\frac{dQ_S}{dQ} = \frac{S(T)/S(0)}{\beta(T)/\beta(0)}$. Le théorème de Girsanov permet de

constituer deux Q_S mouvements browniens $\hat{z}_1^S$ et $\hat{z}_2^S$ définit par :

$$\hat{z}_1^S = \hat{z}_1 - \rho.t \quad \text{et} \quad \hat{z}_2^S = \hat{z}_2 - \rho.\sqrt{1 - \rho^2}t$$

³¹ Cf. GERMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C., [1995], "Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing of options". Journal of Applied Probability.

³² Cf. QUITTARD-PINON F., [2002], "Mathématiques financières". Ems.

Intéressons nous ensuite à l'expression de $\frac{d\left(\frac{P}{S}\right)}{\frac{P}{S}} = S.d\left(\frac{1}{S}\right) + \frac{dP}{P} + S.d\left(\frac{1}{S}\right) \times \frac{dP}{P}$.

Pour le calcul de chacun des éléments de l'égalité ci-dessus, nous nous contenterons de ne calculer que les termes en « dz ». $\frac{P}{S}$ étant une martingale sous Q_S , tous les termes en « dt » de la dynamique s'annulent. La valeur de $d\left(\frac{1}{S}\right)$ est calculée en utilisant le lemme d'Itô :

$$d\left(\frac{1}{S}\right) = [\dots] \times dt + \sigma.S.\left(\frac{1}{S^2}\right) \cdot \left[\rho.d\hat{z}_1 + \sqrt{1-\rho^2}.d\hat{z}_2 \right]$$

Après divers calculs et simplifications, on trouve finalement :

$$\frac{d\left(\frac{P}{S}\right)}{\frac{P}{S}} = - \left[\sigma.\rho + \sigma(0,T) \right] \times d\hat{z}_1^S - \sigma\sqrt{1-\rho^2} \times d\hat{z}_2^S$$

On applique le théorème de changement de temps³³ pour se ramener à un unique mouvement brownien, on en déduit :

$$\frac{P(t,T)}{S(t)} = \frac{P(0,T)}{S(0)} \times \exp \left\{ B(\tau(t)) - \frac{1}{2} \tau(t) \right\}$$

avec

- $\tau(t) = \int_0^t \left[\sigma^2 + \sigma^2(s,T) + 2.\sigma.\rho.\sigma(s,T) \right] \times ds$
- $B()$: mouvement brownien standard.

Finalement,

$$S(t) = S(0) \times \frac{P(t,T)}{P(0,T)} \times \exp \left\{ B(\tau(t)) - \frac{1}{2} \tau(t) \right\}$$

Remarque : il est bien évidemment possible d'effectuer les calculs dans « l'autre sens » ; il suffit de noter que $\frac{P}{S}$ est une Q_T martingale et de refaire les calculs de la même manière que précédemment.

Cette dernière formule est notamment utilisée dans la démonstration de la formule de Black, Scholes et Merton, qui contrairement à la formule de Black et Scholes, donne la valeur en AOA³⁴ d'une option européenne avec une structure de taux d'intérêt stochastique.

³³ Cf. Annexe 1.

³⁴ AOA : Absence d'opportunité d'arbitrage.

CHAPITRE 4 : MODELISATION DE L'IMMOBILIER

Après les actions et les obligations, l'immobilier constitue une catégorie d'investissement privilégiée des compagnies d'assurances (d'autant plus que le marché immobilier français est actuellement en plein essor). Deux types de modélisations peuvent être retenues pour ce type de placement.

- Une modélisation identique à celle des actions : Black et Scholes
- Une modélisation³⁵ qui retient la dynamique suivante :

$$P_I(t) = (1 + \lambda) \times P_I(t-1) + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

avec les notations suivantes :

- ✓ $P_I(t)$: prix de l'actif immobilier considéré à la date t.
- ✓ λ : taux de croissance du marché immobilier.
- ✓ σ : volatilité du marché immobilier.
- ✓ ε_t : un bruit blanc gaussien.

Les paramètres qui viennent d'être présentés doivent être estimés au cas par cas : la structure du portefeuille immobilier peut varier sensiblement d'une compagnie à l'autre et d'une région à l'autre. Il n'est donc pas raisonnable d'effectuer des simulations en utilisant des paramètres estimés à partir des données de l'ensemble du marché français. Idéalement, les paramètres doivent être calculés à partir de l'historique immobilier de la société concernée.

³⁵ Cf. LAFAILLE A., GOACHET O., THEROND P., TRANCHARD A., [2003], "Dynamic Financial Analysis". Groupe de travail ISFA.

CHAPITRE 5 : CORRELATION ENTRE LES ACTIFS

La corrélation entre les actifs est présentée ici dans un cadre « linéaire ». Signalons, cependant, qu'un autre traitement faisant appel aux copulas aurait pu être envisagé pour la prise en compte des dépendances.

A - PRESENTATION

Les catégories d'actifs en portefeuille d'une société d'assurance sont en général corrélées. Cette corrélation peut être matérialisée par le biais de la matrice ci-dessous :

	$dz_t^{OBLIGATION}$	dz_t^{ACTION}	$dz_t^{IMMOBILIER}$	$dz_t^{MONETAIRE}$
$dz_t^{OBLIGATION}$	dt	$\rho_{12}.dt$	$\rho_{13}.dt$	$\rho_{14}.dt$
dz_t^{ACTION}	$\rho_{12}.dt$	dt	$\rho_{23}.dt$	$\rho_{24}.dt$
$dz_t^{IMMOBILIER}$	$\rho_{13}.dt$	$\rho_{23}.dt$	dt	$\rho_{34}.dt$
$dz_t^{MONETAIRE}$	$\rho_{14}.dt$	$\rho_{24}.dt$	$\rho_{34}.dt$	dt

En vue d'aboutir à une décorrélation des actifs, il convient d'utiliser la décomposition de Choleski. On considère un vecteur aléatoire gaussien $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ dont la distribution est mutli – normale non dégénérée. Sa densité est de la forme

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \times \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$$

avec les notations suivantes :

- ✓ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$: vecteur espérance des lois marginales
- ✓ Σ : matrice de variance - covariance

Plus précisément, cette dernière matrice s'écrit :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

Comme sigma est symétrique, il est possible de trouver une matrice T définie comme suit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

et vérifiant :

$$\Sigma = TT'$$

D'autre part, on sait que si Z est un vecteur i.i.d. de loi commune $N(0,1)$, alors le vecteur $X = TZ + \mu$ a pour matrice de variance – covariance Σ .

Cette dernière relation permet de retrouver de proche en proche les valeurs des coefficients de la matrice triangulaire T :

$$\checkmark \quad X_1 = b_{11} \cdot Z_1 + \mu_1.$$

En considérant la variance de chacun des termes de cette égalité, on obtient $b_{11} = 1$.

$$\checkmark \quad X_2 = b_{21} \cdot Z_1 + b_{22} \cdot Z_2 + \mu_2$$

En considérant la variance de chacun des termes de cette égalité, on obtient

$$b_{11} + b_{22} = 1.$$

Si on s'intéresse à la covariance, on tombe sur l'égalité suivante :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \rho_{12} = E[b_{11} \cdot Z_1 (b_{12} \cdot Z_1 + b_{22} \cdot Z_2)].$$

$$\text{Finalement, } b_{21} = \frac{\rho_{12}}{b_{11}} = \rho_{12} \text{ et } b_{22} = (1 - \rho_{12}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

✓ Etc.

L'application de cette méthode permet d'aboutir aux valeurs des b_{ij} :

$$b_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot b_{jk}}{\left(\rho_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Et la matrice T s'écrit donc :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1-\rho_{12}^2} & 0 & 0 \\ \rho_{13} & \frac{\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} & \sqrt{1-\rho_{13}^2-\frac{(\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2}} & 0 \\ \rho_{14} & \frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} & \frac{\rho_{34}-\rho_{14}\rho_{13}-\frac{\rho_{24}-\rho_{43}\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \times \frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}}{\sqrt{1-\rho_{13}^2-\frac{(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})^2}{1-\rho_{12}^2}}} & \sqrt{1-\rho_{14}^2-\frac{(\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12})^2}{1-\rho_{12}^2}-\frac{\left(\rho_{34}-\rho_{14}\rho_{13}-\frac{\rho_{24}-\rho_{43}\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \times \frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}\right)^2}{1-\rho_{13}^2-\frac{(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})^2}{1-\rho_{12}^2}}}} \end{bmatrix}$$

B - DECORRELATION DES ACTIFS

Supposons que les dynamiques des rendements utilisées par les différents actifs avant décorrélation soient les suivantes :

- ✓ Obligations : $dr^{OBLIG} = \mu_t^{OBLIG} . dt + \sigma_t^{OBLIG} . dz_t^{OBLIG}$
- ✓ Actions : $dr^{ACTION} = \mu_t^{ACTION} . dt + \sigma_t^{ACTION} . dz_t^{ACTION}$
- ✓ Immobilier : $dr^{IMMO} = \mu_t^{IMMO} . dt + \sigma_t^{IMMO} . dz_t^{IMMO}$
- ✓ Monétaire : $dr^{MONET} = \mu_t^{MONET} . dt + \sigma_t^{MONET} . dz_t^{MONET}$

Pour simplifier les calculs, utilisons les notations suivantes :

$$dr = \begin{pmatrix} dr_{(D)}^{OBLIG} \\ dr_{(D)}^{ACTION} \\ dr_{(D)}^{IMMO} \\ dr_{(D)}^{MONET} \end{pmatrix} \quad \text{l'indice D est utilisé pour préciser qu'il s'agit des dynamiques décorrélées.}$$

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_t^{OBLIG} \\ \mu_t^{ACTION} \\ \mu_t^{IMMO} \\ \mu_t^{MONET} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad dz_t = \begin{pmatrix} \sigma_t^{OBLIG} . dz_t^{OBLIG} \\ \sigma_t^{ACTION} . dz_t^{ACTION} \\ \sigma_t^{IMMO} . dz_t^{IMMO} \\ \sigma_t^{MONET} . dz_t^{MONET} \end{pmatrix}$$

Les dynamiques décorrélées sont obtenues en appliquant la formule suivante :

$$dr = \mu_t . dt + T . dz_t$$

A titre d'exemple, nous pouvons donner les dynamiques décorrélées des obligations et de l'immobilier :

- ✓ Obligations :

$$dr^{OBLIG} = \mu_t^{OBLIG} . dt + \sigma_t^{OBLIG} . dz_t^{OBLIG}$$

- ✓ Immobilier :

$$dr^{IMMO} = \mu_t^{IMMO} . dt + \sigma_t^{IMMO} . \rho_{13} . dz_t^{OBLIG} + \sigma_t^{IMMO} . \frac{\rho_{23} - \rho_{12} \cdot \rho_{13}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} . dz_t^{ACTION} + \sigma_t^{IMMO} . \sqrt{1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{23} - \rho_{12} \cdot \rho_{13})^2}{1 - \rho_{12}^2}} . dz_t^{IMMO}$$

CHAPITRE 6 : MARKOVITZ A 'N' ACTIFS³⁶

La détermination d'une allocation stratégique pour plusieurs actifs (N actifs par exemple) passe par le modèle de Markovitz à plusieurs actifs et plus précisément par l'algorithme de la ligne critique.

Présentation du problème

Soient p_i les proportions investies dans les actifs composant le portefeuille. En notant R_i le rendement de chaque actif, il est alors possible d'écrire le rendement global du portefeuille : $R_{Port} = \sum_{i=1}^N p_i \times R_i$.

L'algorithme de la ligne critique permet d'établir une frontière efficiente lorsque les différentes proportions d'actifs sont encadrées par des inégalités (réglementaires par exemple) :

$$p_{Inf,i} \leq p_i \leq p_{Sup,i}.$$

Rappelons également que l'équation de la tangente en un point de la frontière efficiente s'écrit : $\sigma_{Port}^2 = \alpha + \lambda \cdot E_{Port}$ où le paramètre λ correspond au coefficient d'affection pour le risque et E_{Port} à l'espérance du portefeuille. Ainsi, un investisseur qui n'accorde aucune importance au risque se verra « attribuer » un λ infini. Un portefeuille efficient, pour un λ donné, est identifié par l'ensemble des valeurs p_i permettant de minimiser la valeur de $\sigma_{Port}^2 - \lambda \cdot E_{Port}$. De ce fait, la frontière efficiente est construite en balayant le domaine de définition de λ (à savoir $[0; \infty[$).

Portefeuille efficient sans contraintes

En l'absence de contraintes inégalitaires, les proportions p_i sont calculées par minimisation de la valeur de $-\lambda \sum_{i=1}^N p_i \cdot E_i + \sum_{i=1}^N p_i \cdot p_j \cdot \sigma_{ij}$ (où E_i correspond à l'espérance de l'actif i) sous la contrainte

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

La résolution de ce problème fait appel au lagrangien $L = -\lambda \sum_{i=1}^N p_i \cdot E_i + \sum_{i=1}^N p_i \cdot p_j \cdot \sigma_{ij} + \gamma \cdot (\sum_{i=1}^N p_i - 1)$.

En annulant les dérivées partielles par rapport aux p_i et à γ , on aboutit au système suivant :

$C \cdot P = A + \lambda \cdot E$ avec les notations qui suivent :

³⁶ Cf. MARKOWITZ H.M., [1952], "Portfolio selection". Journal of finance.

$$C = \begin{bmatrix} 2.Cov & I \\ I' & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Cov désigne la matrice de variance covariance de dimension } N \times N \text{ et}$$

I correspond à un vecteur colonne dont les éléments sont tous égaux à 1).

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prise en compte des contraintes

Supposons que les contraintes $p_{Inf,i} \leq p_i \leq p_{Sup,i}$ soient prises en considération et que les statuts des différents p_i pour une valeur de λ donnée soient connus, alors des modifications éventuelles doivent être apportées au système précédent :

- * Si p_i est de statut « In » (sa valeur se situe strictement entre les deux bornes $p_{Inf,i}$ et $p_{Sup,i}$), alors la $i^{\text{ème}}$ ligne du système présenté dans la section précédent reste inchangée.
- * Si p_i est de statut « Down » (sa valeur est égale à la borne inférieure $p_{Inf,i}$), alors la $i^{\text{ème}}$ ligne du système précédent (à savoir $\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$) est remplacée par $p_i = p_{Inf,i}$.
- * Si p_i est de statut « Up » (sa valeur est égale à la borne $p_{Sup,i}$), alors la $i^{\text{ème}}$ ligne du système précédent (à savoir $\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$) est remplacée par $p_i = p_{Sup,i}$.

En utilisant $C.P = A + \lambda.E$ et les remarques qui viennent d'être faites, nous pouvons établir un récapitulatif des valeurs des p_i :

- * $p_i = a_i + b_i \times \lambda$, si le statut du titre est In.
- * $p_i = p_{Inf,i}$, si le statut du titre est Down.
- * $p_i = p_{Sup,i}$, si le statut du titre est Up.
- * $\gamma = a_\gamma + b_\gamma \times \lambda$

où a_i et b_i sont des constantes calculées à partir de C , A et E .

Lorsqu'on balaye l'intervalle de définition de λ , il est possible que les statuts des p_i évoluent. Auquel cas, il faudrait prendre en compte ces évolutions dans le calcul des p_i en utilisant la méthode détaillée

quelques lignes plus haut. Mais nous pouvons également calculer les valeurs critiques de λ qui déclenchent un changement de statut.

Supposons à titre d'illustration que pour une valeur λ_1 , le titre i soit de statut « In » et que les valeurs de λ évoluent de manière décroissante. Deux possibilités peuvent être envisagées en fonction de la valeur de b_i :

- * si b_i est positif, p_i aura tendance à se rapprocher de sa borne inférieure et la valeur critique de

$$\lambda \text{ s'écrit } \lambda_{c,i} = \frac{p_{Inf,i} - a_i}{b_i}.$$

- * En revanche, si b_i est négatif, p_i aura tendance à se rapprocher de sa borne supérieure et la

$$\text{valeur critique de } \lambda \text{ s'écrit } \lambda_{c,i} = \frac{p_{Sup,i} - a_i}{b_i}.$$

PARTIE 4

Modélisation du passif

CHAPITRE 1 : PROVISIONS

L'article R331-1 du code des assurances précise que «les engagements réglementés dont les entreprises [...] doivent à toute époque, être en mesure de justifier l'évaluation sont les suivants : les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis à vis des assurés et des bénéficiaires de contrats [...] ».

Comme nous l'avons indiqué, dans la partie 2 de ce document, une proportion significative du passif des compagnies d'assurance est constituée par les provisions techniques³⁷.

Les méthodes présentées ici sont destinées à renseigner sur le montant statistique des réserves nécessaires, mais aussi sur l'incertitude accompagnant ces évaluations. Sur les branches considérées, les sinistres sont constatés (avec plus ou moins de retard), puis payés (là aussi avec un laps de temps plus ou moins long). Les prestations à payer pour une compagnie d'assurance couvrent alors plusieurs années de développement (dépendant des caractéristiques propres de la branche considérée). L'objet de ce chapitre est de présenter les principales méthodes qui permettent d'aboutir aux montants à provisionner :

- La première méthode proposée est déterministe, et assez répandue : Chain Ladder³⁸. C'est une méthode qui sert généralement de référence à la mise en place d'autres concepts.
- Les méthodes d'évaluation stochastique (qui font appels aux simulations) semblent prendre le pas sur les méthodes déterministes. Ceci s'explique notamment par le fait qu'elles permettent d'effectuer des mesures d'incertitude et d'estimer la distribution de la provision. Soulignons également qu'elles autorisent la prise en compte de l'évolution de la réglementation³⁹.

³⁷ Plus particulièrement les PSAP et les PPNA.

³⁸ Cf. Cours ISFA, Assurance non vie, Ch. PARTRAT.

³⁹ Exemple : normes IAS \ IFRS.

SECTION 1 : PRESENTATION DE LA PROBLEMATIQUE

A - PRESENTATION

Pour une branche dont les sinistres se déroulent sur $n+1$ années, nous retenons les notations suivantes :

- L'année d'origine est notée i . Elle peut prendre différentes significations :
 - ✓ année de survenance ;
 - ✓ année de souscription ;
 - ✓ année de déclaration.
- Le délai de développement est noté j .
- Et x_{ij} , correspondant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , peut représenter divers éléments :
 - ✓ paiement de sinistres ;
 - ✓ nombre de sinistres ;
 - ✓ cotisations émises ou acquises ;
 - ✓ loss ratio ;
 - ✓ etc.

En ce qui concerne notre étude, nous nous focaliserons principalement sur la PSAP pour illustrer les différentes méthodes. Le triangle de liquidation (à la date d'inventaire) « non complété » comprend généralement $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ valeurs et se présente sous la forme d'un tableau :

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	...	$x_{0,j}$	...	$x_{0,n-i}$	...	$x_{0,n-1}$	$x_{0,n}$
1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	...	$x_{1,j}$	...	$x_{1,n-i}$	...	$x_{1,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...			
i	$x_{i,0}$	$x_{i,1}$	...	$x_{i,j}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$x_{n-1,0}$	$x_{n-1,1}$							
n	$x_{n,0}$								

Les années calendaires se confondent avec les diagonales du triangle et chaque année calendaire donne lieu au paiement total $\sum_{i=0}^n x_{i,n-i}$ (ex : la somme des cases en bleu est égale au total des paiements de l'année calendaire 1). A partir du triangle des incréments, il est possible de constituer un triangle des montants cumulés. Les relations ci-dessous établissent les liens entre les deux représentations :

- ✓ $C_{i,j} = \sum_{k=0}^j x_{i,k}$ permet de passer du triangle des incréments au triangle des montants cumulés.
- ✓ $x_{i,0} = C_{i,0}$ et $x_{ij} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ permettent d'effectuer le passage inverse.

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,j}$	...	$C_{0,n-i}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,n-i}$	...	$C_{1,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...			
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,j}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

B - PROBLEMATIQUE

Il est nécessaire pour une compagnie d'assurance d'avoir suffisamment de réserves, à la fin de l'année n afin de pouvoir payer l'ensemble des sinistres survenus pendant cette même année. Le calcul des réserves consiste alors à prévoir le montant total des sinistres afin de provisionner les paiements non encore effectués. L'objectif est donc de compléter le rectangle ci-dessus à partir des informations qu'il contient à l'origine. Plus précisément, il s'agit d'obtenir les résultats suivants :

- ✓ les paiements ultérieurs à la date d'inventaire : $C_{i,j}$ avec $i + j > n$
- ✓ le montant de réserve pour chaque année i : $R_i = C_{i,n} - C_{i,n-1}$

- ✓ le montant total de la provision à constituer : $R = \sum_{i=1}^n R_i$
- ✓ les cash flows futurs de paiement au cours de l'année $n+k$ au titre des années 0 à n ,

soit $\sum_{i+j=n+k} x_{ij}$.

Année d'origine	Délai de règlement									Provisions
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n	
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,j}$	...	$C_{0,n-i}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$	R_0
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,n-i}$	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$	R_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,j}$	...	$C_{i,n-i}$	...	$C_{i,n-1}$	$C_{i,n}$	R_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	...	$C_{n-1,j}$	...	$C_{n-1,n-i}$	...	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$	R_{n-1}
n	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	...	$C_{n,j}$		$C_{n,n-i}$	...	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$	R_n
									Total	R

SECTION 2 : CHAIN LADDER STANDARD

A - PRESENTATION

C'est la méthode déterministe la plus répandue et la plus connue. Elle est fondée sur l'utilisation de link-ratios⁴⁰. Les hypothèses sous jacentes sont exposées ci-dessous :

- les années de survenance sont indépendantes entre elles ;
- les années de développement sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs.

Ces hypothèses peuvent s'exprimer de façon plus simple : pour $j = 1, \dots, n-1$, les ratios $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ sont indépendants de l'année d'origine i . Cela peut se vérifier de manière empirique : si on constitue un d-triangle, les valeurs $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ doivent être sensiblement constantes sur chaque colonne

La méthode standard de Chain Ladder consiste à supposer que les (C_{ij}) sont liés par un modèle de type AR(1) de la forme $C_{i,j+1} = f_j \cdot C_{i,j}$. Le facteur de développement commun f_j est estimé par

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}.$$

Une fois ces facteurs de développement calculés, il est possible de compléter les valeurs du triangle inférieur :

$$\text{pour } i + j > n, \quad \hat{C}_{ij} = C_{i,n-i} \cdot \prod_{k=n-i}^{j-i} \hat{f}_k \quad \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad R = \sum_{i=1}^n R_i$$

On peut également introduire des pondérations lors de l'estimation de f_j , pour accorder plus ou moins d'importance aux exercices passés. Parmi les types de pondérations utilisées, on pourra considérer :

- ✓ des pondérations accordant plus de poids aux années récentes et moins aux années éloignées.
- ✓ des pondérations tenant compte de l'exposition réelle au risque de chacune des années, c'est à dire que les pondérations sont liées au nombre de contrats, ou à la prime acquise associée en vigueur l'année i .

⁴⁰ ou coefficients de passage entre les différentes années de développement.

Dans les deux cas, on considère des link-ratios de la forme $\hat{f}_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-j-1} w_{i,j}} \times \sum_{i=0}^{n-j-1} w_{i,j} \cdot \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$. Notons que

si $w_{i,j} = C_{i,j}$ on retrouve l'expression de Chain Ladder standard.

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	...	...	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,j}$	...	...	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,j}$	...	...	...	$C_{1,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...			
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,j}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

B - AUTRES METHODES DETERMINISTES

Les méthodes citées ci-après sont également assez usitées. Elles ne sont citées qu'à titre indicatif et ne seront pas développées (Bornhuetter-Ferguson, London Chain, Méthode London Pivot).

Néanmoins, nous pouvons mentionner le fait qu'elles reposent toutes sur une même approche :

- ✓ celle des facteurs de développements : $f_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, (j = 0, \dots, n-1)$
- ✓ et des cadences de règlements : $l_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}}, (j = 0, \dots, n-1)$

Notons également la relation qu'il existe entre ces deux items :

$$f_j = \frac{l_{j+1}}{l_j} \text{ avec } l_n = 1 \qquad l_j = \frac{1}{f_j \times f_{j+1} \times \dots \times f_{n-1}}$$

De la même manière, les montants de réserve R_i s'expriment facilement en fonction de ces deux éléments :

$$R_i = \frac{1 - l_{n-i}}{l_{n-i}} \times C_{i,n-i} \qquad R_i = (f_{n-1} \times \dots \times f_{n-1} - 1) \times C_{i,n-i}$$

SECTION 3 : LES METHODES STOCHASTIQUES

A - PRESENTATION

Cette approche suppose que les éléments x_{ij} et C_{ij} du tableau (présenté précédemment) sont des variables aléatoires. De plus, nous ne disposons d'observations que pour $i + j \leq n$.

De ce fait, les méthodes stochastiques présentent plusieurs avantages. Elles permettent en outre :

- ✓ de simuler la sinistralité des exercices futurs ;
- ✓ de mesurer l'incertitude inhérente au triangles ;
- ✓ d'analyser la variabilité des provisions fournies par le modèle ;
- ✓ d'analyser les résidus ;
- ✓ d'établir une estimation de la loi de probabilité de la provision ;
- ✓ etc.

L'objet des paragraphes suivants est de donner un aperçu des méthodes les plus fréquemment utilisées :

- ✓ le modèle lognormal ;
- ✓ les modèles « GLM ».

B - LE MODELE LOGNORMAL

a - Présentation

Notons Y_{ij} la variable aléatoire représentant le paiement correspondant à l'année d'origine i et au délai de règlement j . Nous supposons que les variables aléatoires Y_{ij} sont indépendantes les unes des autres et qu'elles suivent une loi lognormale de moyenne m_{ij} et de variance σ .

Le modèle étudié retient la formule suivante :

$$\ln(Y_{ij}) = c + a_i + b_j + \sigma \cdot \varepsilon_{ij} \text{ où } \varepsilon_{ij} \text{ suit une loi } N(0,1).$$

b - Estimation des paramètres c , a_i , b_j et σ

Ces paramètres sont estimés en utilisant la méthode des moindres carrés. A cet effet, réécrivons la formule précédente sous une forme un peu plus appropriée :

$$Z = \ln(Y) = X \cdot \lambda + \varepsilon$$

Chacune des notations est explicitée ci-après :

- Le vecteur $Z = \begin{pmatrix} \ln(Y_{0,0}) \\ \ln(Y_{0,1}) \\ \dots \\ \ln(Y_{0,n-1}) \\ \ln(Y_{1,0}) \\ \dots \\ \ln(Y_{1,n-1}) \\ \ln(Y_{2,0}) \\ \dots \\ \ln(Y_{n,0}) \end{pmatrix}$ comprend $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ éléments.

- Le vecteur des paramètres $\lambda = \begin{pmatrix} c \\ a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ comprend $p = 2n + 3$ éléments

- Enfin, la matrice X (de dimension $(N, 2n+3)$) est définie comme suit :

$$X = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc} \text{Intercept} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} & \text{...} \\ \hline 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} n+1 \text{ lignes} \\ \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} n \text{ lignes} \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

On applique ensuite la formule classique de la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\lambda} = (X'X)^{-1}X'Z$$

Avant d'appliquer cette formule, il convient de vérifier le caractère inversible de $(Y'Y)^{-1}$. Dans le cas contraire, les différents vecteurs et matrices présentés nécessitent un traitement préalable.

Remarque : les variables aléatoires Z suivent une loi normale dont les paramètres peuvent être estimés à l'aide de :

- $\hat{\mu}_{ij} = \hat{a}_i + \hat{b}_j + \hat{c}$
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - p} \times (Z - X\hat{\beta})' (Z - X\hat{\beta})$

c - Estimateurs des m_{ij}^k

Sachant que la variable aléatoire Z est d'espérance μ_{ij} et de variance σ^2 , il est possible de retrouver l'expression des moments m_{ij}^k (où k représente l'ordre du moment) de la variable aléatoire Y :

$$m_{ij}^k = \exp \left\{ \mu_{ij} \cdot k + \frac{\sigma^2}{2} \cdot k \right\}$$

Connaissant les expressions de $\hat{\mu}_{ij}$ et de $\hat{\sigma}^2$, nous pouvons fournir un estimateur de m_{ij}^k :

$$\hat{m}_{ij}^k = \exp \left\{ \hat{\mu}_{ij} \cdot k + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \cdot k \right\}$$

Cependant, ces estimateurs ne sont pas forcément sans biais⁴¹. On peut remédier à cela en consultant la littérature ; un article de Verrall⁴² fournit un estimateur sans biais de m_{ij} .

C - LES MODELES STOCHASTIQUES GLM⁴³

a - Présentation

Les modèles linéaires généralisés ont fait leur apparition en 1972 (J.Nelder et R.Wedderburn). Ils sont adaptés à de nombreuses problématiques et sont d'utilisation courante dans le domaine de la statistique. L'actuariat n'échappe pas à leur champ d'action, notamment en ce qui concerne la théorie de la crédibilité. De la tarification des risques de masse, leur application s'est étendue à la détermination des provisions pour sinistre.

Le paragraphe suivant rappelle brièvement les principaux résultats des modèles linéaires généralisés qui seront utilisés dans la suite du développement. Pour toute information complémentaire, il est possible de consulter les articles de Nelder et McCullagh (1989) ; un traitement complet de la théorie et de l'application des modèles GLM y est présenté.

⁴¹ Notamment en ce qui concerne l'espérance de Y .

⁴² Cf. VERRALL R.J., [1991], "On the estimation of reserves from loglinear models". Insurance : mathematics and economics.

⁴³ GLM : Generalized Linear Models.

La théorie des GLM bénéficie d'un avantage par rapport aux modèles linéaires : le caractère normal des variables à expliquer n'est plus imposé, seule l'appartenance à une loi exponentielle est indispensable.

La loi de la variable aléatoire Y appartient à la famille exponentielle si sa densité peut s'écrire sous la forme :

$$f(y) = \exp \left\{ \frac{(y \cdot \theta - b(\theta))}{\Phi} + c(y, \Phi) \right\}$$

avec

- Φ : paramètre de dispersion.
- θ : paramètre canonique.
- b : fonction définie sur $\mathbf{R}$. Elle est deux fois dérivable et de dérivée première injective.
- c : fonction définie sur $\mathbf{R}^2$.

L'espérance et la variance de la variable aléatoire Y s'expriment aisément en fonction de ces différents paramètres :

$$\begin{cases} E(Y) = b'(\theta) \\ Var(Y) = b''(\theta) \cdot \Phi = b'' \left[b'^{-1}(E(Y)) \right] \cdot \Phi = v(E(Y)) \cdot \Phi \end{cases}$$

où v est appelée fonction variance du modèle.

Si Y correspond à la variable à expliquer et si le modèle comprend p variables explicatives X_i ($i=1, \dots, p$), la fonction lien g (strictement monotone et dérivable) vérifie la relation :

$$g(E(Y)) = \sum_{k=1}^p a_k \cdot x_k$$

où les x_k correspondent aux réalisations des variables X_k , et les coefficients de régression (que nous voulons estimer) sont notés a_k .

On peut ensuite réécrire l'expression du paramètre canonique en fonction des notations utilisées :

$$\theta_i = b'^{-1}(E(Y_i)) = b'^{-1} \left(g^{-1} \left(\sum_{k=1}^p a_k \cdot x_k \right) \right)$$

b - Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres a_k et Φ passe par l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance. A cet égard, la vraisemblance d'un n -échantillon de réalisations de Y s'écrit :

$$L(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{(y_i \cdot \theta - b(\theta))}{\Phi} + c(y_i, \Phi) \right\}$$

Les estimateurs de a_k et Φ sont obtenus en maximisant la logvraisemblance :

$$\ln L(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i \cdot b'^{-1} \left(g^{-1} \left(\sum_{k=1}^p a_k \cdot x_k \right) \right) - b \left(b'^{-1} \left(g^{-1} \left(\sum_{k=1}^p a_k \cdot x_k \right) \right) \right)}{\Phi} + c(y_i; \Phi) \right]$$

A titre d'illustration, le tableau suivant donne la valeur des différents paramètres pour certaines lois discrètes et continues :

Loi	Loi de probabilité ou densité	θ	ϕ	$b(\theta)$	$E(Y)$	Fonction variance (v)
Bernoulli	$P(Y = y) = e^{y \cdot \ln \frac{p}{1-p} + \ln(1-p)}$	$\ln \frac{p}{1-p}$	1	0	p	$v[p] = p \cdot [1 - p]$
$B(1, p)$						
Poisson	$P(Y = y) = e^{(y \cdot \ln \lambda - \lambda) + c(y)}$	$\ln \lambda$	1	e^θ	λ	$v[\lambda] = \lambda$
$P(\lambda)$						
Normale	$f(y) = \exp \left[\left(\mu \cdot y - \frac{\mu^2}{2} \right) \frac{1}{\sigma^2} + c(y, \sigma^2) \right]$	μ	σ^2	$\frac{\theta^2}{2}$	μ	$v[\mu] = 1$
$N[\mu, \sigma^2]$						
Gamma	$f(y) = \exp \left[\left(-\frac{y}{\mu} - \ln \mu \right) \cdot v + c(y, v) \right]$	$-\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{v}$	$\ln \left(\frac{-1}{\theta} \right)$	μ	$v[\mu] = \mu^2$
$G \left[v, \frac{v}{\mu} \right]$						
Inverse Gaussienne	$f(y) = \exp \left[\left(-\frac{y}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu} \right) \frac{1}{\sigma^2} + c(y, \sigma^2) \right]$	$-\frac{1}{2\mu^2}$	σ^2	$-\sqrt{-2\theta}$	μ	$v[\mu] = \mu^3$
$IG[\mu, \sigma^2]$						

c - Application au provisionnement

La variable aléatoire Y_{ij} représente toujours le paiement correspondant à l'année d'origine i et au délai de règlement j (les Y_{ij} sont supposés indépendantes). L'objectif des GLM est d'expliquer la variable aléatoire Y en fonction des variables « année d'origine » et « délai de règlement ».

D'après Renshaw et Verral, il est possible de formuler la plupart des méthodes stochastiques de provisionnement en utilisant une famille particulière de modèles linéaires généralisés. La structure de ces GLM est donnée par :

- ✓ $Y_{ij} \sim f(y; m_{ij}; \Phi)$. f , la densité de Y_{ij} , appartient à la famille exponentielle et m_{ij} représente l'espérance de Y .
- ✓ La composante systématique s'écrit $\eta_{ij} = c + a_i + b_j$ avec $a_0 = b_0 = 0$ pour éviter un surparamétrage du modèle.
- ✓ $\eta_{ij} = g(m_{ij})$ où g est la fonction lien.

La fonction lien, qui établit un pont entre les composantes aléatoires et systématique, prend généralement deux formes :

- ✓ Lien identité : $m_{ij} = E(Y_{ij}) = c + a_i + b_j$
- ✓ Lien Log : $\ln[m_{ij}] = c + a_i + b_j$ ou $m_{ij} = e^{c + a_i + b_j}$

Il est commun en matière de provisionnement de considérer trois types de distributions pour la variable Y_{ij} : lognormal, Gamma ou Poisson.

- ✓ Lorsque les montants de sinistres suivent une distribution lognormale, on sait que les $Z_{ij} = \ln(Y_{ij})$ suivent une loi normale et qu'on peut appliquer le modèles GLM pour le log des montants de sinistres. Dans ce cas précis la fonction lien est donnée par $\eta_{ij} = m_{ij}$.
- ✓ Dans les autres cas (gamma et poisson), la fonction lien est de type log et un estimateur de $m_{ij} = E(Y_{ij})$ est donné par :

$$\hat{m}_{ij} = \exp \left\{ \hat{c} + \hat{a}_i + \hat{b}_j \right\}$$

Les lois le plus souvent utilisées pour ce type de modèles sont de type Gamma ou Poisson (cette dernière loi donne exactement les mêmes résultats que Chain Ladder standard) ; ces modèles servent généralement à « légitimer » la méthode Chain Ladder. D'un point de vue pratique, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres sont obtenus en utilisant la procédure Genmod de SAS. Après cette étape, il est possible de calculer les flux espérés pour les années postérieures au 31/12/n.

SECTION 4 : APPROCHE PAR SIMULATIONS⁴⁴

A - PRINCIPES

Contrairement aux méthodes basées sur les tableaux de développement, cette approche permet d'estimer la loi de S du montant total des sinistres. Cette méthode nécessite de construire un n-échantillon de réalisations de la loi de S. Ces informations sont obtenues en effectuant en premier lieu des simulations

- * de la loi du nombre de sinistres (N), puis
- * de la loi des montants de sinistres, (X) éventuellement conditionnés aux paiements déjà effectués

Cet échantillon, une fois ordonné, fournit une approximation de la fonction de répartition de S. En déduisant de ces montants les paiements déjà effectués, on obtient la loi des provisions techniques

B - AVANTAGES

L'utilisation de cette méthode présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes classiques :

- * Résultats indépendants des cadences de règlements.
- * Obtention d'intervalles de confiance (elle est rendue possible par la détermination de la fonction de répartition).
- * Intégration possible de toute forme de réassurance.
- * Distinction des provisions pour sinistres tardifs des provisions pour sinistres en cours. Les deux données figurant à des postes différents du bilan, cette distinction est intéressante.
- * Résultats plus fiables notamment lorsque les données d'origine présentent des irrégularités ou des changements de cadence (car la méthode n'est pas basée sur le développement des paiement).

C - NOTATIONS

- ✓ Soit N le nombre total de sinistres du portefeuille (supposé indépendant des montants). Cette variable peut se scinder en trois nombres de sinistres ayant des caractéristiques distinctes :

$$N = n^D + N^V + N^T$$

avec :

n^D : Nombre total de sinistres déclarés. Cet élément est connu.

⁴⁴ Cf. REGAZZONI Y. , [1997], "Les provisions techniques une approche par simulations". Bulletin Français d'Actuariat.

N^V : Variable aléatoire représentant le nombre total de sinistres à venir.

N^T : Variable aléatoire représentant le nombre total de sinistres tardifs.

- ✓ On note X_j le montant du $j^{\text{ème}}$ sinistre ($j=1, \dots, N$). Les (X_j) sont supposés indépendants et identiquement distribués. La charge totale de sinistre S s'écrit $S = \sum_{j=1}^N X_j$.
- ✓ Les montants de sinistres payés au titre du sinistre j sont notés M_j . Remarquons que cette dernière valeur est nulle pour les sinistres à venir et les tardifs.
- ✓ On note X'_j la variable aléatoire modélisant le montant du $j^{\text{ème}}$ sinistre sachant que $X_j > M_j$.
- ✓ Enfin, $S' = \sum_{j=1}^N X'_j$ (i.e. la charge totale de sinistre connaissant les paiements effectués).

D - METHODE

Compte tenu des notations adoptées, les provisions techniques valent par définition $S' - \sum_{j=1}^{N^D} M_j$. A

ce stade, il convient d'approximer la loi de S' ; on cherche une fonction F telle que :

$$F(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_{S'}(x)$$

On constate que $F(x) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n 1_{(S' \leq x)}$ vérifie cette condition. L'obtention de cette fonction de répartition passe par la simulation de n réalisations de S' et la connaissance de cette variable est d'autant meilleures que n est grand. Pour ce faire, des réalisations de N^V et N^T (notées respectivement n^V et n^T) sont indispensables. Différentes lois sont adaptées pour simuler des nombres de sinistres : binomiale, poisson, poisson mélange... Les paramètres de la loi choisie pour la simulation peuvent être établis par une étude des données historiques.

En notant n^D le nombre de sinistres survenus (connu), l'algorithme permettant la simulation d'une réalisation de S' s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Pour } j=1 \text{ à } n^D \text{ faire} \\ \quad \text{Si le sinistre n'est pas clôturé alors } s = s + \text{simulation de } X'_j \\ \quad \text{Sinon } S = M_j \\ \text{Pour } j=1 \text{ à } n^T \text{ à } n^V \text{ faire} \\ \quad s = s + \text{simulation de } X_j \end{array} \right.$$

s correspond alors à une réalisation de S' .

La difficulté majeure réside dans la simulation de X'_j (s'agissant d'obtenir une réalisation d'une loi conditionnée).

Notons également que dans le cas particulier de l'étude d'une période future, aucun sinistre n'est encore survenu et n^D , $X'_j = X_j$, $S' = S$.

SECTION 5 : PRISE EN COMPTE DE L'INFLATION

A - PRESENTATION

Lors de la constitution des triangles de liquidation, il est fortement conseillé de prendre en considération les impacts de l'inflation. Il est donc approprié d'utiliser l'un des modèles de simulation du taux d'inflation présentés en partie 3.

On peut également signaler que l'évolution des prix peut dépendre de la branche considérée (par exemple, l'évolution des prix en RC n'est certainement pas la même qu'en Dommages) et qu'un modèle d'inflation s'appliquant à toutes les branches n'est pas des plus adéquats. L'idéal consisterait à estimer les paramètres du « modèle d'inflation » pour chaque branche ; cela peut toutefois être « lourd » lors de la mise en place d'une application (pour un résultat qui n'est pas forcément significatif).

B - METHODOLOGIE

A titre d'illustration, nous présenterons la méthode de prise en compte de l'inflation au niveau d'un triangle de liquidation « non complété » (le principe étant, à peu de choses près, le même pour les flux estimés). Cette méthode doit être appliquée sur un triangle des incréments présentant des données dépourvues d'inflation :

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	...	$X_{0,j}$	...	$X_{0,n-i}$	...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	...	$X_{1,j}$	...	$X_{1,n-i}$	...	$X_{1,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...			
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$	...	$X_{i,j}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$							
N	$X_{n,0}$								

La première étape consiste en la construction d'un tableau faisant apparaître l'indice des prix pour chaque année calendaire du triangle des incréments. Les valeurs des indices doivent être exprimées en base n ; l'année calendaire n ne doit pas être sujet à inflation puisque le triangle est complété « au 31/12/n ».

Année	Ratio
0	$R_0 = \frac{I_0}{100}$
1	$R_1 = \frac{I_1}{100}$
...	...
i+j	$R_{i+j} = \frac{I_{i+j}}{100}$
...	...
n-1	$R_{n-1} = \frac{I_{n-1}}{100}$
n	1

Ensuite, les ratios du tableau sont appliqués à chaque année calendaire (i.e. chaque diagonale) en vue de faire apparaître un triangle qui tient compte de l'inflation :

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$x_{0,0} * R_0$	$x_{0,1} * R_1$	...	$x_{0,j} * R_j$	...	$x_{0,n-i} * R_{n-i}$	...	$x_{0,n-1} * R_{n-1}$	$x_{0,n} * 1$
1	$x_{1,0} * R_1$	$x_{1,1} * R_2$	...	$x_{1,j} * R_{j+1}$	...	$x_{1,n-i} * R_{n+1-i}$	...	$x_{1,n-1} * 1$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...			
i	$x_{i,0} * R_i$	$x_{i,1} * R_{i+1}$	...	$x_{i,j} * R_{i+j}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$x_{n-1,0} * R_{n-1}$	$x_{n-1,1} * 1$							
n	$x_{n,0} * 1$								

Une autre méthode, analogue à celle présentée ci-dessus, consiste à établir un tableau listant les taux d'inflation de chaque année calendaire et à multiplier chaque diagonale par le produit des taux d'inflation des années postérieures (exemple : les montants de l'année calendaire i+j doivent être multipliés par le produit des taux d'inflation des années i+j, i+j+1, ..., n).

SECTION 6 : LA TECHNIQUE DU BOOTSTRAP⁴⁵

A - PRESENTATION

Les méthodes de rééchantillonnage, telles que le Jackknife (Quenouille, 1949) et le Bootstrap (Efron, 1979), permettent de remplacer les déductions théoriques en analyse statistique par des simulations de type Monte-Carlo. Reposant principalement sur des simulations, le bootstrapping jouit d'une mise en oeuvre relativement simple.

L'usage du bootstrap dans la résolution de problèmes actuariels s'étend rapidement, en particulier en tarification et dans l'évaluation des provisions de sinistres. Ceci s'explique par le large éventail d'application de la méthodologie : intervalles de confiance, tests d'hypothèse, modèles linéaires puis généralisés, etc. La prédiction d'un niveau « suffisant » de réserve, qui permet à la société d'assurance de faire face à ses engagements, est un sujet primordial de la science actuarielle. Depuis quelques années, la technique du bootstrap est communément utilisée pour analyser la variabilité des montants de sinistres et obtenir des erreurs de prédiction pour différentes méthodes de provisionnement (principalement pour les méthodes basées sur Chain Ladder et sur les modèles linéaires généralisés).

B - METHODOLOGIE

La technique du bootstrap consiste, à partir d'un échantillon originel unique, à créer par tirage aléatoire avec remise de nouveaux échantillons. Ces nouveaux échantillons sont constitués de « pseudo données » ayant la même loi sous jacente. La répétition du rééchantillonnage à partir de données « sources » permet d'estimer la variabilité d'un paramètre déterminé.

b - Définition des résidus

La méthodologie doit être adaptée à chaque situation. Pour un modèle linéaire (classique ou généralisé), il est commun d'adopter une des deux approches suivantes :

- ✓ Le rééchantillonnage effectué directement sur les observations.
- ✓ Le rééchantillonnage appliqué sur les résidus du modèle.

⁴⁵ Cf. PARTRAT C., JAL P., [2002], "Evaluation de la provision pour sinistres, Mesures d'incertitude, Bootstrap". Support de cours ISFA.

Cf. VERALL R.J., ENGLAND P.D., [1999], "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving". Insurance : mathematics and economics.

Bien que la première approche soit plus robuste que le bootstrap sur les résidus, seule cette dernière peut être implémentée en matière de provisionnement. En effet, la technique du bootstrap nécessite le caractère i.i.d. des données. Or, dans un modèle de régression, les variables réponses sont indépendantes mais non équidistribuées. Pour respecter le domaine d'application du bootstrap, il est classique d'appliquer cette méthode aux résidus du modèle choisi. Ceux-ci ont un caractère « plus » i.i.d. que les variables originales.

L'étape suivante consiste à définir un résidu adéquat. Dans le cadre des modèles linéaires généralisés, il existe principalement deux types de résidus : les résidus bruts, les résidus de Pearson.

- Les résidus bruts : ils correspondent à la différence entre la valeur observée et la valeur espérée.

$$r_{ij} = y_{ij} - m_{ij}$$

Ils sont d'espérance nulle, de variance non constante et ne sont généralement pas retenus pour l'utilisation de la technique bootstrap (qui, rappelons le, nécessite des résidus i.i.d.).

- Les résidus de Pearson ont pour expression $r_{ij}^{(P)} = \frac{y_{ij} - m_{ij}}{\sqrt{v(m_{ij})}}$. Ils sont d'espérance nulle,

de variance constante et sont considérés, à cet égard, comme des résidus « adéquats » pour la méthodologie bootstrap.

L'expression des résidus empiriques est alors : $\hat{r}_{ij}^{(P)} = \frac{y_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{v(\hat{m}_{ij})}}$, v étant la fonction variance.

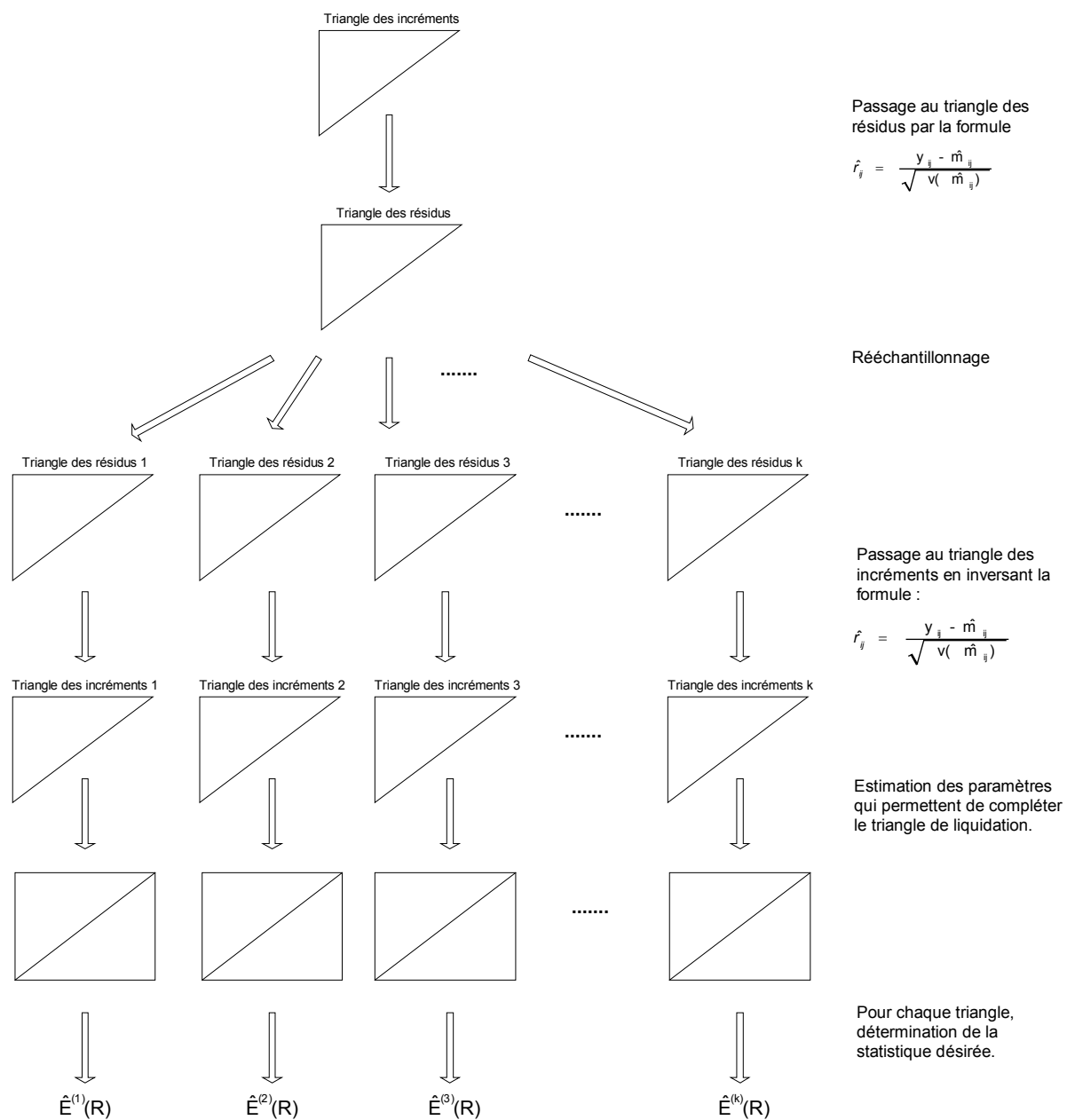
b - Rééchantillonnage

A partir du triangle des incréments, on constitue un triangle des résidus. Ce triangle sert ensuite de base à la création de k (nombre arbitraire ou en relation avec les permutations possibles du triangle) nouveaux triangles des résidus : les valeurs du triangle initial sont « casées » aléatoirement dans chaque nouveau triangle. Plus intuitivement, chaque nouveau triangle correspond à « une permutation » du triangle originel.

La formule $\hat{r}_{ij}^{(P)} = \frac{y_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{v(\hat{m}_{ij})}}$ permet de constituer k triangles des incréments à partir des k

triangles des résidus. L'étape suivante consiste à estimer les paramètres $(\hat{c}, \hat{a}_i, \hat{b}_j)$ de chaque triangle et à obtenir k estimations de la statistique désirée $(\hat{m}_{ij}, \hat{E}(R))$. A ce stade, il est alors possible d'établir, par exemple, un intervalle de confiance de la moyenne de réserve prévue.

Le schéma suivant fait apparaître les principales étapes de la méthodologie bootstrap :



CHAPITRE 2 : SINISTRES ET PRIMES

Les sinistres et les primes ne sont pas à proprement parler des postes du bilan (mais plutôt du compte de résultat). Ils sont néanmoins des constituants essentiels d'un modèle DFA. Ce chapitre a pour objectif de rappeler brièvement les principes généraux qui sont retenus en assurance non vie.

▪ Les sinistres

Il conviendrait d'effectuer une distinction entre les sinistres catastrophiques et les sinistres dits récurrents. Pour notre application, nous proposons une modélisation simplifiée⁴⁶ de la prise en compte de ce type de sinistres.

Dans le domaine de l'assurance non vie, c'est le modèle collectif qui est le plus répandu. Au sein d'une branche donnée, on considère une classe C de contrats. Aucune distinction n'est effectuée entre les différentes polices qui constituent ce collectif ; les sinistres générés par chaque contrat sont imputables à l'ensemble de la classe.

La charge de sinistre S s'exprime en fonction de deux variables aléatoires :

- * N représente le nombre ou la fréquence de sinistres touchant la classe sur la période $[0, t]$;
- * (X_i) correspondent aux montants individuels de sinistres avec la convention $X_0=0$.

Cette somme d'un nombre aléatoire de v.a.r. s'écrit alors $S = \sum_{i=0}^N X_i$ (à condition de supposer

l'indépendance entre la fréquence et les coûts d'une part, et l'indépendance et la stationnarité des montants de sinistres d'autre part). Les lois retenues pour chacune de ces variables aléatoires sont généralement les suivantes :

- * Poisson ou Binomiale Négative pour N ;
- * Lognormal, Pareto ou Weibull pour les X_i .

Nous rappelons à titre indicatif, les deux caractéristiques principales de S :

- * $E(S) = E(N) \times E(X)$
- * $V(S) = E(X)^2 \times V(N) + V(X) \times E(N)$

⁴⁶ Cf. Partie 5 / Section 5 / H.

▪ Les primes

En premier lieu, il faut garder à l'esprit, les propriétés que devrait respecter un principe de calcul de prime :

- × au moins la prime pure ;
- × homogénéité ;
- × invariance par translation ;
- × additivité \ sous additivité \ sous additivité forte ;
- × convexité.

Les principes de calcul de prime les plus connus sont les suivants :

- × Principe de la prime pure : $\Pi(S) = E(S)$
- × Principe de l'espérance mathématique : $\Pi(S) = (1 + \beta) \times E(S)$, ($\beta > 0$)
- × Principe de la variance : $\Pi(S) = E(S) + \beta \cdot V(S)$, ($\beta > 0$)
- × Principe de l'écart type : $\Pi(S) = E(S) + \beta \cdot \sigma(S)$, ($\beta > 0$)

PARTIE 5

***Application : Probabilité de ruine d'une société
d'assurance non vie***

CHAPITRE 1 : SIMULATIONS⁴⁷

Généralement, les méthodes numériques de simulation ont pour objectifs d'expérimenter et d'étudier le comportement d'un système probabiliste regroupant des variables en interaction. Elles permettent en outre d'identifier les impacts de modifications de paramètres. Les domaines d'application des simulations sont très variés : comparaison d'estimateurs en statistique, simulation de portefeuille d'actifs en finance, recherche d'états stationnaires en économie, etc.

La mise en place de modèles de types DFA peut nécessiter la simulation de réalisations de différentes lois de probabilité relatives aux différentes variables modélisées : taux d'intérêt, actions, provisions, sinistres, etc. L'ensemble de ces techniques est généralement regroupé sous la dénomination « méthodes de Monte-Carlo ».

Un modèle DFA nécessite un générateur de nombres aléatoires performant pour que l'efficacité des simulations ne soit pas altérée par le biais du générateur. Les différentes possibilités de génération doivent être examinées en vue de dégager la méthode qui offre la convergence la plus rapide. Ainsi, on pourra s'intéresser aux deux grandes catégories d'algorithmes de nombres aléatoires qui offrent la possibilité d'aboutir à des réalisations de la loi uniforme continue sur $[0,1]$:

- × les générateurs pseudo aléatoires ;
- × les générateurs quasi aléatoires.

Une fois le générateur de nombres aléatoires choisi, l'étape suivante consiste à référencer les méthodes de simulation connues en vue d'obtenir des réalisations de différents types de lois. Celles-ci consistent généralement en des méthodes d'inversion ou de composition. Il est utile de remarquer qu'il existe des méthodes de simulation spécifiques à certaines lois. Par exemple, la technique de Box-Muller permet la génération d'un couple de réalisations de la loi normale $N(0,1)$.

Pour plus de détails, on pourra consulter l'article de J. Jacquemin : « Les méthodes de simulations en assurance ».

⁴⁷ Cf. JACQUEMIN J., [2003], "L'utilisation des méthodes de simulation en assurance". Mémoire ISFA.

CHAPITRE 2 : MISE EN PLACE, PARAMETRAGE ET RESULTATS

Cette dernière partie constitue l'étape clef de ce développement car elle correspond à l'application des modèles suggérés et détaillés au fil des parties précédentes. La première section présente les différents choix qui ont été effectués en terme de modélisation tant au niveau de l'actif qu'au niveau du passif.

La section suivante propose une méthodologie à suivre pour la détermination de divers indicateurs de risque :

- * probabilité de ruine ;
- * probabilité d'insuffisance (probabilité que les fonds propres détenus soient inférieur à la marge de solvabilité réglementaire) ;
- * les intervalles de confiance associés ;
- * les dates moyennes de survenance de la ruine et de l'insuffisance.

Les principales étapes de cette méthodologie consistent en la présentation du calcul :

- * des prestations payées au cours des différentes années de l'horizon temporel choisi ;
- * du résultat qui prend en compte les taux de chargement, les frais divers, le taux d'imposition, la distribution éventuelle de dividendes ;
- * de la rentabilité du portefeuille d'actifs ;
- * des fonds propres détenus à chaque date de l'horizon temporel.

Enfin, la dernière section fournit, pour un paramétrage donné, des résultats qui peuvent aider les sociétés d'assurance dans les prises de décisions relatives à la protection contre le risque d'insuffisance de fonds.

SECTION 1 : CHOIX DES MODELES

Les parties précédentes avaient pour objectif de présenter un état des lieux de la modélisation stochastique des différents postes du bilan. La présente section détaille les différents modèles choisis pour la mise en place de l'application illustrant ce mémoire.

A - LE MODELE DE TAUX D'INTERET DE CIR

a - Le modèle

On modélisera les taux d'intérêt par le modèle simple et répandu de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) qui définit le taux sans risque instantané par la dynamique suivante dans l'univers risque-neutre :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$$

où a , b et σ sont des paramètres constants rentrés par l'utilisateur.

La forme des prix des zéro-coupons est :

$$P(r, t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t))$$

Avec les fonctions A et B suivantes :

$$\begin{cases} A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma + a + \lambda)\frac{T-t}{2}}}{(\gamma + a + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ \gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \end{cases}$$

b - La discrétisation

La simulation des taux d'intérêt pour les périodes futures passe par une discrétisation de la dynamique :

$$\Delta r_t = r_{t+\Delta t} - r_t = a.(b - r_t).\Delta t + \sigma.\sqrt{r_t}.(Z_{t+\Delta t} - Z_t)$$

Soulignons que $Z_{t+\Delta t} - Z_t$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance Δt . Si ε_t désigne un bruit blanc de variance 1, alors $\sqrt{\Delta t}.\varepsilon_t$ suit la même loi que $Z_{t+\Delta t} - Z_t$. On peut alors réécrire la dynamique discrétisée sous une forme qui permet de générer la valeur du taux d'intérêt de chaque nouvelle période :

$$r_{t+\Delta t} = ab.\Delta t + (1 - a.\Delta t).r_t + \sigma\sqrt{r_t}.\sqrt{\Delta t}.\varepsilon_t$$

Dans ces conditions, simuler un tel taux revient à calculer récursivement r_t , pour tout t , en simulant à chaque stade une réalisation d'une $N(0,1)$. Les paramètres a , b , σ doivent être judicieusement choisis afin de ne pas simuler un taux négatif à un rang k . En effet, lors du calcul de r_{k+1} , un problème évident se pose quand à la valeur $\sqrt{r_k}$. A cet égard, il existe une variante du modèle où $\sqrt{|r_k|}$ remplace $\sqrt{r_k}$. Une application du lemme d'Itô, montre que le modèle de CIR est bien posé si $a.b > \frac{\sigma^2}{2}$. Le respect de cette condition est nécessaire (mais pas suffisant) lors du lancement utilisant un modèle CIR, afin de ne pas engendrer des taux négatifs.

On peut signaler qu'en divisant cette équation par $\sqrt{r_t}$, on peut faire apparaître un modèle de régression linéaire :

$$\frac{r_{t+\Delta t}}{\sqrt{r_t}} = ab.\Delta t.\frac{1}{\sqrt{r_t}} + (1 - a.\Delta t).\frac{r_t}{\sqrt{r_t}} + \sigma.\sqrt{\Delta t}.\varepsilon_t$$

Cette formule rend possible l'estimation⁴⁸ des différents paramètres de cette équation.

B - LE MODELE D'INFLATION DE KAUFMANN, GADMER ET KLETT

Cette modélisation lie directement l'évolution de l'inflation à celle du taux d'intérêt :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t \quad (\text{où } \varepsilon_t \text{ correspond à un bruit blanc de variance } \sigma^2)$$

Pour obtenir la valeur de l'inflation à la date t , il suffit donc de connaître la valeur du taux d'intérêt court terme à cette même date et de simuler une réalisation de la loi $N(0,1)$ (indépendante, par hypothèse, de celle utilisée pour la simulation du taux d'intérêt).

C - LE MODELE DE BLACK ET SCHOLES POUR LES ACTIONS

a - Le modèle

On considère la formule de Black et Scholes dans l'univers historique (avec q le taux continu de dividendes) :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q) dt + \sigma dz$$

Dans l'univers risque-neutre, cette dynamique devient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) - q)dt + \sigma d\hat{z}_s$$

⁴⁸ Notamment grâce à la méthode des moindres carrés généralisés.

(rappelons que le passage entre les deux univers s'effectue en utilisant la formule

$$d\hat{z}_s = dz + \frac{\mu - r(t)}{\sigma} dt$$

Dans ces conditions, on suppose que la dynamique du $i^{\text{ème}}$ titre du portefeuille s'écrit (dans l'univers risque neutre) :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = (r(t) - q_i)dt + \sigma_i d\hat{z}_1$$

Faisons l'hypothèse que le cours du titre i est corrélé avec l'évolution du marché action dans son ensemble. Alors, il vient $d\hat{z}_1 \times d\hat{z}_a = \rho_i dt$ où $\hat{z}_a$ est un mouvement brownien qui régit l'évolution du marché actions.

Dès lors,

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = (r(t) - q_i)dt + \sigma_i \rho_i d\hat{z}_a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} d\hat{z}_i$$

où $\hat{z}_i$ est un mouvement brownien indépendant de $\hat{z}_a$

On considère également que la dynamique des zéro-coupons dans l'univers risque neutre est de la forme :

$$\frac{dP_t}{P_t} = r(t)dt - \sigma(t, T)d\hat{z}$$

avec,

$$d\hat{z}_a \times d\hat{z} = \rho_a dt \text{ et } d\hat{z}_i \times d\hat{z} = 0$$

(on fait ainsi l'hypothèse que la partie de la variation du cours du titre i indépendante de celle du marché action est aussi indépendante des taux).

Après la phase de décorrélation, il vient pour la dynamique du cours du titre i :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = (r(t) - q_i)dt + \sigma_i \rho_i \rho_a d\hat{z} + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} d\hat{z}_a^P + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} d\hat{z}_i$$

où $\hat{z}_i$, $\hat{z}$ et $\hat{z}_a^P$ sont des mouvements browniens indépendants.

Après intégration de l'équation différentielle stochastique, il vient une formule fermée pour le cours de l'action à une date t :

$$S_t = S_0 \times \exp \left\{ \int_0^t (r(u) - q_i) du \right\} \times \exp \left\{ \int_0^t \left(-\frac{\sigma_i^2}{2} du + \sigma_i \rho_i \rho_a d\hat{z} + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} d\hat{z}_a^P + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} d\hat{z}_i \right) \right\}$$

b - La discrétisation

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = (r_{t_i} - q_i) \cdot \Delta t + \sigma_i \rho_i \rho_a \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_a + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_i$$

où ε , ε_a et ε_i sont des v.a. indépendantes de loi $N(0,1)$

D - SINISTRALITE

Après avoir choisi les lois modélisant les nombres de sinistres (N) et les coûts (X_i) de ces derniers, l'obtention d'une réalisation de charge de sinistre (S) s'effectue selon le mode suivant :

- × une réalisation n de la variable aléatoire N ;
- × n réalisations $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, indépendantes et identiquement distribuées, de la loi de X.

E - PAS DE DISCRETISATION⁴⁹

Les simulations de réalisations de variables aléatoires faisant appel à la méthode de discrétisation nécessitent le choix d'un pas de discrétisation.

Le choix de l'horizon temporel d'un modèle DFA s'exprime de manière annuelle. Un choix naturel d'un pas de discrétisation serait donc « Annuel ». Cependant, en optant pour ce pas, on peut aboutir à des résultats biaisés : le taux d'intérêt, afférant à une date donnée, peut prendre des valeurs différentes suivant qu'il est calculé avec un pas de discrétisation annuel ou mensuel (par exemple). L'idéal serait donc de choisir un pas de discrétisation le plus petit possible (même si les seules valeurs de réalisation dont on a besoin sont annuelles) afin d'éviter ce type de désagrément.

Soulignons également que plus le pas de discrétisation est faible, plus les temps de réponse des simulations sont longs. Il y a donc un compromis à faire entre les temps des simulations et la précision de ces dernières.

En pratique, l'estimation de paramètres utilisés pour ces simulations (qui n'est pas réellement l'objet de ce mémoire) peut s'avérer très délicate, notamment lorsqu'on désire effectuer une distinction entre sinistres récurrents et sinistres catastrophiques.

⁴⁹ Pour plus de détails, on pourra consulter DE WINNE R., "Processus de diffusion de taux d'intérêt et correction du biais de discrétisation". Université Catholique de Louvain.

SECTION 2 : DETERMINATION DE LA PROBABILITE DE RUINE

La section suivante a pour objet de présenter la procédure mise en place pour l'obtention de la probabilité de ruine et de la probabilité d'insuffisance (probabilité que le niveau des fonds propres soit inférieur à celui exigé par la réglementation, à savoir la MSR).

A - LES DIFFERENTES ETAPES

La réalisation d'une simulation est fournie par l'enchaînement des différentes étapes décrites ci-dessous :

Etape 1 : Choix de l'horizon temporel

Ce paramètre permet de fixer la dimension des différents tableaux qui seront générés par la procédure informatique. Sa valeur est notée K.

Etape 2 : Création d'un tableau de réalisations de montants de sinistres (charges finales)

Ce tableau est de dimension (K,1). Les différents paramètres qui concourent à la simulation des montants de sinistres sont les suivants :

- Loi du nombre de sinistres (N) : nous avons choisi de retenir la loi de Poisson, dont le paramètre est noté λ .
- Loi des montants de sinistres (X) : nous avons choisi de retenir la modélisation LogNormale, dont les paramètres sont notés μ et σ .
- Nombre de contrats (N_C).
- Fréquence moyenne (p).

Ces deux derniers paramètres déterminent la valeur de λ :

$$\lambda = N_C \times p$$

Ainsi, il est possible de simuler le nombre de sinistres, puis les montants de chacun de ceux-ci. La charge totale pour chaque année de survenance i s'écrit alors :

$$S_i = \sum_{k=1}^N X_k \quad i=1,\dots,K$$

Etape 3 : Création d'un tableau des primes perçues

Ce tableau est de dimension (K,1). Les paramètres nécessaires pour la construction de ce tableau sont les suivants :

- Loi du nombre de sinistres (N)
- Loi des montants de sinistres (X)
- Taux de chargement des primes (noté α)
- Taux annuel d'accroissement des primes (noté β)

La prime perçue à chaque date de l'horizon temporel est alors :

$$Prime_i = E(N) \times E(X) \times (1 + \alpha) \times (1 + \beta)^{i-1} \quad i=1, \dots, K$$

soit

$$Prime_i = N_C \times p \times e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \times (1 + \alpha) \times (1 + \beta)^{i-1}$$

Etape 4 : Création d'un tableau des cadences de règlement

Ce tableau est de dimension (K,1). L'application prend en compte au maximum une cadence de règlement sur au plus 10 ans (chiffre arbitraire). En supposant que l'utilisateur ait saisi l pourcentages de règlements (exemples : Cad(1), Cad(2), Cad(3), Cad(4), Cad(5) pour un sinistre réglé en 5 ans) , le tableau en question se présente sous la forme suivante :

Cad(1)
Cad(2)
...
Cad(l)
0
...
0

K valeurs

Etape 5 : Construction d'un tableau de liquidation

Ce tableau est de dimension (K,K). A partir des montants de sinistres simulés et des cadences de règlement paramétrées, nous pouvons construire le tableau de développement afférent aux montant de sinistres simulés.

Développement									
	1	2	3	...	l	l+1	l+2	...	K
1	S(1)*Cad(1)	S(1)*Cad(2)	S(1)*Cad(3)	...	S(1)*Cad(l)	0	0	...	0
2	0	S(2)*Cad(1)	S(2)*Cad(2)	...	S(2)*Cad(l-1)	S(2)*Cad(l)	0	...	0
3	0	0	S(3)*Cad(1)	...	S(3)*Cad(l-2)	S(3)*Cad(l-1)	S(3)*Cad(l)	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
K	0	0	0	...	...	...	...	...	S(K)*Cad(1)

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Prestation 1	Prestation 2	Prestation 3	...	Prestation l	Prestation l+1	Prestation l+2	Prestation K

Etape 6 : Création d'un tableau des prestations payées

Le montant des prestations payées au titre des différentes années de l'horizon temporel sont déterminés à partir du tableau de liquidation comme indiqué précédemment (à titre d'exemple : les prestations payées au titre de la première année correspondent à la somme des éléments de la première colonne).

Ces différentes valeurs sont modifiées en tenant compte de l'inflation. Si $Inflation_t$ représente le taux d'inflation relatif à l'année t et simulé selon le modèle présenté en partie 3 ($\hat{i}_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t$), nous obtenons :

$$Prestations'_i = Prestation_i \times \prod_{k=1}^i Inflation_k \quad i=1, \dots, K$$

Etape 7 : Détermination des PSAP

Le montant des provisions de chaque année est calculé de manière récursive :

$$\left\{ \begin{array}{l} PSAP_1 = Sinistre_1 - Prime_1 \\ PSAP_2 = Sinistre_1 + Sinistre_2 - Prime_1 - Prime_2 = PSAP_1 + Sinistre_2 - Prime_2 \\ \dots \\ PSAP_i = PSAP_{i-1} + Sinistre_i - Prime_i \\ \dots \\ PSAP_K = PSAP_{K-1} + Sinistre_K - Prime_K \end{array} \right.$$

Etape 8 : Détermination du résultat

Le résultat (simplifié) de chaque année de l'horizon temporel est calculé de la façon suivante :

Eléments pris en compte	Débit	Crédit
▪ Primes (i)		✓
▪ Règlements (i)	✓	
▪ PSAP à l'ouverture (i)		✓
▪ PSAP à la clôture (i)	✓	
▪ Frais d'acquisition (i)	✓	
▪ Frais de gestion des polices (i)	✓	
▪ Frais de gestion des sinistres (i)	✓	
▪ Produit financiers alloués (i)		✓
<i>Résultat technique (i)</i>	✓	(✓)
▪ Impôts (i)	✓	
<i>Résultat après impôts (i)</i>	✓	
▪ Dividendes éventuels	✓	
<i>Transfert vers les fonds propres (i)</i>	✓	

Remarques diverses

- * Les éléments non techniques de l'activité (exemple : produit financiers non alloués) ne sont pas pris en compte dans le calcul du résultat.
- * Les frais d'acquisition et les frais de gestion des polices sont exprimés en pourcentage des primes.
- * Les frais de gestion des sinistres sont exprimés en pourcentage des règlements effectués pendant l'année.

Etape 9 : Calcul de la Marge de Solvabilité Réglementaire relative à chaque année

Ne tenant pas compte de la réassurance, la formule générale de calcul de la MSR présentée en partie 2 se simplifie sensiblement :

- * Méthode sur les primes

$$18 \% \times \text{Min (Primes, 10 millions)} + 16\% \times (\text{Primes} - 10 \text{ millions}, 0)$$

- * Méthode sur les sinistres

$$26\% \times \text{Min (Moyenne charge sinistre, 7 millions)} + 23\% \times (\text{Moyenne charge sinistre} - 7 \text{ millions}, 0)$$

- * Montant de la MSR

$$\text{MSR} = \text{Max (méthode sur les primes, méthode sur les sinistres)}$$

Etape 10 : Détermination de la valeur des fonds propres successifs

Les fonds propres de chaque année sont donnés par la formule récursive suivante (ce calcul nécessite donc la définition d'une valeur initiale de fonds propres qui est un paramètre du modèle) :

$$FP_i = FP_{i-1} \times (1 + r_i) + \text{Résultat transféré}_i \quad i=1, \dots, K$$

Dès lors, on considère qu'il y a :

- * Ruine dès que ce montant prend une valeur négative.
- * Insuffisance dès que ce montant prend une valeur inférieure à la MSR.

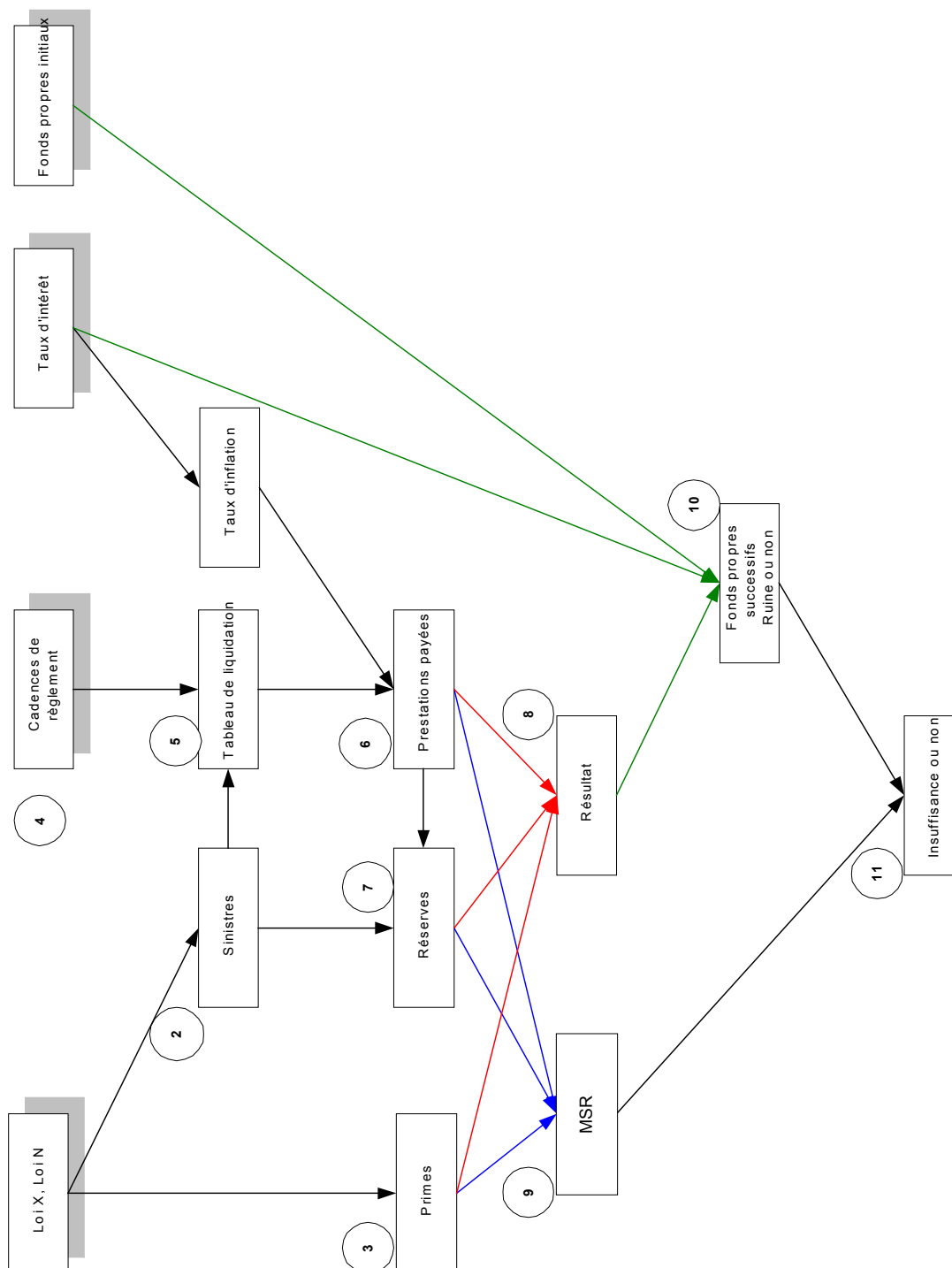
Etape 11 : Détermination de la probabilité de ruine et de la probabilité d'insuffisance

Cet algorithme, répété un nombre « suffisant » de fois, permet de dégager les estimateurs empiriques convergents des différentes probabilités souhaitées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilité de ruine} = \frac{\text{Nombre d'occurrences de la ruine}}{\text{Nombre de simulations}} \\ \text{Probabilité d'insuffisance} = \frac{\text{Nombre d'occurrences de l'insuffisance}}{\text{Nombre de simulations}} \end{array} \right.$$

B - SCHEMA RECAPITULATIF

Le schéma ci-après permet de visualiser l'agencement des différentes étapes qui conduisent à l'obtention des valeurs des différentes probabilités présentées précédemment :



SECTION 3 : CALCUL DU RENDEMENT DU PORTEFEUILLE

L'objectif de cette section est de prendre en considération le rendement du portefeuille d'actifs et d'intégrer cet élément dans le modèle de développement d'activité (i.e. la formule de récurrence des fonds propres). A cette fin, il est indispensable de déterminer le rendement du portefeuille à chaque date de l'horizon temporel choisi.

A - INFORMATIONS A DISPOSITION ET OBJECTIFS

Nous disposons, à la date 0, d'une allocation initiale d'actifs. Celle-ci peut être fixée en vertu d'un calcul d'optimisation (faisant ressortir les allocations stratégiques) ou de façon arbitraire.

- × $\theta_0^{Actions}$: la proportion initiale d'actions.
- × θ_0^{Oblig} : la proportion initiale d'obligations.
- × $\theta_0^{Monét}$: la proportion initiale de monétaire.

Les informations suivantes sont également fournies :

- × un nombre initial d'actions ($N_0^{Actions}$) de prix initial S_0 .
- × un nombre initial de Zéro Coupons (N_0^{Oblig}) de prix initial $P(0,T)$. T sera prix égal à l'horizon temporel d'analyse.
- × un montant initial de trésorerie.

L'obtention des rendements du portefeuille passe par la construction d'un tableau des allocations :

Date	Actions	Obligations	Monétaire		Portefeuille
1	θ_1^{Action}	θ_1^{Oblig}	$\theta_1^{Monét}$		$Renta_1^{Port}$
2	θ_2^{Action}	θ_2^{Oblig}	$\theta_2^{Monét}$		$Renta_2^{Port}$
...	...	...	...		...
i	θ_i^{Action}	θ_i^{Oblig}	$\theta_i^{Monét}$	⇒	$Renta_i^{Port}$
...	...	...	...		...
K	θ_K^{Action}	θ_K^{Oblig}	$\theta_K^{Monét}$		$Renta_K^{Port}$

où θ_i^X modélise la proportion de l'actif X dans le portefeuille d'actifs à la date i.

Le rentabilité du portefeuille à la date i est alors donnée par la formule suivante :

$$Renta_i^{Port} = \theta_i^{Action} \times Renta_i^{Action} + \theta_i^{Oblig} \times Renta_i^{Oblig} + \theta_i^{Monét} \times Renta_i^{Monét}$$

B - LES DIFFERENTES ETAPES

Etape 1 : Construction des tableaux d'évolution des différents actifs

- × Connaissant les caractéristiques de l'action considérée (S_0 , rendement, taux de versement de dividende, volatilité, corrélation avec le marché des actions, corrélation avec les taux), il est possible d'obtenir la valeur de l'action à chaque date de l'horizon temporel selon le processus détaillé dans la section 1 de cette partie.

S_1
S_2
...
S_i
...
S_K

- × Il en va de même pour l'évolution du prix du Zéro - Coupon considéré :

$P(1,T)$
$P(2,T)$
...
$P(i,T)$
...
$P(K,T)$

- × Le montant initial de trésorerie ($Monét_0$) est capitalisé sur l'horizon temporel au taux CIR de la période correspondante.

Etape 2 : Politique de réinvestissement et de désinvestissement

Le résultat de l'année i (après impôt et distribution éventuelle de dividendes) est connu (voir section précédente), il est noté Res_i . Les taux de réinvestissement dans les différents actifs sont définis comme suit :

- × λ^{Action} : la part du résultat réinvestie dans les actions.
- × λ^{Oblig} : la part du résultat réinvestie dans les Zéro-Coupon.
- × $\lambda^{Monét}$: la part du résultat réinvestie dans le monétaire.

Ces différents paramètres permettent de calculer les montants réinvestis dans chacun des actifs :

- × $\lambda^{Action} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans les actions.
- × $\lambda^{Oblig} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans les Zéro-Coupon.

- × $\lambda^{Monét} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans le monétaire.

De ces montants, on déduit les nombres d'actions et de Zéro Coupon qu'il est possible d'acquérir à la date i :

$$N_i^{Actions} = \frac{\lambda^{Action} \times Res_i}{S_i} \quad N_i^{Oblig} = \frac{\lambda^{Oblig} \times Res_i}{P(0,T)}$$

Lorsqu'il s'agit de désinvestissement (résultat négatif) la logique reste globalement la même. Cependant, les proportions à prendre en compte ne correspondent pas à celles de la politique de réinvestissement :

- × $\gamma^{Action} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans les actions.
- × $\gamma^{Oblig} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans les Zéro-Coupon.
- × $\gamma^{Monét} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans le monétaire.

Précisons néanmoins que le mode de désinvestissement des obligations présente une spécificité majeure : en vertu d'un principe réglementaire, il doit être effectué selon la méthode FIFO (First In First Out) qui consiste à liquider en premier les titres les plus anciens.

Etape 3 : Construction d'un tableau des montants d'actions

En appliquant cette politique de réinvestissement et de désinvestissement pour chacune des années de l'horizon temporel, il est possible de constituer un tableau listant les quantités d'actions disponibles à chaque date.

Date	1	2	3	i	K-1	K
$N_1^{TotalActions} =$	$N_0^{Actions}$					
$N_2^{TotalActions} =$	$N_0^{Actions} +$	$N_1^{Actions}$				
...	...	...	...	...		
$N_i^{TotalActions} =$	$N_0^{Actions} +$	$N_1^{Actions} +$	$N_2^{Actions} +$	...	$+ N_{i-1}^{Actions}$	
...	...	...	...	...	...	
$N_{K-1}^{TotalActions} =$	$N_0^{Actions} +$	$N_1^{Actions} +$	$N_2^{Actions} +$	...	$+ N_{i-1}^{Actions} +$	...
$N_K^{TotalActions} =$	$N_0^{Actions} +$	$N_1^{Actions} +$	$N_2^{Actions} +$	...	$+ N_{i-1}^{Actions} +$	...
					$+ N_{K-2}^{Actions} +$	$N_{K-1}^{Actions}$

A partir de ce tableau, il est aisé de constituer une formule synthétique :

$$N_i^{TotalActions} = \sum_{j=0}^{i-1} N_j^{Actions}$$

Le montant disponible en actions à chaque date se calcule comme suit :

$$\text{Montant}_i^{\text{Actions}} = N_i^{\text{TotalActions}} \times S_i \quad \text{soit}$$

$$\text{Montant}_i^{\text{Actions}} = S_i \times \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha \times \text{Res}_j}{S_j}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \lambda^{\text{Actions}} & \text{si le résultat de l'année } j \text{ (Res}_j\text{) est positif.} \\ \alpha = \gamma^{\text{Actions}} & \text{si le résultat de l'année } j \text{ (Res}_j\text{) est négatif.} \end{cases}$$

Etape 4 : Construction d'un tableau des montants d'obligations

Considérons le tableau suivant :

Date	1	2	3	i	K-1	K
$N_1^{\text{TotalOblig}} =$	N_1^1					
$N_2^{\text{TotalOblig}} =$	$N_2^1 +$	N_2^2				
...	...	...	...	...		
$N_i^{\text{TotalOblig}} =$	$N_i^1 +$	$N_i^2 +$	$N_i^3 +$	...	$+ N_i^i$	
...	...	...	...	...	...	
$N_{K-1}^{\text{TotalOblig}} =$	$N_{K-1}^1 +$	$N_{K-1}^2 +$	$N_{K-1}^3 +$	...	$+ N_{K-1}^i +$	$+ N_{K-1}^{K-1} +$
$N_K^{\text{TotalOblig}} =$	$N_K^1 +$	$N_K^2 +$	$N_K^3 +$	...	$+ N_K^i +$	$+ N_K^j + N_K^K$

Les différents chiffres listés dans ce tableau sont calculés selon le mode suivant :

- ✓ Pour la colonne 1, $N_i^1 = N_0^{\text{Oblig}}$ (soit le nombre initial de Zéro Coupon disponibles).
- ✓ Pour la colonne i, il convient d'effectuer une distinction selon qu'il s'agit d'un réinvestissement ou d'un désinvestissement

- × En cas de réinvestissement, le nombre d'obligations s'écrit (pour $i \leq j \leq K$)

$$N_j^i = \frac{\lambda^{\text{Oblig}} \times \text{Res}_{i-1}}{P(0, T)}$$

- × En cas de désinvestissement, la détermination du nombre d'obligations s'appuie sur la mise en pratique de la méthode de liquidation des stocks FIFO. Pour $i \leq j \leq K$, on pose $N_j^i = 0$ (tout les éléments de la colonne i sont pris comme nuls) puis on modifie les chiffres de la ligne j en effectuant la procédure suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{On pose } N_{\text{Tampon}} = \frac{\gamma^{\text{Oblig}} \times \text{Res}_{i-1}}{P(i-1, T)} \\
 \text{Si } N_{\text{Tampon}} \leq N_i^1, \text{ alors } N_j^1 = N_j^1 - N_{\text{Tampon}} \text{ (pour } i \leq j \leq K) \\
 \text{Si } N_{\text{Tampon}} \geq N_i^1, \text{ alors } N_{\text{Tampon}} = \frac{\gamma^{\text{Oblig}} \times \text{Res}_{i-1} - N_i^1 \times P(i-1, T)}{P(i-2, T)} \\
 \quad \text{puis } N_i^1 = 0 \text{ (pour } i \leq j \leq K) \\
 \text{Si } N_{\text{Tampon}} \leq N_j^2, \text{ alors } N_j^1 = N_j^1 - N_{\text{Tampon}} \text{ (pour } i \leq j \leq K) \\
 \text{Si } N_{\text{Tampon}} \geq N_j^2, \text{ alors } N_{\text{Tampon}} = \frac{\gamma^{\text{Oblig}} \times \text{Res}_{i-1} - N_i^1 \times P(i-1, T) - N_j^2 \times P(i-2, T)}{P(i-3, T)} \\
 \quad \text{puis } N_j^2 = 0 \text{ (pour } i \leq j \leq K). \\
 \text{Etc.}
 \end{array} \right.$$

A partir du tableau précédent, il est possible d'obtenir le montant en obligation détenu chaque période :

$$\text{Mon tan } t_i^{\text{TotalOblig}} = \sum_{k=1}^i N_i^k \times P(i-k+1)$$

Etape 5 : Construction d'un tableau des montants de monétaire

En désignant par Monét_m , la part du résultat de l'année m réinvestie ou puisée (suivant que le résultat est positif ou négatif) dans la trésorerie, il est possible d'établir une formule donnant le montant total de monétaire à chaque date.

Pour $i=1, \dots, K$, nous pouvons écrire :

$$\text{Mon tan } t_i^{\text{TotalMonét}} = \text{Monét}_0 \times \prod_{j=1}^i (1+r_j) + \text{Monét}_1 \times \prod_{j=2}^i (1+r_j) + \dots + \text{Monét}_{i-2} \times \prod_{j=i-1}^i (1+r_j) + \text{Monét}_{i-1} \times (1+r_i)$$

$$\boxed{\text{Mon tan } t_i^{\text{TotalMonét}} = \text{Monét}_0 \times \prod_{j=1}^i (1+r_j) + \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m \times \text{Res}_m \times \prod_{j=m+1}^i (1+r_j)}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_m = \lambda^{\text{Monét}} \text{ si le résultat de l'année } m \text{ (Res}_m \text{) est positif.} \\ \alpha_m = \gamma^{\text{Monét}} \text{ si le résultat de l'année } m \text{ (Res}_m \text{) est négatif.} \end{cases}$$

Cette formule peut se réécrire comme une relation de récurrence entre les montants de monétaire des différentes périodes :

$$\boxed{\text{Mon tan } t_i^{\text{TotalMonét}} = \left[\text{Mon tan } t_{i-1}^{\text{TotalMonét}} + \alpha_{i-1} \times \text{Res}_{i-1} \right] \times (1+r_i)}$$

Etape 6 : Détermination du rendement de chaque actif

La connaissance du rendement de chaque actif à chacune des dates de l'horizon temporel est indispensable à la détermination du rendement de l'ensemble du portefeuille d'actifs. Précisons également que nous avons choisi de calculer le rendement de chaque actif par comparaison des

valeurs des actifs sur deux périodes successives ($Re\,nta_i^X = \frac{X(i) - X(i-1)}{X(i-1)}$).

× La rentabilité de l'action est définie par $Re\,nta_i^{Actions} = \frac{S(i) - S(i-1)}{S(i-1)}$.

× La rentabilité du monétaire correspond au taux de rémunération de la période considérée, r_i .

× Le calcul de la rentabilité des Zéro Coupon s'appuie sur le tableau présenté en étape 4. Le montant total en obligations relatif à la période j se compose de plusieurs « types » d'obligations ayant des rentabilités différentes. Dès lors, cette diversité doit être prise en considération :

$$Re\,nta_i^{Oblig} = \frac{1}{N_i^{TotalOblig}} \times \sum_{k=1}^i N_i^k \times \frac{P(i-k+1, T) - P(i-k, T)}{P(i-K, T)}$$

Etape 7 : Détermination des allocations d'actifs

Ayant à disposition, à la date i , les montants disponibles de chaque actif, nous pouvons remplir le tableau des allocations, indispensable à la détermination du rendement du portefeuille

$$\theta_i^X = \frac{Mon\,tan\,t_i^X}{Mon\,tan\,t_i^{Actions} + Mon\,tan\,t_i^{Oblig} + Mon\,tan\,t_i^{Monét}}$$

Date	Actions	Obligations	Monétaire
1	$Montant_1^{Actions}$	$Montant_1^{Oblig}$	$Montant_1^{Monét}$
2	$Montant_2^{Actions}$	$Montant_2^{Oblig}$	$Montant_2^{Monét}$
...	...	...	...
i	$Montant_i^{Actions}$	$Montant_i^{Oblig}$	$Montant_i^{Monét}$
...	...	...	...
K	$Montant_K^{Actions}$	$Montant_K^{Oblig}$	$Montant_K^{Monét}$



Date	Actions	Obligations	Monétaire
1	θ_1^{Action}	θ_1^{Oblig}	$\theta_1^{Monét}$
2	θ_2^{Action}	θ_2^{Oblig}	$\theta_2^{Monét}$
...	...	...	...
i	θ_i^{Action}	θ_i^{Oblig}	$\theta_i^{Monét}$
...	...	...	...
K	θ_K^{Action}	θ_K^{Oblig}	$\theta_K^{Monét}$

SECTION 4 : PARAMETRAGE ET ELEMENTS COMPTABLES

Dans cette section, nous présentons, en premier lieu, les différents paramètres retenus pour l'obtention des valeurs comptables (sinistres, primes, résultats,...) et des indicateurs de risque (probabilité de ruine et probabilité d'insuffisance). Nous avons choisi de calculer ces différents éléments pour une société qui souhaite intégrer le marché de l'assurance automobile avec un nombre de contrats relativement restreint.

A - PARAMETRAGE

- * Paramètres généraux : Les raisons qui nous ont conduit à opter pour un nombre de simulations de 5000 runs sont explicitées au niveau de la section suivante (Cf. paragraphe « Intervalle de confiance et nombre de simulations »). Nous avons également choisi d'effectuer ces simulations sur un horizon temporel de 10 ans (Cf. Partie 1 / Section 1 / A).

Nombre de simulations :	5000 runs
Horizon temporel :	10 ans

- * Paramètres de sinistralité :

μ :	7,33	Fréquence moyenne :	0,346365
σ :	1,92	Nombre de contrats :	100

Les paramètres utilisés sont issus d'une étude effectuée par le cabinet JWA relative à une société de la branche automobile et dont les principales caractéristiques sont les suivantes :

Nombre de contrats :	216 035	Espérance de coût d'un sinistre :	9 625
Nombre moyen de sinistres :	74 827	Variance de coût d'un sinistre :	3 572 602 327

Ne pouvant obtenir des résultats variés sur un tel nombre de contrats (compte tenu des temps de simulation associés), nous avons délibérément choisi de retenir un nombre de contrats fortement restreint en vue d'obtenir (relativement rapidement) un aperçu de l'ensemble des résultats que des modèles DFA peuvent proposer.

- * Cadence de règlement associée :

Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
20%	71%	7%	1,4%	0,6%

- * Paramètres de gestion : Les différentes valeurs de paramètres de gestion listés dans le tableau suivant rentrent dans la fourchette de tarifs que peut pratiquer une société d'assurance.

Taux de chargement des primes :	30%
Taux d'accroissement annuel des primes :	3%
Frais d'acquisition :	15%
Frais de gestion des polices :	12%

Frais de gestion des sinistres :	3%
Part du résultat conservé :	80%
Taux d'imposition :	33%

- * Allocation initiale d'actifs : L'allocation d'actifs a été choisie de façon totalement arbitraire. Cependant, elle correspond à la répartition pratiquée dans certaines branches d'assurance (notamment en assurance construction).

Actions :	55%	Obligations :	35%	Monétaire :	10%
-----------	-----	---------------	-----	-------------	-----

- * Politique de réinvestissement et de désinvestissement : La politique de réinvestissement et de désinvestissement est identique à l'allocation initiale. En cela, elle permet d'effectuer un contrôle sur les résultats de l'application dans le sens où les proportions des différents actifs à chaque date de simulation ne doit pas trop s'éloigner des chiffres de l'allocation initiale.

	Réinvestissement	Désinvestissement
Actions :	55%	55%
Obligations :	35%	35%
Monétaire :	10%	10%

B - ELEMENTS COMPTABLES

Compte tenu du paramétrage retenu, nous fournissons, ci-dessous, des éléments comptables relatifs au bilan et au compte de résultat de la société modélisée. Les valeurs présentées correspondent aux moyennes des données numériques issues des simulations pour un niveau initial de fonds propres de 300 000 euros associé à une probabilité de ruine de 7,6% et une probabilité d'insuffisance de 10,3% (des résultats plus détaillés concernant ces indicateurs sont donnés dans la section suivante).

Sinistres / Prestations / Réserves

Le tableau suivant donne pour chaque année considérée, le montant des sinistres survenus, celui des prestations payées ainsi que des provisions effectuées.

Année	Sinistres	Prestations	Provisions
1	323 482	64 715	258 767
2	336 697	299 010	296 454
3	314 440	329 904	280 990
4	344 537	329 212	296 314
5	324 416	351 845	268 885
6	315 518	341 351	243 052
7	344 190	343 923	243 319
8	305 797	361 291	187 825
9	341 975	346 031	183 768
10	323 754	372 452	135 069

Notons que les montants de sinistre simulés oscillent autour le valeur de l'espérance de la variable S (celle-ci étant d'approximativement 330 000 euros).

Tableau de liquidation

A partir des montants de sinistres simulés et de la cadence de règlement saisie par l'utilisateur, il est possible de constituer le tableau de liquidation des sinistres.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	64 696	229 672	22 644	4 529	1 941	0	0	0	0	0
2	0	67 339	239 055	23 569	4 714	2 020	0	0	0	0
3	0	0	62 888	223 253	22 011	4 402	1 887	0	0	0
4	0	0	0	68 907	244 621	24 118	4 824	2 067	0	0
5	0	0	0	0	64 883	230 335	22 709	4 542	1 946	0
6	0	0	0	0	0	63 104	224 018	22 086	4 417	1 893
7	0	0	0	0	0	0	68 838	244 375	24 093	4 819
8	0	0	0	0	0	0	0	61 159	217 116	21 406
9	0	0	0	0	0	0	0	0	68 395	242 802
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64 751

La somme des éléments des colonnes de ce tableau fournissent les montants des prestations payées par la compagnie d'assurance au cours des 10 années (valeur de l'horizon temporel retenu). Il faut cependant tenir compte de l'inflation simulée pour obtenir les montants listés au niveau du premier tableau (ces taux ne seront pas détaillés ici pour ne pas surcharger la présentation).

Primes / Résultat

A partir des différents paramètres retenus en matière de taux de chargement, de niveau d'augmentation annuel des primes, du taux d'imposition,..., nous obtenons les valeurs suivantes en termes de primes et de résultat comptable (transféré vers les fonds propres) :

	Primes	Résultats
1	424 715	134 969
2	437 457	222
3	450 581	- 15 178
4	464 098	- 8 128
5	478 021	- 17 601
6	492 362	- 1 679
7	507 133	3 332
8	522 346	- 1 821
9	538 017	16 541
10	554 157	5 966

Signalons que s'il on se contentait, pour l'obtention du résultat comptable, de comparer de manière naïve le montant des primes à celui des sinistres, on trouverait systématiquement un résultat positif. Or ce n'est pas le cas et nous constatons, de ce fait, que des facteurs tels que les frais d'acquisition et la politique de distribution des dividendes jouent un rôle non négligeable dans la précision des résultats d'un modèle DFA.

Au vu du tableau précédent, le niveau relativement faible des résultats réalisés (en comparaison des fonds propres engagés) s'explique par un des paramètres retenu pour l'obtention de ces chiffres : 80% du résultat après impôt est distribué en dividendes. Seul le résultat réalisé la première année semble significatif ; il est dû au faible montant des prestations payées cette année là.

Evolution de la composition du portefeuille d'actifs

S'intéresser à la composition du portefeuille à chaque date de l'horizon temporel constitue un bon moyen de vérifier la validité des résultats obtenus au niveau de la simulation des éléments d'actifs. En effet, nous avons retenu un portefeuille d'actifs comprenant initialement 55% d'actions, 35% d'obligations et 10% de monétaire. En ce qui concerne la politique de réinvestissement et de désinvestissement, nous avons gardé ces mêmes proportions. De ce fait, la composition du portefeuille d'actifs (obtenue en effectuant la moyenne des compositions de l'ensemble des simulations effectuées) à chaque date ne doit pas être trop éloignée de l'allocation initiale.

	Actions	Obligations	Monétaire
1	52,05%	37,46%	10,49%
2	52,74%	36,78%	10,48%
3	52,24%	37,11%	10,65%
4	51,66%	37,50%	10,84%
5	52,83%	36,58%	10,60%
6	55,39%	31,47%	13,14%
7	52,75%	36,39%	10,86%
8	51,46%	37,16%	11,38%
9	49,30%	39,49%	11,21%
10	51,51%	37,41%	11,08%

Rentabilité du portefeuille d'actifs

La rentabilité du portefeuille d'actifs à chaque date de simulation est donnée dans le tableau suivant. Celle-ci peut paraître faible mais il faut garder à l'esprit qu'il s'agit ici de valeurs moyennes et que ces chiffres sont systématiquement supérieurs aux valeurs moyennes du taux court terme simulées.

	Rentabilité du portefeuille
1	2,96%
2	3,00%
3	3,61%
4	3,52%
5	3,90%
6	4,11%
7	4,53%
8	4,99%
9	4,91%
10	3,84%

Marge de solvabilité / Fonds propres

Enfin, nous regroupons dans ce dernier tableau les valeurs de la marge de solvabilité réglementaire que l'entreprise doit respecter et le montant de fonds propres qu'elle détient à chaque date.

	MSR	Fonds propres
1	76 449	440 844
2	78 742	454 458
3	81 105	455 607
4	83 538	463 083
5	86 044	461 261
6	88 625	478 292
7	91 284	503 115
8	94 022	519 842
9	96 843	555 122
10	99 748	581 374

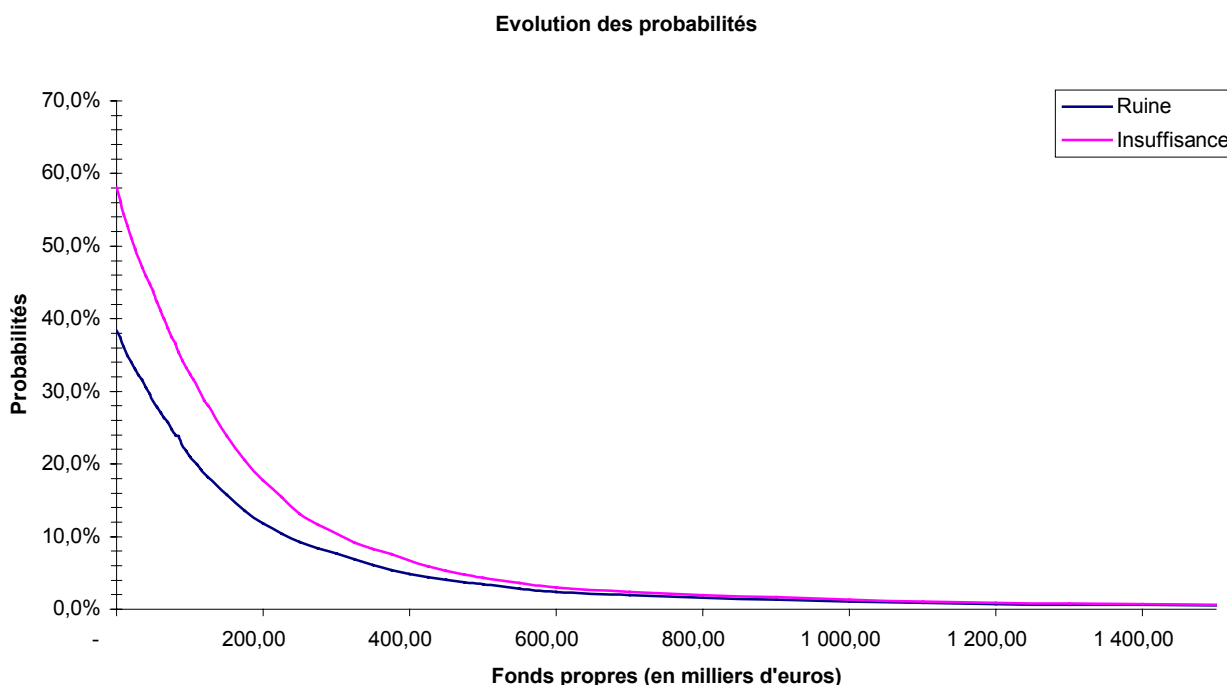
Remarquons que, dans le cadre de notre modélisation, le premier résultat comptable joue un rôle déterminant dans l'évolution dans le temps du montant des fonds propres (celle-ci étant beaucoup plus régulière à partir de la deuxième année de l'horizon temporel).

SECTION 5 : RESULTATS DE PROBABILITES

Cette dernière section présente les résultats obtenus en matière d'indicateurs de risque. Ceux-ci peuvent servir de base d'analyse aux décideurs d'entreprise et permettre de répondre à différentes interrogations, notamment « Quel niveau de niveau de fonds propres l'entreprise doit elle adopter pour se couvrir contre une ruine ou contre une insuffisance de fonds ? ».

A - COURBE DE RUINE ET COURBE D'INSUFFISANCE

Compte tenu des paramètres qui ont été retenus pour la modélisation de notre société fictive (et qui sont listés en annexe X), nous aboutissons à une courbe qui fournit, pour un niveau de fonds propres donné, la probabilité de ruine et la probabilité d'insuffisance associées.



De manière tout à fait logique et attendue, la courbe d'insuffisance se situe au-dessus de la courbe de ruine : une ruine implique inévitablement une insuffisance, l'inverse n'étant pas vérifié systématiquement. Pour des montants de fonds propres peu élevés, la probabilité de survenance est beaucoup plus sensible à un apport de fonds : à ce stade, les sinistres qui sont à l'origine des scénarii s'insuffisance sont plus aisés à couvrir que ceux qui causent les scénarii de ruine.

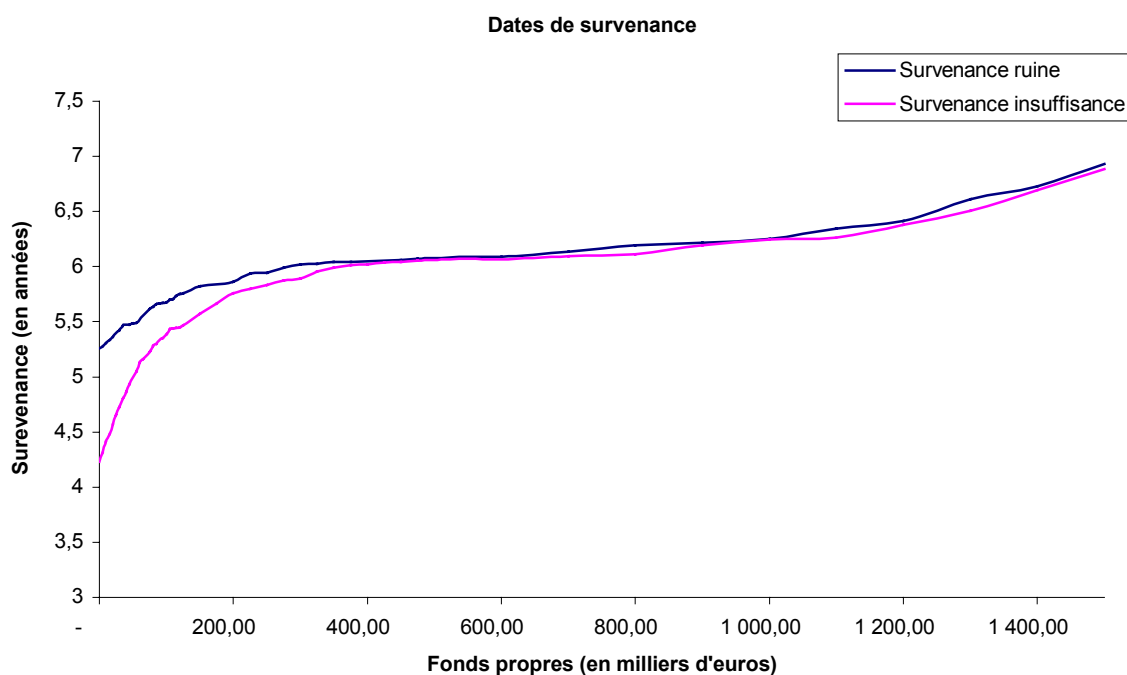
D'autre part, nous constatons, pour des niveaux élevés de fonds propres, que les deux courbes sont sensiblement voisines : à ce niveau de couverture, les sinistres qui sont à l'origine d'une insuffisance de fonds sont également ceux qui causent la ruine de la société.

B - DATE DE SURVENANCE

Pour chaque niveau de fonds propres, l'application fournit :

- × la date moyenne de survenance de la ruine (lorsqu'elle survient).
- × la date moyenne de survenance de l'insuffisance (lorsqu'elle survient).

Le recueil de ces informations conduit à la construction du graphe suivant :



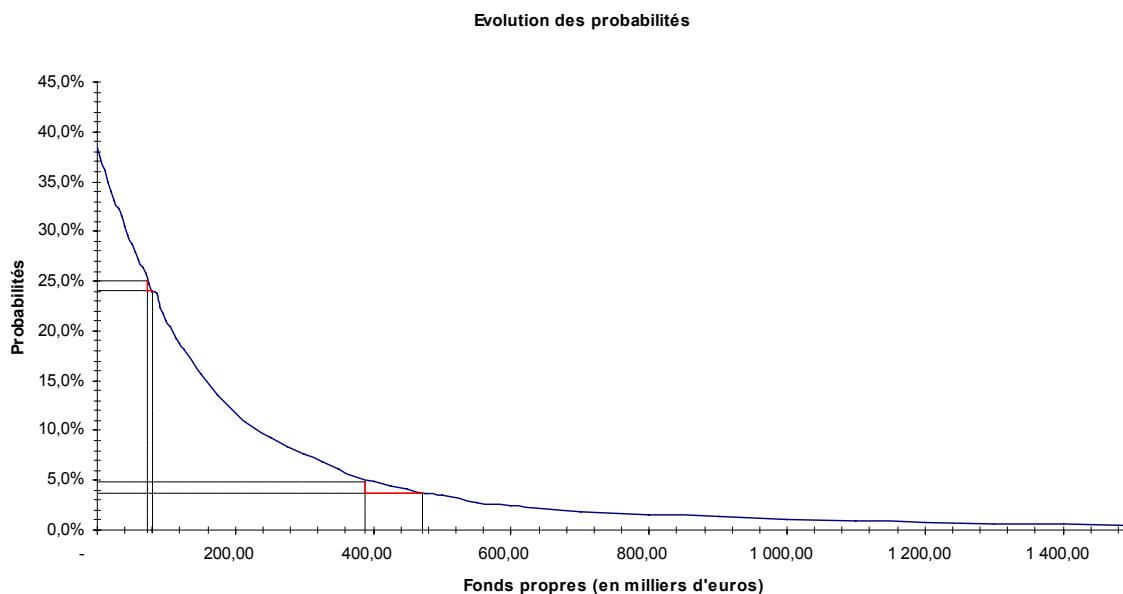
Les deux courbes sont assez semblables et nous constatons une sensibilité non significative des dates de survenance par rapport aux fonds propres : la survenance de la ruine et de l'insuffisance se situent strictement entre 4 et 7 ans.

Les tendances des courbes sont globalement croissantes : une augmentation des fonds propres conduit non seulement à une diminution des probabilités de ruine et d'insuffisance mais également à un recul des dates de survenance éventuelle.

D'autres facteurs que nous préciserons ultérieurement ont une incidence plus importante sur les dates de survenance.

C - COÛT MARGINAL DES PROBABILITES

La diminution de la probabilité de ruine (ou de la probabilité d'insuffisance) n'a pas le même coût suivant qu'elle est réalisée à un niveau faible ou élevé de couverture. Le schéma suivant illustre cette remarque sur la courbe de probabilité de ruine.



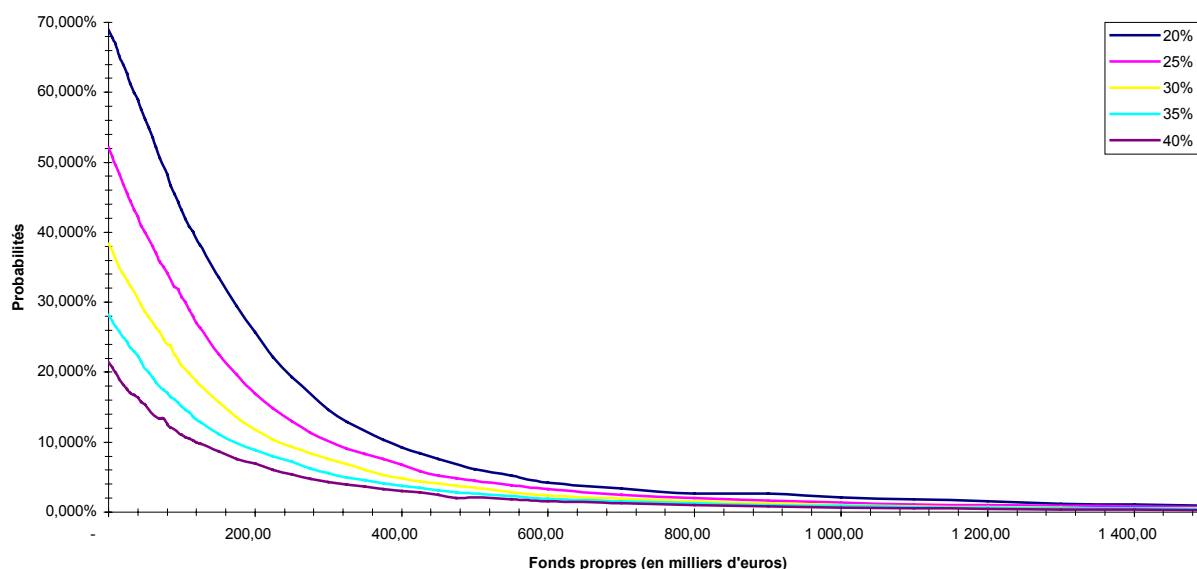
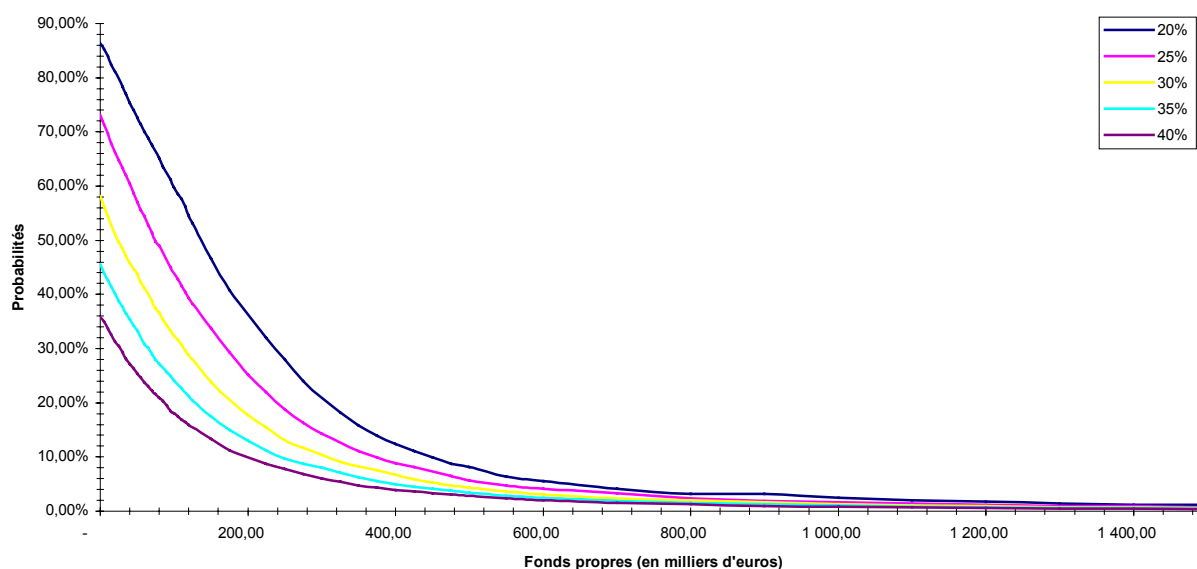
Comme le montre ce graphe, le passage d'une probabilité de ruine de 25% à 24% est synonyme d'une augmentation des fonds propres de 7,4%. En revanche, le passage d'une probabilité de ruine de 5% à 4% demande une augmentation des fonds propres beaucoup plus importante ; de l'ordre de 17.2%. Ce ratio est d'autant plus significatif que la probabilité de ruine à laquelle est entamée l'augmentation des fonds est faible.

A haut niveau de fonds propres, les sinistres qui sont à l'origine de la ruine et de l'insuffisance ont pour caractéristiques d'être peu nombreux et de montant élevés. La couverture (en termes de risque) contre ces sinistres de types « catastrophiques » nécessite un apport de fonds importants (relativement aux fonds propres déjà mobilisés) qui sont à la source de la croissance du coût marginal d'1% de probabilité de ruine en terme de fonds propres.

D - INFLUENCE DU TAUX DE CHARGEMENT SUR LES PRIMES

Tout à fait logiquement, une augmentation du taux de chargement conduit à une diminution de la probabilité de ruine et de la probabilité d'insuffisance. Cependant, au vu des graphes suivants, il paraît peu judicieux, pour une société dont les fonds propres sont conséquents, d'influer sur le taux de chargement des primes dans l'optique de faire diminuer la probabilité de ruine.

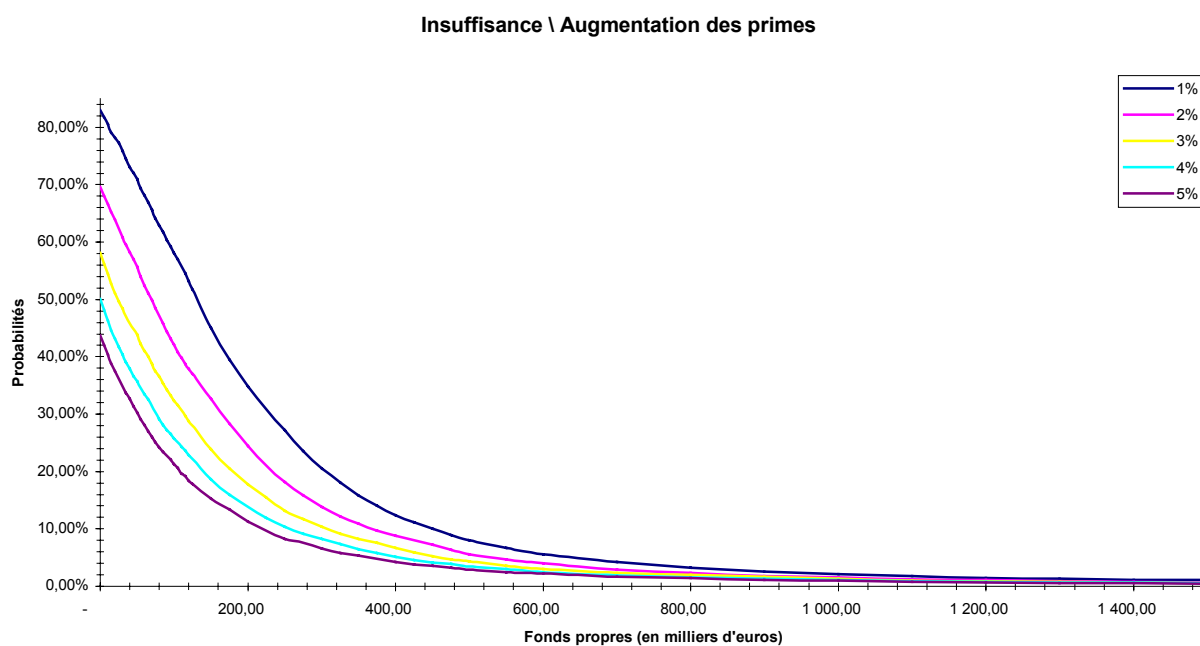
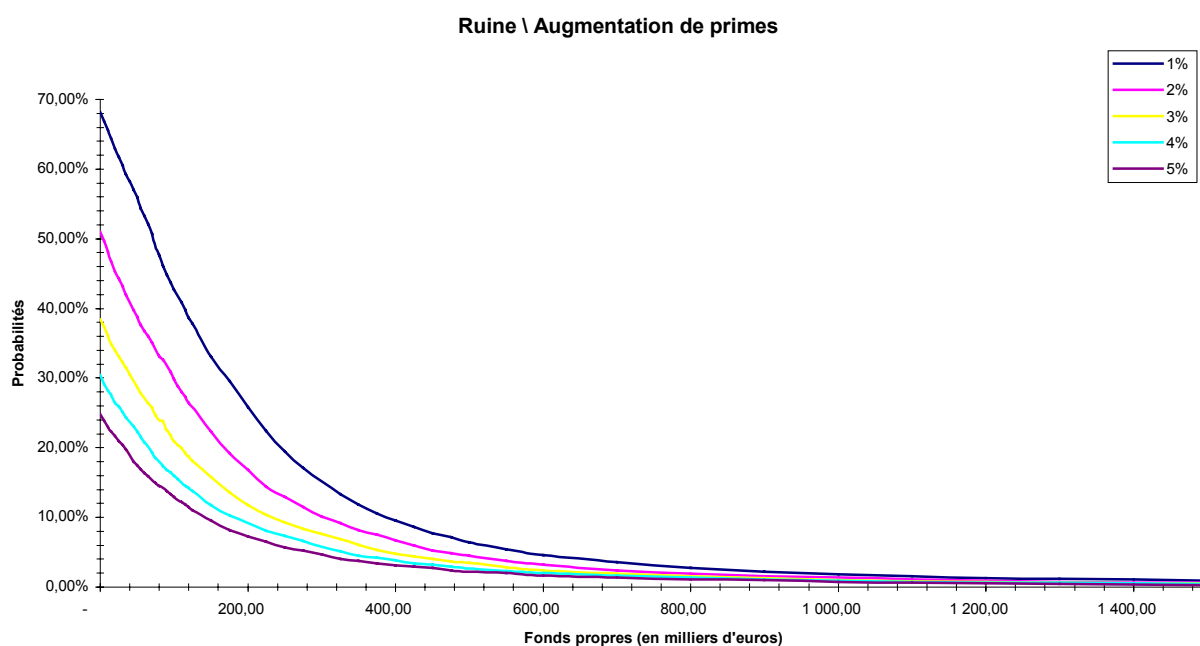
En effet, lorsqu'une société possède des fonds propres auxquels est associée une probabilité de ruine faible, une augmentation du taux de chargement n'a qu'un effet minime sur cet indicateur de risque. En revanche, son influence est importante pour des niveaux faibles de couverture.

Ruine \ Chargement**Insuffisance \ Chargement****E - INFLUENCE DE L'AUGMENTATION ANNUELLE DU MONTANT DES PRIMES**

En ce qui concerne l'augmentation annuelle du montant des primes, nous pourrions faire les mêmes remarques que pour le paragraphe précédent. Il est peu être plus intéressant de remarquer la similitude des courbes représentant l'évolution des probabilités en fonction du chargement avec les courbes représentant l'évolution des probabilités en fonction du taux d'augmentation annuelle du montant des primes.

En effet, ces courbes quasi-identiques permettent d'observer qu'une augmentation ou une diminution de 5% du taux de chargement est équivalente (du point de vue de l'impact sur la probabilité de ruine ou de la probabilité d'insuffisance) à une augmentation ou une diminution de 1% du taux de croissance des primes.

Ce type de correspondances peut jouer un rôle majeur du point de vue de l'aide à la décision et des choix marketing : certains décideurs préfèrent imposer aux assurés une augmentation brutale mais unique des tarifs alors que d'autres préféreraient opter pour une évolution plus régulière des tarifs.



F - INTERVALLE DE CONFIANCE

En matière de possibilités d'analyses, les sociétés d'assurance ne peuvent plus se contenter d'estimation de moyenne. Les outils qu'elles emploient doivent désormais prévoir l'estimation des intervalles de confiance.

Dans le cadre de notre étude, le problème est connu sous le nom d'intervalle de confiance pour une proportion⁵⁰. Sa valeur est donnée par :

$$\left[p - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

avec :

- * p : proportion trouvée dans un échantillon de taille n (dans notre cas, n correspond au nombre de simulations).
- * U : quantile de la loi normale. Pour un intervalle de confiance à 95%, $u_{\alpha/2}$ vaut 1,96.

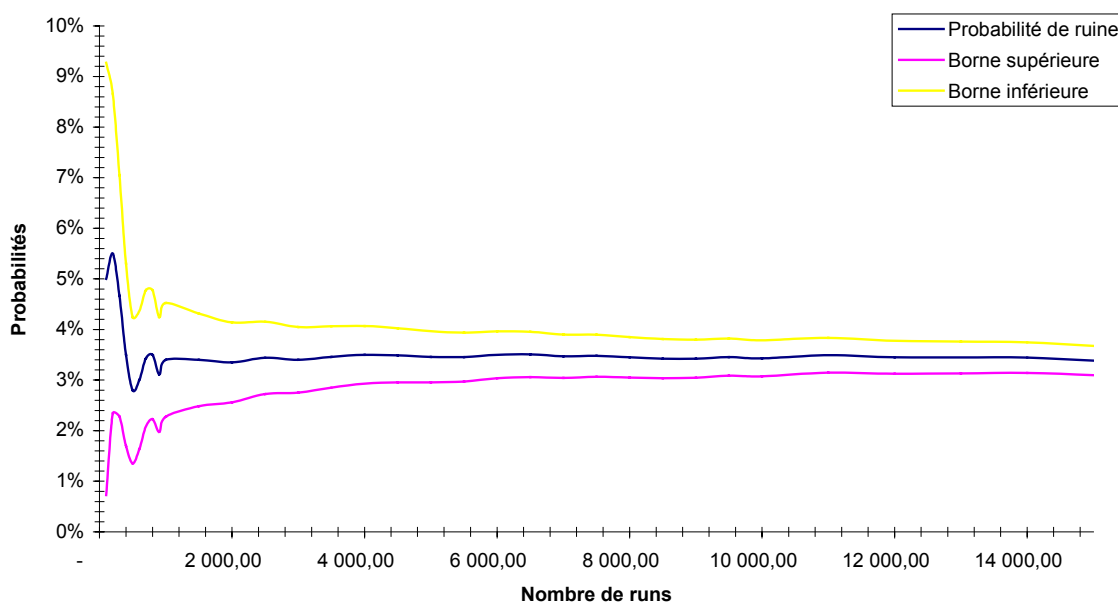
Dans le reste du développement, nous nous intéressons à l'intervalle de confiance standard à 95% et à l'influence que peuvent avoir certains paramètres sur la longueur de l'intervalle de confiance.

Intervalle de confiance et nombre de simulations

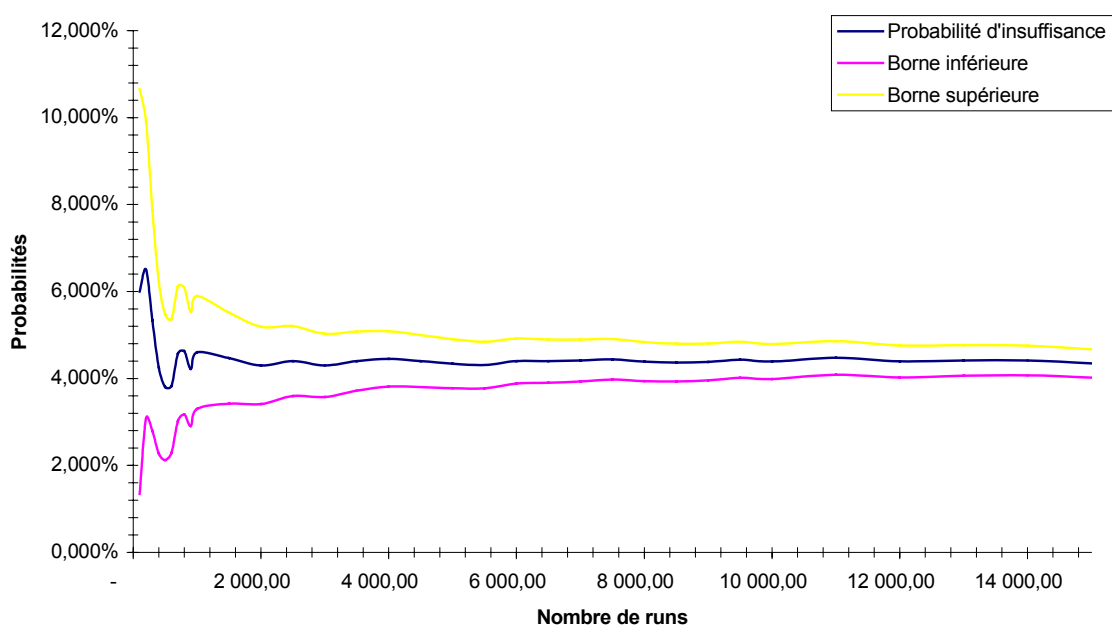
La longueur de l'intervalle de confiance est directement liée au nombre de simulations. Il faut donc retenir un nombre de runs qui ne soit pas trop élevé afin de ne pas être confronté à des temps de simulation sans fin, mais suffisant pour que l'estimation du paramètre soit correcte et que la longueur de l'intervalle de confiance ne soit réduite à un niveau acceptable. Le graphe suivant illustre la méthodologie à appliquer afin de sélectionner le nombre de runs « optimal » qui sera retenu pour l'ensemble des simulations.

⁵⁰ Cf. SAPORTA G. , "Probabilités, analyse des données et statistiques". Editions Technip.

Intervalle de confiance à 95% de la probabilité de ruine



Intervalle de confiance à 95% de la probabilité d'insuffisance



Les valeurs de la probabilité de ruine, de la probabilité d'insuffisance et la longueur des intervalles de confiance oscillent fortement pour un nombre de runs faible. Pour un nombre de runs supérieur à 5000 ou 6000, les différents items sont sujets à une relativement faible variabilité.

Intervalle de confiance et probabilité

La longueur de l'intervalle de confiance décroît approximativement de la même manière que la probabilité de ruine (graphe « Probabilité \ Fonds propres » du paragraphe A) . A titre indicatif, nous pouvons donner les bornes d'évolution de la longueur de l'intervalle de confiance qui ont été obtenues dans le cadre du paramétrage.

- Pour une probabilité de ruine de 38,38%, la longueur de l'intervalle de confiance vaut 2,70%.
- Pour une probabilité de ruine de 0,52%, la longueur de l'intervalle de confiance vaut 0,40%.
- Pour une probabilité d'insuffisance de 58,14%, la longueur de l'intervalle de confiance vaut 2,73%.
- Pour une probabilité d'insuffisance de 0,60%, la longueur de l'intervalle de confiance vaut 0,43%.

On constate donc qu'une augmentation de l'erreur relative accompagne la diminution de la probabilité de ruine

G - INFLUENCE DES CADENCES DE REGLEMENT

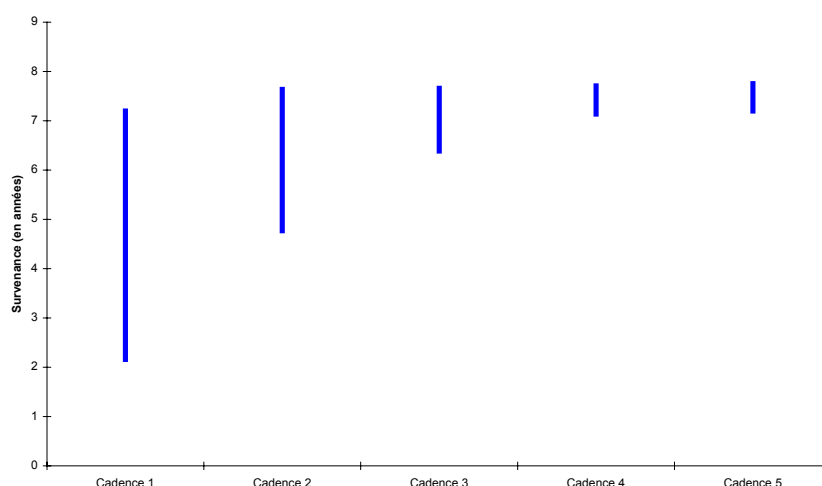
Les cadences de règlement ont une influence prépondérante sur la probabilité de ruine et la probabilité d'insuffisance. Plus le délais de règlement est long, plus les valeurs ces indicateurs de risque sont réduites.

Les cadences de règlement ont également une incidence sur les dates de survenance de la ruine ou de l'insuffisance (lorsqu'elles ont lieu). A titre d'illustration, nous avons retenu 5 types de cadences de règlement :

- Cadence 1 : règlement de la totalité des sinistres la première année.
- Cadence 2 : règlement des sinistres de manière uniforme sur les deux premières années.
- Cadence 3 : règlement des sinistres de manière uniforme sur les trois premières années.
- Cadence 4 : règlement des sinistres de manière uniforme sur les quatre premières années.
- Cadence 5 : règlement des sinistres de manière uniforme sur les cinq premières années.

Le graphe ci-dessous donne, pour chaque cadence, la longueur des intervalles dans lesquels se situent les dates de survenance de la probabilité de ruine (on obtient un graphe similaire pour la probabilité d'insuffisance).

Il montre que l'étalement du règlement des sinistres sur une période plus longue à pour effet de réduire assez nettement la longueur de l'intervalle comprenant la date de survenance et à faire reculer cette même date.



En conclusion, pour une société qui règle ses sinistres selon une cadence donnée, les modèles DFA peuvent s'avérer très utiles dans la mesure où ils permettent d'identifier les périodes de sécurité (au cours desquelles aucun scénario de ruine n'est identifié) et les périodes de risque (au cours desquelles le nombre de scénarii de ruine se multiplient).

H - PRISE EN COMPTE DE SINISTRES CATASTROPHIQUES

Dans le cadre de la prise en compte des sinistres catastrophiques, nous proposons une modélisation qui permet d'obtenir une queue de distribution des sinistres plus lourde. Il « suffit » pour cela de connaître le coût des sinistres de type exceptionnel (exprimé en fonction du coût moyen des sinistres récurrents) et leur probabilité de survie.

Nous notons ces derniers éléments :

- × $M_{\text{Excep}} = N_{\text{Excep}} \times E(X)$ pour le montant ;
- × Π_{Excep} pour la probabilité de survie.

L'ensemble des résultats présentés dans les paragraphes précédents étaient obtenus en considérant l'ensemble des sinistres comme « récurrents ». En revanche, les résultats suivants résultent d'une modification de la structure des sinistres : celle-ci incluant désormais les sinistres de type catastrophique.

L'espérance de la charge totale des sinistres exceptionnels vaut :

$$E(S_{\text{Excep}}) = \Pi_{\text{Excep}} \times N_{\text{Excep}} \times E(X)$$

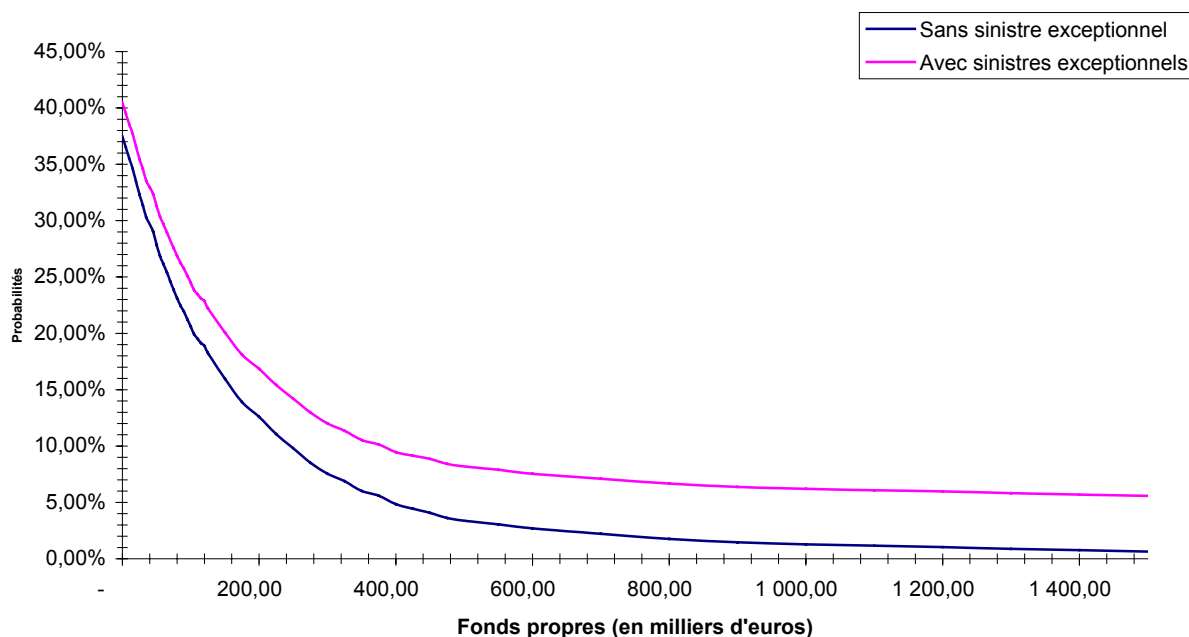
Celle des sinistres récurrents s'écrit :

$$E(S_{\text{Récurrents}}) = \lambda' \times E(X)$$

avec $\lambda' = \lambda - \Pi_{\text{Excep}} \times N_{\text{Excep}}$ (et λ paramètre utilisé pour le nombre de sinistres dans les simulations précédentes). Nous pouvons alors écrire la charge totale tout sinistres confondus :

$$E(S) = \lambda \times E(X)$$

Les valeurs retenues pour les paramètres de modélisation des sinistres catastrophiques ont été fixées de manière arbitraire afin de mieux cerner les modifications qu'implique la prise en compte de la distinction de la nature des sinistres.



La prise en compte de sinistres de nature catastrophique « en substitution » de sinistres dits récurrents a pour effet de créer des scénarii de ruine supplémentaires. Ainsi, à faible niveau de fonds propres, ces nouvelles ruines s'ajoutent à un nombre déjà conséquent de scénarii défavorables ; si bien que l'incidence est minimisée. En revanche, à haut niveau de fonds propres, les scénarii défavorables étant en nombre beaucoup plus restreint, l'introduction de sinistres catastrophiques modifie significativement la valeur de la probabilité de ruine (i.e. multipliée par 4 ou 5 dans notre illustration).

Cela indique, comme on pouvait s'y attendre, que la probabilité de ruine est associée à une bonne modélisation des sinistres exceptionnels (structurellement, modulo l'effet « taille », l'activité normale à peu de chances d'être ruinée).

Signalons également que la forme de cette nouvelle courbe revêt une particularité dans la mesure où elle met en valeur l'augmentation considérable du coût marginal d'1% de probabilité de ruine en terme de fonds propres.

I - INFLUENCE DU NOMBRE DE CONTRATS

Le nombre de contrats est un paramètre qui schématise la « taille de l'entreprise ». De cet élément vont dépendre le montant des sinistres réglés, le montant des primes encaissées, le niveau de MSR exigé,...

Partant d'une situation initiale de 100 contrats et un niveau de fonds propres de 300 000 euros, nous constatons une probabilité de ruine et d'insuffisance de valeurs respectives 15,4% et 20,9%. Nous faisons ensuite évoluer ces deux facteurs de manière proportionnelle et observons les effets sur les différents indicateurs de risque.

Plus le nombre de contrats est élevé, plus le phénomène de mutualisation montre son intérêt en faisant diminuer progressivement la probabilité de ruine (mais également la probabilité d'insuffisance). Ainsi pour un nombre de contrats (supérieur à 500) plus élevé que celui que nous avons retenu, nous observons que le rapport $\frac{\text{Fonds propres}}{\text{Nombre de contrats}}$ est associé à une probabilité de ruine quasi constante de l'ordre de 6%.

Conclusion

Dans l'étude que nous avons proposée, l'actif (taux d'intérêt, inflation, actions,...) et le passif (provisions, primes,...) ont tout deux été modélisés en vue de tirer des conclusions relatives à la gestion et à la régulation de la probabilité de ruine.

Le développement présenté en dernière partie, principalement basé sur les méthodes de simulations, constitue une des applications possibles de la Dynamic Financial Analysis. En fonction de l'objectif recherché par la société (qui doit être clairement défini avant toute mise en place de modèle), il est possible de se concentrer sur l'étude de différents items : mesure du risque, allocation stratégique d'actifs, contrôle de la trésorerie, etc.

En ce qui concerne l'application qui a été retenue en guise d'illustration des modèles DFA, nous avons choisi d'axer notre analyse sur un élément de mesure du risque relativement connu : la probabilité de ruine. Plus que de présenter des résultats numériques, le document propose une véritable méthodologie qui permet d'offrir aux décideurs, qui souhaitent atteindre un certain niveau de couverture contre le risque, un large spectre d'options et d'alternatives.

D'autre part, il est important de signaler que certains éléments et distinctions (que nous n'avons pas détaillés faute de temps) constituent des facteurs importants de la DFA :

- * généralisation à plusieurs branches d'assurance. La prise en compte de plusieurs branches doit indéniablement passer par une modélisation de la dépendance entre les branches considérées (via l'utilisation de copulas) ;
- * réassurance⁵¹ de tout types (proportionnelle, excédent de sinistre, stop loss) ;
- * évolution de la souscription ;
- * modélisation et traitement particulier des sinistres catastrophiques.

La prise en compte des liens existants entre les différents postes modélisés sont à l'origine de la complexité de tels modèles et les temps de simulation peuvent s'avérer relativement longs suivant les paramètres pris en compte. De ce fait, certaines simplifications peuvent être envisagées si la mise en place de l'analyse et les résultats doivent être réalisés en un laps de temps relativement court. Indéniablement, les possibilités d'analyse qu'offre la DFA sont étendues et diversifiées. A cet égard, ce chantier (à peine entamé) se présente comme un domaine d'activité privilégié de l'actuariat moderne. Et il n'est alors pas étonnant de voir plusieurs organismes représentatifs de l'actuariat (notamment l'Institut des Actuaire) se concentrer sur ce sujet faisant appels à différentes connaissances maîtrisées par l'actuaire (provisionnement, tarification, finance, comptabilité,...).

⁵¹ Cf. ODJO H., DE LA FOATA C., "Analyse d'un système de sécurité cohérent et optimal pour une compagnie d'assurance IARD".

Bibliographie

Ouvrages et articles

- × AUGROS J.C., [1989], *“Les options sur taux d'intérêt : dynamique des taux et évaluation”*. Economica
- × BEHAN D.F., FELDBLUM S., GATTIS D., [1995], *“Dynamic financial models of property-casualty insurers”*. The Casualty Actuarial Company.
- × BLACK F., DERMAN E., TOY W., [1990], *“A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options”*. Journal of political economy.
- × BLACK F., SCHOLES M., [1973], *“The pricing of options and corporate liabilities”*. Journal of political economy.
- × BONNASSIEUX M., BRUNEL V., *“Modèle de Ho et Lee généralisé”*.
- × COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., [1985], *“A theory of the term structure of interest rate”*. Econometrica.
- × D'ARCY S.P., GORVETT R.W., HERBERS J.A., HETTINGER T., [1997], *“Building a DFA Analysis model that flies”*. The Casualty Actuarial Company.
- × D'ARCY S.P., GORVETT R.W., HETTINGER T.E., LEHMANN S.G., MILLER M.J., [1998], *“Building a public access PC-Based DFA model”*. The Casualty Actuarial Company.
- × DEMPSTER M.A.H., *“Risk Management : Value at Risk and beyond”*. Cambridge University Press.
- × DESPEYROUX A., PARTRAT Ch., LEVI Ch., VIGNANCOURT J., [2003], *“Technique for valuation a general insurance company within the framework of IAS standards : some proposals”*. Forum Astin.
- × DE WINNE R., *“Processus de diffusion de taux d'intérêt et correction du biais de discrétisation”*. Université Catholique de Louvain.
- × DUPIN G., MONFORT A., VERLE J.P., [2003], *“Robust inference in rating models”*. Astin 2003.
- × GERMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C., [1995], *“Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing of options”*. Journal of Applied Probability.
- × HETTINGER T., *“Dynamic Financial Analysis in the new millemium”*. The Casualty Actuarial Company.
- × HEATH D., JARROW R., MORTON K., [1990], *“Bond pricing and the term structure of interest rate : a discret time approximation”*. Journal of financial and quantitative analysis.
- × HO et LEE, [1986], *“Term structure movements and pricing interest rate contingent caims”*. Journal of finance.
- × HULL J., WHITE A., [1996], *“Using Hull-White interest-rate trees”*. Journal of derivatives.
- × ISAAC D., BABCOCK N., *“Beyond the frontier: using a DFA model to derive the cost of capital”*. Swiss Re investors.

- × KAUFMANN R., GADMER A., KLETT R., [2001], *"Introduction to Dynamic Financial Analysis"*, Astin Bulletin.
- × LAMBERTON D., LAPEYRE B., [1997], *"Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance"*. Ellipses.
- × MARKOWITZ H.M., [1952], *"Portfolio selection"*. Journal of finance.
- × McCULLAGH P., NELDER J.A., [1989], *"Generalized Linear Models"*. Fahrmeir & Tutz
- × ODJO H., DE LA FOATA C., *"Analyse d'un système de sécurité cohérent et optimal pour une compagnie d'assurance IARD"*.
- × PARTRAT C., JAL P., [2002], *"Evaluation de la provision pour sinistres, Mesures d'incertitude, Bootstrap"*. Support de cours ISFA.
- × QUITTARD-PINON F., [2002], *"Mathématiques financières"*. Ems.
- × REGAZZONI Y., [1997], *"Les provisions techniques une approche par simulations"*. Bulletin Français d'Actuariat.
- × SAPORTA G., *"Probabilités, analyse des données et statistiques"*. Editions Technip.
- × SHAH H., NAKADA P., [1999], *"Deconstructing DFA"*. Global Reinsurance.
- × VASICEK O., [1977], *"An equilibrium characterisation of the term structure"*. Journal of financial economics.
- × VERALL R.J., [1991], *"On the estimation of reserves from loglinear models"*. Insurance : mathematics and economics.
- × VERALL R.J., ENGLAND P.D., [1999], *"Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving"*. Insurance : mathematics and economics.
- × WILKIE A.D., [1995], *"More on a stochastic asset model for actuarial use"*. British Actuarial Journal.

Mémoires

- × BERTHOIX F., CRUGNOLA J., [2001], *"Approche dynamique et stochastique de la solvabilité en assurance"*. Thèse IAF.
- × BOKOBZA N., [2002], *"Comparaison des modèles stochastiques d'allocation d'actifs pour un portefeuille de prévoyance collective"*. Mémoire Université Paris IX Dauphine.
- × JACQUEMIN J., [2003], *"L'utilisation des méthodes de simulation en assurance"*. Mémoire ISFA.

Autres

- × CALLARD J., [2003], *Conférence ISFA sur la DFA*.
- × INSTITUT DES ACTUAIRES, [2003], *Déjeuners débats sur la DFA*.
- × LAFAILLE A., GOACHET O., THEROND P., TRANCHARD A., [2003], *"Dynamic Financial Analysis"*. Groupe de travail ISFA.
- × CODE DES ASSURANCES : *Articles R332, R331, R334, A132*. Editions Lamy.

ANNEXES

Annexe 1 : Théorèmes financiers⁵²

Théorème de Girsanov

Soit l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ où, $\mathcal{F}$ est la filtration du Π -mouvement brownien z . X une variable aléatoire adaptée à $\mathcal{F}_t$ telle que :

$$E_{\Pi} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T X^2(t) \cdot dt \right\} \right] < \infty \quad (\text{condition de Novikov})$$

Alors il existe une mesure Q équivalente à Π définie sur $\mathcal{F}_T$ par la densité de Radon Nikodym :

$$\frac{dQ}{d\Pi} = \exp \left\{ \int_0^T X(t) \cdot dz - \frac{1}{2} \int_0^T X^2(t) \cdot dt \right\}$$

$$z(t) = z(t) - \int_0^t X(s) \cdot ds$$

pour $t \in [0, T]$ est un mouvement brownien sous la nouvelle mesure de probabilité Q et la filtration de z .

Lemme d'Itô

Si x suit l'équation scalaire : $dx = \mu(x, t) \cdot dt + \sigma(x, t) \cdot dz$ alors toute fonction numérique $y(x, t)$ de classe C^2 par rapport à x et de classe C^1 par rapport à t , on a :

$$dy = \left[y_t + y_x \cdot \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot y_{xx} \right] \cdot dt + y_x \cdot \sigma \cdot dz$$

Dans le cas d'un processus vectoriel, le résultat s'écrit :

$$dy = \left[y_t + y'_x \cdot \mu + \frac{1}{2} \cdot \text{trace}(y_{xx} \cdot \sigma \sigma') \right] \cdot dt + y'_x \cdot \sigma \cdot dz$$

Théorème d'évaluation par changement de numéraire

Etant donné un nouveau numéraire X tel que $X(t) \cdot \delta(t)$ est une Q -martingale. Il existe une mesure Q_x sur $\mathcal{F}_T$, définie par :

$$\frac{dQ_x}{dQ} = \frac{X(T)}{X(0) \cdot P(T)} = \frac{X(T)}{X(0)} \times \delta(T)$$

tels que les actifs financiers de base exprimés dans ce nouveau numéraire sont des Q_x -martingales.

La valeur d'équilibre $f(S, t)$ de l'actif dérivé de payoff $H(T)$ en T s'écrit :

$$f(S, t) = X(T) \cdot E_{Q_x}^t \left[\frac{H(T)}{X(T)} \right]_s$$

⁵² Cf. QUITARD-PINON François, "Mathématiques financières". Editions EMS.

Théorème de changement de temps

Soit $M(t)$ la martingale définie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dM = x_1(t).dz_1 + x_2(t).dz_2$$

où z_1, z_2 sont des browniens non corrélés et x_1, x_2 sont des fonctions déterministes. On définit une fonction strictement croissante : $\tau(t) = \int_0^t [x_1^2(u) + x_2^2(u)] . du$. Dans ces conditions, il existe un unique mouvement brownien B vérifiant :

$$M(t) = M(0) + B(\tau(t))$$

Corollaire du théorème du changement de temps

Si M est définie par : $\frac{dM}{M} = x_1(t).dz_1 + x_2(t).dz_2$, il vient alors

$$M(t) = M(0). \exp \left\{ B(\tau(t)) - \frac{1}{2} . \tau \right\}$$

Annexe 2 : Temps de simulation

Le temps de simulation est fortement sensible au nombre de runs et au nombre de contrats. Pour obtenir des résultats fiables, il est conseillé de procéder aux simulations avec un nombre de runs supérieur à 5000.

Les caractéristiques de l'ordinateur utilisé pour l'obtention des résultats sont les suivants :

- * Pentium 3
- * 700 MHz
- * 524 Mo de RAM

Pour 100 contrats et 5 000 runs, le temps d'obtention des différents indicateurs (probabilité de ruine, probabilité d'insuffisance, date de survenance de la ruine, date de survenance de l'insuffisance) s'effectue en 1 minute et 5 secondes. La construction d'une courbe comprenant 50 points nécessite approximativement 1 heure.

Pour 100 contrats et 10 000 runs, le temps d'obtention des différents indicateurs est de 2 minutes 30 environ.

Lorsqu'on augmente le nombre de contrats à 10 000, le temps de réponse de l'application est de 12 minutes et 30 secondes.