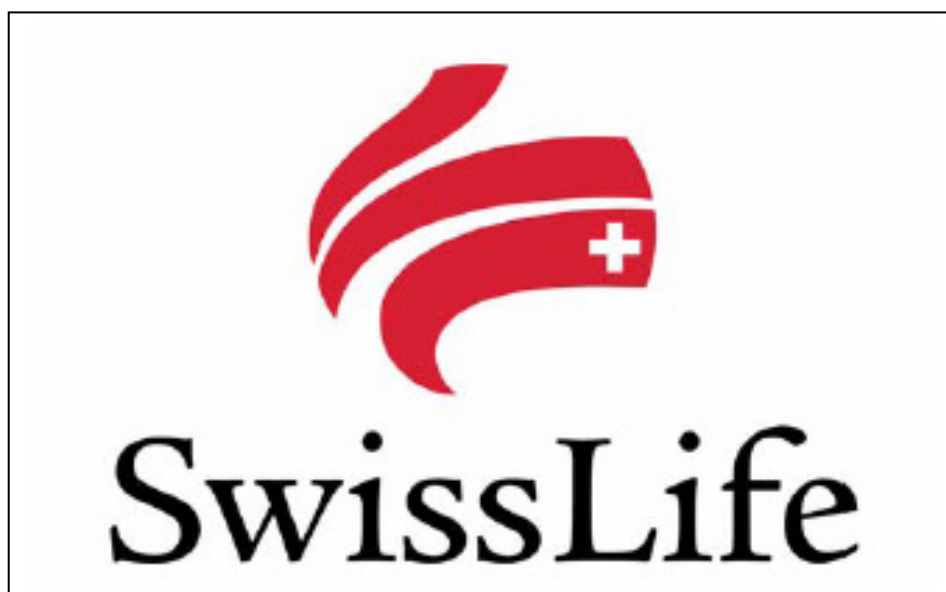


Rapport Final de Travail de Fin d'études

« Replicating Portoflio » et capital économique en assurance vie

REVELEN, Julien



Tuteurs :

ECL :

Blanchet-Scalliet, Christophe

Entreprise :

Grigorov, Vladislav
Phung, Quentin

Option : Mathématiques et décisions

Filière : Ingénierie mathématiques

Métier : Ingénieur d'affaire

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Vladislav Grigorov responsable du service ALM ainsi que Quentin Phung chargé d'études ALM qui ont été mes tuteurs de stage. Par leur expertise du métier de risk-management en assurance j'ai pu appréhender des notions clés dans cette activité. En m'accordant de l'autonomie ils m'ont permis d'apporter et développer une analyse à la méthode « des Replicating Portfolio ».

Je remercie aussi Anne Larpin directrice financière Swisslife France et Stephane Camon directeur des risques qui ont prêté une oreille attentive aux différentes conclusions de mon travail. Je les remercie d'avoir accordé une confiance à mon travail.

Enfin, je remercie Fatima El Mouquaddem et Christophe Gramet membres du service ALM.

Résumé du rapport :

Les nouvelles directives Solvabilité II ont pour but de définir le capital économique nécessaire à la solvabilité des compagnies d'assurances. Pour ce faire, la gestion et la quantification des risques par des modèles est alors un élément clé. Une approche possible consiste en l'utilisation des modèles stochastiques de type modèle interne.

Dans ce contexte de simulations, la détermination du capital économique s'apparente au calcul d'une mesure de risque à un seuil et un horizon donné. Ce calcul pose alors un problème d'ordre technique et opérationnel puisqu'il s'agit d'utiliser des « nested simulations » (simulations dans les simulations).

La méthode dite « Replicating Portfolio » a pour but de résoudre cette problématique en ayant recours à un portefeuille d'actifs valorisables par formules fermées.

Ce rapport présentera le cadre théorique et les applications de la méthode du « Replicating Portfolio ». La faisabilité, les conditions de succès et les limites de l'approche seront discutées. L'analyse se basera sur des exemples concrets de produits épargne type « Euro ».

Mots-clés libres :

Replicating Portfolio ; capital économique ; MCEV ; Solvabilité II ; modèle interne

Abstract :

The new guidelines of Solvency II define the solvency capital requirement necessary for the solvency of insurance companies. Risk-Management is one of the key points to manage and quantify risks. Stochastic models constitute one of the approaches to do that.

In this simulation context the determination of the solvency capital requirement can be viewed as a problem of calculation risk measure with a given horizon and threshold. This calculation leads to a technical and practical issue called "Nested simulations".

The "Replicating Portfolio" technique aims at finding a portfolio which could be priced with closed formula.

This present document will introduce the "Replicating Portfolio" approach. The feasibility, the applications conditions and the limits will be discussed. The analysis will be based on practical examples of savings products

Keywords:

Replicating Portfolio ; solvency capital requirement ; MCEV ; Solvency II ; internal model

Tables des matières

REMERCIEMENTS.....	2
TABLES DES MATIÈRES.....	7
INTRODUCTION.....	9
1.1 LE GROUPE SWISSLIFE / LE SERVICE ALM	10
1.1.1 LE GROUPE SWISSLIFE	10
1.1.2 LE SERVICE ALM ET MODELISATION.....	10
1.2 L'ACTIVITE D'ASSURANCE ET LE CADRE REGLEMENTAIRE	12
1 LE CAPITAL ÉCONOMIQUE DANS LE CADRE D'UN MODÈLE INTERNE : L'APPROCHE DES « RÉPLICATION PORTFOLIO »	14
1.1 BILAN ECONOMIQUE VS BILAN COMPTABLE D'ASSURANCE VIE.....	14
1.1.1 QU'EST CE QU'UN BILAN (COMPTABLE OU ECONOMIQUE)	14
1.1.2 LES PRINCIPALES REGLES COMPTABLES FRANÇAISES (FRENCH GAAP)....	16
1.2 LA VALORISATION MARKET CONSISTENT EMBEDDED VALUE	20
1.2.1 PRINCIPE DU CALCUL MARKET CONSISTENT EN ASSURANCE VIE.....	21
1.2.2 MODÈLE PROPHET ALS.....	23
1.2.2.1 MODÈLES UTILISÉS : TAUX, INDICES ACTIONS	23
1.2.2.2 CALCULS DES CASH-FLOWS / MANAGEMENTS RULES.....	25
1.3 LE CAPITAL ÉCONOMIQUE.....	29
1.3.1 PRESENTATION THEORIQUE DU CALCUL DE CAPITAL ECONOMIQUE HORIZON 1 AN	29
1.3.2 LES PROBLEMES PRATIQUES DU CALCUL DE LA VAR A HORIZON 1 AN.....	31
1.3.3 INTRODUCTION DE LA NECESSITE DU « REPLICATING PORTFOLIO »	32
2 LA MÉTHODE DITE DES « REPLICATING PORTFOLIO » : PRÉSENTATION THÉORIQUE	36
2.1 LES DONNÉES / L'UNIVERS D'ACTIFS	36
2.1.1 LES DONNEES GENERES PAR LE MODELE PROPHET ALS	36
2.1.2 L'UNIVERS D'ACTIFS	38
2.2 METRIQUES DE REPLICATION.....	40
2.2.1 PRESENT VALUE MATCHING	40
2.2.1.1 LA MINIMISATION DES MOINDRES CARRÉS	41
2.2.1.2 LA RÉGRESSION SUR COMPOSANTES PRINCIPALES.....	45
2.2.2 PRESENT CASH FLOW MATCHING :	50
2.2.3 QUESTIONS / PROBLEMATIQUES LIEES AU CALCUL DE LA VAR	54
2.2.3.1 CALCUL DE LA DISTRIBUTION DU PASSIF	55
2.2.3.2 « INTUITION » DU ROLE DE LA METRIQUE DANS LE CALCUL DE LA DISTRIBUTION.....	57
2.2.3.3 PRICING DU PORTEFEUILLE REPLIQUANT / CALCUL DES SENSIBILITES...	58
3 MISE EN PRATIQUE DE LA MÉTHODE DES REPLICATING PORTFOLIO.....	61
3.1 INTRODUCTION A UN CONTRAT D'EPARGNE AVEC GARANTIES.....	61
3.1.1 PRESENTATION DU CONTRAT « FICTIF » D'UN POINT DE VUE FINANCIER ..	61
3.1.2 PREMIERS RÉSULTATS DE RÉPLICATION / VAR	63
3.1.2.1 LES REPLICATIONS	63
3.1.2.2 LES DISTRIBUTIONS DE PASSIF.....	70

3.1.3	PRODUIT EPARGNE « EURO » EN PRATIQUE DANS LES NORMES COMPTABLES	72
3.2	REPLICATION D'UN PORTEFEUILLE DE CONTRATS EPARGNE EN FONCTION DE PLUSIEURS PARAMETRES	74
3.2.1	ALLOCATION 100% "CASH"	75
3.2.2	ALLOCATION 100 % OBLIGATIONS	78
3.2.3	L'ALLOCATION 50% ACTIONS -50% OBLIGATIONS	82
	CONCLUSION	84
1.1	POINTS CLES DE LA METHODE « REPLICATING PORTFOLIO »	84
1.1.1	CONNAISSANCE DE LA MÉTRIQUE	84
1.1.2	L'UNIVERS D'ACTIFS	86
1.1.3	LA VALIDATION ET L'UTILISATION DU PORTEFEUILLE REPLIQUANT	87
1.2	DÉVELOPPEMENT / LES APPROCHES ALTERNATIVE	88
	BIBLIOGRAPHIE	89
	TABLES DES ANNEXES	90

Introduction

Dans le but de d'obtenir la double qualification ingénieur Centrale / Actuaire, j'ai choisi d'effectuer mon stage de fin d'études dans une compagnie d'assurance. Swisslife France m'a offert l'opportunité de découvrir son service de Risk Management au sein de sa direction financière. Il m'a été proposé de développer la méthode dite du « Replicating Portfolio » en collaboration avec le groupe Swisslife. Ce stage à caractère théorique m'a semblé pouvoir s'inscrire dans la continuité de ma dernière année effectuée en parallèle à l'Ecole Centrale de Lyon et l'ISFA. Au vu de l'intérêt de la problématique, je pense d'ailleurs effectuer mon mémoire d'actuaire l'année prochaine sur l'approche accélérateur des « simulations dans les simulations ».

Tout d'abord, j'ai pu appréhender les notions de valorisation économique des compagnies d'assurance ainsi que les notions de comptabilité qui y ont trait. Le développement du modèle m'a familiarisé avec la programmation en langage R et m'a introduit à l'utilisation du logiciel Prophet. L'utilisation du modèle sur des exemples particuliers m'a permis de comprendre dans le détail certains produits d'assurance. Ainsi dans le cadre de rapport, nous adopterons la démarche suivante :

L'introduction présentera la thématique de mon stage au sein du service ALM et dans le cadre réglementaire des assurances.

La première partie développera le principe du calcul Market Consistent nécessaire à la compréhension de la méthode du « Replicating Portfolio ». Le calcul Market Consistent faisant appel aux notions comptables, nous présenterons celles-ci au début de cette partie. Nous conclurons par la présentation de la méthode du « Replicating Portfolio » dans le calcul de la distribution du passif à horizon 1 an.

La deuxième partie permettra de formaliser le problème et présentera deux principales métriques ainsi que les problèmes de minimisations associés. On conclura par la

présentation du calcul du quantile de la distribution du passif et le pricing du portefeuille répliquant.

La troisième partie de ce rapport exposera plusieurs exemples de réplication de portefeuille de contrats. Cette partie sera l'occasion de comprendre les problématiques liées aux normes comptables dans une réplication par des instruments financiers.

Enfin nous conclurons ce mémoire sur les limites et les points clés de cette approche.

1.1 Le groupe Swisslife / Le service ALM

1.1.1 Le groupe Swisslife

SwissLife France est une des entités de SwissLife Groupe. Les trois pôles d'activité principaux sont:

- Assurances Vie/Retraite géré par SLAP (Swiss Life Assurance et Patrimoine)
- Assurances Santé/Prévoyance gérées par la société SLPS (Swiss Life Prévoyance et Santé)
- Assurances Dommages aux Biens gérées par les sociétés SLAB (Swiss Life Assurance de Biens), CEAT et Garantie Assistance

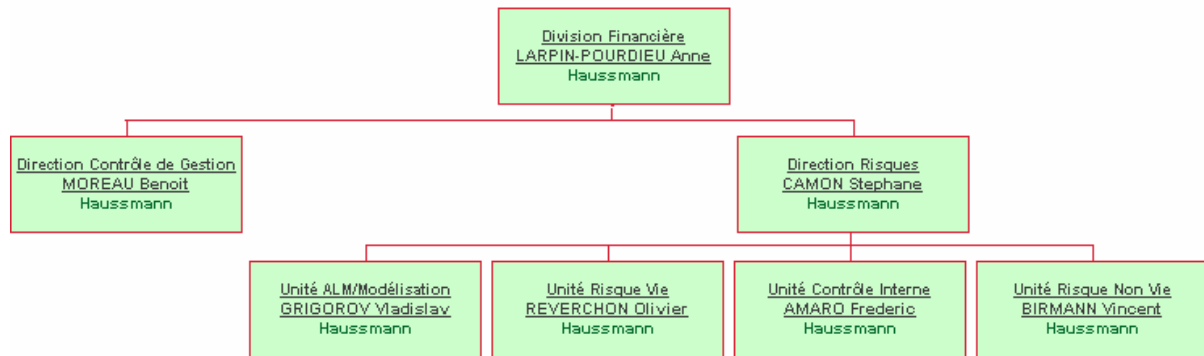
D'autres activités:

- Asset Management (SLAM)
- Gestion Privée (Swiss Life Banque)

SwissLife France a réalisé en 2008 un chiffre d'affaires de 3.6 milliards d'euros soit 30% de celui du groupe.

1.1.2 Le service ALM et modélisation

Le service ALM et modélisation est en charge du risk-management et est intégré au sein de la direction financière :



Le service ALM et modélisation est en charge du :

- Contrôle des risques et de leur reporting
- Proposer une stratégie d'allocation d'actifs
- Développer des modèles de calcul de capital économique et de solvabilité

De manière générale, le code des assurances introduit explicitement la nécessité d'un service risk-management:

« Les entreprises d'assurance doivent procéder en permanence à une évaluation de leurs risques financiers en effectuant notamment des simulations de l'impact de la variation des taux d'intérêt et des cours boursiers sur leur actif et leur passif et des estimations comparées de l'exigibilité de leur passif et de la liquidité de leur actif »
(article R. 332-1-2 du code des assurances)

Ce service est donc un acteur clé dans la gestion des risques quantifiables d'un organisme d'assurances. Ces risques peuvent être classifiés comme suit :

- **Risques viagers** : risques liés à la durée de la vie humaine. Ils existent dès lors que le contrat d'assurance prévoit une prestation d'un montant différent ou une date différente de versement de la prestation selon que l'assureur survit ou décède.
- **Risques financiers** : risques liées aux variables économiques (taux d'intérêt, cours des actions...) qui peuvent créer un décalage préjudiciable entre la valeur des actifs et celle des passifs. Un organisme d'assurance est essentiellement sujet au risque de taux puisque l'essentiel de ses placements est constitué de produits obligataires. On peut donc distinguer deux grands risques :

- **Risque de réinvestissement** : il s'agit du risque que le taux de rendement auquel se feront les investissements futurs soit inférieur aux taux garantis au titre des contrats d'assurance.
- **Risque de liquidation** : il s'agit du risque d'avoir à céder des obligations avant leur remboursement, alors que ces obligations sont en moins value par rapport à leur prix d'achat.

Nous pouvons maintenant présenter le contexte réglementaire propre à l'activité d'assurance ce qui permettra d'introduire la problématique du « Replicating Portfolio ».

1.2 L'activité d'assurance et le cadre réglementaire

Lorsqu'on introduit l'activité d'assurance il est toujours intéressant de rappeler une de ces spécificités majeure. Contrairement à un cycle de production « classique » celui d'une compagnie d'assurance est inversé, c'est-à-dire que le prix de ce qui est vendu (l'assurance) est déterminé avant que les charges (le coût du sinistre) ne soient connues. En remarquant que ce cycle de production peut s'écouler sur plusieurs années en raison des procédures de règlements de sinistres ou de la durée de détention du contrat d'assurance, l'activité de l'assureur ne peut être envisageable que si la compagnie anticipe ses coûts et maîtrise les risques concernant son portefeuille d'assurés. Au vu du rôle majeur des sociétés d'assurance dans l'économie mais aussi du risque qu'elles représentent, les sociétés d'assurances sont en permanence contrôlées et encadrées.

Sur le marché français, l'Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles agit dans l'intérêt des assurés pour :

- veiller au respect de la réglementation.
- s'assurer que les compagnies sont en mesure de tenir à tout moment les engagements contractés envers les assurés et adhérents.

A une échelle européenne, le comité européen des contrôleurs d'assurance et de pensions professionnelles (CEIOPS) permet à l'Union Européenne d'avoir une vision plus large sur le secteur de l'assurance. C'est cet organisme qui participe de manière active au projet « Solvabilité II » sous l'impulsion de la Commission Européenne. L'objectif principal est

d'adapter et harmoniser les exigences de fonds propres des compagnies d'assurances avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité. Dans ce calcul d'exigence de solvabilité, le cadre Solvabilité II propose soit le recours à une formule standard soit le calcul de cette marge à l'aide d'un modèle interne. De nombreux assureurs dont la taille est importante ont choisis de développer un modèle interne pour évaluer au mieux leurs risques.

Parallèlement à cette législation, certains assureurs européens réunis au sein du CFO Forum ont développés depuis les années 1990 des modèles à des fins de communication financière dont le modèle Market Consistent Embedded Value (MCEV) est le dernier aboutissement. Ce modèle basé sur la simulation stochastique permet une valorisation en « en valeur de marché » de la compagnie.

En s'inspirant des développements MCEV, le calcul de la marge de solvabilité se base alors sur la détermination de la distribution empirique de la richesse de la compagnie à un horizon donné. L'approche Solvabilité II propose la VaR comme mesure de risque ainsi qu'un horizon fixé à un an. Dans ce contexte de simulations stochastiques, ce calcul revient à effectuer des « simulations dans les simulations » ce qui pose un problème d'ordre pratique concernant la puissance de calcul nécessaire. La méthode dite du « Replicating Portfolio » permet alors de résoudre en théorie ce problème.

1 Le capital économique dans le cadre d'un modèle interne : l'approche des « Réplication Portfolio »

1.1 Bilan économique VS Bilan comptable d'assurance vie

1.1.1 Qu'est ce qu'un bilan (comptable ou économique)

Le bilan d'une société d'assurance est une vision patrimoniale de la situation financière de la compagnie et l'image que l'on perçoit dépend du point de vue que l'on adopte. C'est ce point clé qu'il faut garder à l'esprit lorsque l'on compare la valorisation comptable à la valorisation économique de la compagnie. Ces deux visions sont complémentaires et permettent d'avoir deux points de vue différents. Bien que la méthode des Replicating Portfolio intervienne exclusivement dans une optique de valorisation économique, il est essentiel de comprendre la vision comptable puisque la valorisation économique fait intervenir cette dernière.

Commençons d'abord par expliciter la notion de bilan comptable, pour cela nous allons utiliser la vision schématique suivante :

Actif	Passif
Placement	Fonds propres
	Provisions techniques (représentation comptable des

En première lecture, ce bilan fait appel à deux notions qui sont l'actif et le passif.

Définition :

- **L'actif** (Asset) d'une compagnie d'assurance représente donc l'ensemble des biens (placements) qu'elle possède.
- **Le passif** (Liability) constitue l'ensemble des engagements contractés à l'égard des assurés et les fonds propres apportés par les actionnaires.

Il est à noter qu'en français le mot passif est ambigu puisqu'il renvoie à la notion d'engagement mais aussi de valeur actuelle de ces engagements que l'on appelle aussi parfois valeur actuelle du passif. Le mot Liability en anglais renvoie explicitement à cette double notion.

Ce schéma permet de définir deux éléments constitutifs du passif :

Les provisions techniques :

Les provisions techniques sont destinées à permettre le règlement intégral des engagements pris envers les assurés ou les bénéficiaires des contrats. Elles doivent donc être suffisantes et représentent au bilan de la compagnie d'assurance *une évaluation ou une estimation* des engagements de la compagnie, c'est-à-dire « la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et l'assuré ». Cette évaluation doit être faite à partir d'hypothèses

Remarque : on emploiera aussi le terme provision mathématique qui revêt le même sens en première approche.

Fonds propres :

Les fonds propres représentent la richesse intrinsèque de l'entreprise, c'est-à-dire la somme qui reviendrait aux actionnaires en cas de dissolution de l'entreprise.

La notion de provision technique est liée à la vision comptable, le calcul de ces provisions faisant appel au calcul actuariel. D'un point de vue quantitatif, les provisions techniques

représentent la plus grande partie du passif du bilan tandis que les fonds propres n'en représentent qu'une faible part.

A présent, nous pouvons distinguer les deux visions bilan comptable / bilan économique.

- Le bilan comptable repose sur une évaluation comptable qui respecte les principes de coût historique dans la majorité des cas, de la continuité d'exploitation et de la prudence comptable.
- Le bilan économique renvoie à la valorisation économique. Elle peut être dite « en valeur de marché » et renvoie alors au prix qu'un tiers serait prêt à payer pour acquérir l'entreprise.

Nous ne détaillerons pas plus la valorisation du point de vue comptable d'une compagnie, mais nous insisterons sur le fait que les règles comptables sont utilisées dans la valorisation économique par le modèle Market Consistent Embedded Value (MCEV) parce que certains cash-flows s'appuient sur la notion comptable de participation aux bénéfices (PB). Il est donc essentiel de préciser quelques points clés concernant la comptabilité des actifs ainsi que les principales provisions.

1.1.2 Les principales règles comptables françaises (French GAAP)

Etudions d'abord comment sont comptabilisés les actifs financiers. Pour cela la comptabilité distingue les titres amortissables et les titres non amortissables. Cela nous amènera ensuite à introduire les principales provisions « financières » utilisées dans le modèle MCEV.

Les titres amortissables :

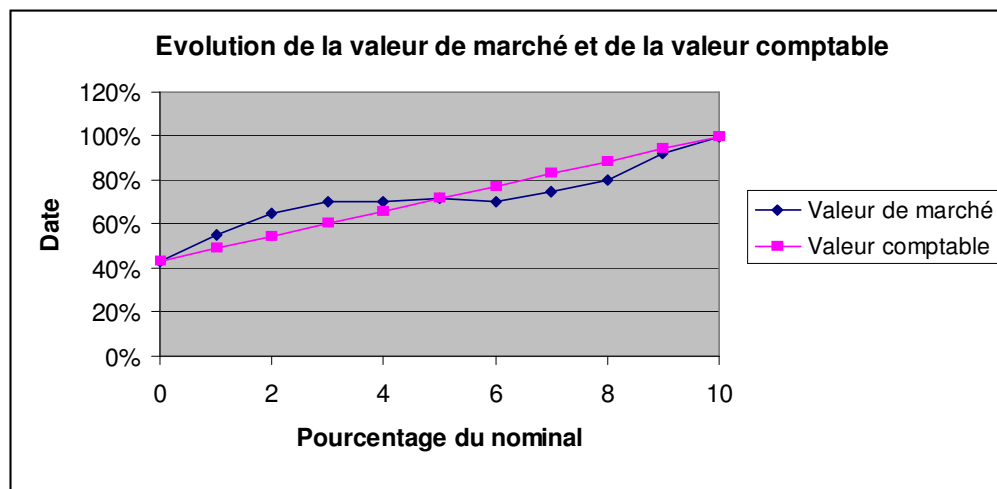
On désigne principalement comme titre amortissable les obligations. Ces titres sont alors comptabilisés selon le principe de coût historique :

$Valeur\ de\ l'obligation(t) = Valeur\ d'acquisition(t_0) + amortissement\ de\ la\ surcote/décote(t) + coupon\ couru(t)$

- La valeur d'acquisition (valeur de marché) est égale à la valeur d'achat de l'obligation.
- La surcote/décote est égale à la différence entre la valeur nominale et la valeur de marché au moment de l'.
- L'amortissement représente la « linéarisation » de la surcote/décote sur la durée de vie de l'obligation

Exemple:

- Obligation zéro coupon de nominal 100
- Valeur de marché : 40
- Décote initiale : 60
- Maturité 10 ans



Les titres non-amortissables:

Parmi les actifs non-amortissables nous trouvons :

- Les actions
- Les actifs immobiliers
- Les OPCVM (fonds)

L'évaluation de ces titres non amortissables au bilan d'une compagnie d'assurance résulte de trois articles complémentaires du Code des assurances :

- la comptabilisation au prix d'acquisition
- l'enregistrement d'une éventuelle provision pour dépréciation à caractère durable (comptabilisation en déduction de la valeur comptable de l'actif ligne à ligne de tout ou partie des moins-values en cas de dépréciation durable)
- le calcul global de la provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques (provisionnement des moins-values latentes globales sur les titres non amortissables par constitution d'une provision au passif du bilan)

Ainsi selon le principe de prudence, des provisions sont dotées si des moins-values sur ces titres venaient à être constatées. Ces provisions doivent donc être vues comme des « réserves » que l'assureur doit doter dans le cas où il serait amené à constater des moins values sur ces actifs.

La réserve de capitalisation (réserve de capi) :

La réserve de capitalisation est une provision liée aux titres obligataires, l'objectif de cette provision technique étant d'empêcher les entreprises *d'extérioriser et de distribuer leurs plus-values obligataires* ou du moins la partie due aux mouvements

La réglementation prévoit ainsi la dotation ou la reprise de la réserve de capitalisation :

- En cas de baisse des taux, cette provision est dotée à la hauteur de la plus-value réalisée provenant de la variation des taux.
- En cas de hausse des taux, les moins values réalisées provenant des fluctuations de taux sont compensées par des prélèvements sur cette réserve.

Il est à noter que les plus ou moins values des titres obligataires se décomposent de la façon suivante :

- L'écart entre la valeur de marché et la valeur actuelle au taux de rendement actuariel à l'achat, cet écart correspond à l'effet des fluctuations de taux d'intérêt.
- L'écart entre le prix d'achat et la valeur actuelle au taux de rendement actuariel à l'achat, cet écart correspond à l'effet des fluctuations de taux d'intérêt.

Remarquons d'une part que la réserve de capitalisation a un fonctionnement asymétrique puisque celle-ci ne peut être négative et d'autre part que celle-ci n'est dotée ou reprise que dans le cas où la compagnie est amenée à réaliser les plus ou moins value latentes, c'est-à-dire dans le cas de la vente de son actif.

Exemple de dotation à la réserve de capitalisation :

Soit une obligation de valeur 100% du nominal au bilan de la société d'assurance, vendue 120% suite à une baisse des taux et rachetée immédiatement à 120%.

Sans l'existence de la réserve de capitalisation, on a la situation suivante :

- en contrepartie de la vente de l'obligation, la société d'assurance reçoit en trésorerie 120% du nominal de l'obligation
- la société enregistre un résultat financier de 20% du nominal

Avec la réserve de capitalisation, en plus des éléments précédents, la société d'assurance comptabilise une charge de dotation à la réserve de capitalisation de 20% du nominal, ce qui neutralise le résultat de la cession.

Provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques

Cette provision est destinée à faire « *face à une insuffisante liquidité des placements notamment en cas de modification du rythme de règlement des sinistres* »

Elle est calculée *globalement* par comparaison entre la valeur de réalisation et la valeur comptable au bilan de tous les actifs autres que les titres amortissables.

Exemple de dotation à la PRE

Une compagnie d'assurance enregistre une plus-value latente globale sur l'ensemble de son portefeuille de 3,5 millions d'euros ventilée de la manière suivante :

- les plus-values latentes sur titres amortissables représentent 4,5 millions d'euros
- les moins-values latentes sur titres non amortissables représentent 1 million d'euros

Les plus-values des titres non amortissables ne sont pas inscrites au bilan, mais une provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques d'un million d'euros est

constituée. Notons que la PRE introduit de la volatilité dans le compte de résultat, c'est pour cette raison qu'un assouplissement (dotation à 1/3) existe.

Provision pour participation aux bénéfices (Fond de PB)

Il s'agit d'un montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après liquidation de l'exercice qui les a produits.

Le Code des assurances contraint les compagnies d'assurance à redistribuer au minimum 85% des bénéfices qu'elles réalisent à leurs assurés. Cette redistribution doit intervenir au plus tard dans les 8 ans qui suivent le constat des bénéfices. La participation aux bénéfices est donc obligatoire mais la politique d'allocation de cette provision est laissée à la charge de l'assureur.

Pour conclure ce paragraphe et passer d'une vision comptable à une vision économique nous insisterons sur les deux points suivants :

- Sur des marchés liquides la valorisation de l'actif d'une compagnie selon une vision comptable ou économique ne pose pas de problèmes.
- La valorisation du passif est beaucoup plus problématique. Selon le point de vue économique, il est très difficile de définir une valorisation de marché de ces engagements, en effet cela supposerait un hypothétique marché sur lequel les assureurs pourraient s'échanger « leurs passifs ». Or ces engagements sont souvent très complexes et ne sauraient en aucun cas être des engagements purement financiers.

Ainsi, dans la partie qui suit, nous allons nous intéresser à la valorisation de ces engagements dans les modèles type Market Consistent qui permettent une valorisation selon une logique de « marché ».

1.2 La valorisation Market Consistent Embedded Value

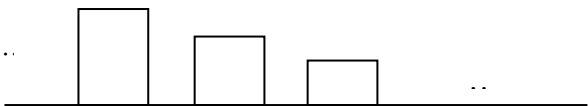
Le modèle MCEV est né de la concertation des assureurs au sein du CFO Forum dans le but de développer des modèles de communication financière.

Avant de développer le principe de la valorisation Market Consistent du passif d'une compagnie d'assurance, notons que les méthodes de valorisation Market Consistent sont

essentiellement basées sur le principe de simulation de Monte-Carlo et sont très inspirées des méthodes de pricing utilisées en finance de marché. Ces méthodes permettent une évaluation du bilan mais en aucun cas du capital économique.

Pour comprendre la logique d'une valorisation économique du passif d'une compagnie d'assurance, présentons succinctement l'approche de l'Embedded Value (années 1990) qui constitue une approche antérieure au calcul de Market Consistent Embedded Value. Cette méthode est relativement simple, il s'agit de projeter des flux futurs de passif sur un seul scénario déterministe de marché et d'actualiser ceux-là à un taux d'escompte. Ce taux d'actualisation est égal au taux sans risque augmenté d'une prime de risque sensé « capter » le risque de l'assureur. En pratique cette prime est souvent fixée de manière forfaitaire.

Schéma :

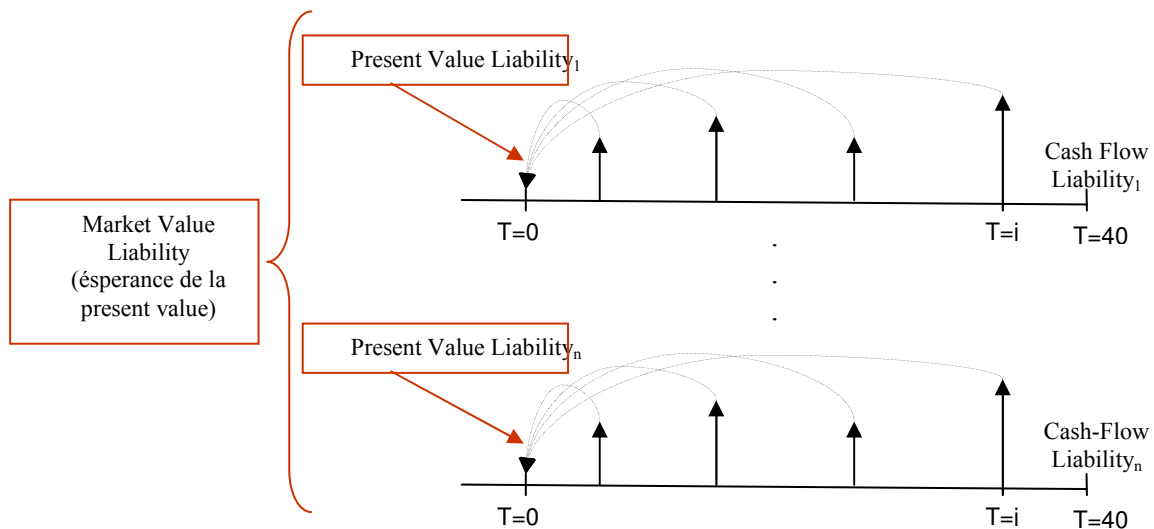
$$\frac{Flux_1}{(1+8\%)} + \frac{Flux_2}{(1+8\%)^2} + \dots$$


Cependant, cette méthode basée sur un scénario déterministe ne permet pas une valorisation correcte des options financières contenues dans le passif des compagnies d'assurance. De fait, même si le taux d'escompte intègre une prime de risque il ne peut refléter une valorisation correcte des options (valeur temps...). C'est dans ce contexte que la Market Consistent Embedded Value a apporté une avancée majeure dans la valorisation des passifs d'assurance

1.2.1 Principe du calcul Market Consistent en assurance vie

Avec l'approche Market Consistent de l'Embedded Value, les assureurs ont souhaité valoriser leur passif en intégrant l'ensemble des options financières « cachées » dans leur passif en valeur de marché. Le recours à la simulation stochastique dans une démarche très similaire au pricing d'instruments financiers a alors été le point de départ de ces modèles. Dans le cadre des hypothèses économiques d'un marché efficient, les différents actifs financiers dans l'univers risque neutre sont valorisables à l'aide de la propriété de martingalité des prix actualisés au taux sans risque, dans cet univers la valorisation du passif d'assurance peut être vue de la façon suivante :

- Projections des cash-flows servis aux assurés dans l'univers risque neutre à l'aide de simulations de sous-jacents économiques (taux, indices actions...)
- Actualisation et sommation de ces flux à l'aide des déflateurs simulations par simulations
- Calcul de la moyenne empirique des cash-flows actualisés qui constituera donc la valeur de marché du passif.



Vocabulaire :

- **Cash-flow** : il s'agit d'une séquence de flux monétaires.
- **Present Value** : il s'agit de la valeur actuelle d'un cash-flow ou d'un flux
- **Market Value** : il s'agit de la valeur de marché d'un cash-flow ou autre, dans un contexte de simulation celle-ci est obtenue par la moyenne des Present Value.
- **Déflateur** : il s'agit du facteur d'actualisation utilisé dans le monde risque neutre, la propriété de martingalité peut s'écrire ainsi :

$$E[\text{Prix}_0 * \text{Déflateur}_0] = E[\text{Prix}_t * \text{Déflateur}_t | F_t]$$

C'est de cette considération « risque neutre » que provient le terme Market Consistent, en effet selon cette approche et à l'aide d'une calibration des variables économiques (courbe de taux d'intérêt, volatilité des actions...) le modèle de simulations permet de retrouver le prix de marché des actifs financiers. Par « équivalence », on obtient en quelque sorte le prix de marché du passif.

On obtient alors le bilan économique de la compagnie :

Actif	Passif
Valeur de marché des actifs	Richesse économique ($\approx$ MCEV)
	Valeur de marché du passif

Notons que par le calcul type « Monte-Carlo », nous obtenons ce que l'on nomme la valeur « Best Estimate » du passif. A cette valeur Best Estimate et dans le contexte de solvabilité II les assureurs rajoutent une « Risk Margin » qui est censée estimer les risques non financiers ou non modélisés (dans le cadre de la MCEV ce poste au passif est nommé « Cost of non hedgeable risk ») à laquelle on rajoute les « frictional costs » (essentiellement les effets impôts sur la rémunération des fonds propres investis).

Le modèle Prophet ALS utilisé par Swisslife France est spécifiquement dédié aux risques financiers qui représentent la majeure partie des risques auxquels doit faire face la compagnie d'assurance vie. Ce modèle, contrairement à une approche Embedded Value classique permet une valorisation adéquate des options dites cachées dans le passif des compagnies d'assurance, point clé dans la gestion des risques.

Nous venons de présenter la logique du calcul de la MCEV de façon simplifiée d'un point de vue bilan. Nous pouvons maintenant nous intéresser, d'une part aux modèles de diffusions qui sont utilisés pour modéliser les variables économiques, modèles qui interviendront lors du pricing des instruments financiers du Replicating Portfolio. D'autre part, nous étudierons comment les cash-flows sont déterminés, point essentiel dans la compréhension de la méthode des Replicating Portfolio puisque ce sont ces cash-flows qui seront utilisés comme « inputs » de la méthode.

1.2.2 Modèle Prophet ALS

1.2.2.1 Modèles utilisés : taux, indices actions

Nous présentons les modèles propres au générateur des tables stochastiques. Ces modèles proviennent du fournisseur Barrie And Hilbert et ont été développés essentiellement pour la simulation stochastique, ils sont difficilement utilisables dans le pricing par formules fermées des instruments dérivés.

Le modèle de taux nominal est basé sur le modèle de Black-Karasinski à deux facteurs. Ce modèle est semblable au modèle de Vasicek mais considère le logarithme des taux ce qui permet de s'assurer de la positivité des taux simulés.

Dynamique :

$$\begin{aligned} d\ln[r(t)] &= \alpha_1 * (\ln[m(t)] - \ln[r(t)]) * dt + \sigma_1 * dW_1(t) \\ d\ln[m(t)] &= \alpha_2 * (\mu - \ln[m(t)]) * dt + \sigma_2 * dW_2(t) \end{aligned}$$

- W_1 et W_2 sont deux mouvements browniens indépendants.

En ce qui concerne le modèle « action », un modèle à facteurs est utilisé pour simuler le rendement action qui dépendra de la zone géographique.

$$R(t + \Delta t) = R(t) * \Delta t + \sum_{f=1}^F \beta_f * (\sigma_f * \sqrt{t} * Z_f(t)) + \sigma_{specific} * \sqrt{t} * Z_{specific}(t) - \frac{1}{2} * \sum_{f=1}^F (\beta_f^2 * \sigma_f^2 + \sigma_{specific}^2) * \Delta t$$

- Z_f : choc (variable indépendante qui suit une loi normale (0,1)) associé au facteur f
- β_f : sensibilité de l'equity au facteur f
- σ_f : volatilité associée au facteur f
- idem concernant le facteur « specific »

Ce modèle peut se lire à l'image du modèle utilisé dans l'approche du MEDAF ou l'on introduit un facteur spécifique à l'action et un facteur systémique modélisant le risque systématique, dans le cadre du modèle Swisslife ce facteur systémique est modélisé par six facteurs indépendants.

Nous ne présenterons pas les autres dynamiques sous-jacentes propres à l'environnement Prophet puisque dans le cadre de la méthode Replicating Portfolio nous n'utiliserons que les actifs liés au taux nominal ainsi qu'au rendement des actions.

1.2.2.2 Calculs des Cash-Flows / Managements rules

Les cash-flows du modèle Prophet ALS constituent les inputs à la méthode Replicating Portfolio, il est donc important de comprendre comment ceux-ci sont construits et notamment comment les normes comptables impactent ces cash-flows.

Les cash-flows du passif représentent les flux qui sont servis annuellement aux assurés, ces flux sont fonction de la revalorisation du contrat et de la provision mathématique (PM). La PM est revalorisée à un taux déterminé par les conditions économiques et la politique de la compagnie. Les cash-flows dépendant de la PM il est important d'étudier la dynamique de celle-ci :

Définitions :

- TMG : Taux minimum garanti
- PB contractuelle : participation bénéficiaire fixée dans le contrat
- PB mini : participation bénéficiaire fixée au global du passif en générale associée à un pourcentage des produits financiers

$$\text{Produits Financier}_t = P\varphi_t = \text{coupon}_t + \text{dividendes}_t + \text{loyer}_t + \text{intérêt}_t + \text{Plus/Moins value réalisée}_t$$

$$\text{Taux PB mini} = 85\% * P\varphi + \begin{cases} 90\% * \text{Resultat Technique si } > 0 \\ -100\% * \text{Resultat Technique si } < 0 \end{cases}$$

- PB commerciale : niveau supplémentaire accordé par la compagnie de façon discrétionnaire
-

Dynamique de la PM (simplifiée) :

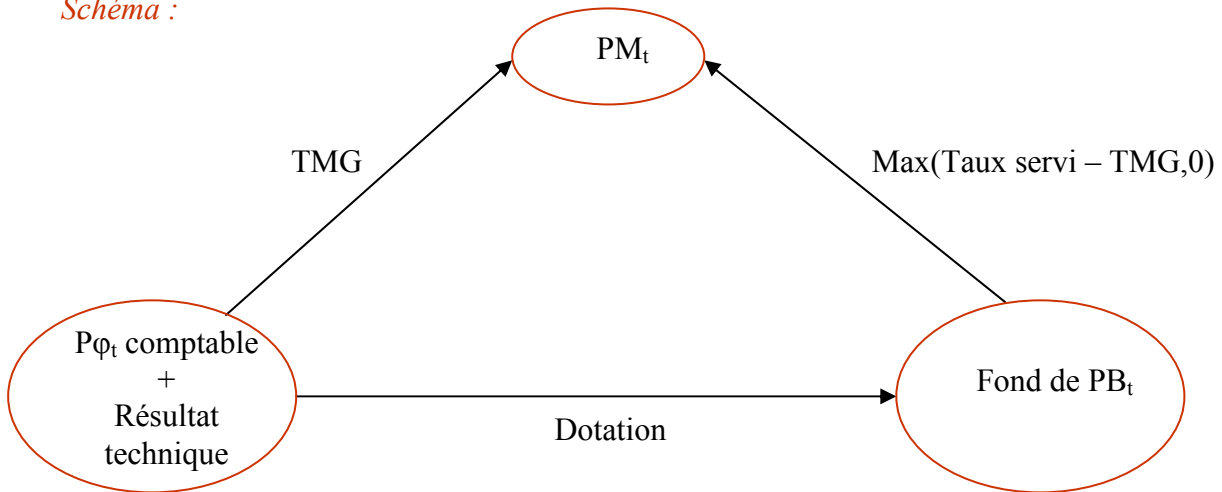
$$PM_t (\text{avant revalorisation}) = PM_{t-1} + \text{Primes}_{\text{periode}} - \text{Prestations}_{\text{periode}}$$

$$PM_t (\text{après revalorisation}) = PM_t * (1 + \max(\text{Taux Minimum Garanti}, \text{Taux Servi}_t))$$

$$\text{Taux servi} = \max(\text{PB contractuelle}, \text{PB mini}, \text{PB commerciale})$$

En pratique le calcul de cette PM est plus complexe puisqu'il fait intervenir la dotation au fond de PB selon le schéma suivant :

Schéma :

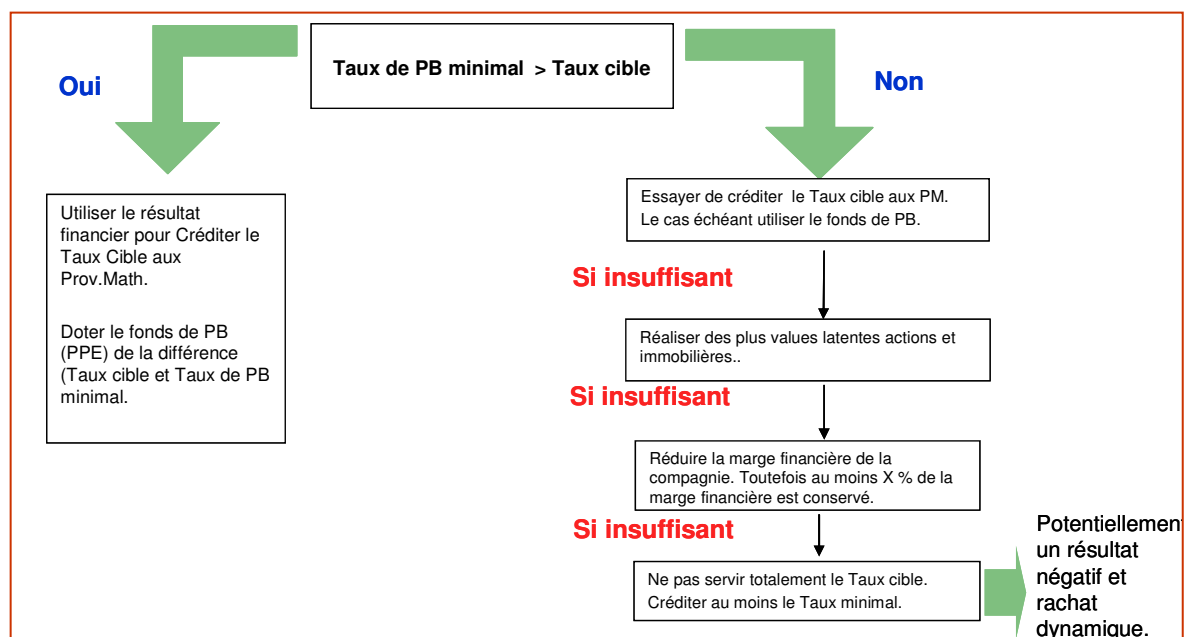


Commentaires :

En première lecture, on peut noter les éléments suivants :

- La PM dépend des « entrées » de flux monétaire par l'intermédiaire des primes qui entrent dans la période correspondante.
- Elle dépend des « sorties » par l'intermédiaire des prestations. La revalorisation fait intervenir le maximum du taux minimum garanti et du taux servi. Le taux servi dépend en partie de la politique de la compagnie et est donc lié au fond de PB. La détermination de ce taux est assez complexe et fait appel aux managements rules.

Voici à titre d'exemple un jeu possible de règles de détermination du taux servi ainsi que les rachats dynamiques.

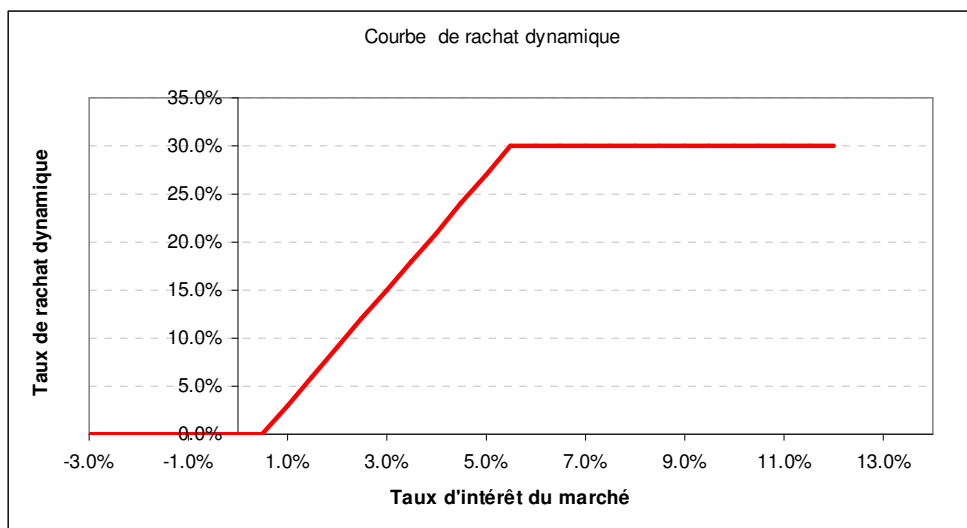


Définition :

Le taux cible correspond au taux attendu par les assurés, ce taux est déduit du taux swap 10 ans dans le modèle MCEV.

Rachats dynamiques :

Lorsque l'assuré ne perçoit pas un taux suffisamment élevé par rapport au taux attendu par l'assuré il peut alors procéder à un rachat de son contrat, c'est-à-dire mettre un terme prématuré à son contrat. Ce comportement est modélisé par l'intermédiaire d'une loi de rachat qui définit le comportement de l'assuré. Ce comportement n'est pas rationnel vis-à-vis du marché, en d'autres termes l'assuré ne raisonne pas selon une logique d'arbitrage mais selon une logique comportementaliste.



Source : ACAM dans le cadre de solvabilité II

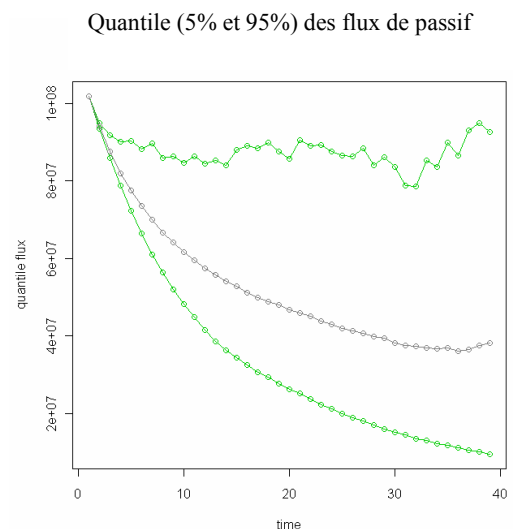
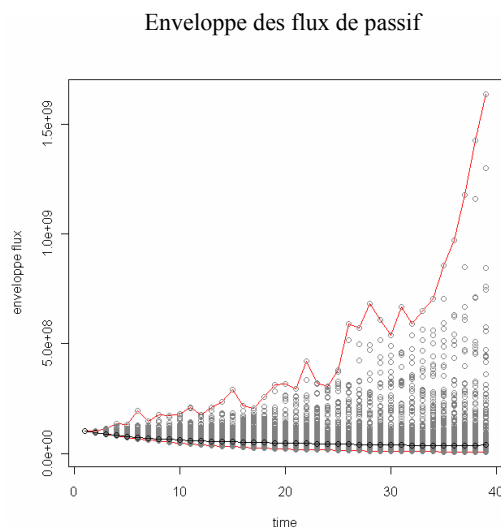
Remarque : L'essentiel est de comprendre que les cash-flows du passif sont puisés dans les PM et dépendent directement de la dynamique de la PM. Or la dynamique de la PM dépend des normes comptables ainsi que de la politique de la compagnie, c'est cette dépendance aux normes comptables qui posera des problèmes dans la réplique des cash-flows.

Pour visualiser l'allure des cash-flows, nous pouvons illustrer notre propos à partir d'un exemple de portefeuille de contrats épargne, exemple qui sera repris et détaillé dans la partie exemples réels.

Exemple :

- Taux de rachat : 10% cela signifie que chaque année 10% des assurés sortent du contrat
- Taux de PB : 90 %, participation bénéficiaire à 90% des produits financiers
- Taux minimum garanti : 2%
- PM initiale = 1 000 000
- Pas de fond de PB

Dans un cadre de simulations stochastiques, le flux de passif à une date donnée peut être vu comme une variable aléatoire dont la moyenne sera le flux moyen servi aux assurés. En itérant ce raisonnement à toutes les dates on peut observer le passif complet à horizon 40 ans, avec une représentation de la ligne moyenne ainsi que de l'enveloppe de ces flux (graphique de gauche).



Nous constatons que la « variance » des flux de passif est croissante avec le temps de la même façon que celle du prix d'une action dans le cadre du modèle du brownien géométrique. L'analyse des quantiles de flux ainsi que la ligne moyenne met en évidence l'écoulement « décroissant » du passif.

Nous pouvons maintenant introduire la problématique générale de calcul de capital économique où la méthode des Replicating Portfolio s'inscrit.

1.3 Le capital économique

1.3.1 Présentation théorique du calcul de capital économique horizon 1 an

Nous venons de voir que pour avoir une vision globale de sa situation financière, la direction financière peut utiliser des bilans de type financier ou comptable. Cependant, cette vision permet d'évaluer la situation financière de la compagnie à un instant donné mais ne renseigne pas sur la solvabilité de la compagnie à un horizon donné. Autrement dit, au vu des fonds propres de la compagnie, peut on juger de la solvabilité de celle ci ? C'est cette question qui est primordiale dans le cadre des normes Solvabilité II où le législateur définit deux notions :

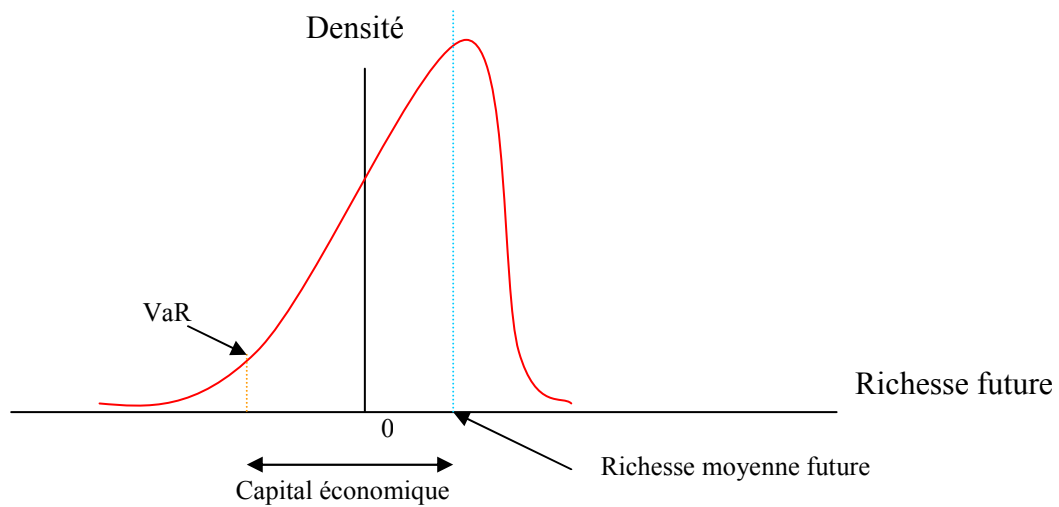
- Le SCR : Capital de solvabilité requis
- Le MCR : Minimum de capital requis

La liberté est laissée aux compagnies d'assurance de développer un modèle interne pour permettre le calcul de ce SCR (ou capital économique), modèle qui devra ensuite être exposé et approuvé par les autorités compétentes.

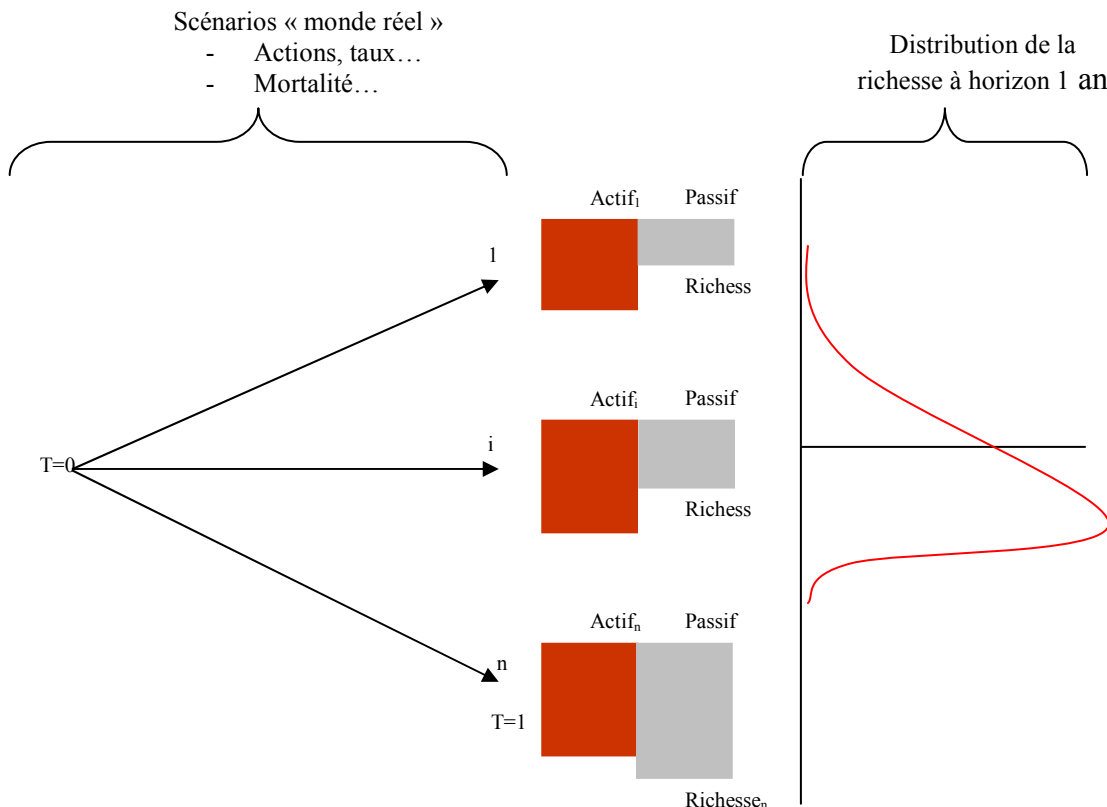
Définition :

Le capital économique représente pour les entreprises de services financiers le montant de capitaux propres couvrant le besoin minimum, évalué sur une base réaliste, pour couvrir les risques qu'elle gère ou collecte.

Dans le cadre des normes Solvabilité II, c'est le capital économique à horizon 1 an qui a été choisi pour considérer le problème de la solvabilité des compagnies d'assurance. Il est usuel d'utiliser la notion de VaR (Solvabilité II) ou CVaR (Swiss Solvency Test) pour le calcul de ce capital, ainsi le problème sous-jacent repose sur la détermination de la distribution de la richesse de la compagnie à horizon 1 an. A partir de cette distribution il pourra être aisé d'effectuer le calcul du capital économique :



La détermination de la distribution empirique est dans le principe réalisable selon une approche par simulations stochastiques. Afin d'obtenir la distribution à 1 an de la richesse de la compagnie il faut faire appel à des scénarios dits « historiques » c'est-à-dire un jeu de scénarios économiques que la compagnie envisage pour l'année à venir. Ces scénarios vont mener à différents états économiques à $t=1$, à cette date il faut alors évaluer la richesse de la compagnie. Ces différents « tirages » permettront de connaître la distribution empirique à horizon 1 an de la compagnie.

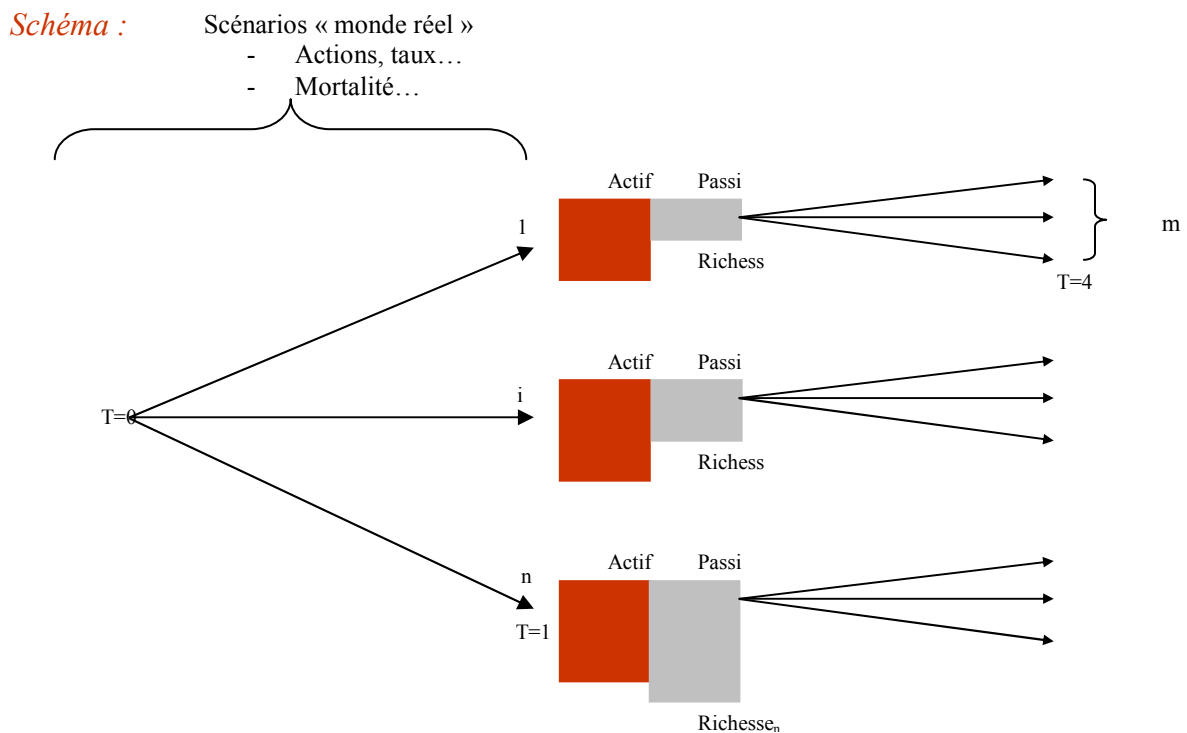


1.3.2 Les problèmes pratiques du calcul de la VaR à horizon 1 an

Il s'agit maintenant d'entrer dans une vision plus précise du calcul de la distribution selon une approche par simulations, c'est-à-dire de considérer la valorisation de l'actif et du passif en $t=1$ pour chaque branche de simulations.

Pour chaque simulation il nous faut alors valoriser l'actif et le passif à la date $t=1$:

- La valorisation de l'actif en $t=1$ ne pose pas de problème puisque sa valeur peut se déduire du niveau des variables économiques en $t=1$ (structure de taux, indices actions) en fonction de la composition de l'actif. Seule la valorisation des produits dérivés peut être plus difficile à réaliser.
- La valorisation du passif à $t=1$ est plus complexe car celle-ci fait appel à de nouvelles simulations.



Ainsi pour obtenir la distribution du passif à horizon 1 an, il serait nécessaire d'effectuer $n*m$ simulations. Notons, que lorsque l'on parle d'une simulation il s'agit en fait de simuler une centaine de variables économiques sous-jacentes. Ce schéma qui fait appel à ce que l'on nomme « nested simulations » n'est pour le moment pas à la portée des compagnies d'assurance vis-à-vis de la puissance de calcul requise.

1.3.3 Introduction de la nécessité du « Replicating Portfolio »

Comme nous venons de le constater la valorisation « des » passifs à $t=1$ n'est pas envisageable d'un point de vue calculatoire. La méthode du « Replicating Portfolio » semble être une piste de réflexion intéressante pour répondre à cette problématique. Elle repose sur l'idée simple :

Déterminer un portefeuille d'actifs financiers valorisables par formules fermées permettant de répliquer le passif.

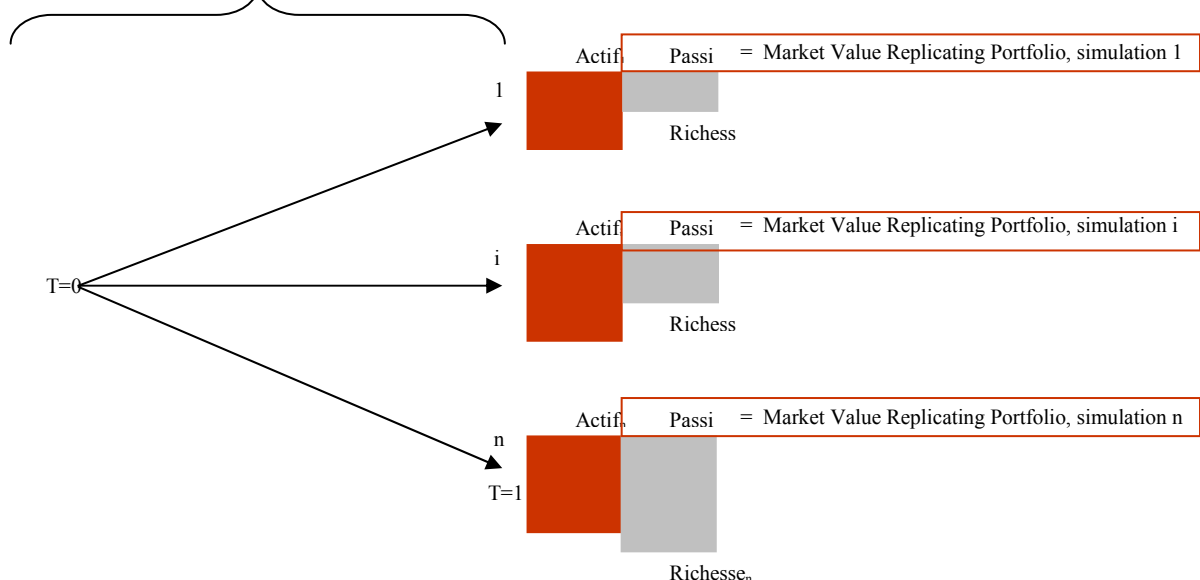
On peut aussi se reporter à la définition de Oeschlin (2007) :

"We can define a replicating portfolio as a portfolio of standard financial instruments which matches the cash flows generated by the liabilities as good as possible."

Le portefeuille répliquant sera utilisé comme proxy « des » passifs à $t=1$ et la valorisation de celui-ci se faisant par formules fermées permettra de ne pas avoir recours aux simulations dans les simulations.

Schéma : Scénarios « monde réel »

- Actions, taux...
- Mortalité...



Le schéma fait apparaître un point clé concernant l'utilisation du portefeuille répliquant :

La Market Value du portefeuille répliquant doit être très proche de celle du passif qui aurait été calculé par des simulations dans les simulations pour chaque état en $t=1$

C'est ce point qui va conditionner toute la méthode et nous verrons par la suite en quoi celui-ci est problématique.

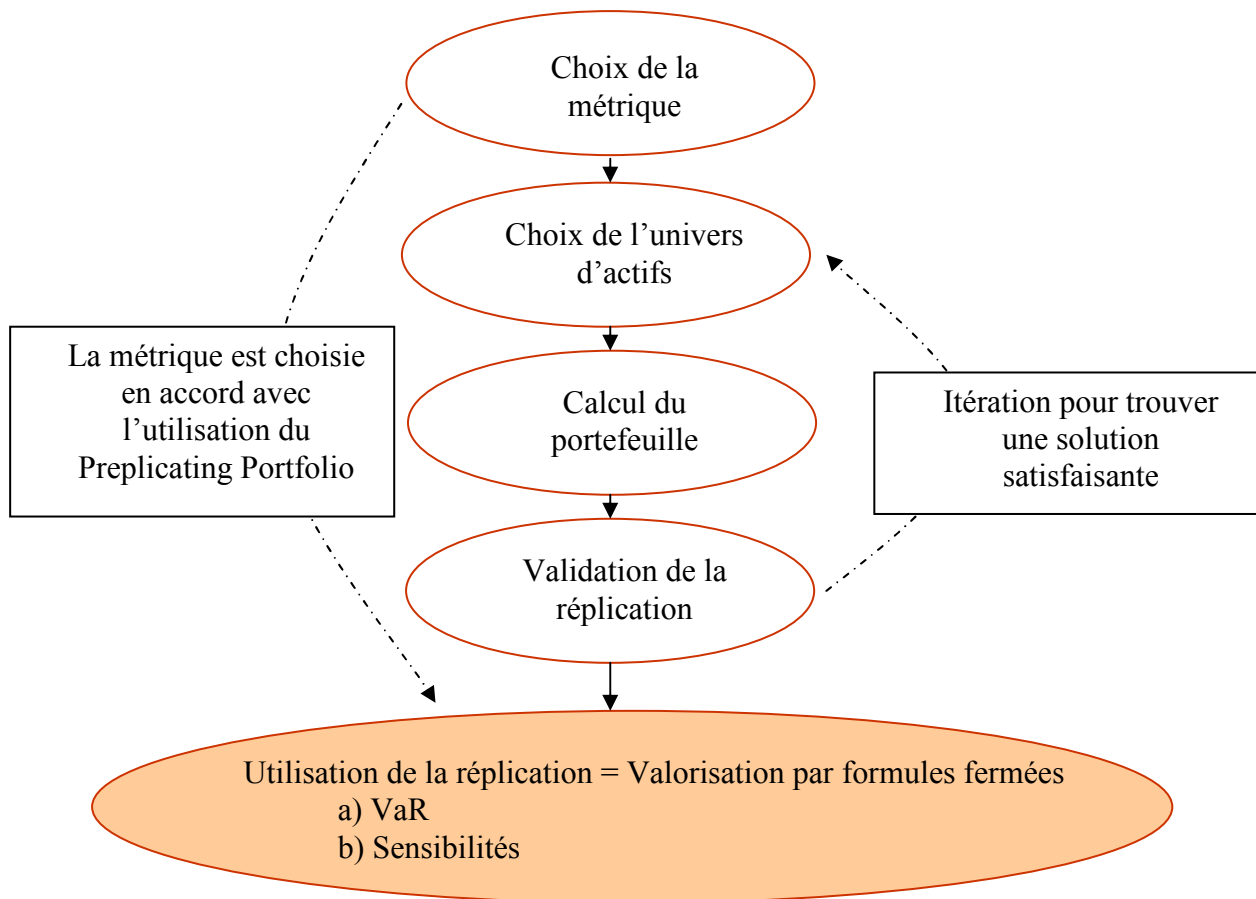
Revenons pour le moment à la définition qui fait apparaître des notions essentielles :

- « **répliquer** » renvoie en tout premier lieu à la notion de portefeuille de couverture à l'image des couvertures proposées dans les techniques financières. Au vu des nombreuses garanties financières proposés aux assurés, il semble envisageable de vouloir répliquer un passif à l'aide d'instruments financiers. Cependant, si l'on regarde précisément la dynamique des cash-flows on peut dès lors réaliser que trouver « un portefeuille de couverture » serait vain au vu de la complexité « macro » du passif. De plus, l'utilisation du portefeuille répliquant ne nécessite peut être pas d'aller aussi loin dans la réplication des flux. En effet on ne souhaite pas utiliser le portefeuille répliquant comme couverture mais comme instrument nous permettant de calculer la Market Value des passifs à $t=1$. On comprend donc que la notion de réplication semble avoir un sens plus faible. C'est pour cette raison que nous nous intéresserons aux métriques de réplication (par exemple la Present Value Matching) qui définissent la notion de réplication à un sens plus faible et nous verrons comment ces métriques peuvent être utilisées dans le calcul de la VaR.

- « **actifs financiers** » renvoie à l'univers d'actifs financiers que la méthode va utiliser. Dans un premier temps et dans le cadre de ce mémoire, cet univers doit être déterminé en amont de la méthode, c'est-à-dire que l'actuaire doit au vu de sa connaissance du passif et des garanties proposées dans les contrats intuitiver des actifs financiers qui pourraient répliquer le passif. Ce travail est loin d'être évident et des garanties simples peuvent très vite mener à des actifs « complexes » ou inexistant d'un point de vue financier du fait des normes comptables ou des managements rules.

- « valorisation par formules fermées », il s'agit de pouvoir valoriser l'ensemble des instruments financiers par formules fermées pour ne pas avoir recours à des simulations dans les simulations. Ce point est relativement important puisque cette valorisation dépendra de deux aspects. D'une part la valorisation d'actifs dérivés tels que les produits de taux ou d'actions peut être difficile compte tenu de la complexité du produit. D'autre part, il serait intéressant que cette valorisation soit en accord avec les dynamiques sous-jacentes des variables économiques simulées dans le modèle ALS. Or, nous l'avons vu, ces modèles sont complexes ce qui pose problème dans la valorisation du portefeuille répliquant.

Nous pouvons donc conclure cette présentation de la méthode par la description générale suivante:



Remarque :

Dans le cadre de ce mémoire on étudiera désormais uniquement la distribution du passif à horizon 1 an puisque c'est là que réside la difficulté. La notion de VaR ne renverra donc

plus directement à la notion de capital économique, mais à la VaR de la distribution du passif à horizon 1 an.

2 La méthode dite des « Replicating Portfolio » : Présentation théorique

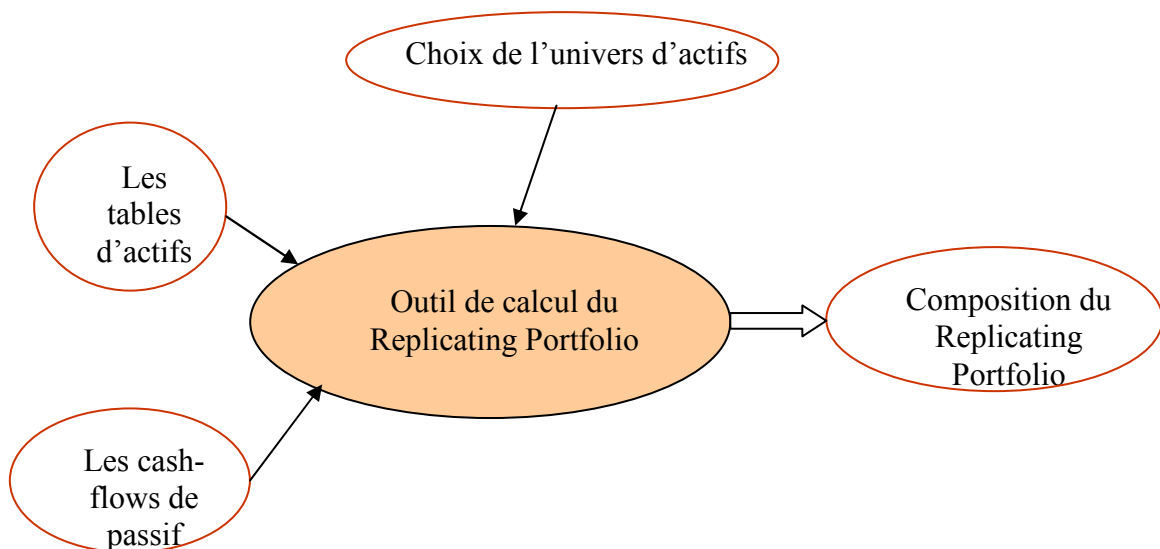
2.1 Les données / L'univers d'actifs

Avant de détailler le problème d'un point de vue mathématique nous allons préciser les flux de données utilisés par la méthode :

Nous pouvons distinguer deux types de flux

- Les flux de données générés par le modèle Prophet ALS :
 - Les tables d'actifs
 - Les cash-flows de passif
- L'univers d'actifs

Schématiquement :



2.1.1 Les données générés par le modèle Prophet ALS

Nous présentons les données qui sont générés par le modèle et qui vont être les « entrées » de la méthode Replicating Portfolio.

Les Tables d'actifs : Illustration sur une simulation

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	TERM	2008	2009	2010	2011
1	EUR	EQUITY	RET_IDX	0	1	0.7612001339	0.8709691622	0.8197312824
1	EUR	EQUITY	RNY_PC	0	3.28	4.1590284977	3.4600274074	3.8322682541
1	EUR	EQUITY_RE	RET_IDX	0	1	0.9360531956	1.2571455134	1.2382936091
1	EUR	EQUITY_RE	RNY_PC	0	2.7197358951	2.9317996788	2.5549335252	2.6029158305
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	0.9778138806	0.9649971636	0.9604498920	0.9624245713
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	0.9518465284	0.9342993462	0.9248853158	0.9268753067
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	0.9240540587	0.9070525393	0.8927467873	0.8935478405
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	0.8678656653	0.8605161605	0.8369956182	0.8336594161
1	EUR	ILZCB	PRICE	10	0.7474833766	0.7752481578	0.7342266218	0.7195361333
1	EUR	ILZCB	PRICE	15	0.6642480186	0.7186522946	0.66713859	0.6446032076
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0.5519442042	0.6399726003	0.5761447519	0.5441668167
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1	1.0017489558	0.9928866895	0.9776393475
1	EUR	VALN	DEF	0	1	0.9702327501	0.9408606883	0.9179690173
1	EUR	ZCB	PRICE	1	0.9702327501	0.9697267879	0.9756654562	0.9763781425
1	EUR	ZCB	PRICE	2	0.9376131234	0.9367168568	0.9504334256	0.952167863
1	EUR	ZCB	PRICE	3	0.9022752461	0.902987773	0.9247458666	0.9271577339
1	EUR	ZCB	PRICE	5	0.8307270063	0.8350650135	0.8712704681	0.8746710533
1	EUR	ZCB	PRICE	10	0.6550492545	0.6677441727	0.7366108746	0.7457642660
1	EUR	ZCB	PRICE	15	0.5158849801	0.5371824733	0.6266476325	0.6413536165
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0.315336566	0.3409663237	0.4386740070	0.4548493387
1	EUR	CASH	RET_IDX	0	1	1.0306805248	1.0628566082	1.0893613849
1	EUR	CASH	RNY_PC	0	3.0219287723	3.0740909067	2.4631442309	2.3905326718
1	EUR	FTSE	RET_IDX	0	1	0.9608998124	1.6785597937	2.2535237346
1	EUR	FTSE	RNY_PC	0	3.69	3.5337551789	1.8536927318	1.4903653142
1	EUR	HSBC	RET_IDX	0	1	0.8554900367	2.3829290448	3.3855441079
1	EUR	HSBC	RNY_PC	0	5.7735	5.8173952529	2.2422197781	1.6853949293
1	EUR	1_EUR_IN_CHF	RET_IDX	0	1.4741081703	1.6078822148	1.8628476887	1.8994528603
1	EUR	1_EUR_IN_USD	RET_IDX	0	1.4015151515	1.4234563893	1.3791628751	1.5007181719

Dans le cadre du Replicating Portfolio nous utiliserons les données suivantes :

- Le cours de l'action (RET_IDX) pour une action cotant 1€ à la date initiale
- Le déflateur (DEF)
- La structure de zéro-coupons (ZCB)

Cette table est composée de 5000 simulations risque neutre, il existe aussi des tables dites « choquées » qui correspondent à des chocs sur les paramètres de volatilité des actions, des taux ou encore de mortalité, celles-ci permettent le calcul des sensibilités du passif. Notons que ces tables sont générées à partir de la date $t=0$.

Remarque :

Nous nous intéressons uniquement aux données « EUR » puisque nous étudions la réplique d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance fictive dont l'actif est investi en titres libellés en Euro.

Les cash-flows du passif :

Une fois les tables d'actifs simulées, le modèle génère les cash-flows du passif qui devront être répliqués par le portefeuille répliquant. Ces cash-flows se présentent de la même façon

que les actifs sur un jeu de 5000 simulations. De la même façon, ces cash-flows débutent à partir de $t=0$ et correspondent au passif en $t=0$.

2.1.2 L'univers d'actifs

L'univers d'actifs représente les actifs qui sont utilisés par la méthode, cet univers est choisi à priori. Ayant connaissance des différentes garanties proposées dans les contrats l'actuaire doit « intuitiver » les actifs qui lui semblent intéressants de sélectionner pour tenter de répliquer un passif or nous verrons que ce point n'est pas aisé à résoudre. Présentons tout d'abord les différents actifs que nous allons considérer dans cette étude vis-à-vis des garanties proposées dans les contrats d'assurance vie ce qui justifiera par la même occasion l'approche de la réplication par des actifs financiers.

Frais fixes / Flux fixes :

Les frais fixes et autres flux indépendants des conditions économiques peuvent être répliqués par des zéro-coupons. Cet instrument va verser 1€ à maturité, ainsi on peut envisager une « gamme » de 40 zéro-coupons compte tenu de l'horizon de projection que nous considérons.

Flux liées à des investissements en actions :

A l'image des contrats type UC (Unité de Compte), nous pouvons envisager de répliquer certains flux à partir d'une position sur action, c'est-à-dire un « actif » ou l'on décide dès aujourd'hui de dénouer la position à une date fixée dans le futur. Un flux positif signifie une vente de l'action à maturité, un flux négatif un achat.

Garanties planchers / Taux minimum garanti / Participation aux bénéfices :

Ces garanties que l'assureur « offre » à l'assuré sont en réalité des options financières. Dès lors il est intéressant de trouver l'équivalent financier à ces options. On pensera notamment aux calls et puts (qui sont finalement équivalents à l'aide de la parité call/put) pour la garantie plancher. Le taux minimum garanti peut être à priori assimilé à une option sur taux mais celui-ci peut aussi être vu selon une vision call. Nous reviendrons sur ce point lors de la réplication du portefeuille de contrats épargne.

Nous pouvons retenir que les actifs de type call/put ainsi que les options de taux type caps/floors peuvent avoir un sens certain dans la méthode Replicating Portfolio

Options de rachats anticipés :

Les options de rachats anticipés peuvent avoir trait au caractère des options américaines, cependant comme nous l'avons vu dans la section « management rules » le comportement des assurés n'est pas supposé rationnel vis-à-vis du marché financier, ainsi nous préférons aborder le cas des rachats dynamiques avec des options sur swap (swaption) ou l'assuré pourra en quelque sorte arbitrer entre le taux du marché et un strike « psychologique ».

Nous pouvons synthétiser l'univers d'actifs à l'aide du tableau suivant :

Instrument	Maturité	Strike	Terme	Objectif
Zéro coupon (ZCB)	Date de « sortie » du flux			Répliquer la composante fixe du flux
Equity	Date de dénouement de la position			Répliquer les flux fortement corrélés au prix de l'action à une date donnée.
Call / Put	Date d'exercice de l'option	Strike à fixer au vu de la garantie à répliquer en fonction de : (TMG, PB contractuelle, allocation d'actifs...)		Répliquer les options implicites du passif
Floors / Caps	Durée de vie du contrat	Strike à fixer au vu de la garantie, notamment en fonction du TMG		Répliquer les options implicites du passif
Swaption (receiver/payer)	Date d'exercice de l'option	Strike à fixer en fonction du comportement de l'assuré	Durée de vie du swap	Répliquer la garantie de rachat anticipé

Remarque : On trouvera en annexe la description précise de ces instruments.

Pour conclure ce paragraphe, on notera qu'il est essentiel que l'actuaire ait une connaissance très précise du passif de la compagnie et on se demandera si il est réaliste de pouvoir intuiter des paramètres tel que les strikes et les sous-jacents des instruments

(options de taux). Enfin, on remarquera que l'ensemble des paramètres à choisir à priori nous amène rapidement à construire un univers d'actifs « assez grand » et complexe.

2.2 Métriques de réplication

Nous avons vu que de nombreuses garanties financières sont présentes dans les contrats d'assurance vie. Cependant ces garanties ne sont pas en général purement financières mais sont aussi liées à des clauses liées à la vie ou au comportement de l'assuré. Comme certains auteurs le soulignent (Devolder, Planchet), il est dès lors très difficile de trouver des portefeuilles de couverture pour ces contrats d'assurance vie même si certaines solutions existent sur des contrats particuliers.

Ainsi, lorsque l'on étudie la méthode des Replicating Portfolio il ne faut pas aborder cette méthode selon une approche type «portefeuille de couverture» au sens classique qui consisterait à trouver une stratégie permettant de couvrir parfaitement les flux auxquels devra faire face l'assureur. La notion de réplication est à considérer à un sens plus faible, justifiée par le fait que nous souhaitons utiliser le Replicating Portfolio comme approximation du passif à date $t=1$ en valeur de marché. Cela signifie comme nous l'avons vu que pour chaque simulation la valeur de marché du Replicating Portfolio sachant les conditions économiques à la date $t=1$ doit être très proche de la valeur de marché du passif en $t=1$ qui serait obtenu à l'aide des « simulations dans les simulations ». L'utilisation du Replicating Portfolio est donc plus « restreinte » que celle d'un portefeuille de couverture, il s'ensuit que la notion de réplication est à prendre à un sens plus faible à priori.

On va donc tout d'abord choisir ce que l'on nomme « métrique » c'est-à-dire définir la notion de réplication qui devra être en accord avec l'utilisation que l'on souhaite faire du portefeuille répliquant. Notons dès à présent que dans cette approche « heuristique » il ne semble pas exister de portefeuille répliquant unique et que ce portefeuille pourra dépendre de la métrique utilisée et de la méthode de détermination du portefeuille.

2.2.1 Present Value Matching

Intuitivement la réplication en present value repose sur l'idée que la market value étant égale à l'espérance de la present value sous la probabilité risque neutre, un portefeuille qui

serait proche pour chaque simulation de la present value du passif pourrait avoir une market value proche de celle du passif

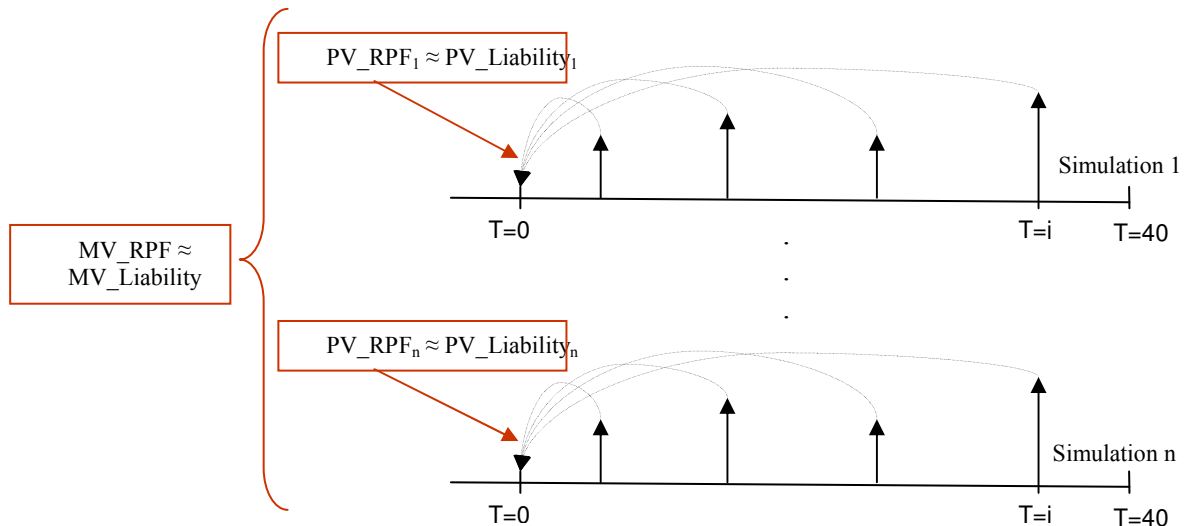
Formellement la métrique Present Value Matching peut être définie de la façon suivante :

« Deux cash flow sont similaires si et seulement si leur present value pour chaque scénario est égale. »

2.2.1.1 La minimisation des moindres carrés

Il s'agit de trouver un portefeuille d'actifs qui minimise l'écart entre la present value du passif et celle du portefeuille pour chaque simulations.

Schématiquement :



Notations :

- Present value liability simulation $i = PV_liability(i) = \sum_{t=1}^{40} Deflateurs_i(t) * Flux_liability_i(t)$
- Present value assets k simulation $i = PV_assets_k(i) = \sum_{t=1}^{40} Deflateurs_i(t) * Flux_assets_{k,i}(t)$
- Present value portfolio simulation $i = PV_RPF(i) = \sum_{p=1}^k PV_assets_k(i)$
- Market Value = $MV = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n PV(i)$ (n étant le nombre de simulations)

Remarque : En annexe se trouvent les formules de calcul de Present Value pour les principaux actifs.

A partir des k actifs choisis à priori nous pouvons formuler le modèle suivant, où les poids $(w_1, \dots, w_k)$ sont les inconnues du problème.

$$\forall i, \quad PV_liability(i) = w_1 * PV_assets_1(i) + \dots + w_k * PV_assets_k(i) + \xi(i)$$

- $i \in [1, 5000]$: indice de simulations

$\xi(i)$ représente l'erreur entre la present value du passif et celle du portefeuille répliquant pour la simulation i , nous supposons l'hypothèse classique de normalité des résidus, hypothèse qui devra ensuite être vérifiée par des tests statistiques.

Nous venons de poser le modèle de Present Value Matching, modèle qui s'apparente à une régression linéaire multiple en considérant les actifs du portefeuille répliquant comme les régresseurs. La vision « équivalente » en considérant la distance des moindres carrés est la minimisation de la fonction objective suivante :

$$f(w_1, \dots, w_k) = \sum_{i=1}^n [PV_liability(i) - \sum_{j=1}^k w_j * PV_assets_j(i)]^2$$

La minimisation de cette fonction conduit alors à la solution « classique » de l'équation matricielle des moindres carrés :

$$(A^T * A) * w = A^T * L$$

$$A = \text{Assets_matrix} = \begin{pmatrix} PV_A_1(1) & \dots & PV_A_j(1) & \dots & PV_A_k(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ PV_A_1(i) & \dots & PV_A_j(i) & \dots & PV_A_k(i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ PV_A_1(n) & \dots & PV_A_j(n) & \dots & PV_A_k(n) \end{pmatrix}$$

$$L = \text{Liability} = \begin{pmatrix} PV_Liability(1) \\ \dots \\ PV_Liability(i) \\ \dots \\ PV_Liability(k) \end{pmatrix} \quad w = \text{poids} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_i \\ \dots \\ w_k \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation correspond alors aux poids qui minimisent au mieux le critère des moindres carrés :

$$\underline{w} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{L}$$

Qualité de la réplique :

Afin de contrôler la qualité de la régression nous utiliserons notamment les tests et indicateurs statistiques suivants :

- R^2
- Test de Jaque Bera

Ce test permet de vérifier la normalité des résidus (dans notre cas) et repose sur les caractéristiques du skewness et du kurtosis de la loi normale. On pourra se reporter à l'annexe pour plus de précision.

Les hypothèses :

H0 : « les résidus sont distribués selon une loi normale »

H1 : « les résidus ne sont pas distribués selon une loi normale »

Dans le cadre de l'hypothèse H0 on construit une statistique qui suit une loi du khi deux à deux degré de liberté. Cette statistique doit être proche de 0 pour ne pas rejeter H0, ainsi la région critique est définie par la valeur t_α tel que $\chi_{1-\alpha}(t_\alpha) = 95\%$. Ainsi si $t > t_\alpha$ on rejettera l'hypothèse H0. En pratique ce test est très exigeant pour l'analyse des résidus d'une régression, ainsi il se révélera souvent négatif dans notre étude.

- Test Kolmogorov Smirnov

L'idée de ce test étant de valider l'adéquation entre la fonction de répartition de la Present Value du « Replicating Portfolio » et celle du passif. Nous ne détaillerons pas ce test mais on remarquera que ce test suppose de connaître la fonction de répartition du passif ce qui n'est pas le cas dans notre étude puisque celle-ci est empirique.

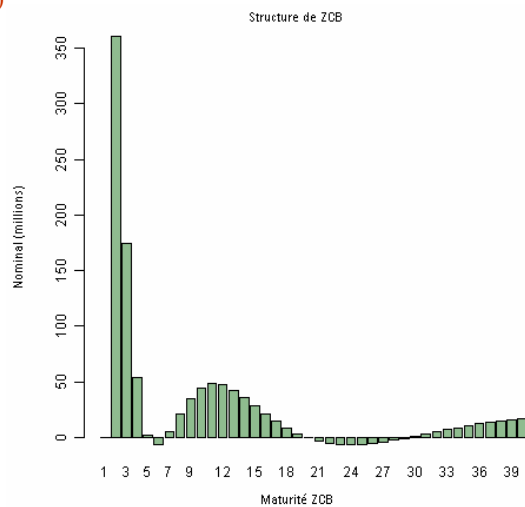
Nous visualiserons les résultats graphiquement selon trois graphiques

- Graphe de régression (plan present value RPF / present value portfolio)
- Densité RPF VS Liability
- Densité Erreurs VS Densité Normale

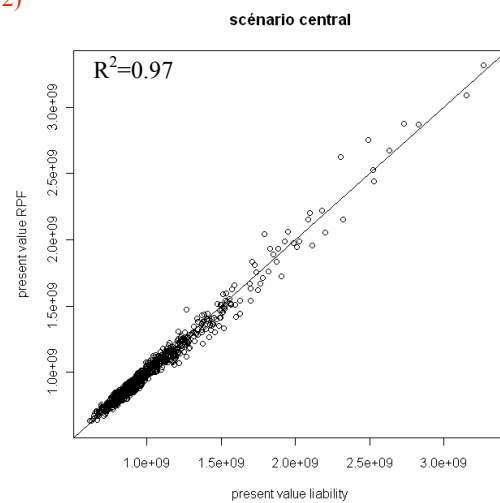
Pour comprendre pourquoi l'utilisation de la solution classique des moindres carrés peut ne pas être satisfaisante et implique l'utilisation de la régression sur composantes principales, nous allons présenter succinctement un exemple de réplication portant sur un portefeuille de contrats épargne (exemple qui sera détaillé à la section III-2). Notons juste pour le moment le profil des poids ZCB et le graphique de régression :

Exemple : Portefeuille contrats épargne

1)



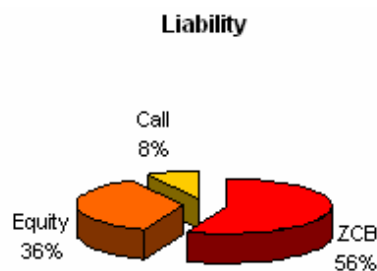
2)



Nous pouvons constater sur cet exemple que les critères statistiques tels que le R^2 semble satisfaisant ce qui n'implique pas que le portefeuille répliquant soit « bon » comme nous le verrons dans la troisième partie. Cependant dans cette première illustration nous allons plutôt nous focaliser sur les valeurs numériques des poids.

Tout d'abord si l'on représente le pourcentage représenté par les actifs ZCB au sein de la market value du portefeuille nous remarquons que celui-ci est très important.

Répartition des actifs :



Cela signifie que ces actifs jouent un rôle relativement prépondérant dans la réplication, en quelque sorte ils forment une base de flux non aléatoire. Les actifs equity ainsi que les calls sur action introduisent quant à eux une certaine volatilité qui permet de capter les mouvements de plus grande amplitude lié à l'investissement en actions d'une partie de l'actif en face des passifs.

Un point essentiel à souligner concerne les poids que nous venons de déterminer, en effet lorsque nous analysons la valeur des poids des ZCB nous observons une alternance de signe positif et négatif, ce qui selon une approche « couverture » signifierait des positions short-long. Cet aspect est contre-intuitif, nous nous attendions en effet à une structure de ZCB décroissante représentant une certaine allure « d'écoulement décroissant ».

Comme nous allons le voir à partir de l'analyse en composante principale de la matrice des assets, ce manque de stabilité est en fait dû à la forte corrélation entre les variables explicatives. Par exemple, intuitivement cela est confirmé par le fait que le prix du ZCB à 2 ans est fortement lié à la valeur du ZCB à 3 ans. Ce problème de corrélation se traduit en pratique par une quasi-colinéarité dans la matrice $A^T * A$ synonyme de quasi-non inversibilité.

2.2.1.2 La régression sur composantes principales

L'approche générale de la régression sur composantes principales est d'utiliser lors de la régression les axes principaux de la matrice des régresseurs. Ces axes sont en effet orthogonaux entre eux vis-à-vis du produit scalaire défini à l'aide de la covariance et apportent alors de la stabilité aux résultats de la régression.

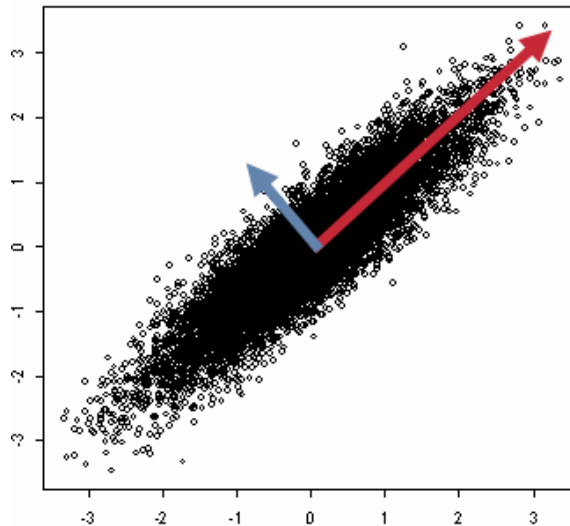
Avant de préciser son application dans le cadre des Replicating Portfolio, nous pouvons rappeler quelques éléments de l'analyse en composante principale.

Rappel méthode Analyse en Composante Principale :

L'analyse en Composante Principale est une méthode statistique très efficace dans le traitement de données multi-facteurs où l'on s'intéresse à obtenir une vision synthétique des facteurs les plus influençant. D'un point de vue « intuitif », en utilisant une

représentation des individus dans le plan des variables, la méthode consiste à chercher les directions de l'espace qui expliquent au mieux la variance de l'échantillon. Ces directions sont en fait les vecteurs propres de la matrice de corrélations (ou de covariance) des variables, la valeur propre associée représente le pourcentage de variance expliquée.

Illustration sur un nuage de points à deux dimensions :



En rouge, la composante principale qui explique le plus de variance du nuage de points et en bleu la seconde orthogonale à la première.

Nous pouvons désormais passer à l'analyse en composantes principales de la matrice des assets tirée de l'exemple précédent. Deux choix s'offrent alors à nous, d'une part considérer la matrice de variance-covariance des données centrées et d'autre part considérer la matrice variance-covariance des données centrée-réduites qui est alors la matrice de corrélation. Ces deux approches ne sont pas équivalentes puisque la deuxième approche permet en quelque sorte de ramener toutes les variables sur la même base unitaire.

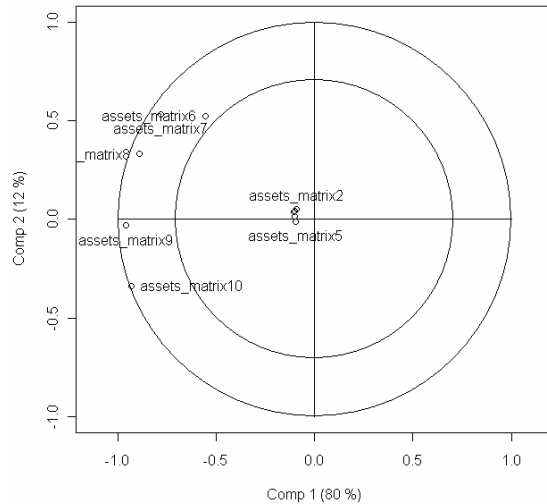
Illustrons ce point en visualisant le cercle des corrélations ainsi que les composantes principales sur la base des variables sur un exemple simple.

Analyse des composantes principales sur la matrice des assets :

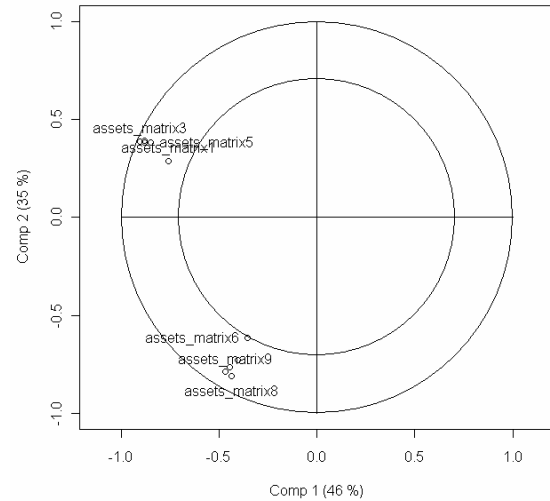
On considère la matrice dont les 5 premiers actifs correspondent aux zéro-coupons de maturité 2 à 6 ans, les 5 derniers aux equity de maturité 2 à 6 ans.

Cercle des corrélations :

Données centrées



Données centrées-réduites



Composantes principales :

Données centrées

Loadings:	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10
assets_matrix1							-0.282	0.568	-0.599	-0.484
assets_matrix2						0.194	-0.587	0.447	0.234	0.602
assets_matrix3						0.361	-0.540	-0.346	0.403	-0.544
assets_matrix4						0.544		-0.477	-0.605	0.317
assets_matrix5						0.729	0.523	0.360	0.241	
assets_matrix6	-0.149	0.372	-0.591	0.418	0.562					
assets_matrix7	-0.312	0.559	-0.338	-0.199	-0.661					
assets_matrix8	-0.430	0.422	0.482	-0.450	0.449					
assets_matrix9	-0.539		0.410	0.705	-0.206					
assets_matrix10	-0.636	-0.608	-0.369	-0.293						

Données centrées réduites

Loadings:	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10
assets_matrix1	-0.356	0.155	0.185	-0.750			0.403	0.219	0.168	
assets_matrix2	-0.413	0.205		-0.236			-0.527	-0.267	-0.589	-0.136
assets_matrix3	-0.422	0.209		0.139			-0.361	-0.165	0.597	0.494
assets_matrix4	-0.413	0.210		0.329			0.116		0.266	-0.762
assets_matrix5	-0.397	0.207	-0.134	0.406	-0.102		0.439	0.249	-0.443	0.395
assets_matrix6	-0.166	-0.330	0.699	0.131	-0.554	0.215				
assets_matrix7	-0.208	-0.412	0.311	0.106	0.446	-0.670	0.155			
assets_matrix8	-0.205	-0.437		0.104	0.492	0.541	-0.213	0.412		
assets_matrix9	-0.219	-0.424	-0.341			0.261	0.313	-0.691		
assets_matrix10	-0.189	-0.392	-0.476	-0.210	-0.468	-0.362	-0.231	0.369		

L'analyse des composantes principales et des cercles des corrélations montre que lorsque l'on effectue l'ACP sur les variables non-réduites, les premières composantes principales n'expliquent pas les actifs 1 à 5 qui sont les zéro-coupons, ces actifs sont en effet placés au centre du cercle des corrélations donc très mal expliqués par les deux premières composantes. Cela se visualise aussi sur « les coordonnées » des composantes principales. Les actifs ZCB présentant une variance beaucoup plus faible se trouvent alors dans les « dernières » composantes principales. Dès lors, il semble plus intéressant d'utiliser l'ACP sur les variables centrées-réduites de façon à conserver les ZCB qui doivent jouer un rôle dans la réplication.

Après cette approche intuitive de l'ACP, nous pouvons formaliser la méthode de régression sur composantes principales.

Régression sur les composantes principales :

On commence tout d'abord par centrer et réduire la matrice des assets :

$$\text{Assets} = A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,k} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1} - \tilde{A}_1}{\sigma(A_1)} & \dots & \frac{A_{1,k} - \tilde{A}_k}{\sigma(A_k)} \\ \vdots & \frac{A_{i,j} - \tilde{A}_j}{\sigma(A_j)} & \vdots \\ \frac{A_{n,1} - \tilde{A}_1}{\sigma(A_1)} & \dots & \frac{A_{n,k} - \tilde{A}_k}{\sigma(A_k)} \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour des raisons de clarté dans les écritures, on note $PV_{A_{i,j}} = A_{i,j}$

A partir de la matrice des Assets centrée-réduite, nous pouvons calculer la matrice de corrélation :

$$C = \frac{1}{k} * \tilde{A}' * \tilde{A}$$

Cette matrice est une matrice symétrique réelle donc celle-ci est diagonalisable dans une base orthonormée. Les vecteurs propres ($PC_1, \dots, PC_k$) sont appelés les composantes principales, et nous pouvons noter PC la matrice des composantes principales qui

correspond à la matrice de passage de la base des variables originelles à la base des composantes principales.

$$PC = \begin{bmatrix} PC_{1,1} & \cdots & PC_{1,k} \\ \vdots & PC_{i,j} & \vdots \\ PC_{k,1} & \cdots & PC_{k,k} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres associées ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$) correspondent au pourcentage de variance expliquée par chaque composante principale. En ordonnant, les composantes principales en ordre décroissant vis-à-vis des valeurs propres correspondantes, on peut sélectionner les $p < k$ composantes principales qui expliquent (en cumulé) un seuil de variance prédéterminé. En pratique ce seuil sera fixé au environ de 98%.

Nous obtenons une matrice PC tronquée qui n'est donc plus une matrice de changement de base mais qui conserve une grande partie de l'information :

$$PC' = \begin{bmatrix} PC_{1,1} & \cdots & PC_{1,p} \\ \vdots & PC_{i,j} & \vdots \\ PC_{k,1} & \cdots & PC_{k,p} \end{bmatrix}$$

La régression va être ensuite effectuée dans la nouvelle base des composantes principales, pour cela il faut projeter le nuage de points dans cette nouvelle base, ce qui s'obtient aisément à partir de la formule de projection :

$$\text{Present Value des composantes principales} = PVPC = A * PC'$$

Le modèle est alors réécrit de la façon suivante :

$$\forall i, \quad PV_liability(i) = w_1 * PVPC_1(i) + \dots + w_p * PVPC_p(i) + \xi(i)$$

• $i \in [1, 5000]$: indice de simulations

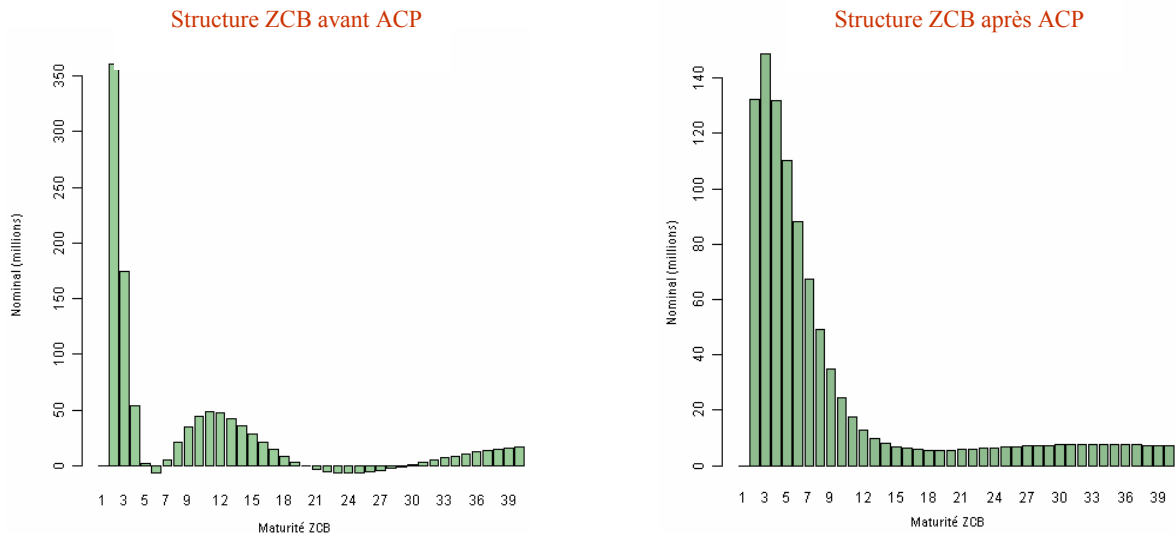
En utilisant une minimisation des moindres carrés, on obtient la solution w_{PC} dans la base des composantes principales :

$$w_{PC} = (PVPC^T * PVPC)^{-1} * (PVPC^T * L)$$

Afin d'obtenir la solution dans la base initiale des actifs, nous utilisons la matrice de changement de base :

$$\underline{w} = \underline{PC}' * \underline{w}_{PC}$$

Nous pouvons illustrer l'effet de la régression en ACP sur l'exemple précédent :



Nous commenterons cette méthode et les aspects qui lui sont liés dans le calcul de la VaR ou encore des sensibilités du portefeuille dans la partie limites et aspects du Replicating Portfolio. Nous pouvons cependant conclure la présentation de cette métrique à l'aide d'une remarque intuitive concernant la Present Value Matching. En faisant le constat simple que selon cette métrique un euro à 5 ans peut être similaire à un euro dans six ans en jouant sur les taux d'actualisation et du fait de la corrélation entre les taux à différentes maturités, nous pouvons constater que cette méthode tend à perdre de l'information temporelle même si une partie de cette information est contenue dans l'actualisation par le déflateur. Il semble donc intéressant d'introduire une métrique de réplication qui conserve une bonne approximation de la market value tout en apportant une dimension temporelle à la réplication. La métrique de Present Cash-Flow Matching semble pouvoir répondre à cette problématique.

2.2.2 Present Cash Flow Matching :

Comme nous venons de l'introduire, le but de la méthode Present Cash-Flow Matching est double :

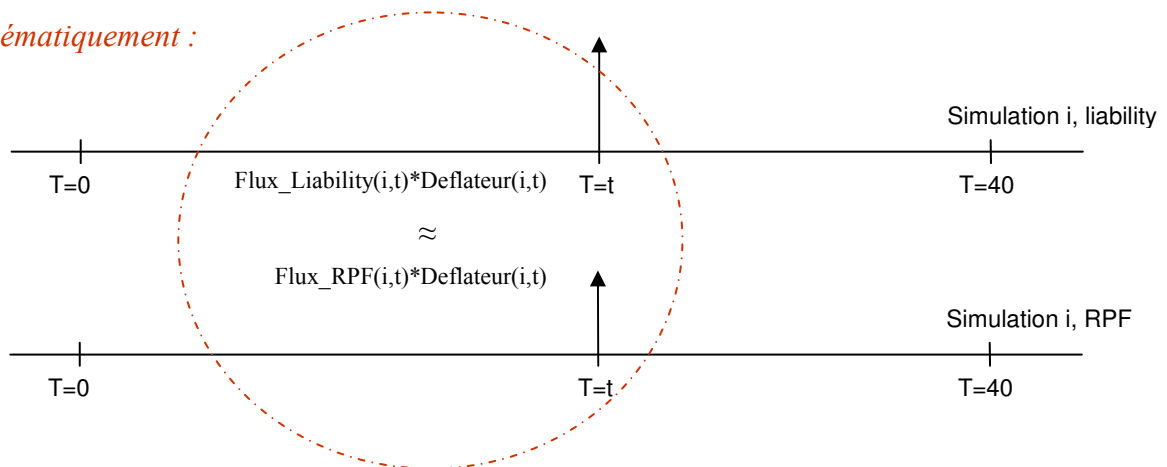
- Conserver une dimension temporelle dans la réplcation
- Trouver une bonne approximation de la present value du passif pour chaque scénario et ainsi obtenir une approximation de la market value

La métrique en Present Cash-Flows Matching peut être définie de la façon suivante :

« Deux cash flow sont similaires si et seulement si leurs flux actualisés sont égaux à toutes dates et pour chaque scénario »

On peut cependant de suite s'interroger quant à la faisabilité d'une telle réplcation, en effet celle-ci semble très contraignante puisqu'elle impose une contrainte sur l'ensemble des dates et des scénarios. Il se peut alors que l'univers d'actifs ne soit pas assez grand ou encore qu'il n'existe pas de solutions satisfaisantes c'est-à-dire suffisamment « réplcantes » au vu des critères statistiques.

Schématiquement :



En utilisant la même logique de notation qu'à la section 3-1), nous pouvons définir la present value d'un flux à d'une date et pour une simulation donnée.

Notation :

- Present value flux date t , simulation i = $PV_flux(i, t) = Deflateurs(i, t) * flux(i, t)$

Modèle :

$$\forall i, t \quad PV_flux_liability(i, t) = w_1 * PV_flux_assets_1(i, t) + \dots + w_k * PV_flux_assets_k(i, t) + \zeta(i, t)$$

- $i \in [1 : 5000]$
- $t \in [1 : 40]$

Remarquons que sous cette forme le problème n'est plus tout à fait un problème de type « régression linéaire » puisque celui-ci fait apparaître deux dimensions.

En utilisant la distance des moindres carrés, le problème peut être vu par la minimisation en $(w_1, \dots, w_k)$ de la fonction suivante :

$$f(w_1, \dots, w_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{40} (PV_flux_liability(i, t) - \sum_{j=1}^k w_j * PV_flux_asset_j(i, t))^2$$

Il s'agit de la minimisation d'une somme double, ce qui ne permet pas d'utiliser directement la solution des moindres carrés.

Cependant en utilisant un indice synthétique qui parcourt $n*40$, nous pouvons réécrire la fonction sous la forme suivante :

$$f(w_1, \dots, w_k) = \sum_{p=1}^{n*40} (PV_flux_liab(p) - \sum_{j=1}^k w_j * PV_flux_asset_j(p))^2$$

Ou

$$PV_flux_liab = \begin{pmatrix} PV_flux_liab(1,1) \\ \dots \\ PV_flux_liab(1,i) \\ \dots \\ PV_flux_liab(1,40) \\ \dots \\ PV_flux_liab(i,j) \\ \dots \\ PV_flux_liab(n,40) \end{pmatrix} \quad PV_flux_assets_k = \begin{pmatrix} PV_flux_asset_k(1,1) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(1,i) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(1,40) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(i,j) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(n,40) \end{pmatrix}$$

Le modèle peut alors se représenter sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} PV_flux_liab(1,1) \\ \dots \\ PV_flux_liab(1,i) \\ \dots \\ PV_flux_liab(1,40) \\ \dots \\ PV_flux_liab(i,j) \\ \dots \\ PV_flux_liab(n,40) \end{pmatrix} \approx w_1 \begin{pmatrix} PV_flux_asset_1(1,1) \\ \dots \\ PV_flux_asset_1(1,i) \\ \dots \\ PV_flux_asset_1(1,40) \\ \dots \\ PV_flux_asset_1(i,j) \\ \dots \\ PV_flux_asset_1(n,40) \end{pmatrix} + \dots + w_k \begin{pmatrix} PV_flux_asset_k(1,1) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(1,i) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(1,40) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(i,j) \\ \dots \\ PV_flux_asset_k(n,40) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(1,1) \\ \dots \\ \xi(1,i) \\ \dots \\ \xi(1,40) \\ \dots \\ \xi(i,j) \\ \dots \\ \xi(n,40) \end{pmatrix}$$

On obtient alors une solution du problème de la même façon que celle obtenue dans le cas de la régression linéaire multiple de la section 2-1-1) :

$$(A^T * A) * w = A^T * L$$

La matrice A des assets est une matrice de taille n*40 ce qui accroît considérablement la taille du système. Il est intéressant de remarquer que les problèmes de quasi-colinéarité des colonnes de la matrice des assets est désormais beaucoup moins présent puisque par construction les actifs forment en quelque sorte une base ce qui peut être vu sur l'exemple qui suit.

Remarque : En considérant les cinq premiers ZCB on obtiendrait une matrice de la forme suivante

$$Assets = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0.87 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0.80 & 0 \\ 0.97 & \vdots & 0 & \vdots & 0.75 \\ \vdots & 0.93 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0.88 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0.79 & \vdots \\ 0.99 & \vdots & 0 & \vdots & 0.72 \\ \vdots & 0.95 & \vdots & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

Qualité de la réplication :

Afin de contrôler la qualité de la réplication, nous pouvons utiliser les critères statistiques et les tests statistiques propres à la régression, c'est-à-dire que nous pouvons nous intéresser aux critères concernant la present value du portefeuille répliquant. Ainsi de la même façon qu'à la section 2-2-1-1), on étudiera :

- Le nuage de points dans le plan Present Value Portfolio / Present Value Liability (plan contenant n points)
- La distribution de la Present Value
- La distribution des erreurs

L'apport de la méthode pourra être visualisé à partir du diagramme des flux :

- Diagramme des flux RPF / Liability
- Diagramme des quantiles RPF / Liability

Ces deux derniers graphiques permettent un contrôle d'ordre qualitatif concernant la réplication de la séquence de flux.

On pourra enfin étudier la droite des moindres carrés dans le plan où l'on effectue la minimisation c'est-à-dire le plan composé des $n \times 40$ points, son interprétation est difficile puisque celle-ci « mélange » des flux de différents horizons

Remarque :

Le Present Cash-Flows Matching est très similaire au Cash-Flow Matching mis à part que par le biais de l'actualisation on accorde plus d'importance au flux de premières années c'est-à-dire proche de nous. Notons cependant que cela introduit une plus grande variance sur les flux lointains et que cela entraîne peut-être une dégradation des résultats de la régression ainsi qu'une plus grande difficulté à trouver les actifs répliquant.

2.2.3 Questions / Problématiques liées au calcul de la VaR

Comme nous l'avons vu, la méthode du « Replicating Portfolio » utilise comme données des scénarios issus de $t=0$. Les différentes métriques permettent de déterminer un portefeuille qui minimise une fonction objective que l'on s'est fixée. Des critères statistiques ainsi que des tests sur des scénarios choqués tels que les sensibilités permettent

de voir comment se comporte le portefeuille répliquant et de juger de la qualité de la réplication du passif en $t=0$.

Cependant, peut-on alors utiliser ce portefeuille répliquant en $t=1$? Puisque nous ne connaissons pas la distribution du passif à horizon 1 an, quelle crédibilité peut-on donner à la distribution déterminée en utilisant le Replicating Portfolio ? Le but de cette partie n'est pas de répondre à ces questions mais plutôt de comprendre en quoi ces aspects sont problématiques.

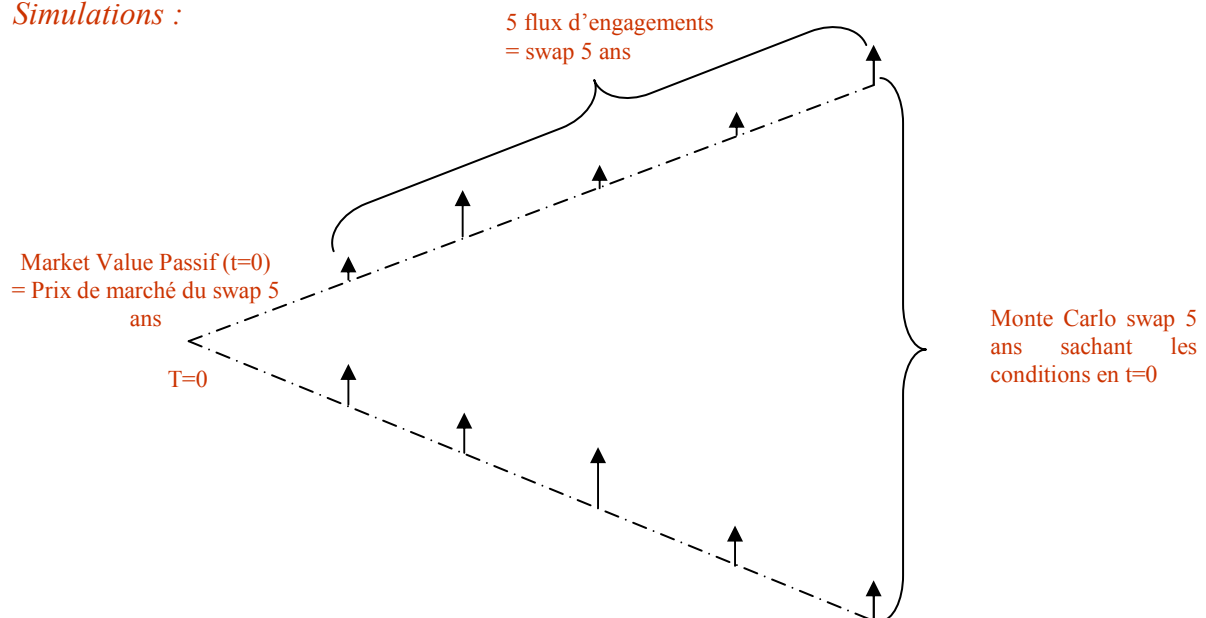
2.2.3.1 Calcul de la distribution du passif

Pour essayer de comprendre ces aspects nous allons illustrer notre propos à l'aide d'un passif fictif simple qui nous permettra d'aborder ces problèmes d'un point de vue purement qualitatif.

Exemple :

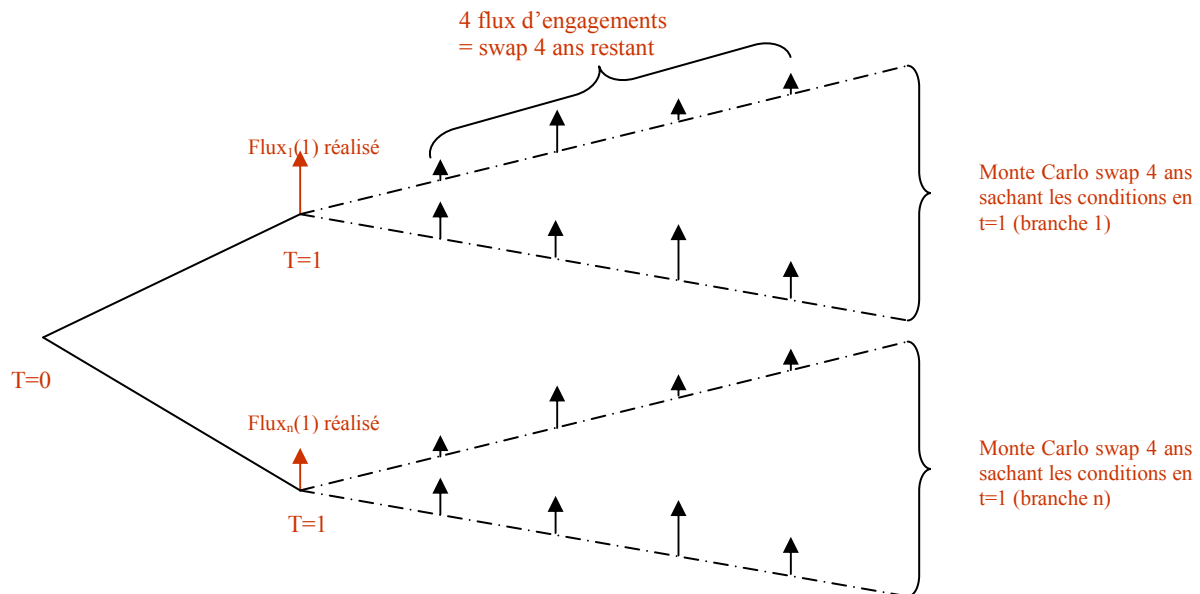
Imaginons que la compagnie d'assurance ait pour passif un swap de taux d'une maturité de 5 ans sur un taux arbitraire de 2,5%. Présentons alors le calcul de la distribution du passif. À $t=0$, le passif de la compagnie est un swap de taux à horizon 5 ans et la projection de 5000 scénarios risque neutre permet de valoriser ce swap à sa valeur de marché.

Simulations :



Le calcul de la VaR est alors le suivant, en « avançant » dans le temps l'engagement de l'assureur devient un swap sur taux de maturité 4 ans en $t=1$. En effet, si l'assureur honore

son engagement en $t=1$ il aura payé la jambe fixe et reçu la jambe variable correspondant au flux en $t=1$, l'engagement restant sera bien un swap de maturité 4 ans vu de $t=1$.



En utilisant l'approche du portefeuille répliquant, il suffit alors de valoriser le portefeuille (ici le swap de 4 ans) selon les conditions économiques qui prévalent en $t=1$.

On peut conclure à l'aide de cet exemple et selon une approche par portefeuille de couverture qu'il faut logiquement :

- Eliminer les instruments de maturité 1 an puisqu'ils correspondent à des flux écoulés.
- Ajuster les maturités des instruments c'est-à-dire les diminuer d'un an.

Une fois le portefeuille réajusté, nous pouvons valoriser celui-ci à l'aide de formules fermées ce qui nous permet d'obtenir les différentes market value du passif à 1 an selon les conditions de marché. L'actualisation de ces valeurs par les déflateurs de première année correspondantes permet de déterminer la distribution du passif.

Nous venons d'explicitier la logique de calcul de la VaR en considérant un portefeuille qui répliquerait parfaitement chaque flux dans une approche par simulation. Examinons quels problèmes nous pouvons anticiper vis-à-vis des métriques que nous avons présentées.

2.2.3.2 « Intuition » du rôle de la métrique dans le calcul de la distribution

En comparant les deux méthodes de Present Value Matching et Cash Flows Matching nous pouvons comprendre à présent l'élément essentiel qui les distingue.

Present Value Matching :

La réplication de la present value ne semble pas permettre le calcul d'une VaR, en effet cette méthode résume une séquence de flux (un cash-flow) en une seule variable qui est la valeur actuelle (present value). On perd donc l'information temporelle concernant la sortie de chaque flux. Cette information est certes contenue dans l'actualisation, cependant peut-on pour autant considérer que les maturités des instruments renvoient réellement à une date de sortie de flux ? Il semble que la réponse à cette question est négative comme nous le verrons sur les exemples concrets où l'on peut par exemple répliquer un flux de zéro-coupons à l'aide d'un portefeuille de zéro-coupons où l'effet de compensation est très visible. Les poids déterminés par cette méthode doivent donc se lire de façon cumulée.

Le calcul de la VaR à partir de cette méthode ne semble alors pas envisageable si l'on utilise ce portefeuille de la même façon qu'un portefeuille de couverture.

Present Cash-Flows Matching :

La méthode Present Cash-Flows Matching se distingue essentiellement par le fait que l'on peut associer la maturité de l'instrument à la date de sortie du flux du passif. Ainsi pour un passif de 40, il est nécessaire d'avoir au minimum 40 instruments. Le raisonnement de calcul de la VaR semble pouvoir être envisageable, en effet par cette méthode on se rapproche de l'idée d'un portefeuille de couverture. Notons tout de même qu'il ne s'agit en aucun cas d'un portefeuille de couverture puisque celui-ci est déterminé sur des scénarios simulés qui ne représentent qu'un sous-ensemble des états possibles du monde. Ainsi même si ce portefeuille serait parfaitement répliquant sur un jeu de scénarios il pourrait très bien s'avérer non-répliquant sur d'autres scénarios.

La présentation « intuitive » des aspects liés au calcul de la VaR permet de soulever un problème bien plus « profond » à la méthode. Quelle que soit la métrique de réplication utilisée, la détermination du portefeuille répliquant est effectuée à partir des scénarios simulés à $t=0$. Les différents critères de « qualité » permettent de confirmer ou non la qualité de réplication sur ces scénarios. L'utilisation prévisionnelle du portefeuille

répliquant est alors en lien avec d'autres scénarios qui seraient simulés à $t=0$. Or pour le calcul de la VaR nous souhaiterions utiliser le caractère prévisionnel pour des scénarios simulés à partir de $t=1$, ce qui d'un point de vue passif est complètement différent. Nous n'avons donc aucun critère d'erreur ou autre pour l'utilisation de ce portefeuille répliquant dans le calcul de la VaR. Nous reviendrons sur ce point lors de la conclusion sur les limites de la méthode.

Intéressons nous désormais au pricing du portefeuille répliquant.

2.2.3.3 Pricing du portefeuille répliquant / Calcul des sensibilités

Pricing du portefeuille répliquant :

L'objectif de ce stage n'ayant pas été « axé » sur le pricing du portefeuille répliquant et au vu de la complexité des modèles stochastiques du modèle Prophet ALS nous avons utilisé une approche selon le modèle « classique » de Black et Scholes. Il s'agit d'une première approche concernant la valorisation du portefeuille répliquant qui mériterait d'être étudiée plus précisément. Nous allons préciser ici le pricing des options sur actions. Les options sur taux sont valorisées de la même façon selon le modèle de Black. Ce pricing a été effectué pour permettre le calcul des sensibilités ainsi que de visualiser les résultats sur la VaR. En pratique le portefeuille répliquant et le calcul de la VaR sera effectué à l'aide d'un logiciel externe

ZCB et equity :

En ce qui concerne ces actifs répliquants, leur valorisation ne pose pas de problèmes puisque la valeur de ces instruments se déduit directement des tables stochastiques. En effet celles-ci renseignent sur les prix des zéro-coupons de maturité 1-2-3-5-10-15-30 ans, les autres maturités étant déduites par interpolation linéaire.

Les positions sur equity sont simplement déduites du prix de l'action en $t=0$ (ou $t=1$ selon la valorisation que l'on considère) par le principe de non-arbitrage. En effet une position sur action est équivalente à l'achat ou la vente de celle-ci à $t=0$ qui aboutirait au même payoff à maturité.

Call / Put :

Au vu de la complexité du modèle action et du modèle de taux, nous avons choisi d'utiliser le modèle de Black-Scholes en accord avec la structure par termes de taux d'intérêt.

Nous prendrons donc comme taux d'intérêt le taux ZCB associé à la maturité correspondante. Il reste alors à déterminer la volatilité du modèle.

En supposant le modèle du brownien géométrique, on a l'égalité suivante :

$$S_t = S_0 e^{((r_t - \frac{\sigma_t^2}{2})t + \sigma W_t)}$$

En passant au logarithme et en utilisant les propriétés de l'opérateur d'espérance et de variance :

$$E[\ln(S_t)] = (r_t - \frac{\sigma_t^2}{2}) * t$$

$$Var[\ln(S_t)] = \sigma^2 * t$$

On peut alors estimer la volatilité à l'aide de la moyenne ou encore de la variance empirique. On obtient alors une volatilité de 28% qui est quasi indépendante de la maturité de l'option. On utilisera alors ce paramètre en première approche.

Remarque :

- La forme du prix de l'action n'est pas tout à fait cohérente avec la courbe de taux à l'origine, en effet ce modèle devrait faire apparaître une intégrale du taux. Nous avons cependant décidé en première approche de faire une évaluation simplifiée.
- On pourrait tout aussi bien calculer les prix à t=0 des options par un calcul de type Monte-Carlo et en déduire la volatilité implicite.

Le pricing des autres instruments ne sera pas explicité dans ce rapport mais il se base sur le modèle de Black.

Les sensibilités :

A partir de la valorisation du portefeuille répliquant il est alors aisé de calculer les sensibilités de celui-ci en choquant les paramètres du modèle.

Nous pourrions alors calculer les sensibilités suivantes :

- Chocs de taux (déplacement parallèle de la courbe de taux d'intérêt)
- Chocs sur la volatilité des actions

A l'aide du pricing que nous avons effectué, nous ne pourrions pas calculer les sensibilités suivantes :

- Chocs sur la volatilité des taux

En effet, dans le modèle de Black Scholes que nous avons utilisés la volatilité des taux n'intervient pas puisque nous utilisons une structure de taux « constante ». Dans une approche plus rigoureuse cette sensibilité pourrait être calculée.

Nous pourrions alors comparer les trois sensibilités suivantes :

- Sensibilité du passif calculé par la méthode de Monte-Carlo (scénarios choqués)
- Sensibilité du portefeuille répliquant calculé par la méthode de Monte-Carlo (scénarios choqués)
- Sensibilité du portefeuille répliquant calculé à l'aide des formules fermées

3 Mise en pratique de la méthode des Replicating Portfolio

Dans cette section nous allons présenter des exemples concrets de mise en pratique de la méthode des Replicating Portfolio. Nous introduirons tout d'abord le cas d'un contrat fictif type contrat épargne (capital différé) avec un paiement à terme de type « financier », cela nous permettra de déterminer le portefeuille de couverture parfait. L'introduction d'actifs polluants permettra d'illustrer le caractère discriminant de la métrique. Nous calculerons aussi les VaR associées, ce calcul sera fait à partir des scénarios risque neutre puisque nous n'avons pas eu à disposition les tables « historiques ».

Nous présenterons ensuite l'aspect comptable qui permettra de se rapprocher d'un contrat réel d'épargne. Suite à ce premier exemple, nous étudierons la réplique d'un portefeuille de contrats épargne proche d'un exemple réel en étudiant le rôle de l'allocation d'actifs ainsi que des dotations aux différentes provisions. Cet exemple sera l'occasion de comprendre l'influence de la comptabilité dans le modèle.

3.1 Introduction à un contrat d'épargne avec garanties

3.1.1 Présentation du contrat « fictif » d'un point de vue financier

Nous allons donc considérer le contrat portant les caractéristiques suivantes :

Point de vue de l'assuré :

L'assuré verse une prime unique à la date $t=0$ de 1000 Euros.

Point de vue de l'assureur :

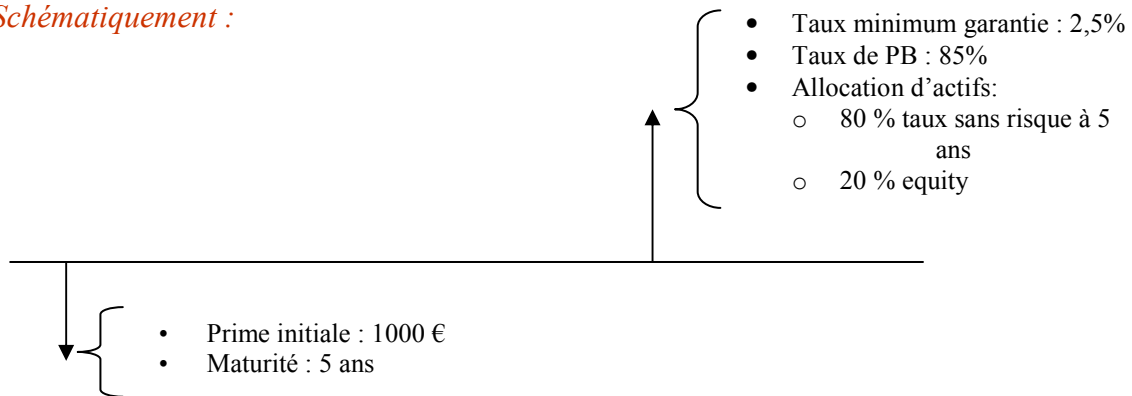
L'assureur s'engage à verser à terme du contrat (5 ans) :

- La prime capitalisée au taux minimum garanti de 2,5%
- 85% de ces produits financiers

Il considère alors l'allocation d'actifs suivante :

- 20% d'actions
- 80% d'obligations zéro-coupons à maturité 5 ans (investissement au taux sans risque à 5 ans déterminé par la structure de taux initiale)

Schématiquement :



Le payoff du produit à maturité est donc le suivant :

$$\text{Payoff}(t=5) = \text{Prime} * (1 + 2.5\%)^5 + \text{Prime} * \max(85\% * \text{Fond}(t=5) - (1 + 2.5\%)^5, 0)$$

En effet, le contrat stipule un taux minimum garanti à 2,5% annuel, ce qui introduit un flux certain à maturité correspondant à la capitalisation de la prime à 2,5%. Concernant la partie optionnelle, avec une participation aux bénéfices (PB) de 85% sur l'ensemble des revenus financiers, l'assuré se voit offrir un call sur le « fond » avec un strike à $(1+2,5\%)^5$.

Au vu de l'allocation fixe :

$$\text{Fond}(t=5) = S_5 + (1 + tx_{5\text{ans}})^5$$

Nous pouvons réécrire le payoff de la façon suivante et ainsi faire apparaître un call sur action

$$\text{Payoff}(t=5) = \text{Prime} * (1 + 2.5\%)^5 + 20\% * 85\% * \text{Prime} * \max\left(S_5 - \frac{(1 + 2.5\%)^5 - 85\% * 80\% * (1 + tx_{5\text{ans}})^5}{20\% * 85\%}, 0\right)$$

Le portefeuille de couverture de ce produit peut être déterminé :

Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	5 ans	/	$\text{Prime} * (1 + 2.5\%)^5 = 1131$
CALL (sur	5 ans		$20\% * 80\% * \text{Prime} = 170$

Avant de passer aux résultats de la réplication par les deux métriques exposées à la section 2-2), nous allons conclure la présentation de ce produit fictif en présentant quelques clauses spécifiques à l'assurance vie qui nous éloigne de cet exemple fictif :

- Un contrat d'assurance-vie comporte toujours une clause liée à la vie de l'assuré, or sur cet exemple ce n'est pas le cas. On peut ainsi imaginer que si l'assuré décède avant l'échéance de son contrat, un versement à un tiers pourrait avoir lieu. Le payoff écrit ci-dessus serait donc conditionné par l'évènement l'assuré est en vie et le portefeuille de couverture précédemment déterminé ne serait plus valable. Ce problème pourrait cependant être « éliminé » par mutualisation des risques de décès sur un portefeuille d'assurés, en effet le passage à un niveau macro entraîne une mutualisation des risques de mortalité et l'usage d'une table de mortalité déterministe viendrait en quelque sorte pondérer les payoffs des différents contrats ce qui pourrait jouer en faveur d'une réplication de la sorte.
- Dans de nombreux cas les contrats d'assurance vie stipulent une clause de rachat, cela signifie que l'assuré peut racheter son contrat lorsqu'il le souhaite (cf management rules pour les rachats dynamiques). On peut imaginer que ce type de clause est répliquable par des options de type américaines cependant comme nous l'avons vu le comportement de l'assuré n'est pas considéré comme rationnel d'un point de vue financier, il ne raisonnera pas forcément selon une approche d'arbitrage.

3.1.2 Premiers résultats de réplication / VaR

3.1.2.1 Les replications

Dans ce paragraphe nous allons effectuer trois réplifications en spécifiant des univers d'actifs différents :

- a. uniquement avec le portefeuille de couverture de façon à tester la méthode
- b. avec le portefeuille de couverture et des actifs « polluants »
- c. avec un portefeuille imparfait

a) Réplication avec le portefeuille de couverture

Nous illustrons les résultats des deux méthodes Present Value Matching et Present Cash-Flow matching en utilisant le portefeuille de couverture comme univers d'actifs. Nous nous

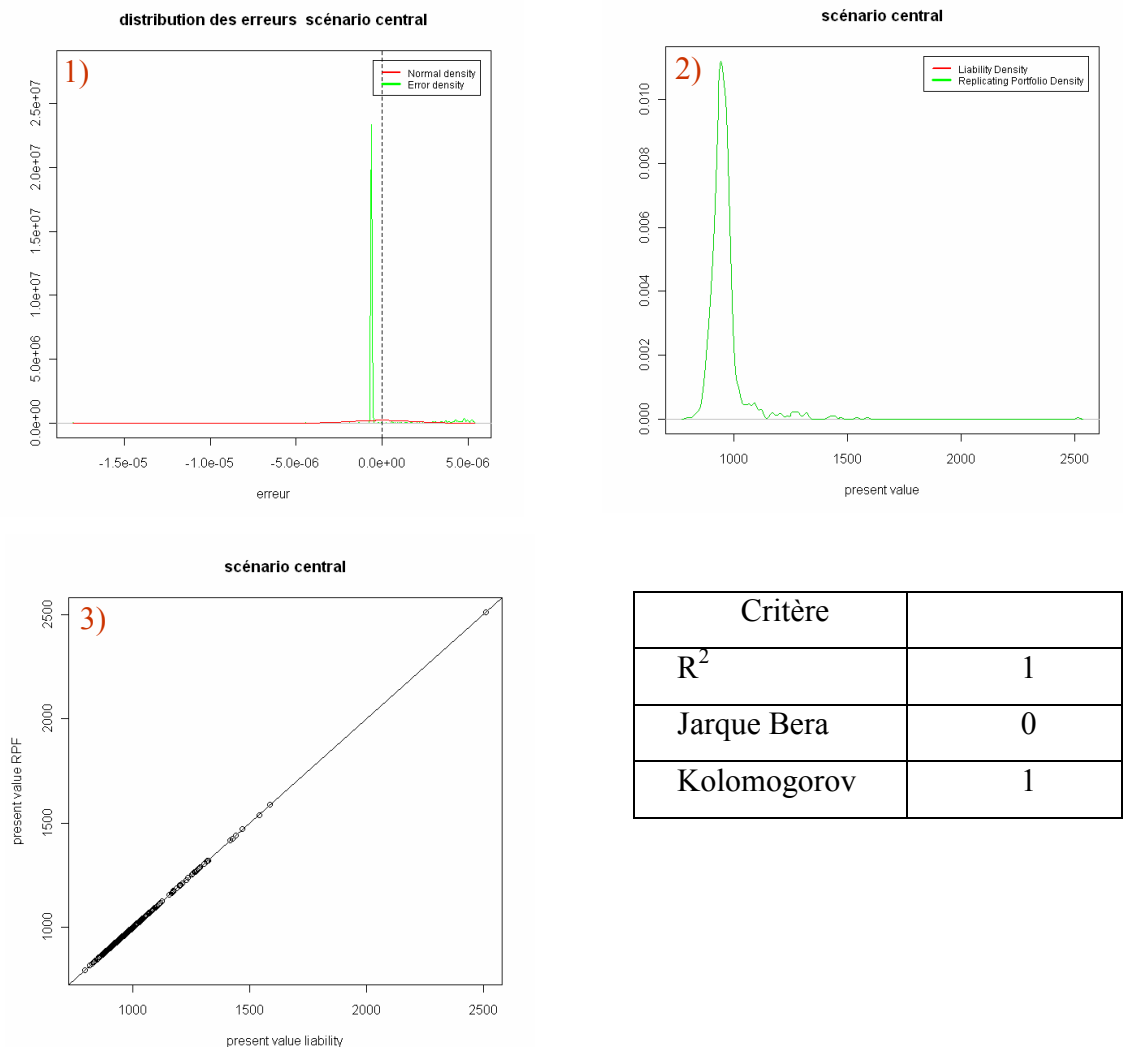
attendons évidemment à ce que les deux méthodes retrouvent la composition exacte du portefeuille de couverture (poids déterminés à la section 1-1))

Univers d'actifs :

Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	5 ans	1.8402	?
CALL (sur action)	5 ans		?

Present Value Matching (seuil de variance à 98%):

Analyse graphique



Critère	
R^2	1
Jarque Bera	0
Kolomogorov	1

Figure 1 : Les erreurs étant très faibles, ce graphique n'est pas très lisible et n'a pas de signification vis-à-vis de la normalité des résidus.

Figure 2 : La densité du portefeuille répliquant est confondue avec celle du liability ce qui est confirmé par le test de Kolmogorov (test qui est cependant à relativiser compte tenu du fait que l'on ne connaît pas la distribution réelle du passif).

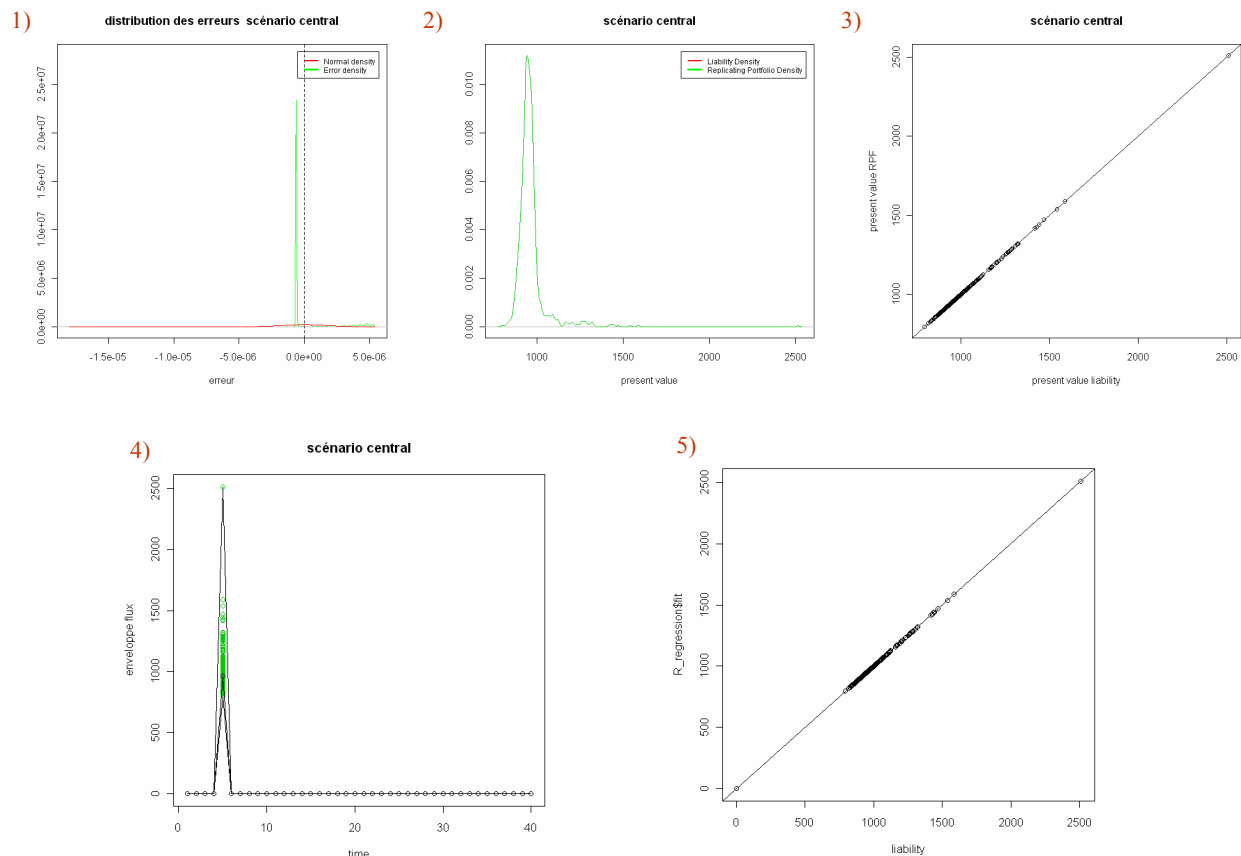
Figure 3 : La première bissectrice du plan est parfaitement aligné sur le nuage de point dans le plan Present Value RPF / Present Value Liability

Portefeuille répliquant :

Instrument	Maturité	Strike	Poids	p-value
ZCB	5 ans	1.8402	1131	0.0
CALL (sur action)	5 ans		170	0.0

On retrouve donc logiquement la composition du portefeuille de couverture.

Present Cash-Flow Matching :



Figures 1-2-3 : l'interprétation est la même que dans le cas du Present Value Matching.

Figure 4 : Le flux du RPF (couleur verte) réplique parfaitement le flux du passif (couleur rouge), le « pic » est dû au fait qu'il s'agit d'un flux unique à la date $t=5$.

Figure 5 : Il s'agit de la représentation dans le plan flux RPF / Flux liability, le nuage contient 40000 points.

Concernant les poids déterminés par cette seconde métrique, nous retrouvons bien la composition du portefeuille de couverture.

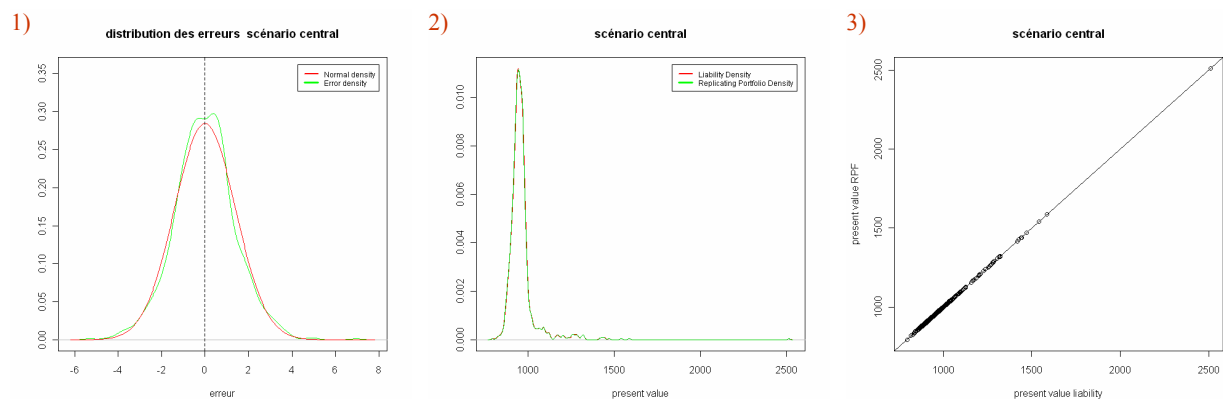
b) Réplication avec le portefeuille de couverture et actifs polluants

A l'univers du portefeuille de couverture nous allons ajouter des actifs polluants, c'est-à-dire des actifs qui ne sont en théorie pas utiles dans la réplication. Nous allons dans un premier temps voir comment ceux là influent sur la méthode et dans la section 3-1-2-2) nous verrons l'impact dans le calcul de la distribution du passif.

Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	3 ans		?
ZCB	4 ans		?
ZCB	5 ans		?
CALL (sur action)	4 ans	$(1+0.02)^4=1.08$	?
CALL (sur action)	5 ans	1.8402	?

Present Value Matching (seuil de variance à 98%):

Analyse graphique



La qualité de la réplication est quasi-équivalente selon les critères statistiques (R^2 élevé, Jarque Bera à 0.10), sauf le test de Kolmogorov (0.70) qui semble indiquer que les distributions du liability et du RPF diffèrent un peu.

Portefeuille répliquant :

Instrument	Maturité	Strike	Poids	p-value
ZCB	3 ans		- 250	0.0
ZCB	4 ans		476	0.0
ZCB	5 ans		906	0.0
CALL (sur action)	4 ans	1.08	0.04	0.04
CALL (sur action)	5 ans	1.8402	169	0.0

L'introduction des actifs ZCB de maturité 3 et 4 ans est venue introduire « un biais » dans la réplication. La qualité de celle-ci reste la même mais les actifs qui n'ont à priori pas de lien avec le passif ont été utilisés dans la réplication, ces actifs vont comme nous le verrons impacter dans le calcul de la distribution du passif.

Nous ne détaillons pas les résultats de la métrique Present Cash-Flow Matching puisque ce sont les mêmes qu'à la réplication a) cela est dû au fait que l'on conserve l'information concernant la date du flux.

c) Portefeuille inexact

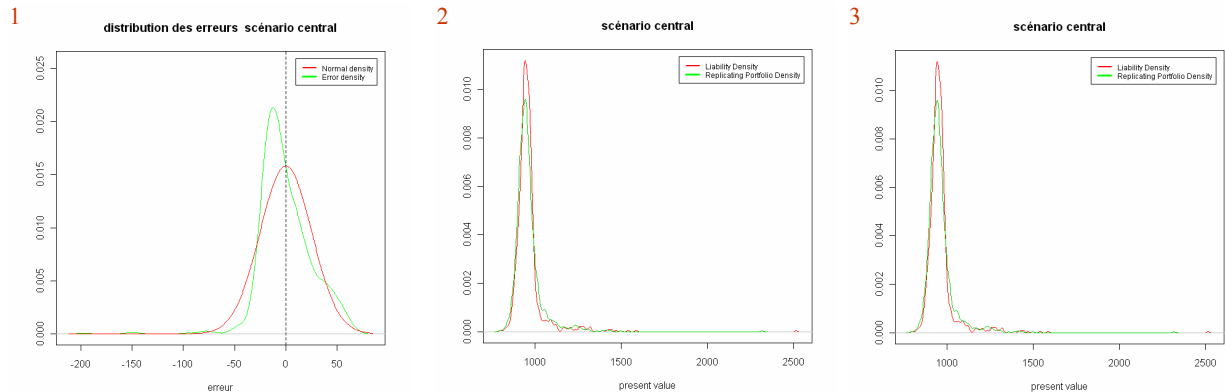
Nous allons désormais considérer un univers d'actifs choisi à priori sans connaissance précise du passif. Aussi nous allons introduire des ZCB, des equity et des calls de maturités différentes.

Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	3 ans		?
ZCB	4 ans		?
ZCB	5 ans		?
EQUITY	3 ans		?

EQUITY	4 ans		?
EQUITY	5 ans		?
CALL (sur action)	4 ans	1	?
CALL (sur action)	5 ans	1.5	?

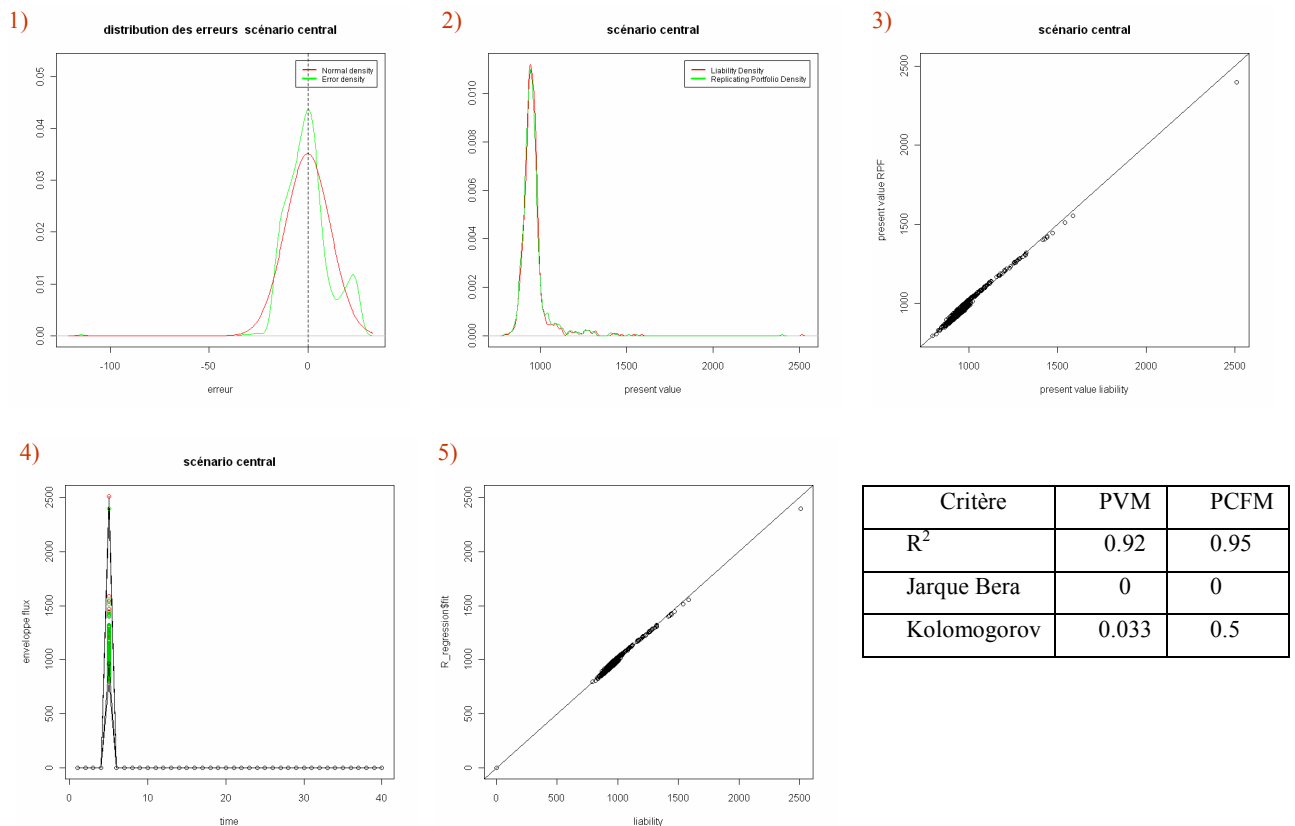
Present Value Matching (seuil variance 98%)

Analyse graphique



Present Cash-Flow Matching

Analyse graphique



On observe donc que la réplication en Present Value Matching est plus affectée que celle en Present Cash Flow Matching et sa qualité est moins bonne.

Portefeuille répliquant :

Instrument	Maturité	Strike	Poids (PVM)	Poids (PCFM)
ZCB	3 ans		-176	0
ZCB	4 ans		452	0
ZCB	5 ans		520	1146
EQUITY	3 ans		-32	0
EQUITY	4 ans		0	0
EQUITY	5 ans		67	-24
CALL (sur action)	4 ans	1	-13	0
CALL (sur action)	5 ans	1.5	84	178

On observe que dans les deux méthodes les positions sur equity viennent compenser le strike qui n'est pas bien ajusté.

Remarque :

En utilisant un seuil de variance à 95% on obtient une régression de qualité équivalente mais la structure de ZCB est alors différente et les autres poids restent sensiblement les mêmes. (351 ZCB(3 ans), 359 ZCB(4 ans), 347 ZCB(5 ans))

Commentaires :

A l'aide de ce premier exemple nous voyons que la méthode Present Value Matching peut introduire des actifs qui n'ont pas de lien avec le flux de passif, en effet lorsque l'on introduit des actifs polluants (réplication b) ceux là ne sont pas éliminés par la méthode. On obtient alors un portefeuille répliquant qui a une present value très proche du passif à répliquer sur un grand nombre de simulations, cependant il semble que l'on ait perdu l'information temporelle contenue dans la date de sortie du flux de passif. L'illustration par les deux réplifications c et c' illustre le fait qu'il existe plusieurs solutions très proches vis-à-vis des critères de réplication mais lointaines dans leurs interprétations. En effet, à l'aide du même univers d'actifs nous obtenons des réplifications qui présentent une structure de ZCB

très différente selon le seuil de variance expliqué que l'on conserve lors de l'analyse en composantes principales. La question qui se pose alors est la suivante, compte tenu des répliques très différentes en termes de poids mais très proches vis-à-vis des critères statistiques celles-ci peuvent-elles donner des résultats équivalents dans le calcul de la VaR ?

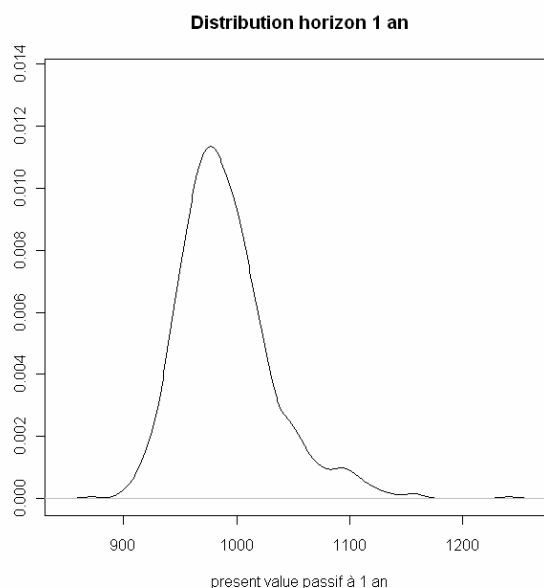
Notons enfin, que comme « prévu » la métrique Present Cash Flow Matching n'introduit pas les actifs polluants puisqu'elle tient compte du caractère temporel du flux.

3.1.2.2 Les distributions de passif

A l'aide des différents portefeuilles répliquant que nous avons obtenus nous pouvons déterminer les Value At Risk à horizon 1 an. Nous utilisons des scénarios dits « historiques » qui sont en fait des simulations stochastiques « réalistes » concernant la première période. Il suffit alors de valoriser le portefeuille répliquant à l'issue de ces 1000 scénarios pour obtenir la distribution du passif à horizon 1 an.

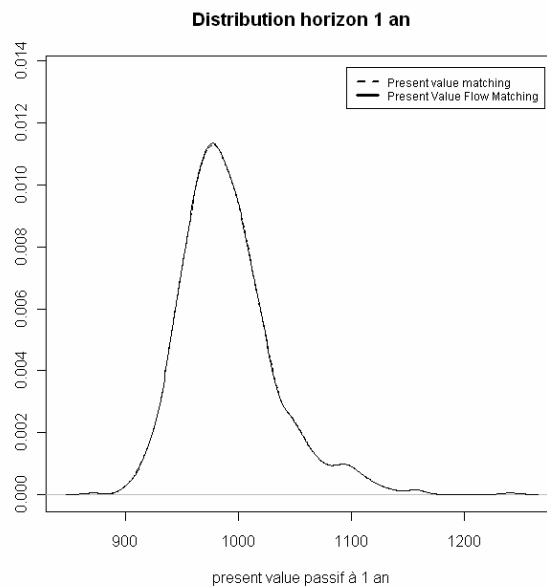
On utilisera la distribution obtenue à l'aide du portefeuille de couverture comme référence et celle-ci sera tracée en trait continu sur le graphique, elle correspond à celle qu'on obtient à partir de la métrique Present Cash-Flow Matching.

a) Distribution avec le portefeuille de couverture



En utilisant le portefeuille de couverture comme univers d'actifs, les deux métriques donnent bien la même distribution.

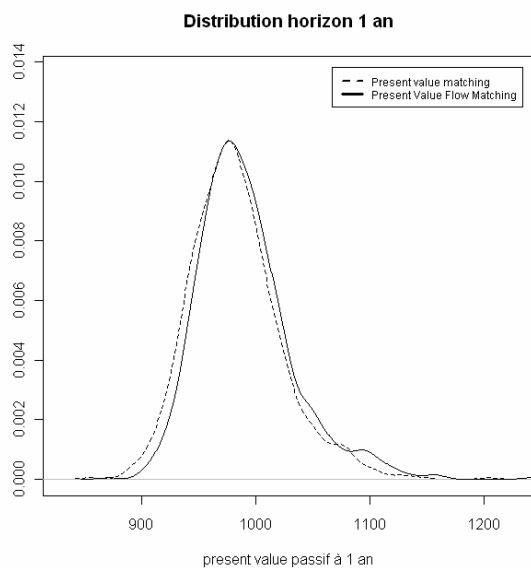
b) Distribution avec le portefeuille de couverture et actifs polluants



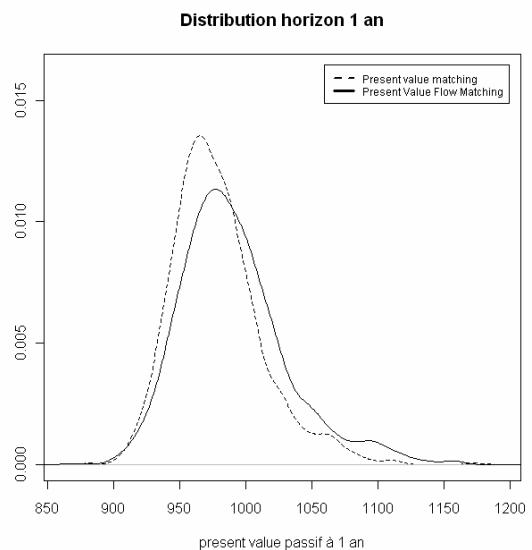
La distribution obtenue à l'aide de la métrique Present Cash-Flow Matching reste inchangée tandis que celle obtenue à l'aide de la métrique Present Value Matching est très légèrement affectée à cause de l'introduction des zéro-coupons.

c) Distribution avec l'univers inexact

Seuil de variance à 98%



Seuil de variance à 95%



On observe à l'aide de cette dernière répliation que la distribution déterminée à partir de la métrique Present Value Matching est sensible au seuil de variance expliqué utilisé lors de l'ACP. Il n'y a donc pas en quelque sorte unicité de cette distribution et on peut observer les résultats numérique concernant cette distribution.

Tableau récapitulatif:

Univers	Moyenne PVM	Moyenne PCFM	VaR PVM	VaR PCFM
Couverture	990	990	1070	1070
Couverture + polluants	990	990	1071	1070
Inexact	982	990	1054	1070
Inexact	978	990	1042	1070

On peut donc à l'aide de ce tableau et sur cet exemple conclure que la distribution obtenue avec la métrique Present Value Matching présente une plus grande sensibilité à l'univers d'actifs que l'on considère. Cette sensibilité semble moindre à l'aide de la métrique Present Cash-Flow Matching

Cet exemple simple nous permet de comprendre une problématique majeure dans la méthode des replicating portfolio qui est de savoir dans quelle mesure le portefeuille répliquant peut être utilisé dans le calcul de la VaR. Si dans cet exemple nous disposons de la « vraie » distribution qui peut nous servir de point de références cela n'est bien entendu pas envisageable en pratique puisque c'est le but même de la méthode, dès lors se pose une question ouverte qui est de quantifier l'erreur vis-à-vis de la vraie distribution.

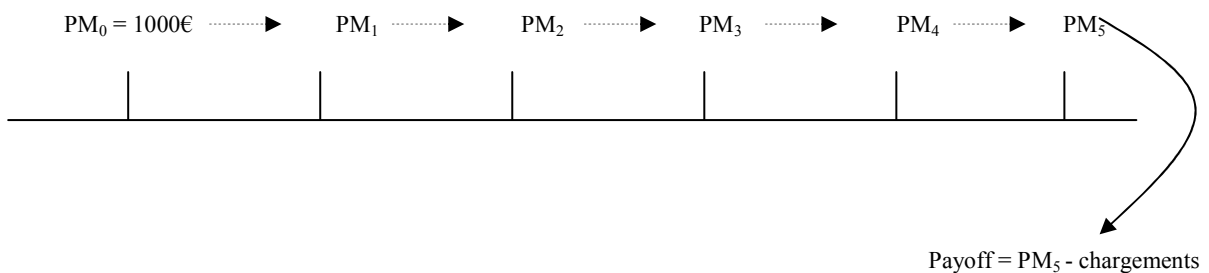
3.1.3 Produit épargne « Euro » en pratique dans les normes comptables

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction concernant le produit simplifié « capital différé à terme » n'est pas à proprement dit un produit d'assurance. De plus, même si dans certains pays le « payoff » du produit peut s'apparenter à celui que nous avons présenté le cadre comptable français impose une toute autre vision à ce type de contrat.

Concernant les caractéristiques du produit nous utiliserons les mêmes mais leur interprétation sera désormais en accord avec leur définition comptable. En effet, dans le cadre des normes comptables françaises, l'assureur doit effectuer annuellement la revalorisation de la provision et c'est la provision constituée à l'issu des cinq ans qui sera versé à l'assuré au terme des cinq ans.

Schématiquement :

Evolution de la provision :



Versement à l'assuré :



Du fait de l'obligation de l'assureur de provisionner, l'assuré ne reçoit finalement pas un flux à terme déterminé par la valeur du fond à maturité du contrat car c'est l'ensemble de la trajectoire du fond qui déterminera la valeur de la PM finale qui lui sera servie. L'assuré possède un contrat Path Dependant à l'image des options asiatiques qui permettent de bénéficier des performances des actions sur la durée de vie de l'option. Pour préciser cette vision Path Dependant, détaillons la dynamique de la PM sur cet exemple :

$$PM_t = PM_{t-1} * (1 + \max(85\% * rdt_comptable_{t-1}, 2.5\%))$$

Cette définition récursive peut être écrite à partir la PM initiale :

$$PM_t = PM_0 \prod_{j=1}^t (1 + \max(85\% * rdt_comptable_{t-1}, 2.5\%))$$

En considérant le taux de revalorisation sur une période et en effectuant la décomposition classique du max nous pouvons faire apparaître « une option de taux » de type caps:

$$Taux_revalorisation_t = \max(85\% * rdt_comptable_t, 2.5\%) = 2.5\% + \max(85\% * rdt_comptable_t - 2.5\%, 0)$$

Ainsi dans cette seconde partie nous allons essayer de répliquer un portefeuille de produits d'épargne où les cash-flows sont obtenus à l'aide de la dynamique de PM que nous venons de présenter. Notons dès à présent deux points qui nous éloignent de l'analogie financière :

- Dans la revalorisation de la PM, le taux « sous-jacent » des options de taux n'est pas un taux de marché puisqu'il s'agit du taux de rendement comptable qui dépend de l'allocation d'actifs et des règles de provisionnement comptable. Ainsi il sera intéressant d'illustrer l'effet d'une allocation flexible dans la réplication ainsi que le rôle des différentes provisions.
- Le parallèle avec des options de taux type « caps » n'est pas juste, en effet une option de type caps ne fonctionne pas sur le principe de capitalisation. Or dans le cadre la dynamique de cette PM il s'agit de « produits de max », en quelque sorte il faudrait s'engager sur un cap et ensuite investir l'intégralité de la somme obtenue à maturité dans un nouveau cap, etc.... Ce type de produit a été étudié et pose des problèmes de valorisation en formule fermée.

3.2 Réplication d'un portefeuille de contrats épargne en fonction de plusieurs paramètres

Nous considérons désormais un portefeuille de contrats épargnes sur une PM initiale de 1 000 000 Euros.

Les caractéristiques suivantes sont fixées :

- Taux de rachat déterministe = 10%
- TMG=2%
- Taux de PB contractuelle=90%
- Taux de chargement=0.5%

Remarque :

Notons que dans cette modélisation simplifiée d'un portefeuille de contrat épargne nous ne faisons pas intervenir le fond de PB puisque cela introduit encore une complexité.

Les caractéristiques de dotations aux provisions ainsi que d'allocation d'actifs seront fixées sur chaque exemple. Nous nous intéresserons essentiellement à la réplication et non au calcul de la VaR puisque ce point a été discuté à la section précédente.

3.2.1 Allocation 100% "Cash"

Dans cette partie, nous étudions des cas particuliers où l'on essaye de minimiser l'impact des normes comptables car celles-ci tendent à nous éloigner des rendements financiers par les différentes dotations lors des moins values des actifs. On essaiera donc de se ramener à l'exemple précédent, en utilisant tout d'abord une allocation fixe de façon à pouvoir fixer des strikes des options (notons que dans l'exemple de la section 1 l'utilisation d'un call sur action n'a de sens que sur une allocation fixe). Les différentes dotations à la réserve de capi et à la PRE nous conduisent dans un premier temps à envisager la réplication d'un portefeuille de contrat où l'assureur choisit une allocation dans du « cash » à 100% c'est-à-dire un investissement capitalisé au taux court annuel. Les variations de valeur sont alors comptabilisées en résultat.

Ainsi la valeur du fond peut être écrite de la façon suivante :

$$\text{Fond}_t = 1\text{€} * \prod_{i=1}^t (1 + \text{taux_annuel}_{t-1})$$

Pour répliquer ce passif nous allons nous intéresser à deux univers d'actifs possibles tout en gardant à l'esprit que la PM est construite de façon path-dependant.

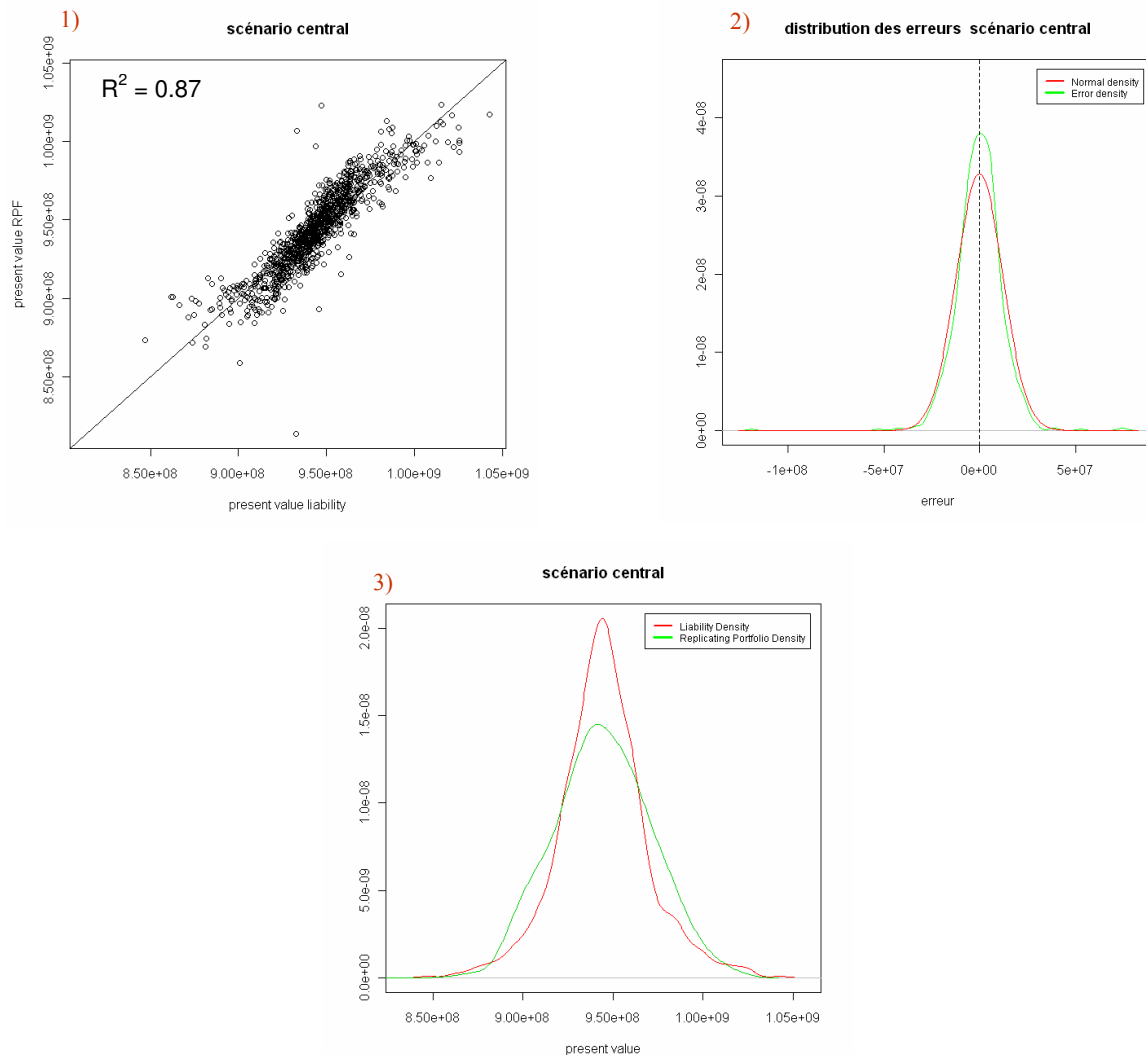
a) Univers de ZCB et call

Cet univers d'actifs est constitué de 39 zéros-coupons de maturité 2 à 40 ans ainsi que de 40 calls. Nous considérons le « cash » comme sous-jacent des calls et les strikes sont fixés comme à l'exemple 1, c'est-à-dire qu'ils tiennent compte du taux de PB ainsi que du taux minimum garanti.

A une date i ,

$$\text{Strike Call}(i) = \frac{(1 + 2\%)^i}{90\%}$$

Nous allons illustrer graphiquement les résultats de cette réplcation et nous ne présenterons pas les résultats numériques sur cet exemple.



Nous obtenons ainsi une réplcation de qualité moyenne, la normalité des résidus n'est pas vérifiée par le test de Jarque Bera, le test d'adéquation entre la distribution du portefeuille répliquant et celle du passif est rejeté. Notons cependant que ces tests sont très exigeants.

Compte tenu du fait que nous connaissons la dynamique de la PM et que celle-ci ne fait pas (ou peu) intervenir de dotations aux différentes provisions, il semble intéressant de

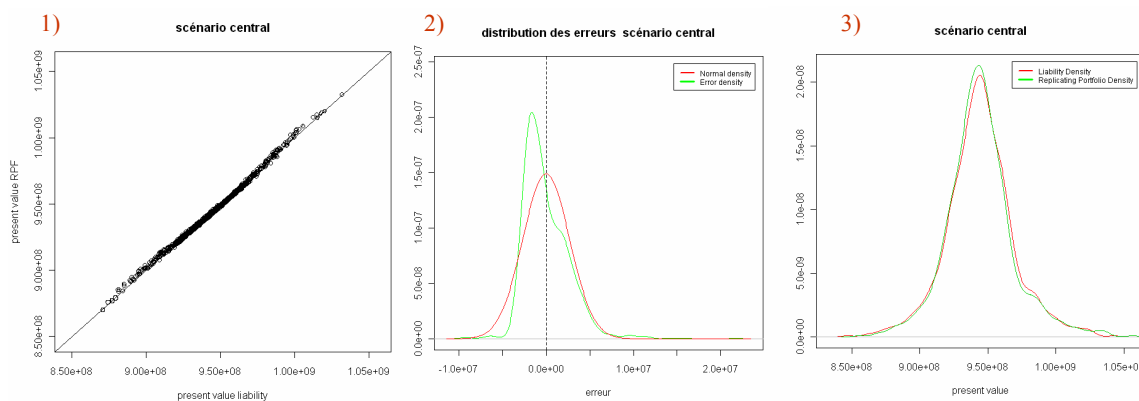
considérer une nouvelle classe d'actifs correspondant à l'idée des caps capitalisés même s'il est clair que nous ne pourrions évaluer ces actifs à l'aide de formules fermées (élément essentiel dans le calcul de la VaR).

b) Univers de ZCB et Caps capitalisés

Nous remplaçons la classe des calls par une classe de caps dont le payoff actualisé est le suivant :

$$\text{PV_Actif}_i = \text{Deflateur}(i) * \prod_{t=1}^i (1 + \max(90\% * r_{fi,t}, 2\%))$$

Nous pouvons alors tester la réplication à l'aide du nouvel univers d'actifs et illustrer les résultats de façon graphique :



A l'aide de cette nouvelle classe d'actifs nous améliorons nettement la qualité de la régression et l'adéquation de la distribution du RPF vis-à-vis du passif est vérifiée. Nous pouvons noter que la réplication n'est pas tout à fait parfaite cela peut être dû à la différence entre rendement comptable et rendement financier même si dans le cas de cet exemple (et c'est le but) le rendement comptable du cash est très proche du rendement financier. Les chargements pourraient aussi avoir un rôle.

On voit sur cet exemple très particulier où l'on considère une allocation 100% cash que l'idée d'approximer la capitalisation de caps par des call où l'on considère le strike de façon « capitalisée » ne donne pas des résultats assez satisfaisants en pratique, en effet on a évidemment :

$$\text{A une date } i, \quad \prod_{t=1}^i (1 + \max(90\% * r_{fi,t}, 2\%)) \neq (1 + 2\%)^i + \max(90\% * \text{fond}_i - (1 + 2\%)^i, 0)$$

Notons cependant que l'égalité tend à être vérifiée lorsque l'on réalise le maximum quasiment tout le temps (ou quasiment jamais) ce qui peut être le cas avec des actifs ayant un rendement constant plus important que le taux minimum garanti. Cela nous amène à illustrer cet exemple à l'aide d'une allocation 100 % obligations qui aura donc un rendement comptable constant.

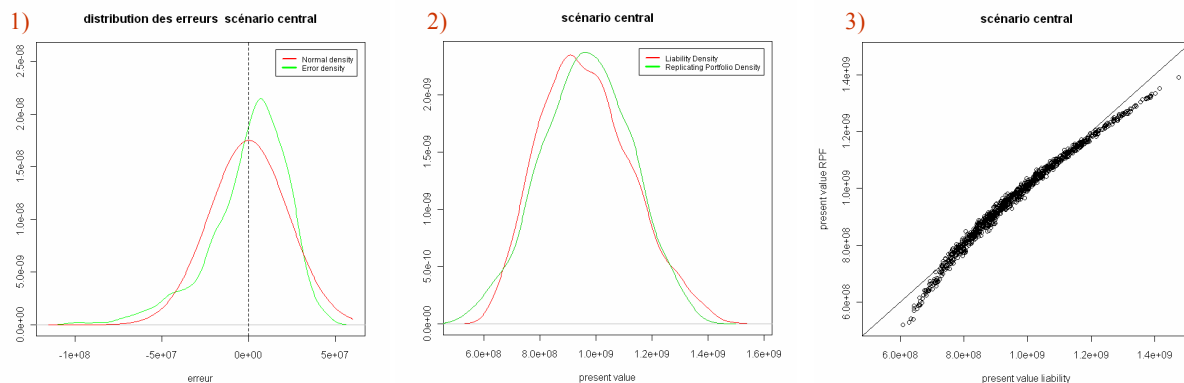
3.2.2 Allocation 100 % obligations

Dans cette sous-partie nous choisissons une allocation d'actifs à 100 % d'obligations, l'obligation de maturité 40 ans porte sur un coupon de 4%. Comme nous venons de l'expliquer, ce taux de rendement étant supérieur au taux minimum garanti il semble que le « max » sera toujours réalisé et que donc les cash-flows seront fixes (on verra cependant que ce n'est pas le cas). Dès lors, une réplique à l'aide de zéro-coupons semble envisageable.

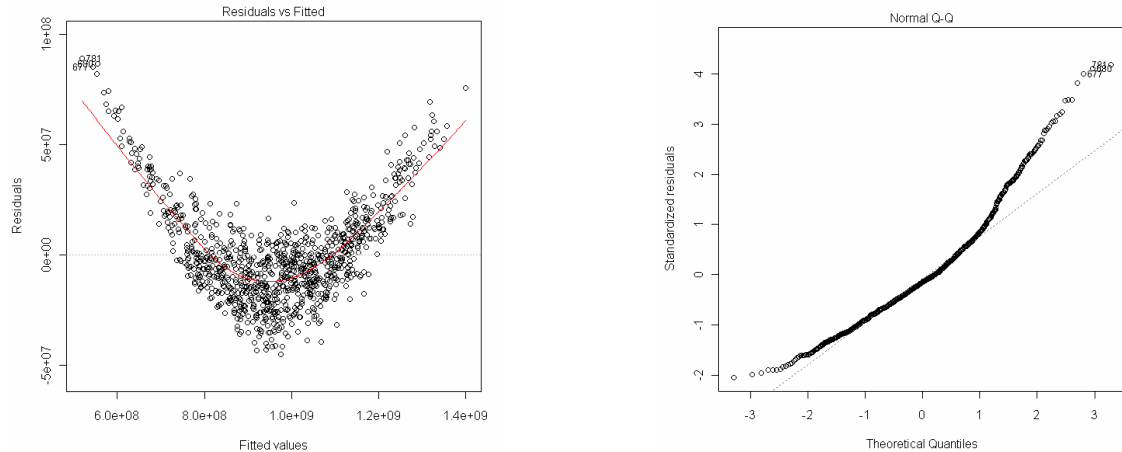
a) Univers ZCB

Nous choisissons dans un premier temps de répliquer ce passif à l'aide de zéro-coupons uniquement en intuitant que les cash-flows devraient être quasi-constants et que cet univers d'actifs devrait donner des résultats satisfaisants. On illustre cette réplique à l'aide des deux métriques.

Present Value Matching

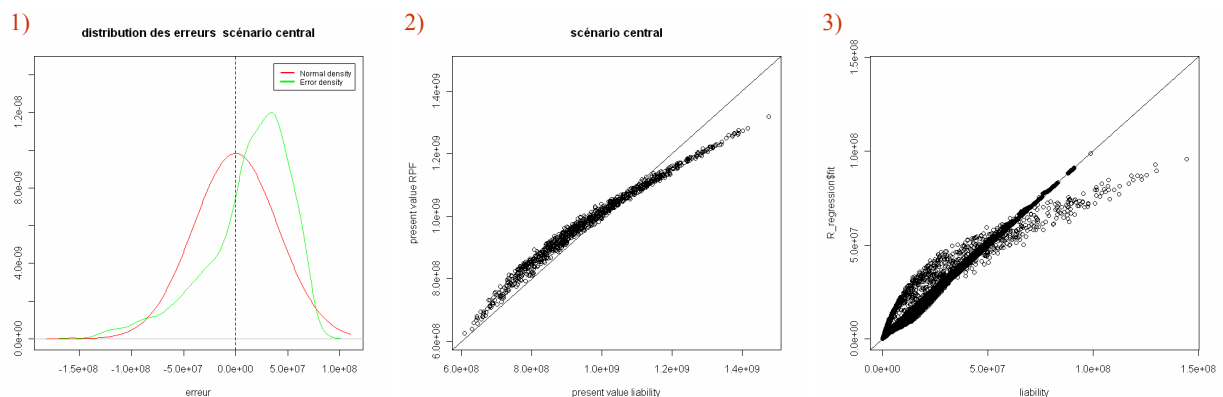


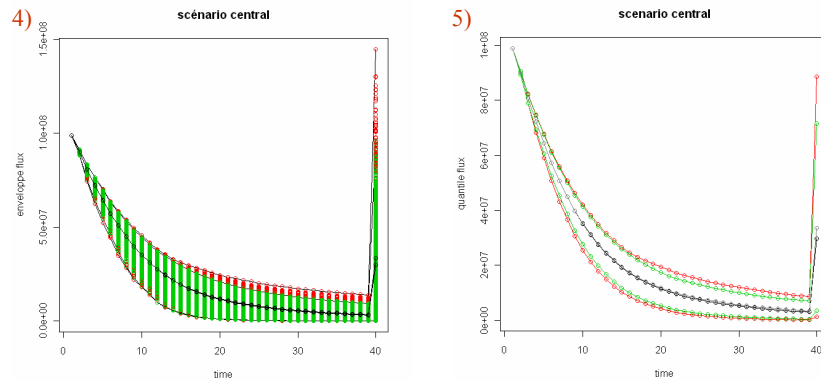
La réplication à l'aide de la métrique Present Value Matching donne des résultats insatisfaisants. En effet, sur la figure 3 on observe que le nuage de points n'est pas bien « distribué » autour de la première bissectrice ce qui est partiellement confirmé par le graphe de normalité des résidus. Une analyse des résidus ainsi qu'un graphe des QQ-Plot illustre parfaitement ce problème.



En ce qui concerne la métrique Present Cash-Flow Matching, celle-ci donne des résultats encore plus particuliers comme nous pouvons le voir sur les graphiques suivants. Notons que la figure 4) qui représente le graphique des flux permet de se rendre compte que la réplication devient mauvaise sur les flux lointains ce problème pourrait être dû au fait que plus l'on s'éloigne de $t=0$ plus l'effet du « max de max » peut avoir un impact du fait de la capitalisation.

Present Cash-Flow Matching





Remarque :

En termes de Market Value nous obtenons les résultats suivants :

Méthode	Market Value Liability	Market Value RPF	Erreur (%)
PVM	965 965 680	972 727 439	0.72 %
PCFM	965 965 680	978 522 485	1.30 %

Comme nous venons de le voir les résultats ne semblent pas assez satisfaisants et des erreurs sont commises sur les scénarios extrêmes. Une analyse plus fine fait apparaître le rôle de la réserve de capitalisation, en effet il ne faut pas oublier que cette provision est liée à la valeur de marché des obligations et comme celle-ci ne peut pas être négative elle apporte un rôle asymétrique à la réplcation. Lorsque les taux montent, les obligations peuvent alors être en moins value, la réserve de capitalisation est alors reprise. La baisse des taux entraine une dotation à la réserve de capitalisation ce qui n'impacte pas les cash-flow servis à l'assuré. Cet effet asymétrique va alors être « capté » par l'introduction de Floors qui va permettre de compenser l'effet de la réserve de capitalisation.

b) Univers ZCB et floors

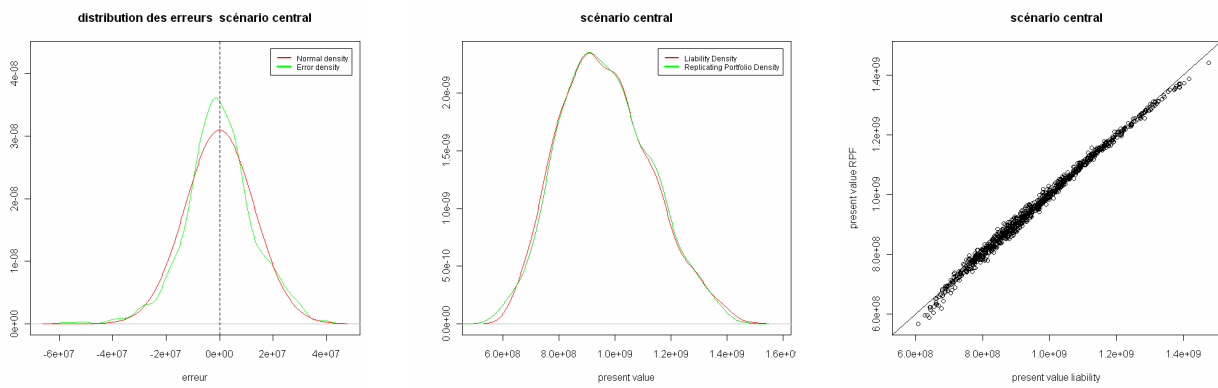
Nous avons donc choisi d'introduire des floors portant sur le sous-jacent taux annuel à 40 (durée de l'obligation), le strike étant fixé à 4% qui sont le taux de l'obligation. On propose donc un univers de 40 floors de durée variant de 1 à 40 ans. Nous nous intéressons aux résultats de la méthode Present Value Matching.

Rappel :

$$\text{Payoff floorlet}_{t+1} = \max(\text{tx}_{40\text{ans}_t} - \text{strike}, 0)$$

Intuitivement lors d'une hausse des taux les obligations perdent alors en valeur de marché et peuvent être en moins value, l'assureur puise alors dans la réserve de capi pour compenser ces moins values. Le floor a alors le même effet que la réserve de capi avec un rôle asymétrique.

Present Value Matching



La réplique est alors de très bonne qualité selon cette métrique, le R^2 est élevé (0.9931) et le test de Kolmogorov Smirnov se révèle satisfaisant (0.70) test qui on l'a vu est très sensible. La normalité des résidus n'est encore pas vérifiée par le test de Jarque Bera, un test moins puissant (moyenne-variance) permettrait d'accepter la normalité des résidus. Une analyse des résidus plus précise montre que ceux là semblent être en adéquation avec l'hypothèse de normalité. Des résultats similaires sont obtenus avec la méthode Present Cash-Flow Matching.

Remarque : Market Value

Méthode	Market Value Liability	Market Value RPF	Erreur (%)
PVM	965 965 680	966 014 640	-0.0005

Commentaires :

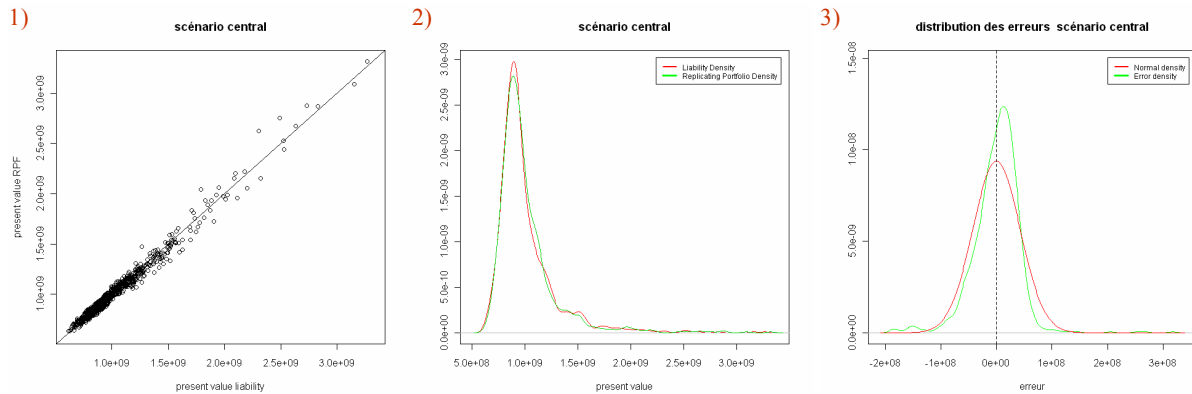
Nous avons sur cet exemple illustré la difficulté de « saisir » le rôle de la réserve de capitalisation, de plus on comprend bien que cette démarche « manuelle » est difficilement sur des passifs plus complexes où l'allocation d'actifs est flexible et où d'autres provisions peuvent intervenir.

Nous allons finir cette partie concernant la réplication du portefeuille de contrat épargne par une allocation fixe 50% actions-50 obligations.

3.2.3 L'allocation 50% actions -50% obligations

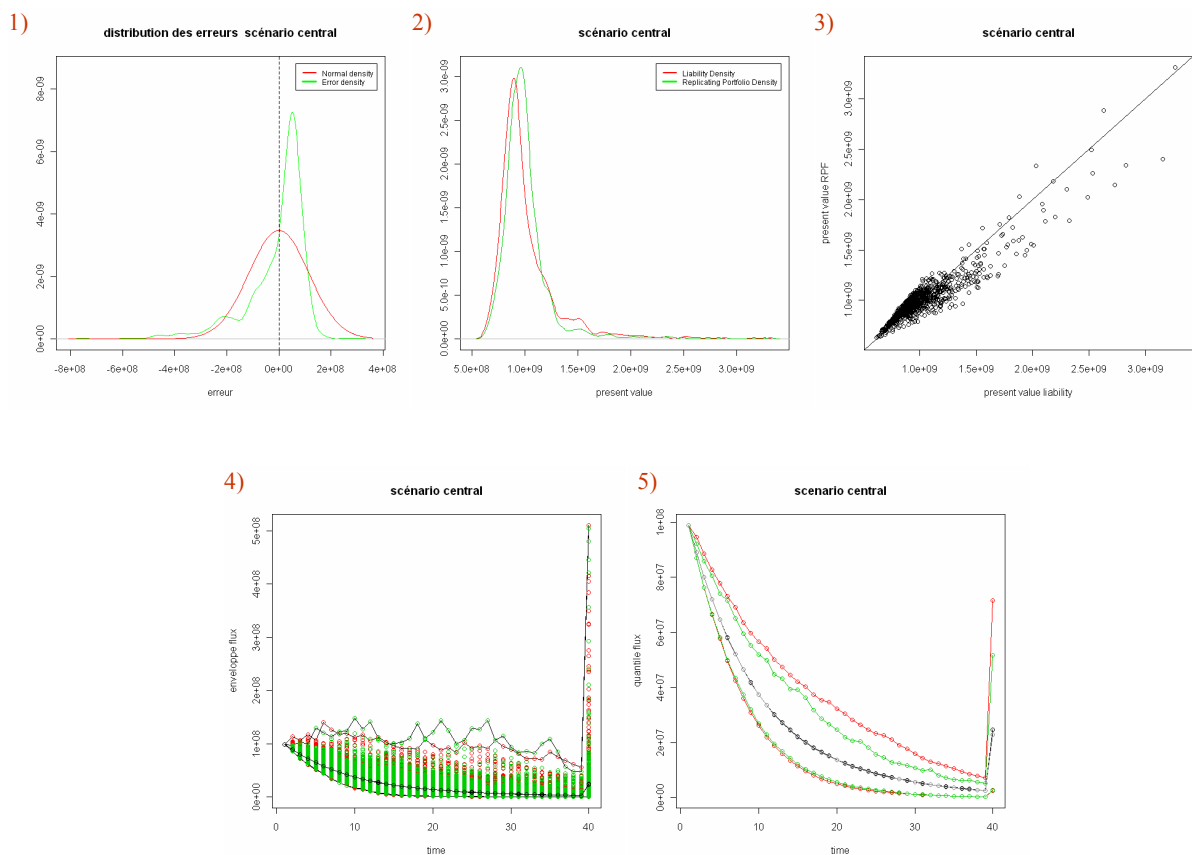
Ici nous étudions une allocation fixe 50% actions -50% obligations, cette allocation plus complexe fait donc intervenir la PRE et la réserve de capi. Nous n'entrerons pas dans une analyse précise de la réplication et nous nous satisferons des résultats donnés par la réplication basée sur une série de call ou le strike est « capitalisé ». Ce point illustre bien le caractère « heuristique » de la méthode des replicating portfolios, en effet il arrive parfois que l'on trouve une solution satisfaisante mais qui peut sembler loin de la complexité du passif. On remarquera d'ailleurs à nouveau que la solution à l'aide Present Value Matching est satisfaisante tandis que celle obtenue à l'aide de la métrique Present Cash-Flow Matching semble montrer que l'univers d'actifs choisi n'est pas satisfaisant pour effectuer une bonne réplication des flux. Enfin, un calcul des distributions montrerait qu'il est bien difficile de se faire une idée de la distribution du passif à horizon 1 an.

Present Value Matching



Critère	PVM	PCFM
R^2	0.974	0.92
Jarque Bera	0	0
Kolomogorov	0.85	0

Present Cash-Flow Matching



Conclusion

1.1 Points clés de la méthode « Replicating Portfolio »

La méthode du « Replicating Portfolio » est une approche possible pour répondre à la problématique du calcul des simulations dans les simulations pour un calcul de capital économique. Elle répond aussi à une idée plus ancienne des assureurs qui est de comprendre d'un point de vue financier leur passif. Cependant au vu de l'ensemble des garanties ainsi que de la complexité des normes comptables sur le passif à un niveau macro, on peut s'interroger sur la pertinence de ce parallèle. Dès lors le portefeuille répliquant ne pourra être qu'une approximation du passif dont il est nécessaire de comprendre les éléments et hypothèses qui permettent de le déterminer.

1.1.1 Connaissance de la métrique

Dans ce rapport nous avons présenté deux métriques qui permettent de définir la notion de « réplication », d'autres métriques existent tel que la Terminal Value Matching qui s'intéresse au flux capitalisé au taux sans risque annuel (flux terminal).

La connaissance et la compréhension de cette métrique est très importante puisqu'elle conditionne l'utilisation du portefeuille répliquant. Si intuitivement on associe la notion de réplication à la notion de couverture qui peut « s'apparenter » à la notion de cash-flow matching, on gardera à l'esprit que toutes les métriques ne permettent pas de raisonner en termes de flux. C'est pourtant cet élément qui semble essentiel lorsqu'on aborde la problématique de la détermination de la distribution du passif.

Present Value Matching :

Aspects :

- La present value du cash-flow à $t=0$ ainsi que la valeur de marché du passif à $t=0$ semble être bien approximé. Les sensibilités à $t=0$ déduites présentent en général une faible erreur.

- Les critères statistiques permettent de contrôler la qualité de la répllication à $t=0$ mais il est très difficile de satisfaire aux tests de normalité des résidus dans le cadre de la régression linéaire. L'utilisation de scénarios tests peut être intéressante dans la validation du portefeuille.
- L'ACP permet de se soustraire du problème de corrélations entre les différents actifs financiers. Cela montre aussi qu'il existe de nombreuses solutions répliquantes pour un même passif et confirme le fait que cette métrique est peu exigeante.

Domaine d'application / Limites :

- L'utilisation de cette métrique semble intéressante lors de calcul de revalorisation mensuel où l'on modifie les conditions de marché à $t=0$. Ceci peut être justifié par la qualité de l'approximation de la valeur de marché centrale ainsi que des sensibilités.
- Le calcul de la VaR peut être problématique. Cette répllication ne tient pas réellement compte de l'aspect temporel du flux, c'est-à-dire que nous ne pouvons pas associer les maturités des actifs répliquants à la date de sortie des flux de passif.

Present Cash-Flow Matching :

Aspects :

- Cette métrique a pour but de conserver la bonne qualité d'approximation de la market value ainsi que des sensibilités et d'ajouter un caractère temporel à la répllication. Elle donne alors souvent des résultats moins bons sur la répllication de la market value ainsi que de la present value à $t=0$.
- Le problème de minimisation ramené à un problème des moindres carrés n'est peut être pas adapté à cette minimisation puisque les flux lointains sont traités de la même façon que les flux proches (même si par l'actualisation ceux là sont diminués). Ce problème pourrait peut-être traité par le biais d'une pondération dans la régression.
- Les critères statistiques permettent de juger de la qualité de la répllication de la Present Value. En ce qui concerne le matching des cash-flow, il reste à développer un outil de

quantification des erreurs, l'utilisation de la représentation en quantile est peut être un point intéressant.

- Sur certains passifs tel qu'à l'exemple III-3), il semble clair que certains actifs financiers manquent à la réplication (voir l'inadéquation du graphique du quantile des flux).

Domaine d'application / Limites :

- Les résultats concernant la réplication en $t=0$ sont en général moins bons que par la métrique précédente. Cela est sûrement dû au caractère plus restrictif de la méthode, dès lors un univers d'actifs mal adapté donnera des résultats peu satisfaisants.
- L'apport de cette réplication pourrait être intéressant dans le calcul de la VaR car celle-ci permet d'associer la maturité des actifs à la date de sortie des flux de passif.
- La difficulté principale de cette métrique réside dans le choix (et l'existence...) des actifs potentiellement répliquants. Il semble alors que celle-ci soit trop exigeante sur des passifs complexes.

1.1.2 L'univers d'actifs

L'univers d'actifs à considérer est le deuxième point essentiel de la démarche, cet univers est pour le moment déterminé par l'utilisateur or il est très souvent difficile d'intuiter bons actifs et les paramètres de ceux là. Un algorithme qui permettrait de tester par itérations différents univers d'actifs semble être l'étape suivante nécessaire au développement de la méthode.

- Les garanties simples (TMG...) qui semblent pouvoir être répliquées par des options financières sont en fait complexes à cause des normes comptables.
 - Les rendements ne sont pas financiers mais comptables (effets asymétriques)
 - L'univers d'actifs classiques (options sur actions, options de taux) semble être mal adapté.

- Le recours à des actifs plus proches des flux tel que la « capitalisation de caps » pourrait être intéressante cependant la valorisation par formules fermées n'est pas envisageable.
- L'allocation d'actifs joue un rôle crucial dans la détermination des sous-jacents de ces actifs. Dès lors une allocation flexible d'actifs sera mal représentée par des actifs dont le sous-jacent est fixe.

Notons enfin que de nombreuses garanties tel que le rachat dynamique ou encore le fond de PB n'ont pas été prises en compte. Or ces garanties posent de réelles questions concernant leurs répliques par des actifs financiers.

1.1.3 La validation et l'utilisation du portefeuille répliquant

- La validation du portefeuille à $t=0$ peut être faite avec des tests statistiques. On pourra aussi utiliser des scénarios de « back testing » afin de valider la qualité de la réplique. Cependant, ces tests ne permettent en aucun cas de juger de la validité du portefeuille lors de son utilisation dans le calcul de la VaR c'est-à-dire en $t=1$.
- La valorisation du portefeuille répliquant n'a pas réellement été étudiée, mais celle-ci pose clairement problème si l'on souhaite garder une cohérence avec les modèles des dynamiques sous-jacentes.
- Il n'y a pas d'indicateurs quantitatifs pour juger de la qualité de la distribution que l'on obtient à l'aide du portefeuille répliquant ce qui représente un défaut. Une bonne réplique en $t=0$ ne permet en aucun cas de conclure à une distribution juste en $t=1$.

Ainsi nous pouvons conclure sur le fait que cette méthode semble être un point de départ intéressant dans le calcul de capital économique. Comme tout modèle, l'expertise et la compréhension du gestionnaire actif/passif pour juger de la qualité des résultats semble être nécessaire. De plus ce gestionnaire doit avoir une connaissance du passif très pointu pour pouvoir intuitivement les actifs répliquants et les liens potentiels avec les normes comptables.

1.2 Développement / Les approches alternative

Développement :

Au vu des difficultés à intuiter les actifs, il serait très intéressant de construire un algorithme permettant d'automatiser la construction du portefeuille répliquant. Il s'agit en fait de rajouter une boucle d'itération sur l'univers d'actifs dans la méthode précédente. Cependant compte tenu du caractère heuristique de la méthode il faudrait penser à un critère d'arrêt de l'algorithme. Ce critère d'arrêt devrait tenir compte des écarts aux sensibilités, du R^2 et autres critères concernant les résidus. Ce type de développement pourrait être intéressant dans le cas du Present Cash-Flow matching ou il est particulièrement difficile de trouver une solution répliquante.

Au sein d'une direction des risques le caractère « heuristique » concernant la détermination d'une distribution à horizon 1 an n'est pas envisageable. Il faudrait donc trouver un moyen de validation concernant la qualité de cette distribution. On pourrait envisager d'effectuer « le vrai calcul » de la distribution sur des passifs simple et de la comparer à celle du replicating portfolio. Cependant, cela ne permettra jamais de conclure quant à la qualité de la réplication sur d'autres passifs. Il s'agit bien là d'une question ouverte sur la méthode et sur le calcul de capital économique selon d'autres méthodes.

Approche alternative :

Certaines compagnies d'assurances s'intéressent à d'autres méthodes dont la plus prometteuse semble être l'accélérateur de simulations dans les simulations. Au vu de la législation qui stipule la détermination de la VaR à 95%, il n'est donc pas nécessaire de calculer l'ensemble de la distribution. Ainsi si l'on considère 1000 simulations primaires (c'est-à-dire de $t=0$ à $t=1$), il suffit de déterminer les 50 scénarios les plus défavorables qui constituent la queue de distribution. Une fois ces scénarios déterminés il serait envisageable d'effectuer les simulations secondaires. La principale difficulté de cette méthode est d'identifier les scénarios primaires défavorables au vu de la complexité des relations entre l'actif et le passif. On pourra se reporter à l'article très intéressant « *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II* » (Laurent Devineau et Stephane Loisel).

Bibliographie

Comptabilité et gestion actif-passif :

- « *La gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel* » (M. Piermay, P. Mathoulin, A. Cohen) aux éditions Economica
- « *Gestion actif-passif en assurance vie. Réglementations, outils et méthodes* » (F. Le Vallois, P. Palsky, A. Tosetti) aux éditions Economica
- « *Assurance, Comptabilité, Réglementation, Actuariat* » (A. Tosetti)

Solvabilité II :

- « *IFRS, Solvabilité 2, Embedded value : quel traitement du risque ?* » (P. Therond)
- « *Introduction à solvabilité 2* » (P. Therond)

Replicating Portfolio:

- « *Replicating embedded options* » (J. Oeschlin, O Aubry) article Life & Pensions
- « *Replication of Insurance Liabilities* » (S. Daul, E. Gutierrez Vidal) article Risk Metrics Group
- « *ING Insurance Economic Capital Framework* » (T. Wilson) présentation ING
- « *Replicating Portfolios for Insurance Liabilities* » (D. Schrager) article Actuarial Sciences
- « *Internal capital models and replicating portfolio* » (Ka-Man Wong) presentation Watson Wyatt
- « *Building smart internal models* » (L. Mason) article Life Insurance
- « *Replicating portfolio for economic capital: replication or approximation* » (S. Morrison)

Simulations dans les simulations:

- « *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II* » (L. Devineau, S. Loisel)

Tables des Annexes

CODE R.....	1
--------------------	----------

Code R

```
#####
#Chargement des données "assets" (actifs candidats)
#####

#importation des données assets bond
data_assets_bond<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_bond_2.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données equity position
data_assets_equity<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_equity.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données call
data_assets_call<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicating portfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_call.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données put
data_assets_put<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mes documents\\Replicating portfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_put.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données swaption
data_assets_swaption_r<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_swaption_r.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données cap_r
data_assets_cap_r<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_cap_r.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#####
#Chargement des tables stochastiques des actifs
#####
#deflateurs
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_eq_dw_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_eq_up_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_dw_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_dw_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_up_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_up_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_vol_dw.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_vol_up.RData")

#equity
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_eq_dw_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_eq_up_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_dw_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_dw_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_up_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_up_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_vol_dw.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_vol_up.RData")

#ZCB
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_eq_dw_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_eq_up_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_dw_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_dw_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_up_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_up_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_vol_dw.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_vol_up.RData")
```

```
#####
#Present Value Matching
#####

#####
#Calcul des present value
#####
#-----
PV_bond=function(maturity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_bond=value_deflateurs[1:nb_simul,maturity+1]
}

#-----
PV_equity_position=function(maturity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_equity_position=value_equity[1:nb_simul,maturity+1]*value_deflateurs[1:nb_simul,maturity+1]
}

#-----
#-----

PV_equity_call=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_equity_call=vector("numeric",nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    PV_equity_call[i]=max(value_equity[i,maturity+1]-strike,0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
  }
  return(PV_equity_call)
}

#-----
PV_equity_put=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_equity_put=vector("numeric",nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    PV_equity_put[i]=max(strike-value_equity[i,maturity+1],0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
  }
  return(PV_equity_put)
}

#-----
PV_swaption_r=function(maturity,temp,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_swaption_r=vector("numeric",nb_simul)
  taux_swap_simul=vector("numeric",nb_simul)

#boucle sur les différentes simulations avec calcul du taux swap à maturité et PV_swap
  for(i in 1:nb_simul){
    value_ZCB_simul=value_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),]
    value_deflateurs_simul=value_deflateurs[i,]
    ZCB_maturity=coupons(maturity,temp,value_ZCB_simul)
    taux_swap_simul[i]=(1-ZCB_maturity[temp])/sum(ZCB_maturity)
    if(strike>taux_swap_simul[i]){
      taux_court=(1/value_ZCB_simul[1,(maturity+1):((maturity+1)+temp-1)]-1
      for(j in 1:length(taux_court)){
        PV_swaption_r[i]=PV_swaption_r[i]+(strike-
taux_court[j])*value_deflateurs_simul[(maturity+1)+j]
      }
    } else{
      PV_swaption_r[i]=0
    }
  }
  return(PV_swaption_r)
}
```

```

coupons=function(date,temp,value_taux){
  value_taux_date=value_taux[,date+1]
  coupons=vector("numeric",temp)
  test=c(1,2,3,5,10,15,30)
  for(i in 1:temp){
    if(i %in% test){
      j=which(test==i)
      coupons[i]=value_taux_date[j]
    }
    else{
      if(i>=30){
        coupons[i]=value_taux_date[7]
      }
      else{
        i_min=which.max(which(test<i))
        i_max=i_min+1
        coupons[i]=(1/(test[i_max]-test[i_min]))*(value_taux_date[i_max]-value_taux_date[i_min])*(i-
        test[i_min])+value_taux_date[i_min])
      }
    }
  }
  return(coupons)
}

#-----
PV_swaption_p=function(maturity,temp,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_swaption_p=vector("numeric",nb_simul)
  taux_swap_simul=vector("numeric",nb_simul)

  #boucle sur les différentes simulations avec calcul du taux swap à maturité et PV_swap
  for(i in 1:nb_simul){
    value_ZCB_simul=value_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),]
    value_deflateurs_simul=value_deflateurs[i,]
    ZCB_maturity=coupons(maturity,temp,value_ZCB_simul)
    taux_swap_simul[i]=(1-ZCB_maturity[temp])/sum(ZCB_maturity)
    if(strike>taux_swap_simul[i]){
      taux_court=(1/value_ZCB_simul[1,(maturity+1):((maturity+1)+temp-1)])-1
      for(j in 1:length(taux_court)){
        PV_swaption_p[i]=PV_swaption_p[i]+(taux_court[j]-
        strike)*value_deflateurs_simul[(maturity+1)+j]
      }
    }
    else{
      PV_swaption_p[i]=0
    }
  }
  return(PV_swaption_p)
}

#-----
PV_cap_r=function(maturity,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_cap_r=vector("numeric",nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,maturity+1])-1
    PV_cap_r[i]=(max((strike-taux_court),0))*value_deflateurs[i,maturity+1]
  }
  return(PV_cap_r)
}

#-----
PV_liability=function(value_liability,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_liability=vector("numeric",nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    PV_liability[i]=sum(value_liability[i,]*value_deflateurs[i,2:41])
  }
  return(PV_liability)
}

```

```
#####
#Portfolio
#####

#-----
PV_assets_bond=function(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_bond=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_bond[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_bond[,1])){
    PV_assets_bond[i]=PV_bond(data_assets_bond[i,1],value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_bond)
}

#-----
PV_assets_equity=function(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_equity=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_equity[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_equity[,1])){
    PV_assets_equity[i]=PV_equity_position(data_assets_equity[i,1],value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_equity)
}

#-----
PV_assets_call=function(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_call=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_call[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_call[,1])){
    PV_assets_call[i]=PV_equity_call(data_assets_call[i,1],data_assets_call[i,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_call)
}

#-----
PV_assets_put=function(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_put=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_put[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_put[,1])){
    PV_assets_put[i]=PV_equity_put(data_assets_put[i,1],data_assets_put[i,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_put)
}

#-----
PV_assets_swaption_r=function(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_swaption_r=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_swaption_r[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_swaption_r[,1])){

    PV_assets_swaption_r[i]=PV_swaption_r(data_assets_swaption_r[i,1],data_assets_swaption_r[i,2],data_assets_swaption_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_swaption_r)
}

#-----
PV_assets_swaption_p=function(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_swaption_p=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_swaption_p[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_swaption_p[,1])){

    PV_assets_swaption_p[i]=PV_swaption_p(data_assets_swaption_p[i,1],data_assets_swaption_p[i,2],data_assets_swaption_p[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_swaption_p)
}

#-----
PV_assets_cap_r=function(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
  PV_assets_cap_r=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_cap_r[,1]))
  for (i in 1:length(data_assets_cap_r[,1])){
    PV_assets_cap_r[i]=PV_cap_r(data_assets_cap_r[i,1],data_assets_cap_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
  }
  return(PV_assets_cap_r)
}

```

```
#-----
assets=function(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  assets=NULL
  if (bond==TRUE){
    assets_bond=PV_assets_bond(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets_bond,deparse.level=0)}
  if (equity==TRUE){
    assets_equity=PV_assets_equity(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_equity,deparse.level=0)}
  if (call==TRUE){
    assets_call=PV_assets_call(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_call,deparse.level=0)}
  if (put==TRUE){
    assets_put=PV_assets_put(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_put,deparse.level=0)}
  if (swaption_r==TRUE){
    assets_swaption_r=PV_assets_swaption_r(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_swaption_r,deparse.level=0)}
  if (swaption_p==TRUE){
    assets_swaption_p=PV_assets_swaption_p(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_swaption_p,deparse.level=0)}
  if (cap_r==TRUE){
    assets_cap_r=PV_assets_cap_r(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_cap_r,deparse.level=0)}
  return(assets)
}

#-----
sensi_assets=function(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
  sensi_assets=NULL
  assets=NULL
  if (bond==TRUE){
    assets_bond=PV_assets_bond(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets_bond,deparse.level=0)}
  if (equity==TRUE){
    assets_equity=PV_assets_equity(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_equity,deparse.level=0)}
  if (call==TRUE){
    assets_call=PV_assets_call(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_call,deparse.level=0)}
  if (put==TRUE){
    assets_put=PV_assets_put(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_put,deparse.level=0)}
  if (swaption_r==TRUE){
    assets_swaption_r=PV_assets_swaption_r(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_swaption_r,deparse.level=0)}
  if (swaption_p==TRUE){
    assets_swaption_p=PV_assets_swaption_p(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_swaption_p,deparse.level=0)}
  if (cap_r==TRUE){
    assets_cap_r=PV_assets_cap_r(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
    assets=cbind(assets,assets_cap_r,deparse.level=0)}
  sensi_assets=t(attributes(scale(assets,scale=FALSE)))$scale)
return(sensi_assets)
}

#-----
sensi_liability=function(value_liability,value_deflateurs,nb_simul){
  sensi_liability=mean(PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul))
}

#####
#Calcul des market value
#####

#-----
#Market value de la liability (liability est le vecteur des present value de la liability)
#-----
MV_liability=function(liability){
  MV_liability=mean(liability)
}

#-----
#Market value du portefeuille d'actifs (vecteur ligne)
```

```
#-----
MV_assets=function(assets_matrix){
  MV_assets=t(attributes(scale(assets_matrix,scale=FALSE))$scale)
}

#####
#ACP
#####

#-----
affichage=function(prediction,liability,title){
  min=min(min(liability),min(prediction))
  max=max(max(liability),max(prediction))
  plot(liability,prediction,xlim=c(min,max),ylim=c(min,max),xlab="present value liability",ylab="present value RPF",main=title)
  abline(0,1)
  #identify(liability,prediction)
  density_liability=density(liability)
  density_portfolio=density(prediction)
  min=min(min(density_liability$y),min(density_portfolio$y))
  max=max(max(density_liability$y),max(density_portfolio$y))
  x11()
  plot(density_liability,ylim=c(min,max),col=2,xlab="present value",ylab="",main=title)
  lines(density_portfolio,col=3)
  legend("topright",legend=c("LiabilityDensity","ReplicatingPortfolioDensity"),lty=c("solid","solid"),col=c("red","green"),lwd=c(2,3),inset=.025,cex=0.75)
  #repartition_liability=ecdf(liability)
  #repartition_portfolio=ecdf(prediction)
  #x11()
  #plot(repartition_liability,col=2,main=title)
  #lines(repartition_portfolio,col=3)
  error=prediction-liability
  density_error=density(error)
  density_error_th=dnorm(density_error$x,mean=0,sd=sd(error))
  x11()
  plot(density_error,ylim=c(0,1.2*max(density_error$y,density_error_th)),col="green",xlab="erreur",ylab="",main=paste("distribution des erreurs",title))
  lines(density_error$x,density_error_th,col="red")
  abline(v=0,lty="dashed")
  legend("topright",legend=c("Normaldensity","Errordensity"),lty=c("solid","solid"),col=c("red","green"),lwd=c(2,3),inset=.025,cex=0.75)
  list(density_liability=density_liability,density_portfolio=density_portfolio)
}
#-----
ACP_regression=function(liability,assets_matrix,seuil){
  PC=princomp(assets_matrix,cor=TRUE,scores=TRUE)
  eigenvector=PC$loadings
  eigenvalue=(PC$sdev)^2
  var_explain=eigenvalue/(sum(eigenvalue))
  ncomp=match(TRUE,cumsum(var_explain)>=seuil)
  PC=eigenvector[,1:ncomp]
  Y=assets_matrix%*%PC
  weights=solve(t(Y)%*%Y,t(Y)%*%liability)
  coef=PC%*%weights
  prediction=assets_matrix%*%coef
  list(ncomp=ncomp,PC=PC,coef=coef,prediction=prediction)
}

#-----
ACP_sensi=function(liability,assets_matrix,MV,tx_up_100,tx_dw_100,tx_up_10,tx_dw_10,bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_rseuil,nb_simul){
  PC=princomp(assets_matrix,cor=TRUE,scores=TRUE)
  eigenvector=PC$loadings
  eigenvalue=(PC$sdev)^2
  var_explain=eigenvalue/(sum(eigenvalue))
  ncomp=match(TRUE,cumsum(var_explain)>=seuil)
  PC=eigenvector[,1:ncomp]
  Y=assets_matrix%*%PC
  b=t(Y)%*%liability
  S=t(Y)%*%Y
  C=NULL
  t_C=NULL
  contraintes=0
  null=NULL
}
```

```

if(MV==TRUE){
  contraintes=contraintes+1
  MV_PC=MV_assets(assets_matrix)%*%PC
  t_C=cbind(t_C,t(MV_PC))
  C=rbind(C,MV_PC)
  MV_liability=mean(PV_liability(value_liability,value_deflateurs,1000))
  b=rbind(b,MV_liability)
}
if(tx_up_100==TRUE){
  contraintes=contraintes+1

  sensi_tx_up_100=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
  MV_tx_up_100=sensi_tx_up_100%*%PC
  t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_up_100))
  C=rbind(C,MV_tx_up_100)
  MV_liability_tx_up_100=sensi_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,1000)
  b=rbind(b,MV_liability_tx_up_100)
}
if(tx_dw_100==TRUE){
  contraintes=contraintes+1

  sensi_tx_dw_100=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
  MV_tx_dw_100=sensi_tx_dw_100%*%PC
  t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_dw_100))
  C=rbind(C,MV_tx_dw_100)
  MV_liability_tx_dw_100=sensi_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,1000)
  b=rbind(b,MV_liability_tx_dw_100)
}
if(tx_up_10==TRUE){
  contraintes=contraintes+1

  sensi_tx_up_10=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
  MV_tx_up_10=sensi_tx_up_10%*%PC
  t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_up_10))
  C=rbind(C,MV_tx_up_10)
  MV_liability_tx_up_10=sensi_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,1000)
  b=rbind(b,MV_liability_tx_up_10)
}
if(tx_dw_10==TRUE){
  contraintes=contraintes+1

  sensi_tx_dw_10=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
  MV_tx_dw_10=sensi_tx_dw_10%*%PC
  t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_dw_10))
  C=rbind(C,MV_tx_dw_10)
  MV_liability_tx_dw_10=sensi_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,1000)
  b=rbind(b,MV_liability_tx_dw_10)
}
null=matrix(0,nrow=contraintes,ncol=contraintes)
S=cbind(rbind(S,C),rbind(t_C,null))
weights=solve(S,b)
coef=PC%*%weights[1:(length(weights)-contraintes)]
prediction=assets_matrix%*%coef
list(ncomp=ncomp,PC=PC,coef=coef,prediction=prediction,sensi_tx_up_100=sensi_tx_up_100,sensi_tx_dw_100=sensi_tx_dw_100,sensi_tx_up_10=sensi_tx_up_10,sensi_tx_dw_10=sensi_tx_dw_10)
}

#####
#Determination du portefeuille
#####

#-----
portfolio=function(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,seuil,nb_simul){
  market_value=matrix(nrow=1,ncol=3)
  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
  liability=PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul)
  regression=ACP_regression(liability,assets_matrix,seuil)
  R=RSquared(regression$prediction,liability)
  stat=jarque(regression$predict-liability,nb_simul)
  affichage(regression$prediction,liability,"scénario central")
  market_value[1,]=mean(PV_liability(value_liability,value_deflateurs,1000))
}

```

```

market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%regression$coef)
market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]
list(regression=regression,poids=regression$coef,market_value=market_value,liability=liability,prediction=regression$prediction,R=R,stat=stat)
}

#-----
sensi=function(poids,bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,nb_simul){
  market_value=matrix(nrow=9,ncol=3)

  #-----scénario_central
  liability=PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul)
  market_value[1,1]=mean(liability)

  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
  market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
  market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]
  affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"scénario central")

  #-----sensi_tx_up_100
  liability=PV_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
  market_value[2,1]=mean(liability)

  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,1000)
  market_value[2,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
  market_value[2,3]=100*(market_value[2,1]-market_value[2,2])/market_value[2,1]
  x11()
  affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux +100bps")

  #-----sensi_tx_dw_100
  liability=PV_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
  market_value[3,1]=mean(liability)

  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,1000)
  market_value[3,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
  market_value[3,3]=100*(market_value[3,1]-market_value[3,2])/market_value[3,1]
  x11()
  affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux -100bps")

  #-----sensi_tx_up_10
  liability=PV_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
  market_value[4,1]=mean(liability)

  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,1000)
  market_value[4,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
  market_value[4,3]=100*(market_value[4,1]-market_value[4,2])/market_value[4,1]
  x11()
  affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux +10bps")

  #-----sensi_tx_dw_10
  liability=PV_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
  market_value[5,1]=mean(liability)

  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,1000)
  market_value[5,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
  market_value[5,3]=100*(market_value[5,1]-market_value[5,2])/market_value[5,1]
  x11()
  affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux -10bps")

  #-----sensi_tx_vol_up
  liability=PV_liability(value_liability_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul)
  market_value[6,1]=mean(liability)

  assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_up,value_equity_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,1000)
  market_value[6,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
  market_value[6,3]=100*(market_value[6,1]-market_value[6,2])/market_value[6,1]
  x11()
  affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux vol +25%")

  #-----sensi_tx_vol_dw

```

```

liability=PV_liability(value_liability_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul)
market_value[7,1]=mean(liability)

assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_dw,value_equity_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,1000)
market_value[7,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
market_value[7,3]=100*(market_value[7,1]-market_value[7,2])/market_value[7,1]
x11()
affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux vol -25%")

#-----sensi_eq_up_25
liability=PV_liability(value_liability_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul)
market_value[8,1]=mean(liability)

assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_eq_up_25,value_equity_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,1000)
market_value[8,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
market_value[8,3]=100*(market_value[8,1]-market_value[8,2])/market_value[8,1]
x11()
affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"equity vol +25%")

#-----sensi_eq_dw_25
liability=PV_liability(value_liability_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul)
market_value[9,1]=mean(liability)

assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_eq_dw_25,value_equity_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,1000)
market_value[9,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
market_value[9,3]=100*(market_value[9,1]-market_value[9,2])/market_value[9,1]
x11()
affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"equity vol -25%")

return(market_value)
}

#####
#Present cash Flow matching
#####

#####
#Calcul des flux de Present Value
#####

#-----
p_flow_bond=function(maturity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_bond=vector("numeric",time*nb_simul)
  indice=maturity
  for(i in 1:nb_simul){
    p_flow_bond[indice]=1*value_deflateurs[i,(maturity+1)]
    indice=indice+time
  }
  return(p_flow_bond)
}

#-----
p_flow_equity=function(maturity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_equity=vector("numeric",time*nb_simul)
  indice=maturity
  for(i in 1:nb_simul){
    p_flow_equity[indice]=value_equity[i,maturity+1]*value_deflateurs[i,maturity+1]
    indice=indice+time
  }
  return(p_flow_equity)
}

#-----
p_flow_call=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_call=vector("numeric",time*nb_simul)
  indice=maturity
  for(i in 1:nb_simul){
    p_flow_call[indice]=max((value_equity[i,maturity+1]-strike),0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
    indice=indice+time
  }
  return(p_flow_call)
}

```

```

}

#-----
p_flow_put=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_put=vector("numeric",time*nb_simul)
  indice=maturity
  for(i in 1:nb_simul){
    p_flow_put[indice]=max((strike-value_equity[i,maturity+1]),0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
    indice=indice+time
  }
  return(p_flow_put)
}

#-----
p_flow_swap_r=function(maturity,term,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_swap_r=vector("numeric",time*nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    for(j in maturity:(maturity+term-1)){
      taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,j+1])-1
      p_flow_swap_r[((i-1)*time+j+1)]=(strike-taux_court)*value_deflateurs[i,j+1]
    }
  }
  return(p_flow_swap_r)
}

#-----
p_flow_swap_r=function(maturity,temp,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_swap_r=vector("numeric",time*nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    value_ZCB_simul=value_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),]
    value_deflateurs_simul=value_deflateurs[i,]
    ZCB_maturity=coupons(maturity,temp,value_ZCB_simul)
    taux_swap_simul=(1-ZCB_maturity[temp])/sum(ZCB_maturity)
    if(strike>taux_swap_simul){
      for(j in maturity:(maturity+temp-1)){
        taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,j+1])-1
        p_flow_swap_r[((i-1)*time+j+1)]=(strike-taux_court)*value_deflateurs[i,j+1]
      }
    }
  }
  return(p_flow_swap_r)
}

#-----
p_flow_swap_p=function(maturity,term,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_swap_p=vector("numeric",time*nb_simul)
  for(i in 1:nb_simul){
    for(j in maturity:(maturity+term-1)){
      taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,j+1])-1
      p_flow_swap_p[((i-1)*time+j+1)]=(taux_court-strike)*value_deflateurs[i,j+1]
    }
  }
  return(p_flow_swap_p)
}

#-----
p_flow_cap_r=function(maturity,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_cap_r=vector("numeric",time*nb_simul)
  indice=maturity
  for(i in 1:nb_simul){
    taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,maturity+1])-1
    p_flow_cap_r[indice+1]=(max((strike-taux_court),0))*value_deflateurs[i,maturity+1]
    indice=indice+time
  }
  return(p_flow_cap_r)
}

#-----
p_flow_liability=function(value_liability,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_flow_liability=NULL
  for(i in 1:nb_simul){
    p_flow_liability=c(p_flow_liability,value_liability[i,1:time]*value_deflateurs[i,2:(time+1)])
  }
  return(p_flow_liability)
}

```

```
}
```

```
#####
#Portfolio
#####

#-----
p_cash_flow_bond=function(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_bond=p_flow_bond(data_assets_bond[1,1],value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_bond[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_bond[,1])){

      p_cash_flow_bond=cbind(p_cash_flow_bond,p_flow_bond(data_assets_bond[i,1],value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=
0)
    }
  }
  return(p_cash_flow_bond)
}

#-----
p_cash_flow_equity=function(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_equity=p_flow_equity(data_assets_equity[1,1],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_equity[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_equity[,1])){
      p_cash_flow_equity=cbind(p_cash_flow_equity,p_flow_equity(data_assets_equity[i,1],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,ti
me),deparse.level=0)
    }
  }
  return(p_cash_flow_equity)
}

#-----
p_cash_flow_call=function(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_call=p_flow_call(data_assets_call[1,1],data_assets_call[1,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_call[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_call[,1])){
      p_cash_flow_call=cbind(p_cash_flow_call,p_flow_call(data_assets_call[i,1],data_assets_call[i,3],value_equity,value_deflateurs,n
b_simul,time),deparse.level=0)
    }
  }
  return(p_cash_flow_call)
}

#-----
p_cash_flow_put=function(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_put=p_flow_put(data_assets_put[1,1],data_assets_put[1,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_put[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_put[,1])){
      cash_flow_put=cbind(p_cash_flow_put,p_flow_put(data_assets_put[i,1],data_assets_put[i,3],value_equity,value_deflateurs,nb_si
mul,time),deparse.level=0)
    }
  }
  return(p_cash_flow_put)
}

#-----
p_cash_flow_swap_r=function(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_swap_r=p_flow_swap_r(data_assets_swaption_r[1,1],data_assets_swaption_r[1,2],data_assets_swaption_r[1,3],valu
e_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_swaption_r[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_swaption_r[,1])){
      p_cash_flow_swap_r=cbind(p_cash_flow_swap_r,p_flow_swap_r(data_assets_swaption_r[i,1],data_assets_swaption_r[i,2],data_
assets_swaption_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=0)
    }
  }
}
```

```

return(p_cash_flow_swap_r)
}

#-----
p_cash_flow_swap_p=function(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_swap_p=p_flow_swap_p(data_assets_swaption_p[1,1],data_assets_swaption_p[1,2],data_assets_swaption_p[1,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_swaption_p[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_swaption_p[,1])){
      p_cash_flow_swap_p=cbind(p_cash_flow_swap_p,p_flow_swap_p(data_assets_swaption_p[i,1],data_assets_swaption_p[i,2],data_assets_swaption_p[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=0)
    }
  }
  return(p_cash_flow_swap_p)
}

#-----
p_cash_flow_cap_r=function(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_cap_r=p_flow_cap_r(data_assets_cap_r[1,1],data_assets_cap_r[1,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
  if(length(data_assets_cap_r[,1])>=2){
    for (i in 2:length(data_assets_cap_r[,1])){
      p_cash_flow_cap_r=cbind(p_cash_flow_cap_r,p_flow_cap_r(data_assets_cap_r[i,1],data_assets_cap_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=0)
    }
  }
  return(p_cash_flow_cap_r)
}

#-----
p_cash_flow_assets=function(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
  p_cash_flow_assets=NULL
  if (bond==TRUE){
    p_cash_bond=p_cash_flow_bond(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_bond,deparse.level=0)
  }
  if (equity==TRUE){
    p_cash_equity=p_cash_flow_equity(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_equity,deparse.level=0)
  }
  if (call==TRUE){
    p_cash_call=p_cash_flow_call(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_call,deparse.level=0)
  }
  if (put==TRUE){
    p_cash_put=p_cash_flow_put(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_put,deparse.level=0)
  }
  if (swap_r==TRUE){
    p_cash_swap_r=p_cash_flow_swap_r(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_swap_r,deparse.level=0)
  }
  if (swap_p==TRUE){
    p_cash_swap_p=p_cash_flow_swap_p(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_swap_p,deparse.level=0)
  }
  if (cap_r==TRUE){
    p_cash_cap_r=p_cash_flow_cap_r(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
    p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_cap_r,deparse.level=0)
  }
  return(p_cash_flow_assets)
}

#####
#Regression
#####
#-----
R_regression=function(liability,assets_matrix){
  R_regression=lm(liability~0+assets_matrix)
}

```

```

min=min(min(liability),min(R_regression$fit))
max=max(max(liability),max(R_regression$fit))
plot(liability,R_regression$fit,xlim=c(min,max),ylim=c(min,max))
R_regression=summary(R_regression)
abline(0,1)
return(R_regression)
}

#-----
solving=function(liability,assets_matrix){
  poids=solve(t(assets_matrix)%*%assets_matrix,t(assets_matrix)%*%liability)
  return(poids)
}

#-----
matrix_predict=function(vector_predict,nb_simul,time){
  matrix_predict=matrix(nrow=nb_simul,ncol=time)
  k=1
  for(i in 1:nb_simul){
    for(j in 1:time){
      matrix_predict[i,j]=vector_predict[k]
      k=k+1
    }
  }
  return(matrix_predict)
}

#-----
enveloppe_flux=function(value_liability,nb_simul){
  value_min=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
  value_max=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
  value_mean=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
  for (i in 1:length(value_liability[1,])){
    value_min[i]=min(value_liability[1:nb_simul,i])
    value_max[i]=max(value_liability[1:nb_simul,i])
    value_mean[i]=mean(value_liability[1:nb_simul,i])
  }
  plot(1:length(value_liability[1,]),value_min,xlab="time",ylab="enveloppe
flux",ylim=c(min(value_min),max(value_max)),col=2,type='o')
  points(1:length(value_liability[1,]),value_max,col=2,type='o')
  for(i in 1:nb_simul){
    points(1:length(value_liability[1,]),value_liability[i,],col=gray(0.5))
  }
  points(1:length(value_liability[1,]),value_mean,type='o')
}

#-----
enveloppe_flux_duo=function(titre_graphe,value_liability,value_portfolio,nb_simul){
  value_min_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
  value_min_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
  value_max_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
  value_max_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
  value_mean_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
  value_mean_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
  for (i in 1:length(value_liability[1,])){
    value_min_l[i]=min(value_liability[1:nb_simul,i])
    value_min_p[i]=min(value_portfolio[1:nb_simul,i])
    value_max_l[i]=max(value_liability[1:nb_simul,i])
    value_max_p[i]=max(value_portfolio[1:nb_simul,i])
    value_mean_l[i]=mean(value_liability[1:nb_simul,i])
    value_mean_p[i]=mean(value_portfolio[1:nb_simul,i])
  }
  plot(1:length(value_liability[1,]),value_min_l,main=titre_graphe,xlab="time",ylab="enveloppe
flux",ylim=c(min(min(value_min_l),min(value_min_p)),max(max(value_max_l),max(value_max_p))),type='o')
  points(1:length(value_portfolio[1,]),value_min_p,type='o')
  points(1:length(value_liability[1,]),value_max_l,type='o')
  points(1:length(value_portfolio[1,]),value_max_p,type='o')
  for(i in 1:nb_simul){
    points(1:length(value_liability[1,]),value_liability[i,],col=2)
  }
}

```

```

    }
    for(i in 1:nb_simul){
        points(1:length(value_portfolio[1,]),value_portfolio[i,],col=3)
    }
    points(1:length(value_liability[1,]),value_mean_l,type='o')
    points(1:length(value_portfolio[1,]),value_mean_p,type='o')
}

#-----
enveloppe_flux_quantile=function(titre_graphe,value_liability,value_portfolio,nb_simul){
    value_q05_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
    value_q05_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
    value_q95_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
    value_q95_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
    value_mean_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
    value_mean_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
    for (i in 1:length(value_liability[1,])){
        value_q05_l[i]=quantile((value_liability[1:nb_simul,i]),probs=0.05,names=FALSE)
        value_q05_p[i]=quantile((value_portfolio[1:nb_simul,i]),probs=0.05,names=FALSE)
        value_q95_l[i]=quantile((value_liability[1:nb_simul,i]),probs=0.95,names=FALSE)
        value_q95_p[i]=quantile((value_portfolio[1:nb_simul,i]),probs=0.95,names=FALSE)
        value_mean_l[i]=mean(value_liability[1:nb_simul,i])
        value_mean_p[i]=mean(value_portfolio[1:nb_simul,i])
    }
    plot(1:length(value_liability[1,]),value_q05_l,main=titre_graphe,xlab="time",ylab="quantile
flux",ylim=c(min(min(value_q05_l),min(value_q05_p)),max(max(value_q95_l),max(value_q95_p))),type='o',col=2)
    points(1:length(value_portfolio[1,]),value_q05_p,type='o',col=3)
    points(1:length(value_liability[1,]),value_q95_l,type='o',col=2)
    points(1:length(value_portfolio[1,]),value_q95_p,type='o',col=3)
    points(1:length(value_liability[1,]),value_mean_l,type='o')
    points(1:length(value_portfolio[1,]),value_mean_p,type='o',col=gray(0.5))
}

#####
#Determination du portefeuille
#####

#-----
p_portfolio=function(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
    liability=p_flow_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul,time)
    assets_matrix=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simu
l,time)
    market_value=matrix(nrow=9,ncol=3)
    regression=R_regression(liability,assets_matrix)
    #poids=data.matrix(regression$coef[,1])
    #dimnames(poids)=NULL
    poids=solving(liability,assets_matrix)
    flux_portfolio=matrix_predict(assets_matrix%%poids,nb_simul,time)
    flux_liability=matrix_predict(liability,nb_simul,time)
    x11()
    enveloppe_flux_duo("scénario central",flux_liability,flux_portfolio,nb_simul)
    x11()
    enveloppe_flux_quantile("scenario central",flux_liability,flux_portfolio,nb_simul)
    assets_matrix_PV=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
    liability_PV=PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul)
    x11()
    affichage(assets_matrix_PV%%poids,liability_PV,"scénario central")
    market_value[1,1]=MV_liability(liability_PV)
    market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV%%poids))
    market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]
    list(regression=regression,poids=poids,flux_portfolio=flux_portfolio,market_value=market_value)
}

#-----
p_sensi=function(poids,bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,nb_simul,time){
    market_value=matrix(nrow=9,ncol=3)

    #-----Sensi_tx_up_100

    assets_matrix_tx_up_100=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx
_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul,time)
    flux_portfolio_tx_up_100=matrix_predict(assets_matrix_tx_up_100%%poids,nb_simul,time)
    liability_tx_up_100=p_flow_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul,time)
    flux_liability_tx_up_100=matrix_predict(liability_tx_up_100,nb_simul,time)
    x11()

```

```

enveloppe_flux_duo("taux + 100 bps",flux_liability_tx_up_100,flux_portfolio_tx_up_100,nb_simul)

assets_matrix_PV_tx_up_100=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx_up_100,
value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
liability_PV_tx_up_100=PV_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_up_100,"%poids",liability_PV_tx_up_100,"taux +100bps")
market_value[1,1]=MV_liability(liability_PV_tx_up_100)
market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_up_100))"%poids)
market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]

#-----Sensi_tx_dw_100

assets_matrix_tx_dw_100=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_t
x_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_dw_100=matrix_predict(assets_matrix_tx_dw_100,"%poids,nb_simul,time)
liability_tx_dw_100=p_flow_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul,time)
flux_liability_tx_dw_100=matrix_predict(liability_tx_dw_100,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("taux - 100 bps",flux_liability_tx_dw_100,flux_portfolio_tx_dw_100,nb_simul)

assets_matrix_PV_tx_dw_100=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_tx_dw_10
0,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
liability_PV_tx_dw_100=PV_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_dw_100,"%poids",liability_PV_tx_dw_100,"taux -100bps")
market_value[2,1]=MV_liability(liability_PV_tx_dw_100)
market_value[2,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_dw_100))"%poids)
market_value[2,3]=100*(market_value[2,1]-market_value[2,2])/market_value[2,1]

#-----Sensi_tx_up_10

assets_matrix_tx_up_10=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_u
p_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_up_10=matrix_predict(assets_matrix_tx_up_10,"%poids,nb_simul,time)
liability_tx_up_10=p_flow_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul,time)
flux_liability_tx_up_10=matrix_predict(liability_tx_up_10,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("taux + 10 bps",flux_liability_tx_up_10,flux_portfolio_tx_up_10,nb_simul)

assets_matrix_PV_tx_up_10=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_up_10,v
alue_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
liability_PV_tx_up_10=PV_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_up_10,"%poids",liability_PV_tx_up_10,"taux +10bps")
market_value[3,1]=MV_liability(liability_PV_tx_up_10)
market_value[3,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_up_10))"%poids)
market_value[3,3]=100*(market_value[3,1]-market_value[3,2])/market_value[3,1]

#-----Sensi_tx_dw_10

assets_matrix_tx_dw_10=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_
dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_dw_10=matrix_predict(assets_matrix_tx_dw_10,"%poids,nb_simul,time)
liability_tx_dw_10=p_flow_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul,time)
flux_liability_tx_dw_10=matrix_predict(liability_tx_dw_10,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("taux - 10 bps",flux_liability_tx_dw_10,flux_portfolio_tx_dw_10,nb_simul)

assets_matrix_PV_tx_dw_10=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_dw_10,v
alue_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
liability_PV_tx_dw_10=PV_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
market_value[4,1]=MV_liability(liability_PV_tx_dw_10)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_dw_10,"%poids",liability_PV_tx_dw_10,"taux -10bps")
market_value[4,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_dw_10))"%poids)
market_value[4,3]=100*(market_value[4,1]-market_value[4,2])/market_value[4,1]

#-----Sensi_tx_vol_up

assets_matrix_tx_vol_up=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_up,value_equity_tx
_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_vol_up=matrix_predict(assets_matrix_tx_vol_up,"%poids,nb_simul,time)
liability_tx_vol_up=p_flow_liability(value_liability_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul,time)
flux_liability_tx_vol_up=matrix_predict(liability_tx_vol_up,nb_simul,time)

```

```

x11()
enveloppe_flux_duo("taux vol +10%",flux_liability_tx_vol_up,flux_portfolio_tx_vol_up,nb_simul)

assets_matrix_PV_tx_vol_up=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_up,value_equity_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul)
liability_PV_tx_vol_up=PV_liability(value_liability_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_vol_up,"%poids",liability_PV_tx_vol_up,"taux vol +25%")
market_value[5,1]=MV_liability(liability_PV_tx_vol_up)
market_value[5,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_vol_up,"%poids))
market_value[5,3]=100*(market_value[5,1]-market_value[5,2])/market_value[5,1]

#-----Sensi_tx_vol_dw

assets_matrix_tx_vol_dw=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_dw,value_equity_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_vol_dw=matrix_predict(assets_matrix_tx_vol_dw,"%poids,nb_simul,time)
liability_tx_vol_dw=p_flow_liability(value_liability_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul,time)
flux_liability_tx_vol_dw=matrix_predict(liability_tx_vol_dw,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("taux vol -10%",flux_liability_tx_vol_dw,flux_portfolio_tx_vol_dw,nb_simul)
assets_matrix_PV_tx_vol_dw=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_dw,value_equity_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul)
liability_PV_tx_vol_dw=PV_liability(value_liability_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_vol_dw,"%poids",liability_PV_tx_vol_dw,"taux vol -25%")
market_value[6,1]=MV_liability(liability_PV_tx_vol_dw)
market_value[6,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_vol_dw,"%poids))
market_value[6,3]=100*(market_value[6,1]-market_value[6,2])/market_value[6,1]

#-----Sensi_eq_up_25
assets_matrix_eq_up_25=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_up_25,value_equity_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul,time)
flux_portfolio_eq_up_25=matrix_predict(assets_matrix_eq_up_25,"%poids,nb_simul,time)
liability_eq_up_25=p_flow_liability(value_liability_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul,time)
flux_liability_eq_up_25=matrix_predict(liability_eq_up_25,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("equity vol +25%",flux_liability_eq_up_25,flux_portfolio_eq_up_25,nb_simul)
assets_matrix_PV_eq_up_25=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_up_25,value_equity_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul)
liability_PV_eq_up_25=PV_liability(value_liability_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_eq_up_25,"%poids",liability_PV_eq_up_25,"equity vol +25%")
market_value[7,1]=MV_liability(liability_PV_eq_up_25)
market_value[7,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_eq_up_25,"%poids))
market_value[7,3]=100*(market_value[7,1]-market_value[7,2])/market_value[7,1]

#-----Sensi_eq_dw_25
assets_matrix_eq_dw_25=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_dw_25,value_equity_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul,time)
flux_portfolio_eq_dw_25=matrix_predict(assets_matrix_eq_dw_25,"%poids,nb_simul,time)
liability_eq_dw_25=p_flow_liability(value_liability_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul,time)
flux_liability_eq_dw_25=matrix_predict(liability_eq_dw_25,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("equity vol -25%",flux_liability_eq_dw_25,flux_portfolio_eq_dw_25,nb_simul)
assets_matrix_PV_eq_dw_25=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_dw_25,value_equity_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul)
liability_PV_eq_dw_25=PV_liability(value_liability_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_eq_dw_25,"%poids",liability_PV_eq_dw_25,"equity vol -25%")
market_value[8,1]=MV_liability(liability_PV_eq_dw_25)
market_value[8,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_eq_dw_25,"%poids))
market_value[8,3]=100*(market_value[8,1]-market_value[8,2])/market_value[8,1]

return(market_value)
}

#####
# Calcul de la VaR (ZCB,equity,call)
#####

#-----
#Fonction pricing BS Call européen
#-----
implied_vol=function(market_price,maturity,strike,S0,taux){

```

```

FindVola=function(x,market_price,maturity,strike,S0,taux){
  option_price=BS_price(maturity,strike,S0,taux,sigma=x)
  return(market_price-option_price)
}
uniroot(FindVola,interval=c(-10,10),market_price=market_price,S0=S0,strike=strike,maturity=maturity,taux=taux)$root
}

#Prix pour un call
BS_price=function(maturity,strike,S0,taux,sigma){
  d1 = (log(S0/strike) + (taux + sigma * sigma/2) * maturity)/(sigma * sqrt(maturity))
  d2 = d1 - sigma * sqrt(maturity)
  BS_price=(S0*pnorm(d1)-strike*exp(-taux*maturity)*pnorm(d2))
}

#-----
# Sous fonction composition portefeuille repliquant
#(recopie les data_assets pour permettre le comparaison de VaR selon les deux méthodes)
#-----
composition=function(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r){
  if(bond==TRUE){
    data_assets_bond=data_assets_bond
  }else{
    data_assets_bond=NULL
  }
  if(equity==TRUE){
    data_assets_equity=data_assets_equity
  }else{
    data_assets_equity=NULL
  }
  if(call==TRUE){
    data_assets_call=data_assets_call
  }else{
    data_assets_call=NULL
  }
  if(put==TRUE){
    data_assets_put=data_assets_put
  }else{
    data_assets_put=NULL
  }
  if(swap_r==TRUE){
    data_assets_swaption_r=data_assets_swaption_r
  }else{
    data_assets_swaption_r=NULL
  }
  if(swap_p==TRUE){
    data_assets_swaption_p=data_assets_swaption_p
  }else{
    data_assets_swaption_p=NULL
  }
  if(cap_r==TRUE){
    data_assets_cap_r=data_assets_cap_r
  }else{
    data_assets_cap_r=NULL
  }
  list(data_assets_bond=data_assets_bond,data_assets_equity=data_assets_equity,data_assets_call=data_assets_call,data_assets_put=data_a
ssets_put,data_assets_swaption_r=data_assets_swaption_r,data_assets_swaption_p=data_assets_swaption_p,data_assets_cap_r=data_asse
ts_cap_r)
}

#-----
#Calcul de la VaR (ZCB,equity,call),

#output:
#echantillon = valeurs des passifs simulés à t=1
#q95= quantile à 95%
#mean =moyenne de la distribution

#Remarque: value_reel_ZCB=valeur des ZCB dans les scénarios historiques
#idem pour value_reel_equity,value_reel_deflateurs
#A défaut d'avoir les scénarios historique on prend les risque neutre

#-----
VaR_actual=function(poids,value_reel_ZCB,value_reel_equity,value_reel_deflateurs,nb_simul){
  data_assets_bond=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_bond
  data_assets_equity=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_equity

```

```

data_assets_call=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_call
data_assets_put=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_put
data_assets_swaption_r=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_swaption_r
data_assets_swaption_p=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_swaption_p
data_assets_cap_r=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_cap_r

distribution=vector("numeric",length=nb_simul)
MV_assets_portfolio=NULL
new_poids=NULL
if(bond==TRUE){
  if(data_assets_bond[1,1]==1){
    MV_assets_bond=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_bond[,1])-1)
    new_poids=c(new_poids,poids[2:length(data_assets_bond[,1])])
    for(i in 1:nb_simul){
      indice=0

      struct_ZCB=coupons(1,data_assets_bond[length(data_assets_bond[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
      for(j in data_assets_bond[2:length(data_assets_bond[,1]),1]){
        indice=indice+1
        MV_assets_bond[i,indice]=struct_ZCB[j-1]*value_reel_deflateurs[i,2]
      }
    }
  } else {
    MV_assets_bond=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_bond[,1]))
    new_poids=c(new_poids,poids[1:length(data_assets_bond[,1])])
    for(i in 1:nb_simul){
      indice=0

      struct_ZCB=coupons(1,data_assets_bond[length(data_assets_bond[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
      for(j in data_assets_bond[1:length(data_assets_bond[,1]),1]){
        indice=indice+1
        MV_assets_bond[i,indice]=struct_ZCB[j-1]*value_reel_deflateurs[i,2]
      }
    }
    MV_assets_portfolio=cbind(MV_assets_portfolio,MV_assets_bond)
  }
}

if(equity==TRUE){
  if(data_assets_equity[1,1]==1){
    MV_assets_equity=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_equity[,1])-1)

    new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+2):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1]))])
    for(i in 1:nb_simul){
      MV_assets_equity[i,1:length(data_assets_equity[,1])]=value_reel_equity[i,2]*value_reel_deflateurs[i,2]
    }
  } else {
    MV_assets_equity=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_equity[,1]))

    new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+1):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1]))])
    for(i in 1:nb_simul){
      MV_assets_equity[i,1:length(data_assets_equity[,1])]=value_reel_equity[i,2]*value_reel_deflateurs[i,2]
    }
    MV_assets_portfolio=cbind(MV_assets_portfolio,MV_assets_equity)
  }
}

if(call==TRUE){
  if(data_assets_call[1,1]==1){
    MV_assets_call=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_call[,1])-1)

    new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+2):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+length(data_assets_call[,1]))])
    for(i in 1:nb_simul){
      indice=1
      struct_ZCB=coupons(1,data_assets_call[length(data_assets_call[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
      for(j in data_assets_call[2:length(data_assets_call[,1]),1]){
        indice=indice+1
        taux=(1/struct_ZCB[j-1])-1

        MV_assets_call[i,indice]=BS_price(data_assets_call[indice,1],data_assets_call[indice,3],value_reel_deflateurs[i,2],taux,0.30)*value_reel_deflateurs[i,2]
      }
    }
  } else {

```

```

MV_assets_call=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_call[,1]))

new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+1):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+length(data_assets_call[,1]))])
for(i in 1:nb_simul){
  indice=0
  struct_ZCB=coupons(1,data_assets_call[length(data_assets_call[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
  for(j in data_assets_call[,1]){
    indice=indice+1
    taux=(1/struct_ZCB[j-1])-1
    MV_assets_call[i,indice]=BS_price(data_assets_call[indice,1]-1,data_assets_call[indice,3],value_equity[i,2],taux,0.30)*value_reel_deflateurs[i,2]
  }
}
MV_assets_portfolio=cbind(MV_assets_portfolio,MV_assets_call)
}
echantillon=MV_assets_portfolio%%new_poids
dens=density(echantillon)
plot(dens,ylim=c(0,1.2*max(dens$y)),xlab="present value passif à 1 an",ylab="",main="Distribution horizon 1 an")
q95=quantile(echantillon,probs=0.95,names=FALSE)
mean_echantillon=mean(echantillon)
list(MV_assets_portfolio=MV_assets_portfolio,echantillon=echantillon,q95=q95,mean=mean_echantillon)
}

#-----
#Plot de la distribution (comparaison de deux var)
#echantillon_pv= echantillon RPF en present value matching
#echantillon_pvm= echantillon RPF en present value flow matching

#-----
plot_var=function(echantillon_pv,echantillon_pvm){
  density_pv=density(echantillon_pv)
  density_pvm=density(echantillon_pvm)
  plot(density_pv,ylim=c(0,1.2*max(density_pv$y,density_pvm$y)),xlab="present value passif à 1 an",ylab="",main="Distribution horizon 1 an",lty="dashed")
  lines(density_pvm)
  legend("topright",legend=c("Present value matching", "Present Value Flow Matching"),lty = c("dashed","solid"),lwd=c(2,3),inset=.025,cex=0.75)
  q95_pv=quantile(echantillon_pv,probs=0.95,names=FALSE)
  q95_pvm=quantile(echantillon_pvm,probs=0.95,names=FALSE)
  #abline(v=q95_pv,col="red",lty="dashed")
  #abline(v=q95_pvm,col="red")
  mean_pv=mean(echantillon_pv)
  mean_pvm=mean(echantillon_pvm)
  list(q95_pv=q95_pv,q95_pvm=q95_pvm,mean_pv=mean_pv,mean_pvm=mean_pvm)
}

```