Cours de Calcul stochastique
DESS IM EVRY
Option Finance

Monique Jeanblanc

Septembre 2002

Contents

Begin at the beginning, and go on till you come to the end. Then, stop.
L. Caroll, Alice's Adventures in Wonderland

Chapter 1

Généralités

Dans ce chapitre aride sont rassemblées les notions de base de théorie des probabilités qui seront utilisées dans toute la suite du cours[1]. L'espace de probabilité sur lequel on travaille est noté Ω. Pour les démonstrations et de plus amples informations, consulter les ouvrages de Breiman [?], Pitman, Jacod et Protter, Sinai.

1.1 Tribu

L'espace Ω est un espace abstrait dont les éléments sont notés ω. Un sous-ensemble de Ω est un événement. Dans certaines parties de cours, on précisera la structure de Ω en construisant explicitement cet espace. Dans la plupart des cas, la structure de Ω n'a pas de rôle à jouer. Par contre, lorsque l'on veut construire une variable aléatoire de loi donnée, un choix judicieux de Ω s'impose : il est impossible de construire une v.a. sur un espace quelconque donné à l'avance. Cette difficulté s'accroit quand il s'agit de construire plusieurs v.a. (ou une suite) indépendantes. Nous n'aborderons pas ces problèmes ici (Voir Breiman [?]). On pourra regarder le paragraphe concernant l'existence d'une v.a. (voir ci-dessous) pour une approche du problème.

1.1.1 Définition d'une tribu

Définition 1.1.1 *Une tribu (σ-algebra en Anglais) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*

Une tribu contient donc l'espace Ω.
Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

Proposition 1.1.1 *Une intersection de tribus est une tribu.*

Attention : ce n'est pas vrai pour la réunion : une réunion de tribus n'est pas une tribu.
Soit $\mathcal{F}$ une tribu. Une sous-tribu de $\mathcal{F}$ est une tribu $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, soit $A \in \mathcal{G}$ implique $A \in \mathcal{F}$.
La plus petite tribu contenant une famille d'ensembles est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent cette famille. Elle est en général difficile (voire impossible) à décrire plus précisement.

Exemple 1.1.1 la tribu des boréliens de $I\!R$. C'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermés, ou ouverts à droite fermés à gauche...). On la note $\mathcal{B}_{I\!R}$. On peut

[1] Give us the tools, and we will finish the work. Winston Churchill, February 9, 1941.

trouver des sous ensembles de $I\!R$ qui ne sont pas des boréliens, mais ils sont difficiles à exhiber. Voir Neveu [?].

1.1.2 Mesurabilité

Définition 1.1.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans E est dite $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{E}$, où*

$$f^{-1}(A) \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega \,|\, f(\omega) \in A\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus employées, on dit simplement que f est mesurable.

Une fonction f de $I\!R$ dans $I\!R$ est borélienne si elle est $(\mathcal{B}_{I\!R}, \mathcal{B}_{I\!R})$-mesurable, soit $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{I\!R}, \quad \forall A \in \mathcal{B}_{I\!R}$. Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles A.
Les fonctions continues sont boréliennes.

Définition 1.1.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $I\!R$ (donc telle que $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{B}_{I\!R}$).*

Une constante est une v.a. de même qu'une fonction indicatrice d'ensemble de la tribu $\mathcal{F}$.

Proposition 1.1.2 *Si X est une v.a.r. $\mathcal{G}$-mesurable et f une fonction borélienne, $f(X)$ est $\mathcal{G}$-mesurable.*

Une v.a. $\mathcal{G}$ mesurable est limite croissante de v.a. du type $\sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{G}$. Une fonction borélienne est limite croissante de fonctions du type $\sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$ où A_i est un intervalle.

1.1.3 Tribu engendrée

Définition 1.1.4 *La tribu engendrée par une famille d'ensembles $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note $\sigma(\mathcal{A})$. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$.*

Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux tribus, on note $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. C'est la plus petite tribu contenant les deux tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

Définition 1.1.5 *La tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble des parties de Ω qui s'écrivent $X^{-1}(A)$ où $A \in \mathcal{B}_{I\!R}$. On note cette tribu $\sigma(X)$.*

La tribu $\sigma(X)$ est contenue dans $\mathcal{F}$. C'est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.
Une v.a.r. X est $\mathcal{G}$-mesurable si $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$.
Propriété: si Y est une application de Ω dans $I\!R$, $\sigma(X)$ mesurable (c'est-à-dire telle que $Y^{-1}(A) \in \sigma(X), \quad \forall A \in \mathcal{B}_{I\!R}$ ou encore $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$), il existe une fonction borélienne f, de $I\!R$ dans $I\!R$ telle que $Y = f(X)$, et réciproquement.

Définition 1.1.6 *La tribu engendrée par une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0,T])$ est la plus petite tribu contenant les ensembles $\{X_t^{-1}(A)\}$ pour tout $t \in [0,T]$ et $A \in \mathcal{B}_{I\!R}$. On la note $\sigma(X_t, t \le T)$.*

1.2 Probabilité

1.2.1 Définition

Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application P de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$,
b) $P(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ pour des A_n appartenant à $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

Notation: $P(A) = \int_A dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A dP$ où $\mathbb{1}_A$ (fonction indicatrice) est la fonction définie sur Ω par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.

1.2.2 Propriétés

On a $P(A) + P(A^c) = 1$ pour tout A appartenant à $\mathcal{F}$.
Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B) = P(A) + P(B - A)$, où $B - A = B \cap A^c$.
Si les A_n forment une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_n \supset A_{n+1}$), et si $A = \cup_n A_n$ (resp. $A = \cap_n A_n$) alors A appartient à $\mathcal{F}$ et $P(A) = \lim P(A_n)$.
Théorème de classe monotone: Soit P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telles que $P(A) = Q(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une famille stable par intersection finie et engendrant $\mathcal{F}$. Alors $P = Q$ sur $\mathcal{F}$.
Remarque: on prendra soin, pour appliquer ce théorème, de vérifier la stabilité par intersection de $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire de montrer que si $C_1 \in \mathcal{C}, C_2 \in \mathcal{C}$, l'intersection $C_1 \cap C_2$ appartient à $\mathcal{C}$).

1.2.3 Ensembles négligeables

Un ensemble est dit négligeable s'il est de probabilité nulle.
Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
Une propriété est vraie presque surement (p.s.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.
On dit aussi que la propriété est vraie pour presque tout ω.
Un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit complet s'il contient tous les ensembles G tels que $\inf\{P(F) : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0$.

1.3 Loi de probabilité

Définition 1.3.1 *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La loi de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ définie par $P_X(A) = P\{\omega; X(\omega) \in A\} = P(X \in A), \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

On définit aussi la fonction de répartition de la variable X. C'est la fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$.
Certains auteurs utilisent $P(X < x)$ comme fonction de répartition. Les deux expressions ne diffèrent qu'en un nombre au plus dénombrable de valeurs de x, et les modifications sont minimes. La fonction de répartition que nous utilisons ici est continue à droite, l'autre définition conduit à une fonction continue à gauche, les deux fonctions étant égales en tout point de continuité.
La densité $f(x)$ d'une variable aléatoire est la dérivée de la fonction de répartition (si cette dérivée existe). On peut alors écrire $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$. En particulier $P(X \in [a,b]\,) = \int_a^b f(x)dx$.
Il nous arrivera alors d'utiliser la notation différentielle $P(X \in dx)$ pour désigner $f(x)dx$.
Lorsque deux v.a. ont même loi (ou même fonction de répartition, ou même densité) on dit qu'elles sont égales en loi. On utilisera très souvent la remarque élémentaire suivante : si X et Y sont deux v.a. telles que $P(X \leq a) = P(Y \leq a), \forall a \in \mathbb{R}$, alors X et Y ont même loi, ce que l'on notera $X \stackrel{loi}{=} Y$.

1.3.1 Existence d'une v.a.

Pour construire une v.a. de loi donnée (par exemple ue gaussienne=, on choisit comme espace $\Omega = I\!R$. Ensuite, on définit une v.a. (une application de Ω dans $I\!R$ de façon simple: $X : \omega \to \omega$ est l'application identié. Il reste à construire une probabilité P sur $\Omega = I\!R$ telle que X aie une loi gaussienne. Soit $P(d\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{\omega^2}{2} d\omega$. La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = P(X < x) = \int 1\!\!1_{\omega<x} P(d\omega) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{\omega^2}{2} d\omega\,.$$

D'o'u X est une v.a. Gaussienne.
Si l'on souhaite construire deux v.a. indépendantes de loi gaussienne: on recommence, sur un autre espace: soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, sur chacun des $\Omega_i = I\!R$, on construit une v.a. et une probabilité telle que la v.a. soit de loi gaussienne et on pose $P = P_1 \otimes P_2$. Si on souhaite construire une v.a. de loi exponentielle, on choisit $\Omega = I\!R^+$.

1.3.2 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X est par définition la quantité $\int_\Omega X dP$ que l'on note $E(X)$ ou $E_P(X)$ si l'on désire préciser quelle est la probabilité utilisée sur Ω. Cette quantité peut ne pas exister.
Pour calculer cette intégrale, on passe dans "l'espace image" et on obtient, par définition de la loi de probabilité $\int_\Omega X dP = \int_{I\!R} x dP_X(x)$.
Il existe des variables aléatoires qui n'ont pas d'espérance, c'est-à-dire pour lesquelles l'intégrale $\int_\Omega X dP$ n'a pas de sens. On dit que X est intégrable si $|X|$ a une espérance finie. On note $L^1(\Omega)$ l'ensemble des v.a. intégrables.(ou $L^1(\Omega, P)$ si l'on veut préciser la probabilité utilisée). L'espace $L^1(\Omega)$ contient les les constantes, les v.a. bornées et les .a. majorées en valeur absolue par une v.a. intégrable.
De la même façon, on définit pour toute fonction borélienne Φ telle que $\Phi(X)$ soit intégrable (ce qui a lieu par exemple si Φ est bornée)

$$E(\Phi(X)) = \int_\Omega \Phi(X) dP = \int_{I\!R} \Phi(x) dP_X(x).$$

Si X admet une densité f, on a $E(X) = \int_{I\!R} x f(x) dx$ et $E(\Phi(X)) = \int_{I\!R} \Phi(x) f(x) dx$.
Si l'on connait $E(\Phi(X))$ pour toute fonction Φ borélienne bornée, on connait la loi de X: l'égalité $E(\Phi(X)) = E(\Phi(Y))$ pour toute fonction borélienne bornée Φ implique l'égalité en loi de X et Y.
Attention : l'égalité en loi n'est pas l'égalité presque sure. Par exemple, si X est une gaussienne centrée, on a $X \stackrel{loi}{=} -X$ et ces deux variables ne sont pas égales presque surement.
En fait, il suffit que l'égalité $E(\Phi(X)) = E(\Phi(Y))$ soit vérifiée pour une classe suffisamment riche de fonctions, par exemple pour les fonctions indicatrices de boréliens, ou d'intervalles, ou pour les fonctions de la forme $e^{\lambda x}, \lambda \in I\!R$ pour avoir $X \stackrel{loi}{=} Y$.
La fonction caractéristique d'une v.a.r. est la transformée de Fourier de la loi de X, c'est-à-dire la fonction

$$\psi(t) = E(e^{itX}) = \int_{I\!R} e^{itx} P_X(dx).$$

Si X admet une densité $f(x)$, la fonction caractéristique de X est $\int_{I\!R} e^{itx} f(x)\, dx$. La fonction caractéristique caractérise la loi de X au sens où la connaissance de cette fonction détermine la loi de la variable. Si la transformée de Fourier ψ appartient à $L^1(dx)$, c'est-à-dire si son module est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dx, la densité associée (unique) est donnée par la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt$$

La fonction $\Psi(\lambda) \stackrel{def}{=} E(e^{\lambda X})$ que l'on appelle *transformée de Laplace* caractérise aussi la loi d'une variable. Mais dans ce cas il n'y a pas de formule d'inversion simple. Pour connaître la loi d'un couple (X,Y), il suffit de connaître $E(\exp(\lambda X + \mu Y))$ pour **tout** couple (λ, μ). Lorsque la v.a. X est positive, on utilise de préférence $E(e^{-\lambda X})$ comme transformée de Laplace, définie alors pour tout $\lambda \geq 0$.

Exemple 1.3.1 Exemple fondamental; Si X est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a $E(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2})$ et réciproquement.

Proposition 1.3.1 Propriétés de l'espérance *a. L'espérance est linéaire par rapport à la variable, c'est à dire*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y),$$

a et b étant des réels.
b. L'espérance est croissante: si $X \leq Y$ (p.s), on a $E(X) \leq E(Y)$.
c. Inégalité de Jensen : si Φ est une fonction convexe, telle que $\Phi(X)$ est intégrable, $E(\Phi(X)) \geq \Phi(E(X))$.

1.3.3 Intégrabilité uniforme

Une famille de v.a. $(X_i, i \in I)$ est dite uniformément intégrable si $\sup_i \int_{|X_i| \geq a} |X_i| dP \to 0$ quand $a \to \infty$.
S'il existe $Y \in L^1(P)$ telle que $|X_i| \leq Y, \forall i$, la famille $(X_i, i \in I)$ est uniformément intégrable.

1.3.4 Indépendance

Définition 1.3.2 *Deux sous-tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \forall A \in \mathcal{F}_1, \forall B \in \mathcal{F}_2.$$

Pour que deux tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ soient indépendantes, il faut et il suffit que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $\forall A \in \mathcal{C}_1, \forall B \in \mathcal{C}_2$ où $\mathcal{C}_i$ est une famille stable par intersection telle que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{F}_i$.

Définition 1.3.3 *Une variable aléatoire X est indépendante d'une sous-tribu $\mathcal{G}$ si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes.*

Proposition 1.3.2 *La v.a. X est indépendante de la sous-tribu $\mathcal{G}$ si et seulement si*

$$P\{A \cap (X \leq x)\} = P(A)P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Deux variables (X,Y) sont indépendantes si les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.

Proposition 1.3.3 *Les v.a. X et Y sont indépendantes si et seulement si*

$$P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} = P(X \leq x)P(Y \leq y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. (La réciproque n'est pas vraie)
Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.
Si X et Y sont indépendantes, on peut calculer $E(\varphi(X,Y))$ de deux façons :

$$E(\varphi(X,Y)) = E(f(X)) = E(g(Y)), \text{avec } f(x) = E(\varphi(x,Y)),\ g(y) = E(\varphi(X,y))$$

Proposition 1.3.4 *Les v.a. X et Y sont indépendantes si et seulement si*

$$E(f(X)\,g(Y)) = E(f(X))\,E(g(Y)) \text{ pour toutes fonctions } f \text{ et } g \text{ boréliennes bornées.}$$

Il suffit que cette égalité ait lieu pour une classe suffisamment riche de fonctions f et g, par exemple pour les fonctions indicatrices. Si X et Y sont à valeurs positives, il suffit que l'égalité soit vérifiée pour $f(x) = \exp(-\lambda x)$ et $g(x) = \exp(-\mu x)$ pour tous λ, μ positifs.
Une famille de sous-tribus $(\mathcal{F}_i, i \in I\!N)$ est indépendante si toutes les sous familles finies le sont, c'est-à-dire si $P(\cap_{1\leq i\leq n} A_i) = \prod_{1\leq i\leq n} P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{F}_i, \forall n$. Même définition pour une famille non dénombrable.
Même définition pour une famille de variables aléatoires.

1.3.5 Probabilités équivalentes

Définition 1.3.4 *Deux probabilités P et Q définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites équivalentes si elles ont mêmes ensembles négligeables, c'est à dire si*

$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0.$$

Une propriété vraie P p.s. est alors vraie Q p.s.
Si P et Q sont équivalentes, il existe une variable Y, strictement positive, $\mathcal{F}$-mesurable, d'espérance 1 sous P appelée densité de Radon-Nikodym telle que $dQ = Y dP$ ou encore $Q(A) = \int_A Y dP$. On écrit également cette relation sous la forme $\dfrac{dQ}{dP} = Y$. Réciproquement, si Y est une v.a. strictement positive, $\mathcal{F}$-mesurable, d'espérance 1 sous P, la relation $E_Q(Z) = E_P(ZY)$ définit une probabilité Q équivalente à P. Elle est facile à mémoriser par la règle de calcul formel suivante:

$$E_Q(Z) = \int Z dQ = \int Z \frac{dQ}{dP} dP = \int ZY dP = E_P(ZY)$$

On a aussi $\dfrac{dP}{dQ} = \dfrac{1}{Y}$.
Si Y est seulement positive, on a $P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$ et on dit que Q est absolument continue par rapport à P.

Exemple 1.3.2 1. Soit U une variable de Bernoulli sous P définie par

$$P(U = 0) = 1 - p, \quad P(U = 1) = p.$$

Soit Y la variable définie par $Y = \lambda U + \mu(1 - U)$. Elle est d'espérance 1 pour $\lambda p + \mu(1 - p) = 1, \lambda, \mu > 0$. Soit $dQ = Y dP$, on a $Q(U = 1) = \lambda p$. Sous Q , U est une variable de Bernoulli de paramètre λp.

2. Si X est une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sous P et soit $Y = \exp\{h(X - m) - \frac{1}{2}h^2\sigma^2\}$. Soit $dQ = Y dP$. Sous Q, X est une v.a. de loi $\mathcal{N}(m + h\sigma^2, \sigma^2)$.
Démonstration : Il suffit de calculer $E_Q\{\exp(\lambda X)\}) = E_P\{Y \exp(\lambda X)\}$ et de vérifier que $E_Q(\exp \lambda X) = \exp[\lambda(m + h\sigma^2) + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}]$ $\square$.

3. Soit X est un vecteur gaussien sous P et U une variable telle que le vesteur (X, U) soit gaussien. On pose $dQ = Y dP$ avec $Y = \exp(U - E_P(U) - \dfrac{1}{2}\text{Var}_P U)$, le vecteur X est gaussien sous Q, de même covariance que sous P.

1.4 Variables gaussiennes

Une variable X est gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle a pour densité

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

On considère qu'une v.a. constante suit une loi gaussienne de variance nulle, ce qui correspond à une masse de Dirac. La mesure de Dirac δ_a au point a est une probabilité sur $I\!R$ telle que $\int_{I\!R} f(x)\delta_a(dx) = f(a)$ et correspond à une v.a. constante égale à a.

Définition 1.4.1 *Un vecteur $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ est gaussien*[2] *si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ est une variable gaussienne à valeurs réelles.*

On caractérise la loi de X par son vecteur espérance et sa matrice de covariance

$$\Gamma = [\sigma_{i,j}]_{i=1,n;\, j=1,n}$$

où $\sigma_{i,j} = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$. La loi de X admet une densité si la matrice Γ est inversible.
Si deux variables forment un couple gaussien de covariance nulle, elles sont indépendantes.
Si (X, Y) est un vecteur Gaussien, il existe α tel que $X - \alpha Y$ est indépendant de X.
Si X et Y sont des gaussiennes indépendantes, $aX + bY$ est une gaussienne et le couple (X, Y) est gaussien. Ce n'est en général pas vrai si les variables ne sont pas indépendantes.
Enfin, nous rappelons une nouvelle fois le résultat important suivant

Proposition 1.4.1 *Si X est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a, pour tout λ réel, $E(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2})$. Réciproquement si pour tout $\lambda \in I\!R$, $E(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2})$, la variable X est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*

1.5 Convergence de v.a.

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est fixé. Toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace.
On distingue plusieurs types de convergence:

1.5.1 Convergence presque sûre

Une suite de variables aléatoires X_n converge p.s. vers X si pour presque tout ω,

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On note $X_n \stackrel{p.s.}{\to} X$
Cette notion de convergence dépend du choix de P. Si Q est équivalente à P et si $X_n \stackrel{P.p.s.}{\to} X$, on a $X_n \stackrel{Q.p.s.}{\to} X$.
Théorème de convergence monotone: Si X_n est une suite de variables aléatoires monotone (soit $X_n \le X_{n+1}$) et si $X = \lim_{p.s.} X_n$, on a $E(X) = \lim E(X_n)$.
Théorème de Lebesgue dominé: Si X_n est une suite de variables aléatoires convergeant p.s. vers X et s'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| \le Y$, alors $E(X_n)$ converge vers $E(X)$.

Théorème 1.5.1 Loi des grands nombres. *Si $(X_i, i \ge 1)$ est une suite de v.a. équidistribuées, indépendantes d'espérance finie, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge p.s. vers $E(X_1)$.*

[2] L'exposant ^{T} désigne la transposition

1.5.2 Convergence quadratique, ou convergence dans $L^2(\Omega)$

On note $\|X\|_2 \stackrel{def}{=} \sqrt{\int_\Omega X^2 dP} = \sqrt{E(X^2)}$. On identifie deux v.a. égales p.s., ainsi on définit ainsi la norme $||\cdot||$ sur l'espace des v.a. de carré intégrable. On dit que $X \in L^2(\Omega)$ (ou $L^2(\Omega, P)$) si $\|X\|_2 < \infty$. Soit $X_n \in L^2$ et $X \in L^2$. La suite de variables aléatoires (X_n) converge en moyenne quadratique (dans $L^2(\Omega)$) vers X si

$$(\|X_n - X\|_2)^2 = E(X_n - X)^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Cette notion de convergence dépend du choix de P.
Si $X_n \to X$ dans $L^2(\Omega)$, on a $E(X_n^2) \to E(X^2)$. La réciproque est fausse.

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \int_\Omega XY dP$. En particulier, il est complet.
Si une suite converge dans L^2, il existe une sous-suite qui converge p.s.
Si une suite uniformément intégrable (par exemple bornée) converge p.s., elle converge dans L^2.
Théorème : (Loi des grands nombres) Si $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de v.a. équidistribuées, indépendantes de variance finie , $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge en moyenne quadratique vers $E(X_1)$.
Si une suite de v.a. gaussiennes converge en moyenne quadratique, la limite est une variable gaussienne.
Soit $p > 1$. On note $\|X\|_p$ la quantité positive définie par $(\|X\|_p)^p := \int_\Omega |X|^p dP = E(|X|^p)$. On définit ainsi une norme sur l'espace $L^p(\Omega)$ des v.a. X telles que $\|X\|_p < \infty$. Une suite de v.a. X_n dans L^p converge s'il existe X tel que $E(X_n - X)^p \to 0$. La convergence dans L^p pour $p > 1$ implique la convergence dans L^q pour tout q, $1 < q < p$.

1.5.3 Convergence en probabilité

Une suite de variables aléatoires X_n converge en probabilité vers X si

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On note $X_n \xrightarrow{P} X$.
La convergence p.s. implique la convergence en probabilité.
La convergence en probabilité implique qu'une sous-suite converge p.s.
La convergence quadratique implique la convergence en probabilité.

1.5.4 Convergence en loi

Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers X si $E(\Phi(X_n)) \to E(\Phi(X))$ quand $n \to \infty$ pour toute fonction Φ continue bornée.
On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La convergence en loi est également définie par la convergence simple des fonctions caractéristiques, soit $\Psi_n(t) \to \Psi(t)$ pour tout t, où Ψ_n désigne la fonction caractéristique de X_n et Ψ celle de X.
Si X est une v.a. de fonction de répartition F continue, et si X_n est une suite de v.a. de fonction de répartition F_n telles que $F_n(x)$ converge vers $F(x)$ pour tout x, alors X_n converge en loi vers X et réciproquement.
La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Théorème 1.5.2 Théorème Central limite *Si* $(X_i, i \geq 1)$ *est une suite de v.a. équidistribuées, indépendantes, de variance finie* σ^2

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)\,.$$

1.6 Processus stochastiques

1.6.1 Filtration

On va s'intéresser à des phénomènes dépendant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{F}_t$, c'est l'information à la date t.

Définition 1.6.1 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$*.*

On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$.
On parle d'hypothèses habituelles si
- les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$,
- La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.
Une filtration $\mathbf{G}$ est dite plus grosse que $\mathbf{F}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\forall t$.

1.6.2 Processus

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in [0,\infty[)$ définies sur le même espace de probabilité .

Définition 1.6.2 *Un processus stochastique* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit adapté (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$*) si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* t*.*
On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \to X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω*.*
Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.

A un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est à dire la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.
On utilise souvent des processus dit prévisibles. La définition précise est la suivante: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On appelle tribu des prévisibles[3] la tribu sur $(0,\infty) \times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme

$$]s,t] \times A,\, 0 \leq s \leq t,\, A \in \mathcal{F}_s.$$

Un processus est prévisible si et seulement si l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles. Pas d'affolement: il suffit de savoir que les processus càg sont prévisibles.
On dit que deux processus X et Y sont égaux à une modification près si $X_t = Y_t$ p.s. $\forall t$.
Deux processus sont égaux en loi $X \stackrel{loi}{=} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ et pour tout n on a $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{loi}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$.
On trouvera chapitre 8 d'autres définitions concernant des propriétés de mesurabilité.

[3] L'expérience est une lanterne accrochée dans le dos, qui n'éclaire que le chemin parcouru. Confucius / Clifton

1.6.3 Processus croissant

Un processus $A = (A_t,\, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \to A_t$ est une fonction croissante, c'est-à-dire

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega),\ \forall t \leq s, p.s.$$

Sauf mention du contraire, les processus croissants sont pris continus à droite.
Un processus $V = (V_t,\, t \geq 0)$ est dit à *variation bornée* sur $[0,t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| \leq K\,,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.
Un processus $V = (V_t,\, t \geq 0)$ est dit à *variation finie* sur $[0,t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| < \infty\,,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$. Un processus $V = (V_t,\, t \geq 0)$ est dit à *variation finie* s'il est à variation finie sur $[0,t]$ pour tout t. Il est alors la différence de deux processus croissants (et réciproquement).

1.6.4 Processus Gaussiens

Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si

$$\forall n,\ \forall t_i, 1 \leq i \leq n,\ \forall a_i,\ \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \ \text{ est une v.a.r. gaussienne.}$$

Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance.
Un espace gaussien est un sous-espace (vectoriel fermé) de $L^2(\Omega)$ formé de v.a.r. gaussiennes centrées. L'espace gaussien engendré par un processus gaussien est le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a.r. centrées $(X_t - E(X_t), t \geq 0)$, c'est-à-dire le sous-espace formé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique.

1.7 Espérance conditionnelle

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est fixé.

1.7.1 Cas discret

Rappel: Soit A et B deux évènements (sous-ensembles de Ω). On définit la probabilité conditionnelle de A quand B par $P(A\,|B\,) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, pour tout B tel que $P(B) \neq 0$.

Propriété: $P(.\,|B\,)$ est une probabilité sur Ω.

On peut définir l'espérance d'une variable par rapport à cette loi. Considérons le cas d'une variable X à valeurs dans $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit B fixé et $Q(A) := P(A\,|B\,)$. On a alors en désignant par E_Q l'espérance par rapport à Q:

$$E_Q(X) = \sum_j x_j Q(X = x_j) = \sum_j x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)}.$$

On peut écrire $P(X = x_j \cap B) = \int_B \mathbb{1}_{X=x_j} dP$ (où $\mathbb{1}_{X=x_j}$ est la fonction qui vaut 1 si $\omega \in (X = x_j)$ c'est-à-dire si $X(\omega) = x_j$) et en remarquant que $\sum_j x_j \mathbb{1}_{X=x_j} = X$ on a :

$$\sum_j x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP,$$

ce que l'on peut lire

$$\int_B E_Q(X) dP = E_Q(X) P(B) = \int_B X dP.$$

On note $E(X\,|B) = E_Q(X)$. Soit alors $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B et $E(X\,|\mathcal{B})$ la variable aléatoire définie par $E(X\,|\mathcal{B}) = E(X\,|B)1_B + E(X\,|B^c)1_{B^c}$. On a

$$\int_D E(X\,|\mathcal{B}) dP = \int_D X dP$$

pour tout élément $D \in \mathcal{B}$. On appelle espérance conditionnelle de X quand $\mathcal{B}$ cette variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable.

Un cas particulier intéressant est celui où l'évènement B est lié à une v.a.:
Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (resp $(y_1, \dots, y_d)$), telles que $\forall i, P(Y = y_i) \neq 0$. On peut alors définir $P(X = x_j\,|Y = y_i) = \mu(x_j; y_i)$. On remarque que pour tout y_i, $\mu(.; y_i)$ définit une probabilité sur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On peut donc définir l'espérance de X par rapport à cette loi par

$$E(X\,|Y = y_i) = \sum_j x_j P(X = x_j\,|Y = y_i) = \sum_j x_j \mu(x_j; y_i) = \frac{1}{P(Y = y_i)} \int_{Y=y_i} X dP.$$

On définit ainsi une fonction Ψ telle que $\Psi(y_i) = E(X\,|Y = y_i)$.
IL est facile de vérifier que

$$\sum_i P(Y = y_i) E(X\,|Y = y_i) = \sum_i P(Y = y_i) \Psi(y_i) = E(\Psi(Y)) = E(E(X|Y)) = E(X)$$

On note $\Psi(Y) = E(X\,|Y)$. C'est l'espérance conditionnelle de X quand Y ou encore l'espérance conditionnelle de X par rapport à Y. Cette fonction est caractérisée par

a) $\Psi(Y)$ est Y-mesurable,
b) $E(\Phi(Y)X) = E(\Phi(Y)\Psi(Y))$ pour toute fonction Φ.

(Il suffit par linéarité de vérifier b) pour $\Phi = \mathbb{1}_{y_i}$.)

1.7.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une v.a.r. (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.7.1 *ef L'espérance conditionnelle $E(X\,|\mathcal{G})$ de X quand $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire*

a. $\mathcal{G}$-mesurable
b. telle que $\int_A E(X\,|\mathcal{G}) dP = \int_A X dP, \quad \forall A \in \mathcal{G}$.

C'est aussi l'unique (à une égalité p.s. près) variable $\mathcal{G}$-mesurable telle que

$$E[E(X\,|\mathcal{G})Y] = E(XY)$$

pour toute variable Y, $\mathcal{G}$-mesurable bornée.

Il en résulte que si X est de carré intégrable, $E(X|\mathcal{G})$ est la projection de X sur l'espace des variables aléatoires $\mathcal{G}$ mesurables, de carré intégrable, c'est-à-dire la variable aléatoire $\mathcal{G}$ mesurable qui minimise $E[(X - Y)^2]$ parmi les v.a. Y, $\mathcal{G}$ mesurables.

1.7.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $E(X|Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y, donc c'est une fonction de Y: il existe ψ de $I\!R$ dans $I\!R$ borélienne telle que $E(X|Y) = \psi(Y)$.

L'espérance conditionnelle $E(X|Y)$ est caractérisée par
a) c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable
b) $\int_A E(X|Y)dP = \int_A XdP \quad \forall A \in \sigma(Y)$.

La propriété b) est équivalente à $E(E(X|Y)\phi(Y)) = E(X\phi(Y))$ pour toute fonction ϕ borélienne bornée , ou à $\int_{Y\in B} E(X|Y)dP = \int_{Y\in B} XdP$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

On utilise souvent la notation $E(X|Y = y)$ pour désigner la valeur de ψ en y. On a alors
a') $E(X|Y = y)$ est une fonction borélienne
b') $\int_B E(X|Y = y)dP_Y(y) = \int_{I\!R\times B} x dP_{X,Y}(x, y) \quad \forall B \in \mathcal{B}_{I\!R}$.

1.7.4 Propriétés de l'espérance conditionnelle

a) Linéarité. Soit a et b deux constantes. $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$.
b) Croissance. Soit X et Y deux v. a. telles que $X \le Y$. Alors $E(X|\mathcal{G}) \le E(Y|\mathcal{G})$.
c) $E[E(X|\mathcal{G})] = E(X)$.
d) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $E(X|\mathcal{G}) = X$.
e) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, $E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$.
f) Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.
g) Si $\mathcal{G}$ est la tribu grossière (composée de l'ensemble vide et de Ω), $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.
h) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors $E(X|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})$.
On note souvent $E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{H}|\mathcal{G})$
i) Si (X, Y) sont indépendantes, et ϕ une fonction borélienne bornée, $E(\phi(X, Y)|Y) = [E(\phi(X, y))]_{y=Y}$.
Cette dernière égalité signifie que, pour calculer $E(\phi(X, Y)|Y)$ lorsque les variables X et Y sont indépendantes, on explicite la fonction Ψ telle que $\Psi(y) = E(\phi(X, y))$, puis on remplace y par Y pour obtenir la v.a. $\Psi(Y)$.

On verra d'autres propriétés de l'espérance conditionnelle dans le polycopié d'exercices. On utilisera sans modération la formule $E\big(\int_a^b X_s ds|\mathcal{G}\big) = \int_a^b E\big(X_s|\mathcal{G}\big)ds$ dés que l'un des deux membres existe.
Remarque très importante: les égalités précédentes ne sont vraies que p.s. et à condition que les v.a. soient intégrables.

1.7.5 Variance conditionnelle

On définit $\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - E^2(X|\mathcal{G})$. C'est une v.a. positive, en vertu de l'inégalité de Jensen:
Soit ϕ une fonction convexe. On a $E(\phi(X)|\mathcal{F}) \ge \phi(E(X|\mathcal{F}))$.

1.7.6 Formule de Bayes

Soit P une probabilité et Q une probabilité équivalente à P définie par $dQ = LdP$. On peut exprimer l'espérance conditionnelle d'une variable sous Q en fonction de l'espérance conditionnelle sous P :

$$E_Q(X\,|\mathcal{G}) = \frac{E_P(LX\,|\mathcal{G})}{E_P(L\,|\mathcal{G})}\,.$$

DÉMONSTRATION: Il s'agit de trouver Z v.a. $\mathcal{G}$-mesurable telle que

$$E_Q(ZY) = E_Q(XY)$$

pour toute v.a. Y $\mathcal{G}$-mesurable. On écrit $E_Q(ZY) = E_P(LZY) = E_P(ZYE_P(L|\mathcal{G}))$ et $E_Q(XY) = E_P(LXY) = E_P(YE_P(LX|\mathcal{G}))$ en utilisant la $\mathcal{G}$-mesurabilité de Z, Y. L'égalité devant être vérifiée pour tout Y, il vient $ZE_P(L|\mathcal{G}) = E_P(LX|\mathcal{G})$, d'où l'expression de Z. □

1.8 Loi conditionnelle

1.8.1 Définition

Soit (X, Y) deux v.a.r. La loi conditionnelle de X quand Y est la famille de lois sur $I\!R$ notée $\mu(y, dx)$ indexées par y (qui décrit l'ensemble des valeurs prises par Y) telle que

$$E[\Phi(X)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\mu(y, dx)$$

pour toute fonction Φ borélienne bornée. La propriété s'étend aux fonctions Φ intégrables par rapport à μ. Lorsque l'on connait cette loi conditionnelle, les calculs d'espérance et de variance conditionnelle se réduisent à des calculs d'espérance et de variance. En effet $E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(y, dx)$ est, pour tout y, l'espérance d'une v.a. de loi $\mu(y, dx)$.

Si le couple (X, Y) a une densité $f(x, y)$, on peut montrer que

$$\mu(y, dx) = \frac{f(x, y)dx}{\displaystyle\int_{I\!R} f(u, y)du}$$

1.8.2 Cas Gaussien

Si le couple de v.a.r. (X, Y) est gaussien (avec une densité ou non), la densité conditionnelle de X à Y est une loi gaussienne d'espérance linéaire en Y et de variance c indépendante de Y. Il est alors facile de retrouver la valeur de l'espérance: $E(X|Y) = aY + b$ implique $E(X) = aE(Y) + b$ et $E(XY) = E(YE(X|Y)) = E(aY^2) + bE(Y)$, d'où

$$a = \frac{Cov(X, Y)}{VarY}\,,\; b = E(X) - aE(Y)\,,\; c = E(X^2|Y) - E^2(X|Y) = E(X^2) - E[(aY + b)^2]$$

Ceci se généralise à un vecteur multidimensionnel : si (X, Y) est un vecteur gaussien, la densité conditionnelle de X à Y est une loi gaussienne d'espérance linéaire en Y et de variance c indépendante de Y.

1.9 Martingales

1.9.1 Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante (telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). La tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.9.1 *ef Une suite de v.a.r.* $(X_n, n \in I\!N)$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale si*
X_n *est intégrable,* $\forall n \in I\!N$
X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable,* $\forall n \in I\!N$
$E(X_{n+1} \,|\mathcal{F}_n\,) = X_n \;, \forall n \in I\!N.$

Propriété: $E(X_{n+p} \,|\mathcal{F}_n\,) = X_n \;, \forall n \in I\!N, \forall p \in I\!N.$
Exemple: Si $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ où les Y_i sont indépendantes équidistribuées centrées, X_n est une martingale.

Cas multidimensionnel: Une famille de vecteurs $(S_n, n \geq 0)$ telle que S_n est à valeurs dans $I\!R^d$ est une martingale, si les familles $(S^i_n, n \in I\!N)$ sont des martingales $\forall i, \quad 1 \leq i \leq d.$

1.9.2 Cas continu.

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ croissante (telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \,, \forall s \leq t.$)

Définition 1.9.2 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0, \infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si*
X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable et intégrable pour tout* t*.*
$E(X_t \,|\mathcal{F}_s\,) = X_s \;, \forall s \leq t.$

Propriétés:
Si X est une martingale $E(X_t) = E(X_0)$, $\forall t$.
Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale: $X_t = E(X_T \,|\mathcal{F}_t\,)$. Cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance.

Définition 1.9.3 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0, \infty[)$ *est une surmartingale (resp. sousmartingale) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si*
X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable et intégrable pour tout* t
$E(X_t \,|\mathcal{F}_s\,) \leq X_s \;, \forall s \leq t$ *(resp.* $E(X_t \,|\mathcal{F}_s\,) \geq X_s$*).*

Exemple 1.9.1 Si X est une martingale, alors, X^2 est une sous smartingale. Si X est une martingale et A un processus croissant, $X + A$ est une sous-martingale.

On dira que X est une martingale si la filtration de référence est la filtration naturelle de X. On fera attention: la propriété de martingale dépend de la filtration et une $\mathbf{F}$-martingale n'est en général pas une $\mathbf{G}$ martingale si $\mathbf{G}$ est plus grosse que $\mathbf{F}$.

Une martingale continue à variation bornée est égale à une constante. En effet si M est une telle martingale et V sa variation,

$$E(M_t^2) = E\left[\left(\sum (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2\right] \leq E\left[V_t \sup |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right] \leq KE\left[\sup |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right]$$

et le membre de droite converge p.s. vers 0 quand on raffine la partition.

Proposition 1.9.1 Inégalité de Doob *Si* X *est une martingale continue,*

$$E(\sup_{s \leq T} X_s^2) \leq 4E(X_T^2)\,.$$

1.10 Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

1.10.1 Définitions

Définition 1.10.1 *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Une constante positive est un temps d'arrêt.
On associe à un temps d'arrêt τ la tribu $\mathcal{F}_\tau$ dite des événements antérieurs à τ, définie[4] par $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \,, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Propriétés: Si T est un temps d'arrêt, T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.
Si S et T sont des temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt. En particulier $T \wedge t$ est un temps d'arrêt.
Si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et T un temps d'arrêt fini. On définit X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
Si un processus X est continu et adapté, X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

1.10.2 Théorème d'arrêt

Si T est un temps d'arrêt et M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, le processus Z défini par $Z_t \stackrel{def}{=} M_{t \wedge T}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale. En particulier, $E(M_{t\wedge T}) = E(M_0)$.

Théorème 1.10.1 Théorème d'arrêt de Doob: *(Optional Sampling Theorem)*
Si M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue et si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq K$, K étant une constante finie, M_T est intégrable et

$$E(M_T | \mathcal{F}_S) = M_S.$$

Ce résultat s'étend à tous les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable.

Si M est uniformément intégrable, on peut montrer que M_t converge p.s. et dans L^1 vers M_∞ quand $t \to \infty$ et que $M_S = E(M_\infty | \mathcal{F}_S)$

Proposition 1.10.1 *Si pour tout temps d'arrêt borné $E(X_T) = E(X_0)$, le processus X est une martingale.*

Remarque 1.10.1 Attention, si $E(X_t) = E(X_0)$ pour tout t, le processus X n'est pas une nécessairement martingale. Un contre exemple est $X_t = \int_0^t M_u du$ où M est une martingale d'espérance nulle.

Si M est une surmartingale positive et τ un temps d'arrêt, $E(M_\tau) \leq E(M_0)$ où on pose $M_\infty = 0$.

Définition 1.10.2 *Un processus M adapté càglàd est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n telle que $\tau_n \to \infty$ et $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n.*

Une martingale locale positive est une surmartingale. Une martingale locale uniformément intégrable est une martingale.

[4] "L'essentiel est de comprendre" Scipion, dans Caligula, Camus

1.10.3 Processus de Markov

Cette notion est assez difficile, mais d'un usage constant. En langage vernaculaire, un processus est de Markov si son comportement dans le futur ne dépend du passé quà travers le présent.[5] Soyons plus précis. Soit X un processus et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration canonique. On dit que le processus est de Markov si, pour tout t, pour toute variable bornée $Y \in \mathcal{F}_\infty$ l'égalité

$$E(Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) = E(Y \circ \theta_t | X_t)$$

où θ est l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par $X_u \circ \theta_s = X_{u+s}$.

Essayons une autre définition. Pour tout n, pour toute fonction bornée F définie sur $\mathbb{R}^n$, pour tous $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots, X_{s+t_n}) | \mathcal{F}_s) = E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots, X_{s+t_n}) | X_s) \,.$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction f borélienne bornée

$$E(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = E(f(X_t)|X_s) \,, \forall t > s \,.$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis T, S avec $T > S$.

1.11 Rappels d'analyse

1.11.1 Dérivation sous le signe somme

Soit $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$. Si f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x $\partial_x f(x,y)$ continue bornée en valeur absolue par $g(y)$, $|\partial_x f(x,y)| \leq g(y)$ où g est une fonction intégrable, alors $F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x f(x,y)dy$.

1.11.2 Espace complet

Un espace normé est dit complet si toute suite de Cauchy converge, i.e. si $||x_n - x_m|| \to 0$ quand $n, m \to \infty$ implique l'existence de x tel que $x_n \to x$. L' espace $\mathbb{R}$ muni de la norme habituelle, l'espace des fonctions $L^2(\mathbb{R})$ muni de la norme $||f|| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx}$, l'espace des v.a. $L^2(\Omega)$ muni de la norme $||X|| = \sqrt{E(X^2)}$ sont des espaces complet.

1.11.3 Théorème de Lebesgue dominé

Soit f_n une suite de fonctions intégrables qui converge (simplement) vers une fonction f ($f_n(x) \to f(x), \forall x$). S'il existe g intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall x$, alors $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. La fonction f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $(t_i, t_i \leq t_{i+1}, i = 0, \ldots, n)$ telle que f est constante, égale à f_i sur $]t_i, t_{i+1}]$ et nulle hors de $[t_0, t_{n+1}]$. On peut alors écrire $f = \sum_{i=1}^n f_{i-1} \mathbb{1}_{]t_{i-1}, t_i]}$.

[5] "L'avenir est la projection du passé, conditionnée par le présent". G. Braque.

Chapter 2

LE MOUVEMENT BROWNIEN

Le botaniste Robert Brown observe en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de "mouvement au hasard".

En 1900, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse met en évidence le caractère "markovien" du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t+s$ dépend de sa position en t, et ne dépend pas de sa position avant t. Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du mouvement Brownien a été développée pour la Bourse, avant de l'être pour la Physique.

En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.

La première étude mathématique rigoureuse est faite par N. Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence du Brownien. P. Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Depuis, le mouvement Brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener, Itô, Watanabe, Meyer, Yor, LeGall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman,...).

2.1 Le mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

2.1.1 Définition.

Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si

a) $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

b) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t-s)$.

c) $\forall n, \quad \forall t_i, \;\; 0 \leq t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.

La propriété b) est la stationarité des accroissements du mouvement Brownien, la propriété c) traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants. On peut aussi écrire c) sous la forme équivalente suivante:

c') Soit $s \leq t$. La variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s, soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.
Nous ne démontrons pas l'existence du mouvement Brownien (MB dans la suite). On pourra consulter l'ouvrage de Karatzas et Shreve (1988). On le construit sur "l'espace canonique " $\Omega = \mathcal{C}(I\!R^+, I\!R)$ des fonctions continues de $I\!R^+$ dans $I\!R$ par $B_t(\omega) = \omega(t)$ et on munit cet espace d'une mesure (mesure de Wiener) telle que B soit un MB.

La filtration naturelle est $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$. On lui ajoute de façon implicite les négligeables. On peut montrer qu'elle vérifie alors les conditions habituelles.
On s'autorisera à noter $B(t_i)$ au lieu de B_{t_i} la valeur de la trajectoire en t_i pour des raisons de lisibilité.

2.1.2 Généralisation.

Le processus $X_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a. On dit que X est un Brownien généralisé ou un MB de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B est un mouvement Brownien. La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.
Les v.a. $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n)$ sont indépendantes.

2.2 Promenade aléatoire

On peut montrer que le mouvement Brownien s'obtient comme limite de promenades aléatoires renormalisées. Cette propriété est exploitée pour des simulations.
Soit, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ une famille de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes équidistribuées

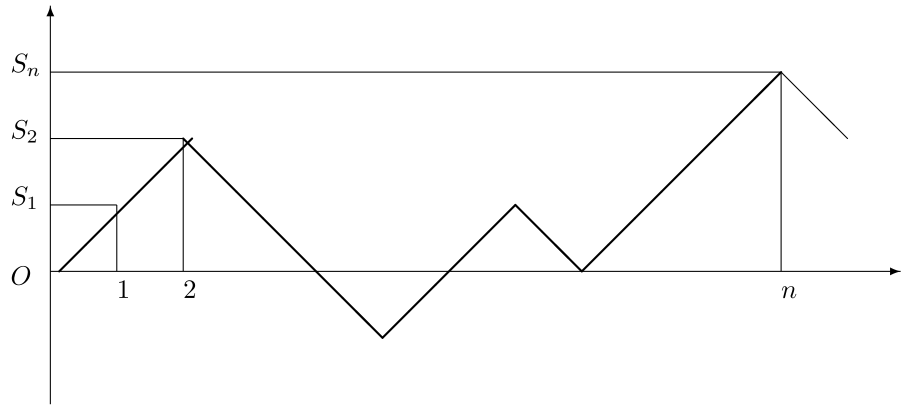
$$P(X_i = 1) \;=\; P(X_i = -1) \;=\; \frac{1}{2} \quad , \quad i \in I\!N^* \,.$$

On associe à cette famille la suite $(S_n\,,\, n \geq 0)$ définie par

$$S_0 \;=\; 0,\; S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On dit que la suite S_n est une *promenade*[1] *aléatoire*. (Jeu de pile ou face).
On a $E(S_n) = 0$, $\mathrm{Var}\,(S_n) = n$.

[1] "Charmante promenade, n'est-ce-pas?" Le professeur Tournesol. Tintin et les Picaros. 1964.



Promenade aléatoire

Remarquons que la suite $(S_m - S_n,\, m \geq n)$ est indépendante de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ et que $S_m - S_n$ a même loi que S_{m-n}.

On procède alors à une double renormalisation. Soit N fixé
* on ramène l'intervalle de temps $[0, N]$ à $[0, 1]$
* on change l'échelle des valeurs prises par S_n.

Plus précisément, on définit une famille de variables aléatoires indexées par les réels de la forme $\frac{k}{N}$, $k \in I\!N$, par

$$U_{\frac{k}{N}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\, S_k \;.$$

On a

$$E\big(U_{\frac{k}{N}}\big) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}\,\big(U_{\frac{k}{N}}\big) = \frac{k}{N} \;.$$

Les propriétés d'indépendance et de stationarité de la promenade aléatoire restent vérifiées, soit
• si $k \geq k'$, $U_{\frac{k}{N}} - U_{\frac{k'}{N}}$ est indépendante de $(U_{\frac{p}{N}}\,;\, p \leq k')$
• si $k \geq k'$, $U_{\frac{k}{N}} - U_{\frac{k'}{N}}$ a même loi que $U_{\frac{k-k'}{N}}$.

On définit un processus à temps continu $(U_t\,,\, t \geq 0)$ à partir de $U_{\frac{k}{N}}$ en imposant à la fonction $t \to U_t$ d'être affine entre $\frac{k}{N}$ et $\frac{k+1}{N}$. Pour cela, N étant fixé, on remarque que pour tout $t \in I\!R_+$

il existe $k(t) \in \mathbb{N}$ unique tel que $\frac{k(t)}{N} \leq t < \frac{k(t)+1}{N}$ et on pose

$$U_t^N \;=\; U_{\frac{k}{N}} + N\big(t - \frac{k}{N}\big)\,\big(U_{\frac{k+1}{N}} - U_{\frac{k}{N}}\big)$$

où $k = k(t)$.

Pour $t = 1$ on a $U_1^N = \frac{1}{\sqrt{N}} S_N$. Le théorème central-limite implique alors que U_1^N converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

On montre alors que le processus U^N converge (au sens de la convergence en loi) vers un mouvement Brownien B.
En particulier $U_t^N \stackrel{\mathcal{L}}{\to} B_t$ et $(U_{t_1}^N, \dots, U_{t_k}^N) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ pour tout k-uple $(t_1, \dots, t_k)$.

2.3 Propriétés

Dans ce qui suit, $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ est sa filtration naturelle.

2.3.1 Processus gaussien

Proposition 2.3.1 *Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance* $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$.

Démonstration: Le caractère gaussien résulte de $\sum_{i=0}^n a_i B_{t_i} = \sum_{i=0}^n b_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ avec $a_i = b_i - b_{i+1}, i \leq n-1\,, a_n = b_n$. La covariance est égale à $E(B_t B_s)$ car le processus est centré. Si $s \leq t$,

$$E(B_t B_s) = E((B_t - B_s)B_s + B_s^2) = E(B_t - B_s)E(B_s) + E(B_s^2) = s \quad \square$$

On peut généraliser: Le processus $(X_t = x + \mu t + \sigma B_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien d'espérance $x + \mu t$ et de covariance $E[(X_t - E(X_t))\,(X_s - E(X_s))] = \sigma^2 (s \wedge t)$.

2.3.2 Une notation

Il nous arrivera de noter $E_x(f(B_s))$ l'espérance de $f(B_s)$ quand B est un Brownien issu de x, sans toujours faire cette précision. Cette quantité est égale à $E(f(x + B_s))$ où B est un Brownien issu de 0 . De la même façon, nous utiliserons la notation $P_x(B_s \in A)$ pour $P(x + B_s \in A)$ et $P_x(B_s \in da)$ pour la densité de la v.a. B_s où B est un Brownien partant de x.

2.3.3 Scaling

Proposition 2.3.2 *Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors*
i) le processus $\hat{B}$ défini par $\hat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.
ii) le processus $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien. (Propriété de scaling)
iii) le processus $\bar{B}$ défini par $\bar{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0\,, \bar{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

Démonstration: Il suffir de vérifier le caractère Gaussien de ces processus et d'en calculer espérance et covariance. $\square$

2.3.4 Propriété de Markov

La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée sous la forme (un peu plus forte que la propriété de Markov) : pour tout s, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{def}{=} B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 2.3.1 *Pour f borélienne bornée, $E(f(B_u) \,|\mathcal{F}_t\,) = E(f(B_u) \,|\sigma(B_t)\,)$ pour $u > t$.*

DÉMONSTRATION: On fait apparaitre les accroissements et on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle :

$$E(f(B_u) \,|\mathcal{F}_t\,) = E(f(B_u - B_t + B_t) \,|\mathcal{F}_t\,) = \Phi(u-t, B_t)$$

avec $\Phi(u-t, x) = E(f(B_u - B_t + x)) = E(f(Y + x))$ où Y a même loi que $B_u - B_t$, soit une loi $\mathcal{N}(0, u-t)$. Par les mêmes arguments, $E(f(B_u) \,|\sigma(B_t)\,) = \Phi(u-t, B_t)$. On a très précisement

$$\Phi(s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{I\!R} f(y) \exp -\frac{(y-x)^2}{2s}\, dy$$

□

Une autre façon de décrire cette propriété est de dire que, pour $u > t$, conditionnellement à B_t, la v.a. B_u est de loi gaussienne d'espérance B_t et de variance $u - t$. Alors

$$E(1\!\!1_{B_u \leq x} \,|\mathcal{F}_t\,) = \; E(1\!\!1_{B_u \leq x} \,|\sigma(B_t)\,) = \; E(1\!\!1_{B_u \leq x} \,|B_t\,)$$

pour $t \leq u$.

Proposition 2.3.3 Propriété de Markov forte:
Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors $E(f(B_{T+s}) \,|\mathcal{F}_T\,) = E(f(B_{T+s}) \,|\sigma(B_T)\,)$. En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{def}{=} B_{t+T} - B_T$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

2.3.5 Equation de la chaleur

Soit $g(t,x)$ la densité gaussienne centrée de variance t. On note

$$q(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp -\frac{(y-x)^2}{2t} = g(t, x-y)$$

la densité de transition du mouvement Brownien. C'est de façon heuristique, la probabilité pour que le mouvement Brownien soit en y sachant que t instants auparavant, il se trouvait en x, c'est aussi la densité conditionnelle

$$P(B_{t+s} \in dy | B_s = x) = q(t,x,y)\, dy$$

La densité de transition q vérifie l'équation "forward"

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(t,x,y)$$

et l'équation "backward"

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t,x,y)\,.$$

En utilisant cette notation et la stationarité des accroissements du MB, on obtient que pour toute fonction f borélienne bornée

$$E(f(B_T)|B_t = x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, q(T-t, x, y)\, dy\,.$$

Si l'on note $u(t,x;f)$ la fonction

$$u(t,x;f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)q(t,x,y)\,dy = E(f(B_t+x)) \tag{2.1}$$
$$= E(f(B_{t+s})|B_s=x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(t,y)dy \tag{2.2}$$

cette fonction vérifie (utiliser (2.1), l'équation backward et le théorème de dérivation sous le signe intégral)

$$\begin{cases} u(0,x;f) &= f(x) \\ -\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour calculer $E(f(B_T))$, il suffit de résoudre l'équation aux dérivées partielles (2.3) et de remarquer que $E(f(B_T)) = u(T,0;f)$. On obtient aussi $E(f(B_T+x)) = u(T,x;f)$ De plus (utiliser (2.2) et le théorème de dérivation sous le signe intégral)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x;f) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x+y)g(t,y)dy = u(t,x;f'') = E(f''(B_t+x))\,. \tag{2.4}$$

On peut ainsi écrire

$$E(f(B_T+x)) - f(x) = u(T,x;f) - u(0,x;f) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(s,x;f)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x;f)\,ds$$

soit

$$E(f(B_T+x)) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^T E(f''(B_s+x))\,ds\,.$$

Cette méthode sera généralisée dans le prochain chapitre en utilisant le lemme d'Itô.

La fonction $v(t,x;f) = u(T-t,x;f)$ est solution de

$$\begin{cases} v(T,x) &= f(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

et vérifie $v(0,x;f) = E(f(B_T+x))$.

Proposition 2.3.4 *Si f est une fonction de classe C_b^1 en temps et C_b^2 en espace,*

$$E(f(t,x+B_t)) = f(0,x) + \int_0^t E[\frac{1}{2}f''_{xx}(s,x+B_s) + f'_t(s,x+B_s)]\,ds$$

Démonstration: Soit $u(t,x;f) = E(f(t,x+B_t))$. Il est facile de vérifier, en utilisant (2.3) et (2.4) que

$$\frac{du}{dt}(t,x;f) = u(t,x;\partial_t f) + \frac{1}{2}u(t,x;\partial_{xx}f)$$

En effet, on écrit $u(t,x;f) = F(t,t,x;f)$ avec $F(s,t,x;f) = E(f(s,x+B_t))$. Il reste à utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées:

$$\frac{du}{dt}(t,x;f) = \frac{\partial F}{\partial s}(t,t,x;f) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,t,x;f) = E(\frac{\partial f}{\partial t}(s,x+B_t)) + \frac{1}{2}u(t,x;\partial_{xx}f)$$

En intégrant par rapport à t

$$u(t,x;f) - u(0,x;f) = \int_0^t E[f_t(s,x+B_s) + \frac{1}{2}\partial_{xx}f(s,x+B_s)]\,ds$$

□

On peut généraliser ce résultat au processus X défini par $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$. La fonction $u(t,x;f) = E(f(t, x + \mu t + \sigma B_t))$ vérifie

$$\frac{du}{dt}(t,x;f) = \frac{1}{2}\sigma^2 u(t,x;\partial_{xx} f) + \mu u(t,x;\partial_x f) + u(t,x;\partial_t f)$$

et $u(0,x;f) = f(x)$. On définit $\mathcal{L}$ le générateur du processus par l'opérateur

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}\sigma^2\, \partial_{xx} f + \mu\, \partial_x f$$

Proposition 2.3.5 *Si f est une fonction de classe C_b^1 en temps et C_b^2 en espace,*

$$E(f(t, x + \mu t + \sigma B_t)) = f(0,x) + \int_0^t E[\mathcal{L} f(s, x + \mu s + \sigma B_s) + \partial_t f(s, x + \mu s + \sigma B_s)]\, ds$$

Théorème 2.3.2 *Si u est telle que $\mathcal{L}u = 0$ alors $u(t, B_t)$ est une martingale.*

Démonstration: Les accroissements du Brownien sont indépendants.

$$E(u(t,B_t)|\mathcal{F}_s) = E(u(s+t-s, x + B_{t-s})|_{x=B_s} = E(u_{s,x}(t-s, B_{t-s}))|_{x=B_s}$$

avec $u_{s,x}(t,y) = u(s+t, x+y)$. On a alors

$$E(u_{s,x}(t-s, B_{t-s})) = u_{s,x}(0,0) + \int_0^t \mathcal{L} u_{s,x}(w, B_w) dw$$

Par hypothèse, $\mathcal{L}(u) = 0$ donc $\mathcal{L}u_{s,x} = 0$. Il en résulte

$$E(u(t,B_t)|\mathcal{F}_s) = u_{s,x}(0,0)|_{x=B_s} = u(s, B_s)$$

et le théorème est établi. Nous verrons ce résultat important dans un contexte plus général en application du lemme d'Itô. □

2.3.6 Trajectoires

Nous admettons les résultats suivants:
Les trajectoires du mouvement Brownien sont continues.
Les trajectoires du mouvement Brownien sont p.s. "nulle part différentiables".

Théorème 2.3.3 *Soit n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n} t$ pour j variant de 0 à 2^n. Alors $\sum_{j=1}^{2^n} [B(t_j) - B(t_{j-1})]^2 \to t$ quand $n \to \infty$, la convergence ayant lieu en moyenne quadratique et p.s..*

Démonstration: Soit $Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} [B(t_j) - B(t_{j-1})]^2$. On a $E(Z_t^n) = t$. On doit montrer que $E((Z_t^n - t)^2) \to 0$, soit $\mathrm{Var}(Z_t^n) \to 0$ ce qui se déduit de

$$\mathrm{Var}(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} \mathrm{Var}[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2 = \sum_{j=1}^{2^n} 2\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{n+1}\frac{t^2}{2^{2n}}$$

(Nous avons utilisé que si X est de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, la variance de X^2 est $2\sigma^4$). On en déduit que $E(\sum_{n=1}^\infty (Z_t^n - t)^2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{t}{2^n} < \infty$. D'où $\sum_{n=1}^\infty (Z_t^n - t)^2 < \infty$ et le terme général converge p.s. vers 0. □

Proposition 2.3.6 *Soit σ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ caractérisée par $0 = t_0 \le t_1 \ldots \le t_n = t$. Soit V_t la variation de la trajectoire du Brownien sur $[0,t]$ définie par $V_t(\omega) = \sup_\sigma \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|$. Alors $V_t(\omega) = \infty$ p.s.*

DÉMONSTRATION: $\sup_\sigma \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \geq \sup_n \sum_{k=0}^{2^n} |Y_k|$ avec $Y_k = B_{t^*_{k+1}} - B_{t^*_k}$ où les points sont choisis comme précédemment: $t^*_k = \frac{k}{2^n} t$. On peut majorer Z^n_t :

$$Z^n_t \leq (\sup_k |B_{t^*_{k+1}} - B_{t^*_k}|) \sum_{k=0}^{2^n} |Y_k| \, .$$

Quand $n \to \infty$, le terme $\sup |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|$ tend p.s. vers 0, par continuité uniforme des trajectoires sur $[0, t]$. Le terme $\sum_{k=0}^{2^n} |Y_k|$ est croissant en n et ne peut avoir de limite finie sans que Z^n_t ne converge vers 0, ce qui n'est pas le cas. □

2.3.7 Propriétés de martingale

a. Cas du Brownien

Proposition 2.3.7 *Le processus B est une martingale. Le processus $(B^2_t - t, t \geq 0)$ est une martingale.*
Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X^2_t - t, t \geq 0)$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.

DÉMONSTRATION: Nous ne démontrons que la partie directe. La réciproque est plus difficile à établir (Voir Revuz-Yor) mais très utile.
L'idée est d'utiliser l'indépendance des accroissements pour calculer les espérances conditionnelles, et d'utiliser la propriété $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ quand X et $\mathcal{G}$ sont indépendantes. Soit $s \leq t$.

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + E(B_s|\mathcal{F}_s) = 0 + B_s$$

De même $E((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ et

$$E((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) = E(B^2_t + B^2_s - 2B_tB_s|\mathcal{F}_s) = E(B^2_t|\mathcal{F}_s) + B^2_s - 2B_sE(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B^2_t|\mathcal{F}_s) - B^2_s$$

On obtient alors

$$E(B^2_t - t|\mathcal{F}_s) = B^2_s - s \, .$$

□

Proposition 2.3.8 *Soit B_1 et B_2 deux MB indépendants. Le produit B_1B_2 est une martingale.*

DÉMONSTRATION: On peut le faire en utilisant le lemme suivant : Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus, X et Y deux v.a. telles que $X \vee \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes ainsi que $Y \vee \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$. Alors $E(XY|\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) = E(X|\mathcal{F})E(Y|\mathcal{G})$. Une autre méthode est d'utiliser que $\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_2)$ est un processus gaussien de covariance $t \wedge s$, donc un mouvement Brownien et par suite $\frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 - t$ est une martingale. Comme

$$\frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 - t = \frac{1}{2}(B^2_1(t) - t) + \frac{1}{2}(B^2_2(t) - t) + B_1(t)B_2(t) \, ,$$

le résultat suit. □

Définition 2.3.1 *On dit que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement Brownien si B et $(B^2_t - t, t \geq 0)$ sont des $(\mathcal{G}_t)$-martingales.*

Les propriétés données dans la définition 2.1.1. sont vérifiées. Si B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement Brownien, c'est bien sûr un MB pour sa propre filtration.

Proposition 2.3.9 *Pour tout λ réel, le processus* $(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ *est une martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que* $(\exp(\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ *est une martingale, pour tout λ réel, le processus X est un brownien.*

DÉMONSTRATION: Par indépendance

$$E(\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\}|\mathcal{F}_s) = E(\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\})$$

L'espérance du second membre se calcule comme une transformée de Laplace d'une variable gaussienne. On trouve

$$E(\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\}) = 1$$

et

$$E(\exp\{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}|\mathcal{F}_s) = \exp\{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s\}$$

La réciproque, facile, utilise la caractérisation des v.a. gaussiennes au moyen de leur transformée de Laplace. □

b. Généralisation

Proposition 2.3.10 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *et B un $(\mathcal{F}_t)$-brownien sur cet espace. Si $X_t = \mu t + \sigma B_t$, alors, pour tout β réel,* $(\exp(\beta X_t - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)\, t), t \geq 0)$ *est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que* $(\exp(\beta X_t - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)\, t), t \geq 0)$ *est une $\mathcal{F}_t$ -martingale, il existe un $\mathcal{F}_t$-brownien B tel que $X_t = \mu t + \sigma B_t$.*

DÉMONSTRATION: Nous savons que $(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ est une martingale. il reste à utiliser que $B_t = \dfrac{1}{\sigma}(X_t - \mu t)$ et de poser $\lambda = \beta\sigma$. □

2.3.8 Temps d'atteinte

a. Cas du Brownien

Proposition 2.3.11 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien et a un nombre réel. Soit*

$$T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}\,.$$

Alors T_a est un temps d'arrêt fini p.s. tel que $E(T_a) = \infty$ et pour $\lambda \geq 0$

$$E(\exp -\lambda T_a) = \exp(-|a|\sqrt{2\lambda})\,. \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION: La v.a. T_a est un temps d'arrêt. En effet, pour $a > 0$, on a

$$T_a = \inf\{t \geq 0; B_t \geq a\}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\{T_a \leq t\} = \{\sup_{s \leq t} B_s \geq a\} &= \{\forall \epsilon\, \exists s \in \mathbb{Q} : B_s > a - \epsilon\} \\ &= \left(\cap_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \cup_{s \leq t,\, s \in \mathbb{Q}} \{B_s > a - \epsilon\}\right)\,.\end{aligned}$$

La présence de $\mathbb{Q}$ est indispensable pour garder la dénombrabilité. L'égalité précédente montre que $\{T_a \leq t\}$ est obtenu à partir d'opérations dénombrables d'union et d'intersection d'éléments de $\mathcal{F}_t$, donc appartient à cette tribu.

Pour calculer la transformée de Laplace de la loi de T_a, soit $E(e^{-\lambda T_a})$, on utilise que $t \wedge T_a$ est un temps d'arrêt borné (par t) et le théorème d'arrêt de Doob:

$$\forall t\,,\ E[\exp(\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_a))] = 1$$

Lorsque $t \to \infty$, sur l'ensemble où T_a est fini on a $B_{t\wedge T_a} \to B_{T_a} = a$ et

$$\exp\left(\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_a)\right) \to \exp(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a)$$

Sur l'ensemble où T_a est infini, $B_{t\wedge T_a} \leq a$ et $(t \wedge T_a) = t \to \infty$, par suite

$$\exp\left(\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_a)\right) \to 0\,.$$

On obtient, après passage à la limite, en utilisant le théorème de Lebesgue dominé,

$$E(\mathbb{1}_{T_a<\infty} \exp(-\frac{\lambda^2}{2} T_a)) = \exp(-a\lambda)\,,$$

on en déduit que T_a est fini (faire $\lambda = 0$) et la transformée de Laplace de T_a. Pour obtenir $E(T_a)$, on dérive par rapport à λ et on fait $\lambda = 0$.

On pourrait aussi dire que pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, la martingale

$$\exp(\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_a))$$

est bornée (par $\exp(\lambda a)$) donc est uniformément intégrable et on applique le théorème d'arrêt avec $t = \infty$.

Pour $a < 0$, on peut remarquer que $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\} = \inf\{t \geq 0; W_t = -a\}$, avec $W = -B$. Il serait faux de conclure que $E(\exp -\lambda T_a) = \exp(-a\sqrt{2\lambda})$ pour tout a car, pour $a < 0$ et $\lambda > 0$, le membre de gauche est plus petit que 1 et celui de droite serait plus grand que 1. Il convient donc d'être vigilant en appliquant le théorème de Doob. □

Par inversion de la transformée de Laplace, on obtient la densité de T_a qui est, pour $a > 0$

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$$

On verra, plus loin, une autre méthode pour obtenir ce résultat.

Avec des méthodes analogues, on établit les résultats suivants. Soit $\widehat{T}_a = \inf\{t \geq 0; |B_t| = a\}$ avec $a > 0$

$$E(\exp -\lambda \widehat{T}_a) = \left[\cosh(a\sqrt{2\lambda})\right]^{-1}\,. \tag{2.7}$$

Si $a \leq 0 \leq b$ on a $P(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}$.

Si c et d sont des réels positifs et $T = T_c \wedge T_{-d}$ on a

$$E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T)\mathbb{1}_{T=T_c}] = \frac{\sinh(\lambda d)}{\sinh\ (\lambda(c+d))}$$

$$E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T)] = \frac{\cosh(\lambda(c-d)/2)}{\cosh(\lambda(c+d)/2)}\,.$$

b. Généralisation

Si $X_t = \mu t + B_t$ et $T_a^\mu = \inf\{t \geq 0; X_t = a\}$ on peut montrer, en utilisant la martingale $(\exp(\beta X_t - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)\,t), t \geq 0)$ que pour $\mu > 0, \lambda > 0$ (on pose $\lambda = (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)$)

$$E(\exp -\lambda T_a^\mu) = \exp(\mu a - |a|\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}). \tag{2.8}$$

On obtient $P(T_a < \infty)$ en faisant $\lambda = 0$. Cette quantité n'est égale à 1 que si μ et a sont de même signe. On donnera une autre démonstration au chapitre (6).

2.3.9 Brownien multidimensionnel

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(n)})^T$ un processus n-dimensionnel (l'exposant ^{T} note la transposition d'un vecteur). On dit que B est un Brownien multidimensionnel si les processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des browniens indépendants. C'est un processus à accroissements indépendants. Pour chaque (a, b), le processus $aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)}$ est un processus gaussien. Il est facile de vérifier que $B_t \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)})$ est un MB (Calculer son espérance et sa covariance).
Si B est un brownien n-dimensionnel, on a $E(B_t^T B_s) = n(s \wedge t)$.
Le processus n-dimensionnel B est un mouvement Brownien si et seulement si les processus $B^{(i)}$ et $B^{(i)}B^{(j)} - \delta_{i,j}t$ sont des martingales (avec $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.
Si B_1 et B_2 sont deux Browniens à valeurs réelles indépendants, le produit B_1B_2 est une martingale.
On dira que les mouvements Browniens à valeurs réelles B_1 et B_2 sont corrélés de coefficient de corrélation ρ si $B_1(t)B_2(t) - \rho t$ est une martingale. On " décorrele" les MB en introduisant le processus B_3 défini par $B_3(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B_2(t) - \rho B_1(t))$. Ce processus est une martingale; en écrivant

$$\begin{aligned}(B_3(t))^2 - t &= \frac{1}{1-\rho^2}[(B_2(t))^2 + \rho^2(B_1(t))^2 - 2\rho B_2(t)B_1(t) - t(1-\rho^2)]\\ &= \frac{1}{1-\rho^2}[(B_2(t))^2 - t + \rho^2[(B_1(t))^2 - t] - 2\rho[B_2(t)B_1(t) - \rho t]\end{aligned}$$

on montre que $(B_3(t))^2 - t$ est une martingale, d'où B_3 est un MB. On peut montrer que B_3 est indépendant de B_1, nous donnerons une démonstration plus tard. Il est facile de vérifier que le produit B_1B_3 est une martingale. Dans ce cas, il existe un Brownien $B^{(3)}$, indépendant de $B^{(2)}$ tel que $B^{(1)} = \rho B^{(2)} + \sqrt{1-\rho^2}B^{(3)}$ et, pour tout (a, b) le processus $B_t \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}}(aB^{(1)} + bB^{(2)})$ est un mouvement Brownien. .

2.4 Intégrale de Wiener

2.4.1 Définition

On note $L^2(I\!\!R^+)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) fonctions boréliennes f de $I\!\!R^+$ dans $I\!\!R$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2\, ds < \infty$.
C'est un espace de Hilbert pour la norme $||f||_2 = \left(\int_0^\infty f^2(s)\, ds\right)^{1/2}$.

a. Fonctions en escalier

Pour $f = 1\!\!1_{]u,v]}$, on pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = B(v) - B(u)$.
Soit f une fonction en escalier, on pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))$.

La variable aléatoire $I(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$. En effet, $I(f)$ est gaussienne car le processus B est gaussien, centrée car B est centré. De plus

$$\text{Var}(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 \text{Var}\,(B(t_i) - B(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds\,.$$

L'intégrale est linéaire : $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Si f et g sont des fonctions en escalier $E(I(f)\,I(g)) = \int_{R^+} f(s)\,g(s)\,ds$. En effet

$$\begin{aligned}\text{Var}\,(I(f+g)) &= = \text{Var}[I(f)+I(g)] = \text{Var}\,(I(f)) + \text{Var}\,(I(g)) + 2E(I(f)I(g)) \\ &= \int_0^\infty (f+g)^2(s)ds + \int_0^\infty f^2(s)ds + \int_0^\infty g^2(s)ds + 2\int_0^\infty f(s)g(s)ds\end{aligned}$$

b. Cas général

On montre en analyse que, si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge (dans $L^2(\mathbb{R}^+)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^\infty |f_n - f|^2(x)\,dx \to_{n\to\infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a. $F_n = \int_0^\infty f_n(s)\,dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (en effet $||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \to_{n,m\to\infty} 0$), donc elle est convergente. Il reste à vérifier que la limite ne dépend que de f et non de la suite f_n choisie (Voir les détails dans Revuz-Yor). On pose

$$I(f) \overset{def}{=} \int_0^\infty f(s)\,dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(s)\,dB_s$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$.
On dit que $I(f)$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de f par rapport à B.
Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les v.a. $\int_0^\infty f(s)dB_s$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

2.4.2 Propriétés

L'application $f \to I(f)$ est linéaire et isométrique de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Omega)$: la linéarité signifie que $I(f+g) = I(f) + I(g)$ et l'isométrie que la norme de $I(f)$ est égale à la norme de f. La norme de $I(f)$ est la norme $L^2(\Omega)$ définie par $||I(f)||^2 = E(\,(I(f))^2\,)$, la norme de f est la norme $L^2(\mathbb{R}^+)$, soit $||f||^2 = \displaystyle\int_0^\infty f^2(s)ds$.
La propriété d'isométrie implique $E\,(I(f)\,I(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)\,ds$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. La variable $I(f)$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s)ds$ appartenant à l'espace gaussien engendré par $(B_t, t \geq 0)$ et elle vérifie pour tout t

$$E\left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s\right) = \int_0^t f(s)ds\,. \tag{2.9}$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de remarquer que $E\left(B(t)\int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s\right) = E\left(\int_0^t dB_s \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s\right)$.
□

La propriété (2.9) est en fait une caractérisation de l'intégrale stochastique au sens où si pour tout t, $E(ZB_t) = \int_0^t f(s)ds$, alors $Z = \int_0^\infty f(s)dB_s$.

2.4.3 Processus lié à l'intégrale stochastique

On définit pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ la variable aléatoire $\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(s)f(s)dB_s$.
On peut de la même façon définir $\int_0^t f(s)dB_s$ pour f telle que $\int_0^T |f(s)|^2\,ds < \infty$, $\forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions. On notera L^2_{loc} cette classe de fonctions.

Théorème 2.4.1 *Soit $f \in L^2_{loc}$ et $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$.*
a) Le processus M est une martingale continue, la v.a. M_t est d'espérance 0 *et de variance* $\int_0^t f^2(s)\,ds$.
b) Le processus M est un processus gaussien centré de covariance $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)\,du$ à accroissements indépendants.
c) Le processus $(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\,ds\,,\, t \ge 0)$ est une martingale.
d) Si f et g sont dans L^2_{loc}, on a $E(\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s g(u)dB_u) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du$.

DÉMONSTRATION: On commence par le cas où la fonction f est étagée et on passe à la limite. Pour vérifier que M est une martingale, on montre que

$$0 = E(M_t - M_s|\mathcal{F}_s) = E(\int_s^t f(u)dB_u|\mathcal{F}_s) \tag{2.10}$$

pour $f = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}\mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}$.
Supposons que $t_i < s < t \le t_{i+1}$. Dans ce cas $E(\int_s^t f(u)dB_u|\mathcal{F}_s) = f_i E((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)$ et (2.10) est vérifiée.
Supposons que $t_i < s \le t_{i+1} \le t_j < t \le t_{j+1}$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
E(\int_s^t f(u)dB_u|\mathcal{F}_s) &= E(f_j(B_t - B_{t_j}) + \sum_{k=i+1}^{j-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + f_i(B_{t_{i+1}} - B_s)|\mathcal{F}_s) \\
&= f_j E(B_t - B_{t_j}|\mathcal{F}_s) + \sum_{k=i+1}^{j-1} f_k E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|\mathcal{F}_s) + f_i E(B_{t_{i+1}} - B_s|\mathcal{F}_s) = 0
\end{aligned}$$

Les autres cas sont analogues. En particulier

$$\begin{aligned}
E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) &= E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) = E\left(\left(\int_s^t f(u)dB_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right) \\
&= E(\sum f(t_k)(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t})^2|\mathcal{F}_s) = \sum f^2(t_k)((t_{k+1}\wedge t) - (t_k \wedge t))
\end{aligned}$$

□

2.4.4 Intégration par parties

Théorème 2.4.2 *Si f est une fonction de classe C^1,*

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s\,ds.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit, d'après (2.9), de vérifier que $E[B_u \int_0^t f(s)\,dB_s] = E(B_u[f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s\,ds])$. Le premier membre vaut $\displaystyle\int_0^{t\wedge u} f(s)ds$, on calcule le second au moyen des deux égalités $E(B_u f(t)B_t) = f(t)(t\wedge u), E(B_u \int_0^t f'(s)B_s\,ds) = \displaystyle\int_0^t f'(s)(s\wedge u)ds$. L'égalité résulte alors de l'application de la formule d'intégration par parties classique pour calculer des expressions du type $\int_0^b sf'(s)ds$. □

On peut aussi écrire cette formule

$$d(B_t f(t)) = f(t)dB_t + b_t f'(t)dt\,.$$

2.5 Exemples

2.6 Le brownien géométrique

Définition 2.6.1 *Soit B un mouvement Bownien, b et σ deux constantes. Le processus*

$$X_t = X_0 \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\}$$

est appellé Brownien géométrique.

Ce processus est aussi appellé processus"log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \left\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} t + \sigma B_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale. On a immédiatement

Proposition 2.6.1 *Le processus $X_t e^{-bt}$ est une martingale.*

En écrivant

$$X_t = X_s \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\}$$

on établit que X est Markovien. Le caractère Markovien de X et les propriétés du MB permettent de calculer les espérances conditionnelles:

$$\begin{aligned}
E(X_t|\mathcal{F}_s) &= X_s E(\exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\}|\mathcal{F}_s) \\
&= X_s \exp(b(t-s)) E(\exp\{(-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\}|\mathcal{F}_s) \\
&= X_s \exp(b(t-s)) E(\exp\{(-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma B_{t-s}\}) \\
&= X_s e^{b(t-s)} = E(X_t|X_s)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété de martingale de l'exponentielle du MB. Remarquons que nous avons utilisé que $X_t \stackrel{loi}{=} X_s \tilde{X}_{t-s}$ avec $\tilde{X}_{t-s}$ indépendant de X_t et de même loi que X_{t-s}.

De la même façon, en notant G une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} E(f(X_t)|\mathcal{F}_s) &= E(f(X_t)|X_s) = E(f(x\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma(B_t-B_s)\})_{x=X_s} \\ &= E(f(x\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma G\sqrt{t-s}\})_{x=X_s} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(X_s\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma y\sqrt{t-s}\})q(1,0,y)dy\,. \end{aligned}$$

Ce processus est très souvent utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier. Le rendement de l'actif entre deux dates est mesuré par la différence des logarithmes des cours et est donné par la variable gausienne

$$\left\{b-\frac{1}{2}\sigma^2\right\}(t-s)+\sigma(B_t-B_s)\,.$$

Il est facile de calculer les moments d'un Brownien géométrique; par exemple $E(X_t) = X_0 e^{bt}$ (Utiliser, par exemple, la propriété de martingale) . Pour calculer le moment d'ordre 2, il suffit de faire les transformations évidentes suivantes

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= X_0^2 E(\exp\{(2b-\sigma^2)t+2\sigma B_t\}) = X_0^2 E(\exp\{(2b+\sigma^2)t-\frac{1}{2}(2\sigma)^2 t+(2\sigma)B_t\}) \\ &= X_0^2\exp[(2b+\sigma^2)t] \end{aligned}$$

On en d'eduit $\mathrm{Var} X_t = x^2 e^{2bt}(e^{\sigma^2 t}-1)$.

Le ratio de Sharpe est

$$\frac{E(X_t)-x}{\sqrt{\mathrm{Var} X_t}}$$

2.6.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Théorème 2.6.1 *L'équation de Langevin*

$$V_t = -\int_0^t aV_s ds + \sigma B_t + V_0, \tag{2.11}$$

a pour unique solution

$$V_t = e^{-ta}V_0 + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s. \tag{2.12}$$

On écrit l'équation (2.11) sous forme condensée

$$dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t, \quad V_0 \text{ donné}$$

les données du problème sont la variable aléatoire V_0, le Brownien B et les constantes a et σ.

Démonstration: Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ le processus défini par le second membre de (2.12). Nous allons vérifier que X est solution de l'équation (2.11). En utilisant la formule d'intégration par parties, on transforme l'intégrale

$$\int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s = \sigma e^{-at}\int_0^t e^{sa}dB_s = \sigma e^{-at}[e^{at}B_t - a\int_0^t e^{sa}B_s ds)$$

On en déduit que $X_t = e^{-ta}V_0 + \sigma B_t - \sigma e^{-at} a\int_0^t e^{sa}B_s ds$. On s'attache ensuite au calcul de

$$\int_0^t X_s ds = \int_0^t e^{-sa}V_0 ds + \sigma\int_0^t B_s ds - a\sigma\int_0^t e^{-as}\big(\int_0^s e^{ua}B_u du\big)\, ds$$

L'intégrale double qui apparait au second membre est

$$\int_0^t due^{ua}B_u \int_u^t dse^{-as} = \frac{1}{a}[\int_0^t B_s ds - e^{-at}\int_0^t e^{-as}ds]$$

ce qui conduit à

$$a\int_0^t X_s ds = V_0(1-e^{-at}) + \sigma a \int_0^t e^{a(s-t)}B_s\, ds = -X_t + \sigma B_t + V_0$$

d'où X vérifie (2.11). □

On peut également poser $Y_t = e^{-at}V_t$ et appliquer la formule d'intégration par parties

$$dY_t = e^{-at}dV_t - ae^{-at}V_t dt = e^{-at}\sigma dB_t$$

dont la solution est $Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{-as}\sigma dB_s$.

Proposition 2.6.2 *Si V_0 est une v.a.r. gaussienne indépendante du brownien (en particulier si V_0 est une constante), le processus V, appellé processus d'Ornstein-Uhlenbeck est gaussien d'espérance et de covariance*

$$E(V_t) = e^{-ta}E(V_0),$$

$$\operatorname{cov}[V_s, V_t] = e^{-sa}ve^{-ta} + \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma^2 e^{-(t-u)a}\, du\,,\ s \le t$$

si v désigne la variance de V_0.
Le processus V est un processus de Markov.

Démonstration: En effet, d'aprés (2.12), $E(V_t) = e^{-ta}E(V_0)$ car l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle (la fonction e^{sa} est de carré intégrable sur tout intervalle fini). Toujours d'après (2.12),

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}[V_s, V_t] &= \operatorname{cov}(V_0 e^{-as} + \sigma e^{-as}\int_0^s e^{au}dB_u\,,\, V_0e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{au}dB_u) \\
&= \operatorname{cov}(V_0e^{-as}\,,\, V_0e^{-at}) + \sigma^2 e^{-as}e^{-at}\operatorname{cov}(\int_0^s e^{au}dB_u\,,\, \int_0^t e^{au}dB_u\,) \\
&= ve^{-as}e^{-at} + \sigma^2 e^{-as}e^{-at}\int_0^{s\wedge t} e^{2au}\, du\,,
\end{aligned}$$

Le caractère gaussien[2] est facile à établir.
L'unicité se montre en vérifiant que si V_1 et V_2 sont solutions, $V_1 - V_2$ est solution d'une équation différentielle déterministe. □

En particulier, si V_0 est une constante ($v = 0$)

$$\operatorname{cov}[V_s, V_t] = \frac{\sigma^2}{2a}e^{-a(s+t)}(e^{2as} - 1)$$

et $\operatorname{Var}(V_t) = \dfrac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$.

En écrivant $V_s = e^{-sa}V_0 + \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma dB_u$ et $V_s e^{(s-t)a} = e^{-ta}V_0 + \int_0^s e^{-(t-u)a}\sigma dB_u$ on en déduit, pour $s \le t$

$$V_t = V_s e^{-(t-s)a} + \int_s^t e^{-(t-u)a}\sigma dB_u$$

[2] "An interesting study in the laws of probability." H. Poirot, Sad Cypress, A. Christie.

ou encore

$$V_{t+s} = V_s e^{-ta} + \int_0^t e^{-(t-u)a} \sigma d\widetilde{B}_u$$

où le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_u = B_{s+u} - B_s$ est un MB indépendant de $\mathcal{F}_s$ (donc de V_s). En particulier $E(f(V_{t+s})|\mathcal{F}_s) = E(f(V_s e^{-ta} + Y)|\mathcal{F}_s) = E(f(V_{t+s})|V_s)$ (dans cette égalité Y est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_s$) ce qui établit le caractère markovien de V. Le calcul explicite peut se faire en utilisant que

$$E(f(V_s^{(x)} e^{-ta} + Y)|\mathcal{F}_s) = \Psi(V_s^{(x)})$$

avec $\Psi(y) = E(f(ye^{-ta} + Y)) = E(f(V_t^{(y)}))$ où $V^{(x)}$ est la solution de l'équation de valeur initiale x, soit $V_t^{(x)} = e^{-ta}x + \int_0^t e^{-(t-s)a} \sigma dB_s$.

Proposition 2.6.3 *La variable aléatoire* $\int_0^t V_s ds$ *est une v.a. gaussienne, de moyenne* $V_0 \frac{1-e^{-at}}{a}$ *et de variance* $-\frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(t - \frac{1-e^{-at}}{a})$.

DÉMONSTRATION: Voir le paragraphe suivant. □

2.6.2 Modèle de Vasicek

Une généralisation du modèle précédent est l'équation

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t. \tag{2.13}$$

Sous cette forme, elle est utilisée pour étudier l'évolution des taux d'intérêt (modèle de Vasicek). La forme explicite de la solution est

$$r_t = (r_0 - b)e^{-at} + b + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u.$$

(Il suffit de poser $r_t - b = V_t$, le processus V est alors solution de l'équation de Langevin. L'égalité

$$r_t = (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u, \; s \leq t$$

établit le caractère Markovien de r. Si r_0 est une constante, r_t est une variable gaussienne de moyenne $(r_0 - b)e^{-at} + b$, et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$. En particulier, ce n'est pas une variable positive. Le processus r est gaussien de covariance $Cov(r_s, r_t) = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)}(e^{2as} - 1)$ pour $s \leq t$. L'expression explicite de $(r_t, t \geq s)$ en fonction de r_s montre que, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, la v.a. r_{t+s} est variable gaussienne de moyenne $(r_s - b)e^{-at} + b$, et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$. De même, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, le processus $(r_{t+s}, t \geq 0)$ est un processus de Vasicek de paramètres (a, b, σ) et de condition initiale r_s.
On en déduit

Proposition 2.6.4 *Pout $s < t$, l'espérance et le variance conditionnelle de r sont*

$$\begin{aligned} E(r_t|r_s) &= (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b \\ var_s\ (r_t) &= \frac{\sigma 2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) \end{aligned}$$

Proposition 2.6.5 *La variable $\int_0^t r_s ds$ est une variable gaussienne de moyenne*

$$E(\int_0^t r_s ds) = bt + (r_0 - b)\frac{1 - e^{-at}}{a}$$

et de variance $-\frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(t - \frac{1-e^{-at}}{a})$.

DÉMONSTRATION: Par définition $r_t = r_0 + abt - a\int_0^t r_s ds + \sigma B_t$. D'où

$$\int_0^t r_s ds = \frac{1}{a}[-r_t + r_0 + abt + \sigma B_t] = \frac{1}{a}[-(r_0 - b)e^{-at} - b - \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u + r_0 + abt + \sigma B_t].$$

Plus généralement, on a, pour $t \geq s$

$$E(\int_s^t r_u\, du | \mathcal{F}_s) = b(t-s) + (r_s - b)\frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a} = M(t,s)$$

$$\mathrm{Var}_s(\int_s^t r_u\, du) = -\frac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-a(t-s)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(t - s - \frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a}) = V(t,s)$$

où Var_s désigne la variance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_s$.
La variable $\int_s^t r_u\, du$ est une variable gaussienne dont on connait, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ l'espérance et la variance. On en déduit

$$E(\exp - \int_s^t r_u\, du\, |\mathcal{F}_s) = \exp(-M(t,s) + \frac{1}{2}V(t,s))\,.$$

Ces calculs sont utiles pour valoriser des zéro-coupons en finance : si $B(t,T)$ est la valeur d'un ZC de maturité T, on a $B(t,T) = E(\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)|\mathcal{F}_t)$ et

$$B(t,T) = \exp\left[b(t-s) + (r_s - b)\frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(t-s)})^2 + \frac{\sigma^2}{2sa^2}(t - s - \frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a})\right]$$

Chapter 3

INTÉGRALE STOCHASTIQUE

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

3.1 Définition

On veut généraliser[1] l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus stochastiques θ.

3.1.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$, soit $\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) \mathbb{1}_{]t_j, t_{j+1}]}(s)$.
On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

On a $E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = E[\int_0^\infty \theta_s^2 \, ds]$.

On obtient

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)).$$

ce qui établit la continuité de l'application $t \to \int_0^t \theta_s dB_s$. Si $T_j, 0 \leq T_0 \leq T_1 \ldots \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, et si $\theta_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \mathbb{1}_{]T_j, T_{j+1}]}(s)$ où θ_j est une suite de variables aléatoires telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{T_j}$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$, on définit alors

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(T_{j+1} \wedge t) - B(T_j \wedge t)).$$

3.1.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé.

[1] "Je marche vers mon but, je vais mon chemin; je sauterai par dessus les hésitants." Ainsi parlait Zarathoustra. Nietzsche.

On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times I\!\!R^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 \stackrel{def}{=} E[\int_0^\infty \theta_t^2 dt] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega \times I\!\!R^+)$ si $\|\theta - \theta_n\|^2 \to 0$ quand $n \to \infty$.
L'application $\theta \to ||\theta||$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ pour tous les processus θ de Γ: on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n$ où $\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}_j^n 1_{]t_j,t_{j+1}]}$, avec $\tilde{\theta}_j^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $L^2(\Omega \times I\!\!R)$.
L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}_j^n (B(t_{j+1}) - B(t_j))$ dont l'espérance est 0 et la variance $E[\sum_j \tilde{\theta}_j^2 (t_{j+1} - t_j)]$.

On a alors $E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0$ et $E\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s\right)^2 = E(\int_0^\infty \theta_s^2\, ds)$.

On note $\int_0^t \theta_s dB_s \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \theta_s 1\!\!1_{[0,t]}(s)\, dB_s$. Si θ est étagé $\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_i \theta_i (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.
Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1\!\!1_{]0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta_s dB_s = \int_0^t \theta_s 1\!\!1_{]0,\tau]}(s) dB_s$$

3.2 Propriétés

On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega \times I\!\!R^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant $E(\int_0^t \theta_s^2(\omega) ds) < \infty\,, \forall t$.

3.2.1 Linéarité.

Soit a et b des constantes et $(\theta^i; i = 1, 2)$ deux processus de Λ. On a

$$\int_0^t \left(a\theta_s^1 + b\theta_s^2\right) dB_s = a \int_0^t \theta_s^1 dB_s + b \int_0^t \theta_s^2 dB_s$$

3.2.2 Propriétés de martingale

Proposition 3.2.1 *Soit* $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$*, où* $\theta \in \Lambda$.
a) Le processus M *est une martingale, à trajectoires continues.*
b) Soit $N_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$*. Le processus* $(N_t\,, t \geq 0)$ *est une martingale.*

Démonstration: Toutes ces propriétés se démontrent pour des processus étagés, puis pour les processus de Λ par passage à la limite. □ La propriété de martingale s'écrit

$$E\left(\int_0^t \theta_u dB_u \,|\mathcal{F}_s\right) = \int_0^s \theta_u dB_u, \quad \forall t \geq s,$$

ou

$$E\left(\int_s^t \theta_u dB_u \,|\mathcal{F}_s\right) = 0$$

et implique en particulier que $E(\int_s^t \theta_u dB_u) = 0$.

La propriété b) équivaut à $E\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s\right]$.

Si l'on veut définir M_t pour $t \leq T$, il suffit de demander que $\theta \in L^2(\Omega \times [0,T])$, c'est à dire $E(\int_0^T \theta_t^2 dt) < \infty$ et que θ soit adapté. Sous cette condition, $(M_t, t \leq T)$ est encore une martingale.

Corollaire 3.2.1 *L'espérance de M_t est nulle et sa variance est égale à $\int_0^t E\{\theta_s\}^2 ds$.*
Soit $\phi \in \Lambda$. $E\left(\int_0^t \theta_s dB_s \int_0^t \phi_s dB_s\right) = E\left(\int_0^t \theta_s \phi_s ds\right)$.
Si $M_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$ et $M_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$, le processus

$$M_t(\theta)M_t(\varphi) - \int_0^t \theta_s \varphi_s ds$$

est une martingale.

DÉMONSTRATION: Il suffit de remarquer que $\int_0^t (\theta_s + \phi_s) dB_s$ et

$$\left(\int_0^t (\theta_s + \phi_s) dB_s\right)^2 - \int_0^t (\theta_s + \phi_s)^2 ds$$

sont des martingales. □

Proposition 3.2.2 *Soit τ un temps d'arrêt et θ un processus $\mathbf{F^B}$-adapté tel que $E\left(\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right) < \infty$. Alors $E\left(\int_0^\tau \theta_s dB_s\right) = 0$ et $E\left(\int_0^\tau \theta_s dB_s\right)^2 = E\left(\int_0^\tau \theta_s^2 d_s\right)$.*

Application: si $\theta = 1$ et $\tau = \inf\{t : B_t + \nu t = a\}$. Pour $a\nu > 0$, on a $E(\tau) < \infty$ et par suite $E(B_\tau) = 0 = a - \nu E(\tau)$.

3.2.3 Un exemple

Proposition 3.2.3 *Pour tout t on a* $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

DÉMONSTRATION: Par définition

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim \sum B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

L'égalité

$$2\sum_{i=0}^n B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

montre que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}[B_t^2 - \lim_n \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \frac{1}{2}[B_t^2 - t]$. □

3.2.4 Martingale locale

On peut définir $\int_0^t \theta_s \, dB_s$ pour des processus adaptés càglàd qui n'appartiennent pas nécessairement à $L^2(\Omega \times I\!R)$, mais qui vérifient pour tout t, $\int_0^t \theta^2(s,\omega)\, ds < \infty$ p.s. Dans ce cas M n'est pas une martingale mais une martingale locale et $E(M_t)$ peut être non nul. On utilise souvent qu'une martingale locale positive est une surmartingale (appliquer le lemme de Fatou).

3.2.5 Inégalité maximale

On a souvent besoin de majorations d'intégrales stochastiques. L'inégalité de Doob conduit à

Proposition 3.2.4 *Soit $\theta \in \Lambda$*

$$E([\sup_{s\leq T}\int_0^s \theta_u dB_u]^2) \leq 4E([\int_0^T \theta_u dB_u]^2) = 4\int_0^T E[\theta_u^2]du$$

3.3 Processus d'Itô

3.3.1 Définition

Un processus X est un processus d'Itô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s. pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t &=& b_t\, dt + \sigma_t\, dB_t, \\ X_0 &=& x \end{array} \right.$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.
L'écriture $dX_t = b_t\, dt + \sigma_t\, dB_t$ est unique (sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t\, dt + \sigma_t\, dB_t = \tilde{b}_t\, dt + \tilde{\sigma}_t\, dB_t$$

alors $b = \tilde{b}; \sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que $\int_0^t \sigma_s^2\, ds < \infty\, P.p.s.$ mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s\, ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie ets une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0 = 0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $E(A_t^2) = 0$.

3.3.2 Propriétés

Si σ appartient à Λ, on a $E(X_t) = E(X_0) + \int_0^t E(b_s)ds$, et

$$\forall t \geq s, \quad E(X_t\,|\mathcal{F}_s\,) = X_0 + \int_0^s b_u\, du + E(\int_s^t b_u\, du\,|\mathcal{F}_s\,) + \int_0^s \sigma_u\, dB_u = X_s + E(\int_s^t b_u\, du\,|\mathcal{F}_s\,).$$

Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in \Lambda$, le processus X est une martingale continue.
On verra que la réciproque est vraie: sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit $x + \int_0^t \phi_s dB_s$.

3.3.3 Intégrale par rapport à un processus d'Itô.

Soit X un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t\, dB_t$. On note (sous réserve de conditions d'intégrabilité)

$$\int_0^t \theta_s dX_s \stackrel{def}{=} \int_0^t \theta_s b_s ds + \int_0^t \theta_s \sigma_s dB_s.$$

3.3.4 Crochet d'un processus d'Itô

Soit Z une martingale continue de carré intégrable (telle que $E(\sup_t Z_t^2) < \infty$). On peut montrer (Voir Revuz-Yor) qu'il existe un processus croissant continu A tel que $(Z_t^2 - A_t, t \geq 0)$ est une martingale. Le processus A est appellé le "crochet oblique", ou le crochet de Z. On le note très souvent $A_t = \langle Z, Z \rangle_t$ ou encore $\langle Z \rangle_t$. IDÉE DE LA PREUVE

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= Z_0^2 + \sum (Z_{t\wedge t_{k+1}}^2 - Z_{t\wedge t_k}^2 \\ &= Z_0^2 + 2 \sum Z_{t\wedge t_{k+1}} (Z_{t\wedge t_{k+1}}^2 - Z_{t\wedge t_k} + \sum (Z_{t\wedge t_{k+1}} - Z_{t\wedge t_k}^2 \\ &\rightarrow Z_0^2 + 2 \int_0^t Z_s dZ_s + A_t \,. \end{aligned}$$

En utilisant ce vocabulaire cher aux probabilistes, nous avons établi que le crochet du Brownien est t et que le crochet de l'intégrale stochastique ($M_t = \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$) est $\displaystyle\int_0^t \theta_s^2 ds$.

Si M et N sont deux martingales locales continues, on définit leur crochet par $< M, N >_t = \frac{1}{2}(< M+N, M+N >_t - < M, M >_t - < N, N >_t)$. C'est l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - < M, N >$ est une martingale locale. Le crochet de deux intégrales stochastiques $X_t = x + \displaystyle\int_0^t H_s dB_s \,, Y_t = y + \int_0^t K_s dB_s$ est $< X, Y >_t = \displaystyle\int_0^t H_s K_s ds$.

Proposition 3.3.1 *Le crochet de deux martingales continues M et N est égal à la variation quadratique de ces processus*

$$< M, N >_t = \lim \sum_{i=1}^n (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \, (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

Il en résulte que si P et Q sont équivalentes, le crochet de M sous P et sous Q sont égaux. On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, ou si leur produit est une martingale.

Si M est une martingale locale continue, on a équivalence entre $E\langle M \rangle_t < \infty$ et $(M_s, s \leq t)$ est une martingale L^2 bornée.

On étend la définition du crochet aux processus d'Itô: si

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_t, i = 1, 2$$

sont deux processus d'Itô, leur crochet est par définition le crochet de leur partie martingale. Cela tient à la propriété 3.3.1.

Nous en déduisons une nouvelle forme de la définition de Browniens corrélés: deux Browniens sont corrélés si leur crochet est ρt. On définit le crochet du processus d'Itô X comme étant le crochet de sa partie martingale. Le crochet de X est $A_t = \langle X \rangle_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s^2 ds$. On caractérise le mouvement Brownien en disant que c'est une martingale continue d'espérance nulle et de crochet t.

3.4 Lemme d'Itô

Dans ce qui suit, X est un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t \, dB_t$. Nous renvoyons à Revuz-Yor pour la démonstration basée sur la formule de Taylor et la propriété 3.3.1 du crochet.

3.4.1 Première forme

Théorème 3.4.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Idée de la preuve

$$f(X_t) \quad = \quad f(X_0) + \sum f(X_{t_{k+1}})$$

$$f(X_{t_{k+1}}) - f(X_{t_k}) = f'(X_{t_k})(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + \frac{1}{2}f''(X_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 + o((X_{t_{k+1}} - X_{t_k}))$$

et on passe à la limite.

Sous forme condensée

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt,$$

ou encore

$$df(X_t) = f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t)\,\sigma_t^2 dt + f'(X_t)\sigma_t dB_t\,,$$

et en utilisant le crochet

$$df(X_t) = f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t)\,d\langle X\rangle_t + f'(X_t)\sigma_t dB_t.$$

La condition de bornitude des dérivées n'est exigée que pour l'existence des intégrales et pour la propriété de martingale de l'intégrale stochastique.
La formule est facile à mémoriser en notant sa ressemblance avec la formule de Taylor, sous la forme

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t \cdot dX_t,$$

et la règle de multiplication

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dB_t = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

Applications: 1.) Calcul de $E(f(X_t))$ et de $E(f(X_t)\,|\mathcal{F}_s\,)$ (si f' et σ sont bornés)

$$\begin{aligned} E(f(X_t)) &= E(f(X_0)) + E\left(\int_0^t [f'(X_s)b_s + \tfrac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2]ds\right) \\ &= E(f(X_0)) + \left(\int_0^t E[f'(X_s)b_s + \tfrac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2]ds\right). \end{aligned}$$

On retrouve, pour $X_t = B_t$, les résultats de la proposition 4, chapitre 2.
On obtient également

$$\begin{aligned} E(f(X_t)\,|\mathcal{F}_s\,) &= f(X_s) + E\left(\int_s^t [f'(X_u)b(u) + \tfrac{1}{2}f''(X_u)\sigma_u^2]du\,|\mathcal{F}_s\right) \\ &= f(X_s) + \int_s^t E[f'(X_u)b(u) + \tfrac{1}{2}f''(X_u)\sigma_u^2|\mathcal{F}_s]du. \end{aligned}$$

On prendra garde à ne pas intervertir intégrale et conditionnement pour des intégrales stochastiques.
2.) Calcul de $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.
3.) Calcul de $d(\exp X_t) = (\exp X_t)(dX_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt)$.
4.) Une solution de $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ est $S_t = xe^{X_t}$ avec $X_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$. On peut montrer que c'est la seule solution.(Voir Sect. **??**)).

Proposition 3.4.1 *Supposons que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s)\ dB_s$$

où b et σ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées et vérifiant

$$\forall x, \quad b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) = 0,$$

le processus $f(X)$ est une martingale.

Démonstration: Cela résulte directement de la formule d'Itô. □

La fonction f est souvent appellée fonction d'échelle. Elle est déterminée, à deux constantes près par les fonctions b et σ par

$$f(x) = \int_c^x \exp\left(-2\int_c^u b(v)/\sigma^2(v)\,dv\right) du\,.$$

On peut affaiblir la condition sur la bornitude des dérivées qui n'est utilisée que pour assurer l'existence des intégrales et la propriété de martingale.
L'opérateur $\mathcal{L}$ qui à $f \in C^2$ fait correspondre $\mathcal{L}f(x) = b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$ est le générateur infinitésimal de la diffusion X ou aussi le Dynkin. Il vérifie

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E_x(f(X_t)) - f(x)}{t}\,.$$

3.4.2 Fonction dépendant du temps

Théorème 3.4.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_t(s,X_s)ds + \int_0^t f'_x(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Ce que l'on note

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= [f'_t(t,X_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X_t)\sigma_t^2]dt + f'_x(t,X_t)dX_t \\ &= f'_t(t,X_t)dt + f'_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X_t)d\langle X\rangle_t \end{aligned}$$

Applications:
1.) Soit X un processus tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\ dB_s.$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sigma f'_x$ est bornée et

$$f'_t(t,x) + b(t,x)f'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f''_{xx}(t,x) = 0$$

alors $(f(t,X_t), t \geq 0)$ est une martingale.
L'opérateur $\mathcal{L}$ défini sur les fonctions de $C^{1,2}$ par

$$\mathcal{L}(f)(t,x) = b(t,x)f'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f''_{xx}(t,x)$$

est le générateur infinitésimal de la diffusion.
Si f est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sigma f'_x$ est bornée et

$$f'_t(t,x) + b(t,x) f'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x) f''_{xx}(t,x) = r f(t,x) \tag{3.1}$$

alors $(e^{-rt} f(t, X_t), t \geq 0)$ est une martingale. Dans ce cas, $e^{-rt} f(t, X_t) = E(e^{-rT} f(T, X_T)|\mathcal{F}_t)$.
Si f vérifie $f(T,x) = h(x)$ et est solution de (3.1), on a $e^{-rt} f(t, X_t) = E(e^{-rT} h(X_T)|\mathcal{F}_t)$.
2.) Soit X un processus (Brownien géométrique) tel que

$$dX_t = X_t(rdt + \sigma dB_t),$$

où r et σ sont des constantes. Alors le processus $(e^{-rt} X_t, t \geq 0)$ est une martingale. Il suffit de remarquer que $d(e^{-rt} X_t) = e^{-rt} X_t \sigma dB_t$ et de vérifier les conditions d'intégrabilité.
La solution de $dX_t = X_t(rdt + \sigma dB_t), X_0 = x$ où r et σ sont des constantes est $X_t = x \exp(rt + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$. On dit que X est un Brownien géométrique, ou processus log-normal.
3 .) Soit X un processus $dX_t = X_t(b(t)dt + \sigma(t)dB_t)$, où b et σ sont des fonctions (X est dit Brownien géométrique à coefficients déterministes). Alors le processus $(\exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right) X_t, t \geq 0)$ est une martingale.

3.4.3 Cas multidimensionnel

Théorème 3.4.3 *Soit* $(X_i, i = 1,2)$ *deux processus d'Itô tels que*

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_t.$$

Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$. *On a*

$$\begin{aligned} df(X_1(t), X_2(t)) &= f'_1(X_1(t), X_2(t))\, dX_1(t) + f'_2(X_1(t), X_2(t))\, dX_2(t) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f''_{11}\sigma_1^2(t) + 2f''_{12}\sigma_1(t)\sigma_2(t) + f''_{22}\sigma_2^2(t)\right)(X_1(t), X_2(t))\, dt \end{aligned}$$

où f'_i *désigne la dérivée par rapport à* $x_i, i = 1,2$ *et* f''_{ij} *la dérivée seconde par rapport à* x_i, x_j.

Sous forme condensée, on écrit

$$df(X_1, X_2)(t) = \sum_{i=1}^{2} f'_i(X_1(t), X_2(t))\, dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} f''_{ij}(X_1(t), X_2(t))\sigma_i\sigma_j\, dt$$

Intégration par parties, crochet

La formule d'Itô montre que $d[X_1X_2](t) = X_1(t)\, dX_2(t) + X_2(t)\, dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)\, dt$.
Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2, noté $< X_1, X_2 >$ et défini comme le processus à variation finie $< X_1, X_2 >_t = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$.

3.4.4 Cas du Brownien multidimensionnel.

Théorème 3.4.4 *Soit* $(X_i, i = 1,2)$ *deux processus d'Itô tels que*

$$dX_i(t) = b_i(t)\, dt + \sigma_i(t) dB_i(t)$$

où B_1 et B_2 sont deux Browniens indépendants. On a

$$df(X_1(t),X_2(t)) = f'_1(X_1(t),X_2(t))\,dX_1(t) + f'_2(X_1(t),X_2(t))\,dX_2(t)$$
$$+\frac{1}{2}\,[f''_{11}(X_1(t),X_2(t))\sigma_1^2(t) + f''_{22}(X_1(t),X_2(t))\sigma_2^2(t)]\,dt.$$

Cas général : Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus d'Itô multidimensionnel de composantes $(X_i(t), i \leq n)$, tel que $dX_t = u_t\,dt + v_t dB_t$, soit

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \dots \\ dX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & \dots & v_{1,p} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & \dots & v_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{p,1} & v_{p,2} & \dots & \dots & v_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \\ \dots \\ dB_p \end{bmatrix}$$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times R^n$ de classe $C^{1,2}$. Alors

$$df(t,X_t) = f'_t(t,X_t)dt + \sum_{i=1}^{n} f'_i(t,X_t)dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{ij}(t,X_t)dX_i(t)\,dX_j(t)$$

où l'on utilise les conventions d'écriture

$$dB_i dB_j = \delta_{ij}dt,\ dB_i dt = 0,\ dtdt = 0$$

Cas corrélé:

Théorème 3.4.5 *Soit $(X_i, i = 1, 2)$ deux processus d'Itô tels que*

$$dX_i(t) = b_i(t)\,dt + \sigma_i(t)dB_i(t)$$

où B_1 et B_2 sont deux Browniens de corrélation ρ. On a

$$df(X_1(t),X_2(t)) = f'_1(X_1(t),X_2(t))\,dX_1(t) + f'_2(X_1(t),X_2(t))\,dX_2(t)$$
$$+\frac{1}{2}\,[f''_{11}(X_1(t),X_2(t))\sigma_1^2(t) + 2f''_{12}(X_1(t),X_2(t))\rho\sigma_1(t)\sigma_2(t) + f''_{22}(X_1(t),X_2(t))\sigma_2^2(t)]\,dt.$$

On doit modifier la table de multiplication en écrivant $dB_1dB_2 = \rho dt$. On remarque que si B_1 et B_2 sont indépendants, ils sont non corrélés (et réciproquement) ce qui est heureux pour la terminologie, mais pas tout à fait trivial (voir ce qui suit).

Application

Revenons au Browniens corrélés. On note B_i les browniens corrélés et B_3 le brownien construit au moyen de B_1 et B_2 par

$$B_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B_2 - \rho B_1)$$

. Soit $M_i(\lambda, t) = \exp(\lambda B_i(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$. Ces processus sont des martingales pour toute valeur de λ et $dM_i(t) = \lambda M_i(t)dB_i(t)$. D'où, en utilisant que le crochet de B_3 et B_1 est nul (par linéarité) $d[M_1M_3](t) = M_1(t)dM_3(t) + M_3(t)dM_1(t)$. Ce produit est une martingale, ce qui implique, après un petit calcul que

$$E\left(\exp\left(\lambda B_1(t) + \mu B_3(t)\right)\right) = E\left(\exp\left[\lambda B_1(t)\right]\right)\,E\left(\exp\left(\mu B_3(t)\right]\right)$$

d'où l'indépendance souhaitée de $B_1(t)$ et $B_3(t)$. Pour obtenir l'indépendance des processus, utiliser $M_i(t) = \exp(\int_0^t \lambda(s)dB_i(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s)ds)$.

3.4.5 Application à la formule de Black et Scholes

3.4.6 APT évaluation

On suppose avoir un marché financier où il y a :
1) un actif sans risque dont le prix S_0 vérifie $dS_0(t) = S_0(t)rdt$ où r est une constante
2) un actif risqué dont le prix $S(t)$ vérifie

$$dS(t) = S(t)(bdt + \sigma dB_t),$$

où B est un mouvement Brownien, et b, σ des constantes. On étudie un actif contingent de payoff $h(S_T)$. Le cas d'un call Européen correspond à $h(x) = (x - K)^+$.
Le prix d'un call de maturité T et de prix d'exercice K est une fonction $C(t, S(t))$.
On se constitue un portefeuille composé d'un call et de β_t parts de l'actif risqué. La valeur de ce portefeuille est $V_t = C(t, S_t) + \beta_t S_t$. On suppose que $dV_t = dC_t + \beta_t dS_t$ (Cette condition est une condition d'autofinancement et ne doit être en aucun cas confondue avec une formule d'Itô).
En utilisant la formule d'Itô, on a

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial x} S_t b + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \beta_t b S_t dt + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\sigma S_t + \beta_t \sigma S_t\right) dB_t.$$

Le portefeuille est sans risque si $\frac{\partial C}{\partial x}\sigma S_t + \beta_t \sigma S_t = 0$, soit $\beta_t = -\frac{\partial C}{\partial x}$ et de rendement r si $dV_t = rV_t dt$ soit $dC_t + \beta_t dS_t = r(C_t + \beta_t S_t)dt$ d'où, en remplaçant β par sa valeur

$$rS_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\partial C}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t) - rC(t, S_t) = 0$$

avec $C(T, S_T) = h(S_T)$. Soit, en notant que S_t est une v.a. qui admet une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ (et qui prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}^+$)

$$rx\frac{\partial C}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \sigma^2 x^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}(t, x) - rC(t, x) = 0\,,\ \forall w \geq 0,\ \forall t \geq 0$$

avec $C(T, x) = h(x)$.
L'équation aux dérivées partielles peut être résolue par des méthodes classiques d'EDP.

Portefeuille dupliquant

On reprend l'étude de la valorisation d'un actif contingent de payoff $h(S_T)$ sur un sous jacent de dynamique

$$dS_t = S_t(b\,dt + \sigma dW_t)\,.$$

On note $C(t, S_t)$ la valeur de l'actif contingent à la date t. On constitue un portefeuille constitué de α_t parts de l'actif sans risque et γ_t parts de l'actif risqué. Sa valeur à l'instant t est $V_t := \alpha_t S_t^0 + \gamma_t S_t$. On suppose que $dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \gamma_t dS_t$ (hypothèse d'autofinancement).

Le portefeuille duplique l'actif contingent si $\alpha_t S_t^0 + \gamma_t S_t = C(t, S_t)$, soit en identifiant les termes en dt et dW_t dans dV_t et dC_t: (on utilise l'unicité de la décomposition d'un processus d'Itô en processus à variation finie et martingale) : $\gamma_t S_t \sigma = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)\, S_t \sigma$, soit $\gamma_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ et

$$\begin{aligned}
\alpha_t r S_t^0 + b\gamma_t S_t &= \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)\, S_t b + \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)\,\sigma^2 S_t^2 \\
&= \alpha_t r S_t^0 + S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)
\end{aligned}$$

En utilisant $\alpha_t S_t^0 + \gamma_t S_t = C(t, S_t)$ on obtient $\alpha_t S_t^0 = C(t, S_t) - S_t \dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$, d'où

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)\, S_t r + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)\,\sigma^2 S_t^2 - rC(t, S_t) = 0$$

et $C(T, S_T) = h(S_T)$.

Le processus S prend ses valeurs dans $I\!R^+$, résoudre l'équation précédente pour un call européen revient à étudier

$$\begin{aligned} xr\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \sigma^2 x^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) - rC(t,x) &= 0\,,\ x \geq 0 \\ C(T,x) &= (x-K)^+. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On peut résoudre cette équation, et on trouve

$$C(t,x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

la quantité $C_x(t,x) = \mathcal{N}(d_1)$ représente la couverture (le nombre de parts d'actif sous jacent utilisées pour répliquer l'option)

Remarque 3.4.1 En interprétant l'équation (3.2), (qui correspond à chercher f telle que $e^{-rt}f(t,X_t)$ est une martingale) on voit que $C(t,x) = E(e^{-r(T-t)}(Y_T - K)^+ | \mathcal{F}_t)$ avec $dY_t = Y_t(rdt + \sigma dB_t)$. Cette remarque est **fondamentale** en finance.

Chapter 4

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

4.1 Equations différentielles stochastiques

4.1.1 Définition

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\; ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \tag{4.1}$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \\ X_0 &= x \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Définition 4.1.1 *Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (4.1) est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\; ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ ont un sens et l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\; ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

est satisfaite pour tout t, P p.s. (.

4.1.2 Théorème d'existence

Théorème 4.1.1 *On suppose que*

a- les fonctions b et σ sont continues,

b- il existe K tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

i) $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K\, |x - y|$

ii) $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$

c- La condition initiale X_0 *est indépendante de* $(B_t, t \geq 0)$ *et est de carré intégrable, alors il existe une unique solution de (4.1) à trajectoires continues pout* $t \leq T$. *De plus cette solution vérifie*

$$E(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < \infty.$$

La démonstration repose sur une méthode de pont fixe. A un processus U on associe le processus $\Phi(U)$ par $\Phi(U)_t = x + \int_0^t b(s,U_s)ds + \int_0^t \sigma(s,U_s)dB_s$. Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, la solution est adaptée à la filtration naturelle du MB. On parle alors de solution forte. L'unicité se traduit par : si X et Y sont deux solutions, $P\, p.s. \forall t \in [0,T]\, X_t = Y_t$.
Ce théorème se généralise au cas de processus à valeurs dans $I\!R^n$. Dans la pratique, ce théorème est parfois insuffisant.
On peut énoncer un théorème sur $I\!R$:

Théorème 4.1.2 *Soit* ρ *une fonction borélienne de* $]0,\infty[$ *dans lui-même telle que l'intégrale de* $(\rho)^{-1}$ *au voisinage de 0 diverge (par exemple* $\rho(x) = \sqrt{x}$*). Si* $|\sigma(s,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$ *et* b *est lipschitzienne, soit* $|b(s,x) - b(s,y)| \leq K_t|x-y|$ *pour tout* $x, y \in I\!R$ *et* $s \leq t$, *il existe une unique solution de (4.1).*

On trouvera dans Revuz-Yor (Ch IX, paragraphe 3) d'autres résultats.

4.1.3 Propriété de Markov

On note $(X_s^{t,x}, s \geq t)$ la solution de (4.1) partant de x à l'instant t, soit

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x})\, du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x})\, dB_u\, .$$

Sous les conditions du théorème 4.1.1, on peut montrer que

$$X_s^{0,x} = X_s^{t, X_t^{0,x}}, s \geq t.$$

ce qui montre que la solution de (4.1) est un processus de Markov par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$:

$$E(f(X_s)|\mathcal{F}_t) = E(f(X_s)|X_t) = \Phi(s,t,X_t)$$

où $\Phi(s,t,x) = E(f(X_s^{t,x}))\, , s \geq t$. Ce résultat est extrémement important et permet de calculer facilement des espérances conditionnelles. En particulier si

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x})\, du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x})\, dB_u$$

on obtient un processus de Markov homogène

$$E(f(X_s)|\mathcal{F}_t) = E(f(X_s)|X_t) = \Phi(s,t,X_t) = \Psi(s-t, X_t)$$

où $\Phi(s,t,x) = E(f(X_s^{t,x})) = E(f(X_{s-t}^{0,x}))$ et $\Psi(u,x) = E(f(X_u^{0,x}))$.
Attention: un couple (X,Y) peut être Markovien sans que ses composantes le soient.

4.1.4 Théorème de comparaison

Théorème 4.1.3 **Comparison theorem.** *Let*

$$dX_i(t) = b_i(X_i(t))dt + \sigma(X_i(t))dW_t\, , \, i = 1,2$$

where b_i *is Lipschitz and* $[\sigma(x)-\sigma(y)]^2 \leq k|x-y|$. *Suppose that* $X_1(0) \geq X_2(0)$ *and* $b_1(x) \geq b_2(x)$. *Then* $X_1(t) \geq X_2(t)$

(See [RY] chap. 9, par. 3 for a proof).

4.1.5 Exemple : Martingale exponentielle

Proposition 4.1.1 *Soit $\theta \in \Lambda$ et Z_0 une constante. La solution de $dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$ est $Z_t = Z_0 \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds]$. Si de plus $E(\exp[\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds]) < \infty$, le processus $(Z_t, t \leq T)$ est une martingale d'espérance Z_0.*

Démonstration: Par définition, Z est une martingale locale. On vérifie que $Z_t = Z_0 \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds]$ est solution de l'équation proposée en utilisant la formule d'Itô. En notant $U_t := \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds$, on a $dU_t = \theta_t dB_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 dt$, d'où $dZ_t = (\exp U_t)(dU_t + \frac{1}{2}\theta_t^2 dt) = \theta_t Z_t dB_t$. □

Le processus Z, noté $\mathcal{E}(\theta B)_t$ est appelé l'exponentielle de Doléans-Dade de θB. C'est une martingale locale positive si $Z_0 > 0$. Il est plus délicat de vérifier que c'est une martingale. La condition $E(\exp[\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds]) < \infty$ est la condition de Novikov. Sous cette condition, $E(Z_T) = Z_0$, et $(Z_t, t \leq T)$ est une martingale. Sinon, c'est une martingale locale positive, donc une surmartingale, et $E(Z_t) \leq Z_0$. On ne connait pas de conditions "plus faciles" à vérifier que la condition de Novikov, sauf dans le cas suivant.

Lemme 4.1.1 *Soit f telle que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq C|x-y|$ et $\sup |f's, 0)| \leq C$. Alors,*

$$\int_0^t f(s, B_s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s, B_s)^2 ds$$

est une martingale.

4.2 Equations aux dérivées partielles

On se donne deux fonctions b et σ de $[0,T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses du théorème 4.1.1 concernant l'existence de solution d'EDS. Soit A l'opérateur défini sur les fonctions de $C^{1,2}$ par

$$Af(t,x) := f'_t(t,x) + f'_x(t,x)b(t,x) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x).$$

Soit $(X_u^{x,t}, u \geq t)$ le processus d'Itô défini par

$$X_u^{x,t} = X_t^{x,t} + \int_t^u b(s, X_s^{x,t})\, ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t})\, dB_s,\ u \geq t \tag{4.2}$$

avec une condition initiale en t: $X_t^{x,t} = x$. On remarque que $Af(t,x) = f'_t(t,x) + \mathcal{L}f(t,x)$ où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal de X.

4.2.1 Problème parabolique

On cherche les solutions du problème (parabolique) suivant, avec une "donnée terminale", c'est-à-dire une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui va préciser la valeur de la solution de l'équation aux dérivées partielles en T.

$$\begin{cases} Af(t,x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T] \\ f(T,x) &= g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Si f est une solution du problème parabolique (4.3), et X une solution de (4.2), la formule d'Itô conduit à

$$f(u, X_u^{x,t}) = f(t,x) + \int_t^u f'_x(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t}) dB_s\,,$$

en particulier en T, on a

$$f(T, X_T^{x,t}) = g(X_T^{x,t}) = f(t,x) + \int_t^T f'_x(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t})\, dB_s$$

et si l'intégrale est une martingale (conditions d'intégrabilité sur f'_x et σ) on en déduit $f(t,x) = E(g(X_T^{x,t}))$.

Théorème 4.2.1 *Sous des conditions de régularité, la solution du problème parabolique*

$$\begin{aligned} Af(t,x) &= 0, \quad \forall x \in I\!R, \forall t \in [0,T] \\ f(T,x) &= g(x) \quad \forall x \in I\!R \end{aligned}$$

est donnée par $f(t,x) = E(g(X_T^{x,t}))$, où $X^{x,t}$ est le processus d'Itô défini par

$$X_u^{x,t} = X_t^{x,t} + \int_t^u b(s, X_s^{x,t})\; ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t})\; dB_s\,,\; u \geq t$$

avec une condition initiale en t: $X_t^{x,t} = x$.

On écrit souvent ce résultat sous la forme équivalente suivante $f(t,x) = E_{x,t}(g(X_T))$, où X est le processus d'Itô défini par

$$dX_s = b(s, X_s)\; ds + \sigma(s, X_s)\; dB_s$$

l'espérance étant prise sous la probabilité $P_{x,t}$ qui est telle que processus X prend la valeur x à l'instant t.

4.2.2 Généralisation

Soit α une constante positive. On cherche les solutions du problème (parabolique) suivant

$$\begin{aligned} Af(t,x) &= \alpha f(t,x), \quad \forall x \in I\!R, \forall t \in [0,T] && (4.4) \\ f(T,x) &= g(x). && (4.5) \end{aligned}$$

Si f est solution de (4.4), et X une solution de (4.2), la formule d'Itô entre t et T conduit à

$$f(T, X_T^{x,t}) \exp(-\alpha T) = f(t,x)\exp(-\alpha t) + \int_t^T f'_x(s, X_s^{x,t})[\exp -\alpha s]\sigma(s, X_s^{x,t}) dB_s,$$

et si l'intégrale est une martingale (conditions d'intégrabilité sur f'_x et σ) on en déduit $f(t,x) = E[\exp(-\alpha(T-t)) g(X_T^{x,t})]$. En exploitant le caractère Markovien, on a aussi $f(t,x) = E(\exp(-\alpha(T-t)) g(X_T)\,|X_t = x)$ où

$$X_s = X_0 + \int_0^s b(u, X_u)\; du + \int_0^s \sigma(u, X_u)\, dB_u$$

Théorème 4.2.2 *La solution du problème*

$$\begin{aligned} \alpha f(t,x) &= f'_t(t,x) + f'_x(t,x) b(t,x) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x) \\ f(T,x) &= g(x) \end{aligned}$$

est donnée par

$$f(t,x) = E_{x,t}[\exp(-\alpha(T-t)) g(X_T)].$$

4.2.3 Formule de Black et Scholes

On a vu que l'évaluation d'une option Européene revenait à résoudre l'EDP

$$xr\frac{\partial C}{\partial x}(t,x)+\frac{\partial C}{\partial t}(t,x)+\sigma^2x^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}(t,x)-rC(t,x)=0\,,\ x\geq 0$$

et $C(T,x)=(x-K)^+$.

Le processus S prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, résoudre l'équation précédente pour un call européen revient à étudier

$$xr\frac{\partial C}{\partial x}(t,x)+\frac{\partial C}{\partial t}(t,x)+\sigma^2x^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}(t,x)-rC(t,x)=0\,,\ x\geq 0$$

et $C(T,x)=(x-K)^+$.

Grâce aux résultats précédents sur les équations aux dérivées partielles, on voit que

$$C(t,x)=E(e^{-r(T-t)}(S_T^{x,t}-K)^+)$$

où $dS_u^{x,t}=S_u^{x,t}\,(rdu+\sigma dB_u)$, et $S_t^{x,t}=x$.
Le calcul de l'espérance se fait en remarquant que $S_T^{x,t}=xe^{\sigma(T-t)G+(r-\sigma^2/2)(T-t)}$ où G est une gaussienne. Explicitons le calcul pour $t=0$

$$\begin{aligned}E(e^{-rT}(S_T^x-K)^+) &= E(e^{-rT}(S_T^x\mathbb{1}_{S_T\geq K}-Ke^{-rT}P(S_T\geq K))\\ &= e^{-rT}xE(e^{\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)}\mathbb{1}_{\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)\geq\ln(K/x)})\\ &\quad -Ke^{-rT}P(\sigma\sqrt{T}\,G+(r-\sigma^2/2)(T)\geq\ln(K/x)))\,.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser des calculs portant sur des variables gaussiennes. Nous verrons plus loin que le calcul du premier terme se déduit du second.

Remarque: Ces calculs permettent de calculer le 'Delta' de l'option et de montrer facilement que $\frac{\partial C}{\partial x}=N(d_1)$. Plaçons nous dans le cas $t=0$. La formule établie plus haut s'écrit

$$C(0,x)=E_Q(e^{-rT}(xM_T-K)^+)\tag{4.6}$$

où $S_t=xM_t$. En dérivant sous le signe espérance par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0,x)=E_Q(e^{-rT}M_T1_{xM_T\geq K})=\mathcal{N}(d_1)$$

4.2.4 Formule de Feynman-Kac

Théorème 4.2.3 *Soit $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction continue et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x+y)|e^{-|y|\sqrt{2\alpha}}dy<\infty\quad\forall x\in\mathbb{R},\alpha>0$$

Alors la fonction f définie par:

$$f(x)=E_x\left[\int_0^\infty dt\,g(B_t)\exp\left(-\alpha t-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right]\tag{4.7}$$

est l'unique solution C^2 bornée de:

$$(\alpha+k)f=\frac{1}{2}f''+g\tag{4.8}$$

Démonstration: Dans (4.7), E_x signifie que le Brownien est issu de x. Nous ne donnons ici qu'une idée de la démonstration. Considérons le processus à variation bornée $(Z_t : t \geq 0)$ défini par:

$$Z_t = \alpha t + \int_0^t k(B_s)ds$$

Le lemme d'Itô appliqué au processus

$$U_t \stackrel{def}{=} f(B_t)e^{-Z_t} + \int_0^t g(B_s)e^{-Z_s}ds$$

où f est une fonction de classe C^2 montre que

$$dU_t = f'(B_t)e^{-Z_t}dB_t + \left(\frac{1}{2}f''(B_t) - (\alpha + k(B_s))f(B_t) + g(B_t)\right)e^{-Z_t}dt$$

Le processus U est une martingale si sa partie à variation finie est nulle i.e.:

$$\frac{1}{2}f''(x) - (\alpha + k(x))f(x) + g(x) = 0$$

Il reste à remarquer que

$$u(0, B_0) = u(0, x) = f(x)$$

et à vérifier que $E(f(B_t)e^{-Z_t}) \to 0$.

Les conditions de positivité sur α et k et de bornitude sur g garantissant l'existence d'une solution continue et bornée à l'équation différentielle. $\square$

La formule (4.7) nous donne en particulier la transformée de Laplace en temps de $\exp - \int_0^t k(B_s)ds$ et aussi celle de $g(B_t)\exp -\lambda \int_0^t k(B_s)ds$, donc la loi du couple $(B_t, \int_0^t k(B_s)ds)$.

Une application

Par application de la formule précédente à $k(x) = \beta 1\!\!1_{x\geq 0}$ et $g(x) = 1$, on obtient que pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction f définie par:

$$f(x) \stackrel{def}{=} E_x\left[\int_0^\infty dt \exp\left(-\alpha t - \beta \int_0^t 1\!\!1_{[0,\infty)}(B_s)ds\right)\right] \tag{4.9}$$

est solution de l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \alpha f(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \beta f(x) + 1 & x \geq 0 \\ \alpha f(x) = \frac{1}{2}f''(x) + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

L'unique solution bornée et continue de cette EDO est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x\sqrt{2(\alpha+\beta)}} + \frac{1}{\alpha+\beta} & x \geq 0 \\ Be^{x\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha} & x \leq 0 \end{cases}$$

En imposant la continuité de f et f' en zéro, on trouve

$$A = \frac{\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha}}{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha}}$$

Soit $A_t^+ \stackrel{def}{=} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\infty[}(B_s)\, ds$. Nous avons obtenu

$$f(0) = \int_0^\infty dte^{-\alpha t} E_0 \left[e^{-\beta A_t^+} \right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

En utilisant l'égalité

$$\int_0^\infty dte^{-\alpha t} \left(\int_0^t du \frac{e^{-\beta u}}{\pi\sqrt{u(t-u)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

on en déduit que la densité de A_t^+ est donnée par:

$$P(A_t^+ \in du) = \frac{du}{\pi\sqrt{u(t-u)}} \mathbb{1}_{(u<t)} \tag{4.10}$$

La loi de A_t^+ est donc une loi arcsinus sur $[0,t]$, ce nom provenant de la fonction de répartition de cette loi :

$$P(A_t^+ \leq \theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}} ds = \int_0^{\theta/t} \frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}} du = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\theta}{t}} \tag{4.11}$$

On obtient aussi une égalité en loi intéressante

$$P(A_t^+ \leq \theta) = P(A_1^+ \leq \frac{\theta}{t}) \tag{4.12}$$

ce qui montre que $A_t^+ \stackrel{loi}{=} tA_1^+$, ce que l'on peut aussi obtenir par scaling. □

Chapter 5

EXEMPLES DE PROCESSUS D'ITO

La partie en Anglais est partie d'un chapitre d'un livre à paraitre chez Springer. Merci de me signaler tout faute de frappe.

5.1 Le brownien géométrique

On considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = X_t b_t dt + X_t \sigma_t dB_t \,,\; X_0 = x \tag{5.1}$$

où b et σ sont des processus adaptés bornés. Plaçons nous dans le cas de coefficients déterministes. Cette équation admet une solution unique (Voir théorème d'existence)

$$x \exp\left\{ \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds \right\}$$

(il suffit d'appliquer la formule d'Itô).
On écrit souvent (5.1) sous la forme

$$\frac{dX_t}{X_t} = b(t)dt + \sigma(t)dB_t \,.$$

La martingale $M_t = X_t e^{-bt}$ est solution de $dM_t = M_t \sigma dB_t$.

Théorème 5.1.1 *La solution de $dX_t = X_t[bdt + \sigma dB_t]$ s'écrit*

$$X_t = X_0 \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\}$$

ou encore

$$X_t = X_s \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\}$$

Il est facile de vérifier que l'équation $dX_t = X_t[bdt + \sigma dB_t], X_0 = x$ a une unique solution. Soit Y une seconde solution. Nous savons que X ne s'annule pas et

$$d(1/X_t) = \frac{1}{X_t}[\mu dt - \sigma dB_t]$$

avec $\mu = -b + \sigma^2$. Nous pouvons définir $Z_t = Y_t/X_t$. Ce processus vérifie

$$dZ_t = Z_t[(\mu + b - \sigma^2)dt + (\sigma - \sigma)dB_t = 0$$

soit $dZ_t = 0$, ce qui est une équation différentielle ordinaire, de solution $Z_t = Z_0$.

5.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Pour modéliser des taux, Cox- Ingersoll-Ross étudient l'équation suivante

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t \tag{5.2}$$

L'unique solution est un processus positif pour $k\theta \geq 0$ (utiliser le second théorème d'existence. Voir Ikeda-Watanabe). ll n'est pas possible d'obtenir une formule explicite. Soit r^x le processus solution de (5.2) avec $r_0^x = x$. On peut montrer que, si $T_0^x \stackrel{def}{=} \inf\{t \geq 0 : r_t^x = 0\}$ et $2k\theta \geq \sigma^2$ alors $P(T_0^x = \infty) = 1$. Si $0 \leq 2k\theta < \sigma^2$ et $k > 0$ alors $P(T_0^x < \infty) = 1$ et si $k < 0$ on a $P(T_0^x < \infty) \in]0,1[$.
Cependant, on peut calculer l'espérance de la v.a. r_t au moyen de l'égalité $E(r_t) = r_0 + k(\theta t - \int_0^t E(r_s)ds)$, en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale, ce qui est le cas. On calcule sans difficultés supplémentaires l'espérance conditionnelle, en utilisant le caractère Markovien:

Théorème 5.2.1 *Soit r le processus vérifiant*

$$dr_t \;=\; k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t.$$

L'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle sont données par

$$\begin{aligned} E(r_t\,|\mathcal{F}_s) &= r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}), \\ Var(r_t\,|\mathcal{F}_s) &= r_s\,\frac{\sigma^2(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)})}{k} + \frac{\theta\sigma^2(1 - e^{-k(t-s)})^2}{2k}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Par définition, on a pour $s \leq t$

$$r_t \;=\; r_s + k\int_s^t (\theta - r_u)du + \sigma\int_s^t \sqrt{r_u}\,dB_u,$$

et en appliquant la formule d'Itô

$$\begin{aligned} r_t^2 &= r_s^2 + 2k\int_s^t (\theta - r_u)r_u du + 2\sigma\int_s^t (r_u)^{3/2}dB_u + \sigma^2\int_s^t r_u du \\ &= r_s^2 + (2k\theta + \sigma^2)\int_s^t r_u du - 2k\int_s^t r_u^2 du + 2\sigma\int_s^t (r_u)^{3/2}dB_u. \end{aligned}$$

En admettant que les intégrales stochastiques qui interviennent dans les égalités ci-dessus sont d'espérance nulle, on obtient, pour $s = 0$

$$E(r_t) = r_0 + k\left(\theta t - \int_0^t E(r_u)du\right),$$

et

$$E(r_t^2) = r_0^2 + (2k\theta + \sigma^2)\int_0^t E(r_u)du - 2k\int_0^t E(r_u^2)du.$$

Soit $\Phi(t) = E(r_t)$. En résolvant l'équation $\Phi(t) = r_0 + k(\theta t - \int_0^t \Phi(u)du)$ qui se transforme en l'équation différentielle $\Phi'(t) = k(\theta - \Phi(t))$ et $\Phi(0) = r_0$, on obtient

$$E[r(t)] = \theta + (r_0 - \theta)e^{-kt}.$$

De la même façon, on introduit $\psi(t) = E(r_t^2)$ et en résolvant $\Psi'(t) = (2k\theta + \sigma^2)\Phi(t) - 2k\Psi(t)$, on calcule

$$\mathrm{Var}\,[r_t] \;=\; \frac{\sigma^2}{k}\,(1 - e^{-kt})[r_0 e^{-kt} + \frac{\theta}{2}(1 - e^{-kt})]\,.$$

L'espérance et la variance conditionnelle de r s'obtiennent en appliquant la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} E(r_t\,|\mathcal{F}_s) &= \theta + (r_s-\theta)e^{-k(t-s)} = r_s\,e^{-k(t-s)} + \theta(1-e^{-k(t-s)}), \\ \mathrm{Var}(r_t\,|\mathcal{F}_s) &= r_s\,\frac{\sigma^2(e^{-k(t-s)}-e^{-2k(t-s)})}{k} + \frac{\theta\rho^2(1-e^{-k(t-s)})^2}{2k}. \end{aligned}$$

□.

On va utiliser les méthodes du chapitre précédent pour calculer $E\left(\exp - \int_t^T r_u\,du\,|\mathcal{F}_t\right)$.

Calcul du prix d'un zéro-coupon

Proposition 5.2.1 *Soit*

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t.$$

Alors

$$E\left(\exp - \int_t^T r_u\,du\,|\mathcal{F}_t\right) = G(t,r_t)$$

avec

$$G(t,x) = \Phi(T-t)\exp[-x\Psi(T-t)]$$

$$\Psi(s) = \frac{2(e^{\gamma s}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma s}-1)+2\gamma},\ \Phi(s) = \left(\frac{2\gamma e^{(\gamma+a)\frac{s}{2}}}{(\gamma+a)(e^{\gamma s}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2ab}{\rho^2}},\ \gamma^2 = a^2+2\rho^2\,.$$

Démonstration: Soit $r^{x,t}$ la solution de

$$dr_s^{x,t} = a(b-r_s^{x,t})ds + \rho\sqrt{r_s^{x,t}}dB_s\,,\ r_t^{x,t} = x$$

et $R_s^t = \exp\left(-\int_t^s r_u^{x,t}\,du\right)$. La propriété de Markov implique qu'il existe G telle que

$$\exp\left(-\int_t^s r_u^{x,t}\,du|\mathcal{F}_t\right) = G(t,r_t)$$

On admet que G est de classe $C^{1,2}$. On applique la formule d'Itô à $G(s,r_s^{x,t})R_s^t$ qui est une martingale. Il vient

$$G(T,r_T^{x,t})R_T^t = G(t,x) + \int_t^T R_s^t(-r_s^{x,t}G + \frac{\partial G}{\partial t} + a(b-r_s^{x,t})\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_s^{x,t}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2})(s,r_s)ds + M_T - M_t$$

où M_t est une intégrale stochastique. Si l'on choisit G telle que

$$-xG + \frac{\partial G}{\partial t} + a(b-x)\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \tag{5.3}$$

et $G(T,x)=1, \forall x$, il vient

$$R_T^t = R_tG(t,r_t) + M_T - M - t,$$

où M est une martingale. En particulier, $E\left(\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)\right) = E(R_T) = R_0G(0,x)$. En se plaçant entre t et T, on obtient

$$E\left(\exp\left(-\int_t^T r_u^{x,t}\,du\right)\right) = G(t,x)$$

Il reste à calculer la solution de l'équation aux dérivées partielles (5.3). Un calcul assez long montre que[1]

$$G(t,x) = \Phi(T-t)\exp[-x\Psi(T-t)]$$

avec

$$\begin{array}{rclcrcl} \Psi(s) & = & \dfrac{2(e^{\gamma s}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma s}-1)+2\gamma} & & \Phi(s) & = & \left(\dfrac{2\gamma e^{(\gamma+a)\frac{s}{2}}}{(\gamma+a)(e^{\gamma s}-1)+2\gamma}\right)^{\dfrac{2ab}{\rho^2}} \\ \gamma^2 & = & a^2+2\sigma^2\,. & & & & \end{array}$$

□

Si l'on note $B(t,T)$ le prix du zero-coupon,

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(r_t dt + \sigma(T-t,r_t)dB_t\right)$$

avec $\sigma(u,r) = \sigma\Psi(u)\sqrt{r}$

5.3 Processus de Bessel et carré de Bessel

Pour des détails sur les processus de Bessel, voir Revuz-Yor. Bessel processes are intensively used in Finance, to model the dynamics of asset prices and/or of spot rate or as a computational tool. An intensive study is made in Going and Yor [**?**]. Applications to finance can be found in Leblanc's thesis and in Szatzschneider [**?**, **?**].

5.4 Definitions

5.4.1 Euclidian norm of n-dimensional Brownian motion

Let $n > 1$ and $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ be a n-dimensional Brownian motion and define a process X as $X_t = ||B_t||$, i.e., $X_t^2 = \sum_{i=1}^n (B_i)^2(t)$. Itô's formula leads to $dX_t^2 = \sum_{i=1}^n 2B_i(t)dB_i(t) + n\,dt$. The process β defined as

$$d\beta_t = \frac{1}{X_t}B_t \cdot dB_t = \frac{1}{||B_t||}\sum_{i=1}^n B_i(t)dB_i(t), \quad \beta_0 = 0,$$

is a continuous martingale as a sum of martingales and the bracket of β is t (the process $(\beta_t^2 - t,\ t \geq 0)$ is a martingale). Therefore, β is a Brownian motion and the equality $d(X_t^2) = 2B_t \cdot dB_t + ndt$ can be written as

$$d(X_t^2) = 2X_t d\beta_t + n\,dt\,.$$

Using Itô's formula again, we get that,

$$dX_t = d\beta_t + \frac{n-1}{2}\frac{dt}{X_t}$$

where β is a Brownian motion, and, setting $V_t = X_t^2$

$$dV_t = 2\sqrt{V_t}d\beta_t + n\,dt\,.$$

We shall say that X is a Bessel process (BES) with dimension n, and V is a squared Bessel process (BESQ) of dimension n.

[1] "Vous leur conseillerez donc de faire le calcul. Elles [les grandes personnes] adorent les chiffres: ça leur plaira. Mais ne perdez pas votre temps à ce pensum. C'est inutile. Vous avez confiance en moi." Le petit prince, A. de St Exupéry. Gallimard. 1946. p. 59.

5.4.2 General definition

Let W be a real valued Brownian motion. Using the elementary inequality $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, the existence theorem **??** proves that for every $\delta \geq 0$ and $\alpha \geq 0$, the equation

$$dZ_t = \delta\, dt + 2\sqrt{|Z_t|}\, dW_t\,, Z_0 = \alpha$$

admits a unique strong solution. The solution is called the squared Bessel process of dimension δ, in short BESQ^δ. In particular, if $\alpha = 0$ and $\delta = 0$, the obvious solution $Z \equiv 0$ is the unique solution. From the comparison theorem 4.1.3, if $0 \leq \delta \leq \delta'$ and if ρ and ρ' are squared Bessel processes with dimension δ and δ' starting at the same point, then $0 \leq \rho_t \leq \rho'_t$ a.s.
In the case $\delta > 2$, the squared Bessel process BESQ^δstarting at α will never reach 0 and is a transient process (ρ_t goes to infinity as t goes to infinity). If $0 < \delta < 2$, the process ρ reaches 0 in finite time and is reflected instantaneously. If $\delta = 0$ the process remains at 0 as soon as it reaches it. Therefore, Z satisfies $Z_t \geq 0$ for all t and we do not need the absolute value under the square root.

Définition 5.4.1 (BESQ^δ) *For every $\delta \geq 0$ and $\alpha \geq 0$, the unique strong solution to the equation*

$$\rho_t = \alpha + \delta t + 2\int_0^t \sqrt{\rho_s}\, dW_s$$

is called a squared Bessel process with dimension δ, starting at α and is denoted by BESQ^δ.

Définition 5.4.2 (BES^δ) *Let ρ be a BESQ^δstarting at α. The process $R = \sqrt{\rho}$ is called a Bessel process of dimension δ, starting at $a = \sqrt{\alpha}$ and is denoted* BES^δ.

Définition 5.4.3 *The number $\nu = (\delta/2) - 1$ (or $\delta = 2(\nu + 1)$) is called the index of the Bessel process, and a Bessel process with index ν is denoted as* $\mathrm{BES}^{(\nu)}$.

We use the notation $^{()}$ for an index, whereas there are no bracket for the dimension. A Bessel Process R with index $\nu \geq 0$ (i.e. $\delta \geq 2$) is a diffusion process which takes values in $\mathbb{R}_+$ and has infinitesimal generator

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{2x}\frac{d}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta-1}{2x}\frac{d}{dx}\,.$$

Therefore, for any $f \in C_c^2$, the processes

$$f(R_t) - \int_0^t \mathcal{L}f(R_s)ds$$

are martingales.

For $\delta > 1$, a BES^δsatisfies $E\left(\int_0^t \frac{ds}{R_s}\right) < \infty$ and is the solution of

$$R_t = \alpha + W_t + \frac{\delta-1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_s}\, ds\,. \tag{5.4}$$

In terms of the index

$$R_t = \alpha + W_t + (\nu + \frac{1}{2})\int_0^t \frac{1}{R_s}\, ds\,.$$

For $\delta = 1$, the BES^1 is $R_t = |B_t| = \beta_t + L_t$ where B and β are Brownian motions and L is the local time of Brownian motion B. For $\delta < 1$, it is necessary to introduce the principal value of the integral $\int_0^t \frac{ds}{R_s}$ in this case, we have

$$R_t = \alpha + W_t + \frac{\delta-1}{2}\mathrm{p.v.}\int_0^t \frac{1}{R_s}\, ds\,, \tag{5.5}$$

where the principal value is defined as

$$\text{p.v.} \int_0^t \frac{1}{R_s}\, ds = \int_0^\infty x^{\delta-2}(L_t^x - L_t^0)dx$$

and the family of local times is defined via the occupation time formula

$$\int_0^t \phi(R_s)ds = \int_0^\infty \phi(x) L_t^x x^{\delta-1} dx\,.$$

In the same way, the infinitesimal generator of the Bessel squared process ρ is

$$\mathcal{A} = 2x\frac{d^2}{dx^2} + \delta\frac{d}{dx}$$

hence, for any $f \in C_K^2$, the processes

$$f(\rho_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(\rho_s)ds$$

are martingales.

A scale function for a $\mathrm{BES}^{(\nu)}$is $s(x) = x^{-2\nu}$ for $\nu < 0$, $s(x) = 2\ln x$ for $\nu = 0$ and $s(x) = -x^{-2\nu}$ for $\nu > 0$.
A scale function for a $\mathrm{BESQ}^{(\nu)}$is $s(x) = \ln x$ for $\nu = 0$, $s(x) = -x^{-\nu}$ for $\nu > 0$ and $s(x) = x^{-\nu}$ for $\nu < 0$.

5.4.3 Scaling properties

Proposition 5.4.1 *If $(\rho_t, t \geq 0)$ is a BESQ^δstarting at x, then $(\frac{1}{c}\rho_{ct}, t \geq 0)$ is a BESQ^δstarting at x/c.*

Démonstration: From

$$\rho_t = x + 2\int_0^t \sqrt{\rho_s}\, dW_s + \delta\, t$$

we deduce that

$$\frac{1}{c}\rho_{ct} = \frac{x}{c} + \frac{2}{c}\int_0^{ct} \sqrt{\rho_s}\, dW_s + \frac{\delta}{c}ct = \frac{x}{c} + 2\int_0^t \left(\frac{\rho_s}{c}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{c}}\, dW_{sc} + \delta t\,.$$

Setting $u_t = \frac{1}{c}\rho_{ct}$, we obtain

$$u_t = \frac{x}{c} + 2\int_0^t \sqrt{u_s}\, d\widetilde{W}_s + \delta\, t$$

where $(\widetilde{W}_t = \frac{1}{\sqrt{c}}\, W_{tc}, t \geq 0)$ is a Brownian motion. □

5.4.4 Absolute continuity

On the canonical space $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, we denote by R the canonical map $R_t(\omega) = \omega(t)$, by $\mathcal{R}_t = \sigma(R_s, s \leq t)$ the canonical filtration and by $P_\alpha^{(\nu)}$ (or P_α^δ) the law of the Bessel Process of index ν (of dimension δ), starting at α, i.e., such that $P_\alpha^{(\nu)}(R_0 = \alpha) = 1$. The law of BESQ^δstarting at x on the canonical space $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ is denoted by Q_x^δ.

Proposition 5.4.2 *The following absolute continuity relation between a* $\mathrm{BES}^{(\nu)}$*process (with* $\nu \geq 0$*) and a* $\mathrm{BES}^{(0)}$ *holds*

$$P_x^{(\nu)}|_{\mathcal{R}_t} = \left(\frac{R_t}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2}\right) P_x^{(0)}|_{\mathcal{R}_t}\,, \tag{5.6}$$

where $P^{(\nu)}$ *is the law of a BES with index* ν.

Démonstration: Under $P^{(0)}$, the canonical process R satisfies

$$dR_t = dW_t + \frac{1}{2R_t}dt\,.$$

The process

$$L_t = \left(\frac{R_t}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2}\right)$$

is a non-negative $P^{(0)}$-martingale. Indeed, Itô's formula leads to

$$dL_t = \nu L_t \ln(R_t) dW_t\,,$$

hence, the process L is a local martingale. Obviously, $\sup_{t\leq T} L_t \leq \sup_{t\leq T}(R_t/x)^{\nu}$. The process R^2 is a squared Bessel process of dimension 2, and is equal in law to $B_t^2 + \tilde{B}_y^2$ where B and $\tilde{B}$ are independent BM, hence R_t^k is integrable for $k \geq 2$. The process R is a submartingale as a sum of a martingale and an increasing process, and Doob's inequality (**??**) implies that

$$E[(\sup_{t\leq T} R_t)^k] \leq C_k E[R_T^k].$$

From Girsanov's theorem, it follows that

$$dR_t - \frac{1}{2R_t}dt - d\langle R, \nu \ln R\rangle_t = dR_t - \frac{1}{R_t}(\nu + \frac{1}{2})dt$$

is a Brownian motion under $P_x^{(\nu)} = L_t P_x^{(0)}$.

Remarque 5.4.1 If the index is negative, then the absolute continuity relation holds before T_0, the first hitting time of 0:

$$P_x^{(\nu)}|_{\mathcal{R}_t \cap \{t<T_0\}} = \left(\frac{R_t}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2}\right) P_x^{(0)}|_{\mathcal{R}_t}\,.$$

5.5 Properties

5.5.1 Additivity of BESQ

An important property, due to Shiga-Watanabe, is the additivity of the family BESQ. Let us denote by $P * Q$ the convolution of P and Q.

Proposition 5.5.1 $Q_x^{\delta} * Q_y^{\delta'} = Q_{x+y}^{\delta+\delta'}$

Démonstration: The proposition is just a way to tell that the sum of two independent BESQ is a BESQ. The proof is trivial in the case where δ and δ' are integers. In the general case, let X and Y be two independent BESQ starting at x (resp. y) and with dimension δ (resp. δ')and $Z = X + Y$. Then

$$Z_t = x + y + (\delta + \delta')t + 2\int_0^t \left(\sqrt{X_s}\,dB_s^1 + \sqrt{Y_s}\,dB_s^2\right)\,.$$

Let B^3 a third Brownian motion independent of (B^1, B^2). The process W defined as

$$W_t = \int_0^t 1\!\!1_{\{Z_s>0\}} \left(\frac{\sqrt{X_s}\, dB^1_s + \sqrt{Y_s}\, dB^2_s}{\sqrt{Z_s}} \right) + \int_0^t 1\!\!1_{\{Z_s=0\}} dB^3_s$$

is a Brownian motion (this is a martingale with increasing process equal to t) and

$$Z_t = x + y + (\delta + \delta')t + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\, dW_s\,.$$

□

5.5.2 Bessel functions

The modified Bessel function I_ν and K_ν satisfy the Bessel differential equation

$$x^2 u''(x) + xu'(x) - (x^2+\nu^2)u(x) = 0$$

and is given by :

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu+n+1)}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))}{2\sin \pi z}$$

5.5.3 Transition densities

Let E^δ_x denote the expectation under Q^δ_x. We get now easily the Laplace transform of ρ_t, where ρ is a BESQ$^\delta$. In fact, Proposition 5.5.1 leads to

$$E^\delta_x[\exp(-\lambda\rho_t)] = E^1_x[\exp(-\lambda\rho_t)]\, \left[E^1_0[\exp(-\lambda\rho_t)]\right]^{\delta-1}$$

and since under Q^1_x, the r.v. ρ_t is the square of a Gaussian variable, it is easy to check that $E^1_x[\exp(-\lambda\rho_t)] = \dfrac{1}{\sqrt{1+2\lambda t}} \exp(-\dfrac{\lambda x}{1+2\lambda t})$. Therefore

$$E^\delta_x[\exp(-\lambda\rho_t)] = \frac{1}{(1+2\lambda t)^{\delta/2}} \exp(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t})\,. \tag{5.7}$$

Bessel and Bessel squared processes are Markov processes and their transition densities are known. Inverting the Laplace transform (5.7) provides the transition density $q^{(\nu)}_t$ of a BESQ$^{(\nu)}$as

$$q^{(\nu)}_t(x,y) = \frac{1}{2t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) I_\nu(\frac{\sqrt{xy}}{t}) \tag{5.8}$$

and the Bessel process of index ν has a transition density $p^{(\nu)}_t$ defined by

$$p^{(\nu)}_t(x,y) = \frac{y}{t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2t}) I_\nu(\frac{xy}{t})\,, \tag{5.9}$$

where I_ν is the usual modified Bessel function with index ν.

For $x=0$, the transition probability of the BESQ$^{(\nu)}$(resp. of a BES$^{(\nu)}$) is

$$q^{(\nu)}(0,y) = (2t)^{-(\nu+1)}[\Gamma(\nu+1)]^{-1} y^\nu \exp\left(-\frac{y}{2t}\right)$$

$$p^{(\nu)}(0,y) = 2^{-\nu} t^{-(\nu+1)}[\Gamma(\nu+1)]^{-1} y^{2\nu+1} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\,.$$

(See the Appendix for definition of Bessel functions.)

Exercice 5.5.1 (from Azéma-Yor [?]). Let X be a BES^3. Prove that $1/X$ is a local martingale, but not a martingale. Establish that

$$E(1/X_1|\mathcal{R}_u) = \frac{1}{X_u}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Phi(\frac{X_u}{1-u}),$$

where $\Phi(a) = \int_0^a dye^{-y^2/2}$.

5.5.4 Hitting times for Bessel processes

For a BES$^\delta$(See, e.g. Kent [?] or Pitman-Yor [?] prop. 2.3)

$$E_a^{(\nu)}(e^{-\lambda T_b}) = \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \frac{K_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{K_\nu(b\sqrt{2\lambda})}, \quad \text{for } b < a \tag{5.10}$$

$$E_a^{(\nu)}(e^{-\lambda T_b}) = \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \frac{I_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{I_\nu(b\sqrt{2\lambda})}, \quad \text{for } a < b \tag{5.11}$$

Remark that, for $a > b$, $P_a^{(\nu)}(T_b < \infty) = (b/a)^{2\nu}$. Indeed, $P_a^{(\nu)}(T_b < \infty) = \lim_{\lambda\to 0} E_a^{(\nu)}(e^{-\lambda T_b})$, and it is well known that $K_\nu(z) \sim c(\nu)z^{-\nu}$ for z close to 0.

In particular, for a 3-dimensional Bessel process

$$E_0^3(\exp -\frac{\lambda^2}{2}T_b) = \frac{\lambda b}{\sinh \lambda b}$$

and, more generally

$$E_a^3(\exp -\frac{\lambda^2}{2}T_b) = \frac{b}{a}\frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda b}$$

From inversion of Laplace transform,

$$P_0^3(T_b \in dt) = \frac{\pi^2}{2b^2}\left(\Sigma_{n\in Z}(-1)^{n+1}n^2e^{-n^2\pi^2t/(2b^2)}\right)dt$$

Exercice 5.5.2 The power of a Bessel process is another Bessel process time-changed

$$q[R_t^{(\nu)}]^{1/q} \overset{loi}{=} R^{(\nu q)}(\int_0^t \frac{ds}{[R_s^{(\nu)}]^{2/p}})$$

where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \nu > -\frac{1}{q}$.

5.5.5 Laplace transforms

Proposition 5.5.2

$$E_r^{(\nu)}\left[\exp(-aR_t^2 - \frac{\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2})\right] = E_r^{(\gamma)}\left[\left(\frac{R_t}{r}\right)^{\nu-\gamma}\exp(-aR_t^2)\right] \tag{5.12}$$

where $\gamma^2 = \mu^2+\nu^2$.

Démonstration: Let $(R_t, t\geq 0)$ be a BES$^{(\nu)}$starting from $r > 0$.
From $\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty dv\exp(-vx)v^{\alpha-1}$, it follows that

$$E_r^{(\nu)}\left[\frac{1}{(R_t)^{2\alpha}}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty dv\, v^{\alpha-1}E_r^{(\nu)}[\exp(-vR_t^2)].$$

Therefore, for any $\alpha \geq 0$, the equality

$$E_r^{(\nu)}\left(\frac{1}{(R_t)^{2\alpha}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{1/2t} dv\, v^{\alpha-1}(1-2tv)^{\nu-\alpha}\exp(-r^2 v)$$

follows from the identity $E_r^{(\nu)}[\exp(-vR_t^2)] = \dfrac{1}{(1+2vt)^{1+\nu}}\exp\left(-\dfrac{r^2 v}{1+2vt}\right)$ and a change of variable.

We can also compute, using (5.6)

$$\begin{aligned} E_r^{(\nu)}\left[\exp(-aR_t^2 - \frac{\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2})\right] &= E_r^{(0)}\left[\left(\frac{R_t}{r}\right)^{\nu}\exp(-aR_t^2 - \frac{\mu^2+\nu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2})\right] \\ &= E_r^{(\gamma)}\left[\left(\frac{R_t}{r}\right)^{\nu-\gamma}\exp(-aR_t^2)\right] \end{aligned}$$

where $\gamma = \sqrt{\mu^2+\nu^2}$. The quantity $E_r^{(\gamma)}\left[\left(\dfrac{R_t}{r}\right)^{\nu-\gamma}\exp(-aR_t^2)\right]$ can be computed with the help of the first part of this section

$$\begin{aligned} E_r^{(\gamma)}\left[\left(\frac{1}{R_t}\right)^{2\alpha}\exp(-aR_t^2)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty dv v^{\alpha-1}E_r^{(\gamma)}[\exp(-(v+a)R_t^2)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty dv\, v^{\alpha-1}(1+2(v+a)t)^{-(1+\gamma)}\exp\left(-\frac{r^2(v+a)}{1+2(v+a)t}\right) \end{aligned}$$

therefore

$$E_r^{(\nu)}\left[\exp\left(-aR_t^2 - \frac{\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2}\right)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, r^{\nu-\gamma}}\int_0^\infty dv\, v^{\alpha-1}(1+2(v+a)t)^{-(1+\gamma)}\exp\left(-\frac{r^2(v+a)}{1+2(v+a)t}\right)$$

where $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma-\nu) = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu^2+\nu^2}-\nu)$.

Exercice 5.5.3 Prove, using the same method that

$$\begin{aligned} E_r^{(\nu)}\left[\frac{1}{R_t^\alpha}\exp(-\frac{\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2})\right] &= E_r^{(0)}\left[\frac{R_t^\nu}{r^\nu R_t^\alpha}\exp(-\frac{\mu^2+\nu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s^2})\right] \\ &= E^{(\gamma)}\left[\frac{R_t^{\nu-\gamma-\alpha}}{r^{\nu-\gamma}}\right] \end{aligned}$$

Proposition 5.5.3 *For a* BESQ^δ, *we have*

$$Q_x^\delta\left[\exp(-\frac{1}{2}b^2\int_0^1 \rho_s ds)\right] = (\cosh b)^{-\delta/2}\exp\left(-\frac{1}{2}xb\tanh b\right). \tag{5.13}$$

DÉMONSTRATION: For any locally bounded function F the process

$$Z_t \stackrel{def}{=} \exp\left[\int_0^t F(s)\sqrt{\rho_s}dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t F^2(s)\rho_s ds\right]$$

is a local martingale. The BESQ^δprocess ρ satisfies $d\rho_t = 2\sqrt{\rho_t}dW_t + \delta\, dt$, therefore

$$Z_t = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t F(s)d(\rho_s - \delta s) - \frac{1}{2}\int_0^t F^2(s)\rho_s ds\right].$$

If F is differentiable, an integration by parts leads to

$$\int_0^t F(s)d\rho_s = F(t)\rho_t - F(0)\rho_0 - \int_0^t \rho_s dF(s)$$

and

$$Z_t = \exp\left[\frac{1}{2}(F(t)\rho_t - F(0)x - \delta\int_0^t F(s)ds) - \frac{1}{2}\int_0^t [F^2(s)\rho_s ds + \rho_s dF(s)]\right]$$

Let us choose $F = \dfrac{\Phi'}{\Phi}$ where Φ satisfies for a given b

$$\Phi'' = b^2\Phi,\ \Phi(0) = 1,\ \Phi'(1) = 0\,.$$

It is easy to check that $\Phi(t) = \cosh(bt) - (\tanh b)\sinh(bt)$. Then,

$$Z_t = \exp\left[\frac{1}{2}(F(t)\rho_t - F(0)x - \delta\ln\Phi(t)) - \frac{b^2}{2}\int_0^t \rho_s ds\right]$$

is a martingale and

$$1 = E(Z_0) = E(Z_1) = E\left(\exp\left[-\frac{1}{2}x\Phi'(0) - \frac{\delta}{2}\ln\Phi(1) - \frac{b^2}{2}\int_0^1 R_s ds\right]\right)\,.$$

From $\Phi(1) = 1/\cosh b$ and $\Phi'(0) = -b\tanh b$ we get the result. □

Exercice 5.5.4 We can extend the previous result and prove that the Laplace transform of the process, i.e.

$$E\left[\exp\left(\int_0^t du\phi(u)r_u\right)\right]$$

is known. More generally, let μ be a positive, diffuse Radon measure on $I\!R^+$. The Sturm-Liouville equation $\Phi'' = \mu\Phi$ has a unique solution Φ_μ, which is positive, non-increasing on $[0,\infty[$ and such that $\Phi_\mu(0) = 1$. Let $\Psi_\mu(t) = \Phi_\mu(t)\displaystyle\int_0^t \frac{ds}{\Phi^2(s)}$.

1. Prove that Ψ is a solution of the Sturm-Liouville equation and that $\Psi_\mu(0) = 0, \Psi'_\mu(0) = 1$, and satisfies the Wronskian relation

$$W(\Phi_\mu, \Psi_\mu) = \Phi_\mu\Psi'_\mu - \Phi'_\mu\Psi_\mu = 1\,.$$

2. Prove that, for every $t \geq 0$, one has

$$\begin{aligned} Q_x^\delta\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t X_s d\mu(s)\right)\right) &= \frac{1}{\left(\Psi'_\mu(t)\right)^{\delta/2}}\exp\left(\frac{x}{2}\left(\Phi'_\mu(0) - \frac{\Phi'_\mu(t)}{\psi'_\mu(t)}\right)\right) \\ Q_x^\delta\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\infty X_s d\mu(s)\right)\right) &= (\Phi_\mu(\infty))^{\delta/2}\exp\left(\frac{x}{2}\Phi'_\mu(0)\right) \end{aligned}$$

5.6 Cox-Ingersoll-Ross processes

5.6.1 CIR processes and BESQ

The Cox-Ingersoll-Ross (CIR) process is the solution of

$$dr_t = k(\theta - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t\,. \tag{5.14}$$

Change of time

The change of time $A(t) = \sigma^2 t/4$ reduces the study of the solution of (5.14) to the case $\sigma = 2$: indeed, if $Z_t = r_{\sigma^2 t/4}$, then

$$dZ_t = k'(\theta - Z_t)\,dt + 2\sqrt{Z_t}dB_t$$

with $k' = k\sigma^2/4$ and B is a Brownian motion.
The CIR process (5.14) is a space-time changed BESQ process: more precisely,

$$r_t = e^{-kt}\rho(\frac{\sigma^2}{4k}(e^{kt} - 1))$$

where $(\rho(s), s \geq 0)$ is a $\mathrm{BESQ}^\delta(\alpha)$ process, with $\delta = \dfrac{4k\theta}{\sigma^2}$. (If needed, see the following theorem 8.3.3). In particular, if $\dfrac{4k\theta}{\sigma^2} > 2$, the process does not hit 0.

From the second theorem on the existence of solutions to SDE, the equation (5.14)admits a unique non-negative solution. Let us assume that $2k\theta \geq \sigma^2$ and denote $T_0^x \stackrel{def}{=} \inf\{t \geq 0 : r_t^x = 0\}$ the first hitting time of 0. Then, $P(T_0^x = \infty) = 1$, i.e., the process r does not reach 0. In the case $0 \leq 2k\theta < \sigma^2$ and $k > 0$, then $P(T_0^x < \infty) = 1$. If $k < 0$, then $P(T_0^x < \infty) \in]0, 1[$.

5.6.2 Transition probabilities for a CIR process

From the expression of a CIR process as a change of time of a square Bessel process, we obtain using the density of the squared Bessel process given in (5.8)

Proposition 5.6.1 *The transition density* $P(r_t \in dr | r_s = \rho) = f(r; t - s, \rho)dr$ *is given by*

$$f(r, t, \rho) = \frac{e^{kt}}{2c}(\frac{re^{kt}}{\rho})^{\nu/2} \exp\left(-\frac{\rho + re^{kt}}{2c}\right) I_\nu(\frac{1}{c}\sqrt{\rho r e^{kt}})$$

where $c = \dfrac{\sigma^2}{4k}(e^{kt} - 1)$ *and* $\nu = \frac{2k\theta}{\sigma^2} - 1$.

In particular, denoting by $r_t(\rho)$ the CIR process with initial value $r_0(\rho) = \rho$, the random variable $Y_t = r_t(\rho)e^{kt}/c$ has density

$$P(Y_t \in dy) = \frac{e^{-\alpha/2}}{2\alpha^{\nu/2}} e^{-y/2} y^{\nu/2} I_\nu(\sqrt{y\alpha})dy$$

where $\alpha = \rho/c$. This law is a non-central chi-square with $\delta = 2(\nu + 1)$ degrees of freedom, and α the parameter of non-centrality.

If we denote by $\chi^2(\delta, \alpha; y)$ the cumulative distribution function of this law, we obtain

$$P(r_T > \mu | r_0 = \rho) = 1 - \chi^2(\frac{4\theta}{\sigma^2}, \frac{\rho}{c}; \frac{Ke^{\mu T}}{c})$$

with $c = \dfrac{\sigma^2}{4k}(e^{kT} - 1)$.

Exercice 5.6.1 Let $X_i, i = 1, \ldots, n$ be n independent random variables with $X_i \stackrel{loi}{=} \mathcal{N}(m_i, 1)$. Check that $\sum_i X_i^2$ has a non-central chi-square with d degrees of freedom, and $\sum m_i^2$ non-centrality parameter.

5.6.3 CIR model for spot rate

The Cox-Ingersoll-Ross model for interest rate is the object of many studies since the seminal paper of Cox et al. [**?**] where the authors assume that the riskless rate r follows a square root process under the historical probability given by

$$dr_t = \tilde{k}(\tilde{\theta} - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t$$

where $\tilde{k}(\tilde{\theta} - r)$ defines a mean reverting drift pulling the interest rate toward its long term value θ with a speed of adjustment equal to $\tilde{k}$. In the risk adjusted economy, the dynamics are supposed to be given by :

$$dr_t = (\tilde{k}(\tilde{\theta} - r_t) - \lambda r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

where $(W_t, t \geq 0)$ is a Brownian motion under the risk adjusted probability Q, $k = \tilde{k} + \lambda$, $\theta = \tilde{k}(\tilde{\theta}/k)$, and where λ denotes the market price of risk. Therefore, we shall establish formulae under a general dynamics of the form (**??**). Even if no closed-form expression can be written for r_t, it is remarkable that the Laplace transform of the process, i.e.

$$E\left[\exp\left(\int_0^t du\phi(u)r_u\right)\right]$$

is known (See Exercise 5.5.4). In particular, the expectation and the variance of the random variable r_t can be computed. Dufresne has obtained formulae for the moments.

Chapter 6

CHANGEMENT DE PROBABILITÉ

On travaille avec un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ et un horizon fini T.

6.1 Théorème de Girsanov

6.1.1 Changement de probabilité

Proposition 6.1.1 *Soient P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. On suppose P et Q équivalentes. Alors il existe $(L_t, t \leq T)$, $P - (\mathcal{F}_t)$-martingale strictement positive telle que $Q = L_T P$ sur $\mathcal{F}_T$ et $Q_{|\mathcal{F}_t} = L_t P_{|\mathcal{F}_t}$, c'est-à-dire telle que $E_Q(X) = E_P(L_t X)$ pour toute variable X Q-intégrable $\mathcal{F}_t$-mesurable pour $t \leq T$. De plus, $L_0 = 1$ et $E_P(L_t) = 1$, $\forall t \leq T$*

Démonstration: Si la restriction de P et Q à $\mathcal{F}_T$ sont équivalentes, il existe une v.a. L_T $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $Q = L_T P$ sur $\mathcal{F}_T$ (Théorème de Radon-Nikodym). On dit que L_T est la densité de Q par rapport à P et $E_Q(X) = E_P(L_T X)$ pour toute variable X $\mathcal{F}_T$-mesurable et Q-intégrable (Voir Rappels, chap. 1). En particulier, L_T est strictement positive et $E_P(L_T) = 1$. Soit $L_t = E_P(L_T|\mathcal{F}_t)$. Par construction $(L_t, t \leq T)$ est une martingale et est la densité $\mathcal{F}_t$-mesurable de Radon-Nikodym de Q par rapport à P sur $\mathcal{F}_t$. En effet, si X est $\mathcal{F}_t$-mesurable et Q intégrable (par exemple bornée),

$$E_Q(X) = E_P(L_T X) = E_P[E_P(X L_T|\mathcal{F}_t)] = E_P[X E_P(L_T|\mathcal{F}_t)] = E_P(X L_t).$$

□

Il est à remarquer que dans ce cas, on a $P = (L_T)^{-1} Q$ et $E_P(Y) = E_Q(L_T^{-1} Y)$ et $(L_t^{-1}, t \leq T)$ est une Q-martingale.
On parlera de la loi[1] d'une variable (d'un processus) sous P ou sous Q suivant que l'espace est muni de la probabilité P ou Q. Une propriété vraie P-p.s. est vraie Q-p.s. Il convient de faire attention aux propriétés d'intégrabilité, une v.a. P intégrable n'est pas nécessairement Q-intégrable.

Proposition 6.1.2 *On a équivalence entre M est une Q-martingale et LM est une P-martingale.*

Démonstration: Soit M une Q-martingale. En utilisant la formule de Bayes et la propriété de P-martingale de L, on obtient, pour $s \leq t$,

$$M_s = E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) = \frac{E_P(L_t M_t|\mathcal{F}_s)}{L_s}$$

[1] " Les lois doivent tellement être propres au peuple pour lesquelles elles sont faites, que c'est un très grand hasard si celles d'une nation peuvent convenir à une autre". Montesquieu.

D'où le résultat. La réciproque résulte de la formule de Bayes . □

6.1.2 Théorème de Girsanov

On peut démontrer le résultat suivant, connu sous le nom de théorème de Girsanov

Théorème 6.1.1 *Soit* $(B_t, t \geq 0)$ *un mouvement brownien sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $(\mathcal{F}_t)$ *sa filtration canonique. Soit*

$$L_t := \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds],\ t \leq T$$

où θ *est un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté (autrement dit* $dL_t = L_t\theta_t dB_t$*). On suppose* $E(L_T) = 1$*. Soit* $dQ|_{\mathcal{F}_T} \stackrel{def}{=} L_T dP|_{\mathcal{F}_T}$*. Le processus* B_t *s'écrit* $B_t := \tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s ds$ *où* $\tilde{B}$ *est un* Q*-mouvement brownien.*

Sous la condition de Novikov $E_P(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds) < \infty$, L_T est une variable positive d'espérance 1 sous P et L est une P-martingale.
Si L n'est pas d'espérance 1, L est une surmartingale d'espérance strictement plus petite que 1. Nous verrons plus loin pourquoi nous utilisons des martingales L de cette forme.

Démonstration: Dans le cas $\theta = m$ (constante) on utilise la caractérisation du Brownien par la propriété de martingale de $\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$. Il faut donc montrer que $\exp(\lambda\tilde{B}_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$ est une Q-martingale, ou que

$$L_t \exp(\lambda(B_t - mt) - \frac{\lambda^2}{2}t) = \exp((\lambda + m)B_t - \frac{1}{2}[2m\lambda + (m^2 + \lambda^2)]t)$$

est une P-martingale, ce qui est évident. Dans le cas général, on peut facilement vérifier que $\tilde{B}$ est une Q-martingale, car $\tilde{B}L$ est une P-martingale. Le crochet de la Q-semi martingale B est le même que celui de sa partie martingale, soit celui de la Q-martingale $\tilde{B}$. Le crochet ne dépendant pas du choix de la probabilité, le crochet de B est t, et le crochet de $\tilde{B}$ est aussi t.
On peut également vérifier que $\tilde{B}_t^2 - t$ est une Q-martingale, car $(\tilde{B}_t^2 - t)L_t$ est une P martingale.
□

Une façon d'utiliser le théorème de Girsanov est la généralisation suivante

Proposition 6.1.3 *Soit* Z *une* P*-martingale locale continue et* Q *définie sur* $\mathcal{F}_t$ *par*

$$dQ = \exp(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)dP = L_t dP.$$

On suppose que Q *est une probabilité. Si* N *est une* P*-martingale locale continue, le processus* $(N_t - \langle N, Z\rangle_t = N_t - \frac{1}{L_t}\langle N, L\rangle_t, t \geq 0)$ *est une* Q*-martingale locale continue de crochet* $\langle N\rangle_t$*.*

Démonstration: La martingale $L_t = \exp(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)$ vérifie $dL_t = L_t dZ_t$. Le processus $(N_t - \langle N, Z\rangle_t, t \geq 0)$ est une Q-martingale locale: il suffit de vérifier que $(L_t N_t - L_t\langle N, Z\rangle_t, t \geq 0)$ est une P-martingale locale par application de la formule d'Itô. Le crochet de N ne dépend pas de la probabilité sous laquelle on travaille (sous réserve que cette probabilité soit équivalente à la probabilité de départ), car le crochet est défini comme limite des variations quadratiques. □

Une autre façon d'écrire ce résultat est de se placer sur l'espace canonique. On obtient ainsi l'absolue continuité de $\mathbf{W}$ (loi du Brownien) et $\mathbf{W}^{(\nu)}$ (loi du Brownien de drift ν).

$$\mathbf{W}^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t)\mathbf{W}|_{\mathcal{F}_t}\,. \tag{6.1}$$

Quelques mots d'explications. Dans le membre de droite, W est l'application canonique. Elle est notée W pour faire penser au Brownien mais pourrait être notée X comme nous allons le faire (comme dans une intégrale, la variable muette peut s'appeller x ou y). Cette écriture traduit que

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(F(X_u, u \leq t)) = \mathbf{W}(\exp(\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t)F(X_u, u \leq t))$$

pour toute fonctionnelle F.
Regardons le cas particulier $F(X_u, u \leq t)) = f(X_t)$. Le terme $\mathbf{W}^{(\nu)}(F(X_u, u \leq t))$ est alors $\mathbf{W}^{(\nu)}(f(X_t)) = E(f(W_t + \nu t))$ où dans le terme de droite W est un brownien (et donc $(W_t + \nu t, t \geq 0)$ un Brownien de drift ν). Le terme $\mathbf{W}(\exp(\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t)F(X_u, u \leq t))$ est $\mathbf{W}(\exp(\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t)f(X_t)) = E((\exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t)f(W_t))$ où dans le terme de droite W est un brownien. Le théorème de Girsanov nous dit que si W est un brownien sous P et $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t)dP|_{\mathcal{F}_t}$, alors

$$E_P(\exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t)f(W_t)) = E_Q(f(W_t)) = E_Q(f(\tilde{W}_t + \nu t)))$$

où $\tilde{W}$ est un Brownien sous Q. C'est exactement l'écriture (6.1).
Remarquer que ceci se généralise au cas où t est un temps d'arrêt et aussi au cas où le changement de probabilité est de la forme $\exp(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$.

On parle de formule de Cameron-Martin quand θ est déterministe.

6.1.3 Remarques

En utilisant les formules exponentielles déja vues, on remarque que L est solution de $dL_t = L_t\theta_t dB_t, L_0 = 1$. Il convient de remarquer que P s'obtient en fonction de Q par $dP = L_T^{-1}dQ$, avec

$$L_T^{-1} = \exp[-\int_0^T \theta(s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds].$$

Cette formule est souvent utile, mais il faut se souvenir que B est un brownien sous P. Si l'on veut écrire L en terme de Brownien sous Q, on obtient $L_T^{-1} = \exp[-\int_0^T \theta(s)d\tilde{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds]$. Le processus $(L_t^{-1}, t \geq 0)$ est une Q martingale, et si $X \in \mathcal{F}_T$ on a $E_P(X) = E_Q(L_T^{-1}X)$.

6.1.4 Exercices

a. Calcul de $E(B_t \exp[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds])$ pour $t < T$ et θ déterministe.

Si l'on veut calculer $I = E(B_t\ \exp[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds])$, où B est un brownien, on effectue le changement de probabilité avec $L_t = \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds]$ et on a

$$I = E_P(L_T B_t) = E_P(L_t B_t) = E_Q(B_t) = E_Q(\tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s\, ds) = \int_0^t E_Q(\theta_s)\, ds = \int_0^t \theta_s\, ds.$$

Utilisons sur cet exemple la notation (6.1).

$$I = \mathbf{W}(X_t \exp(\int_0^T \theta_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds)) = \mathbf{W}^{(\theta)}(X_t) = \mathbf{W}(X_t + \int_0^t \theta_s ds)$$

On peut en guise d'application calculer $E(B_t \exp B_t)$.

b. Calcul de $I = E(\exp[-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t ds B_s^2])$ où B est un brownien issu de a

On pose $x = a^2$ et on définit P^b par $dP^b = L_t dP$ avec

$$L_t = \exp[-\frac{b}{2}(B_t^2 - x - t) - \frac{b^2}{2}\int_0^t ds B_s^2]$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on a

$$L_t = \exp[-b\int_0^t B_s\, dB_s - \frac{b^2}{2}\int_0^t ds B_s^2]$$

et L est une P martingale. Sous P^b, $(\tilde{B}_t = B_t + b\int_0^t ds\, B_s, t \geq 0)$ est un brownien issu de a et $\beta_t = \tilde{B}_t - a$ est un brownien issu de 0. Sous P^b, on a

$$B_t = a + \beta_t - b\int_0^t ds\, B_s$$

donc B est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous P^b et B_t est une v.a. gaussienne d'espérance ae^{-bt} et de variance $\frac{1}{2b}(1 - e^{-2bt})$. On a

$$I = E^b(L_t^{-1} \exp[-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t ds B_s^2]) = E^b[\exp[-\alpha B_t^2 + \frac{b}{2}(B_t^2 - x - t)))$$

Il reste quelques calculs simples et longs pour obtenir

$$I = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b}\sinh bt)^{-1/2} \exp[-\frac{xb}{2}\frac{1 + \frac{2\alpha}{b}\coth bt}{\coth bt + \frac{2\alpha}{b}}] \,.$$

d. Temps d'atteinte

Proposition 6.1.4 *Si X est le processus défini par $X_t = \nu t + B_t$ et si $T_a^\nu = \inf\{t \geq 0; X_t = a\}$ est le temps d'atteinte de a, on a pour λ tel que $\nu^2 + 2\lambda > 0$,*

$$E(\exp(-\lambda T_a^\nu)) = \exp(\nu a - |a|\sqrt{\nu^2 + 2\lambda})\,.$$

Démonstration: Il suffit de remarquer que pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} E\left(\exp(-\lambda T_a^\nu)\right)) = E(\mathbb{1}_{(T_a^\nu < \infty)} \exp(-\lambda T_a^\nu)) &= \mathbf{W}^{(\nu)}(\exp(-\lambda T_a)\mathbb{1}_{(T_a < \infty)}) \\ &= \mathbf{W}(\exp(\nu X_{T^a} - \frac{1}{2}\nu^2 T^a)\exp(-\lambda T_a)\mathbb{1}_{(T_a^\nu < \infty)}) \\ &= e^{\nu a}\mathbf{W}[\exp(-\frac{1}{2}(\nu^2 + 2\lambda)T^a)] \end{aligned}$$

□

On verra dans la section **??** d'autres applications. Remarque $P(T_a^\nu < \infty) = 1$ si $a\nu > 0$ et $P(T_a^\nu < \infty) < 1$ sinon. On obtient

$$P(T_a^\nu \in dt) = \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} a e^{\nu a} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{a^2}{t} + \nu^2 t))\,.$$

6.1.5 Cas vectoriel

Mouvement Brownien standard

Si $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont indépendants sous P et si $dQ = L_t dP$ avec $L_t = L_t^1 L_t^2$ et

$$L_t^i = \exp\left[\int_0^t \theta_s^{(i)} dB_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t (\theta_s^{(i)})^2 ds\right]$$

on vérifie que $dL_t = L_t(\theta_t^{(1)} dB_t^{(1)} + \theta_t^{(2)} dB_t^{(2)})$ et que, sous Q , $\widetilde{B}_t^{(i)} = B_t^{(i)} - \int_0^t \theta^{(i)}(s)ds$ sont des MB indépendants.

Cas de MB corrélés

Soit $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ deux MB de coefficient de corrélation ρ sous P, $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle du couple $B^{(1)}, B^{(2)}$ et $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$ avec $dL_t = L_t(\theta^{(1)} dB_t^{(1)} + \theta^{(2)} dB_t^{(2)})$. Sous Q, $\widetilde{B}_t^{(i)} = B_t^{(i)} - \int_0^t (\theta^{(i)}(s) + \rho\theta^{(j)}(s))ds$ sont des MB de corrélation ρ sous Q. (Mais l'égalité entre L et le produit L^1L^2 n a pas lieu.) En effet, pour montrer que $\widetilde{B}^{(1)}$ est un Q-MB, il suffit de vérifier que $LB^{(1)}$ est une Q-martingale locale. La formule d'Itô conduit à

$$d(LB^{(1)}) = LB^{(1)}(\theta^1 dB^{(1)} + \theta^2 dB^{(2)}) + L(dB^{(1)} - (\theta^1 + \rho\theta^2)dt) + L(\theta^1 dt + \theta^2 \rho dt)$$

6.2 Application aux modèles financiers

Soit S vérifiant

$$dS(t) = S(t)[b(t)dt + \sigma(t)dW_t].$$

On peut trouver une (et une seule) probabilité Q équivalente à P telle que

$$dS(t) = S(t)[r(t)dt + \sigma(t)dB_t]$$

où B est un Q-mouvement Brownien, et r est le taux sans risque. Il suffit de prendre $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$ avec L solution de $L_0 = 1, dL_t = L_t\theta(t)dW_t$ avec $\theta(t) = -\sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t))$, sous réserve d'intégrabilité de θ. En effet

$$dB_t = dW_t - \theta(t)dt = dW_t + \frac{b(t) - r(t)}{\sigma(t)}dt$$

est un Q-MB et

$$b(t)dt + \sigma(t)dW_t = b(t)dt + \sigma(t)[dB_t + \theta(t)dt] = r(t)dt + \sigma(t)dB_t$$

La probabilité Q est appellée probabilité risque neutre. Soit $R_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)$ le coefficient d'actualisation. Le processus SR des prix actualisés vérifie $d(S_tR_t) = S_tR_t\sigma_t dB_t$, et est une Q-martingale locale.

6.2.1 Application à la valorisation d'un actif contingent en marché complet

On se place dans le cas r constant. Soit V_t la valeur en t d'un portefeuille auto-finançant dupliquant l'actif contingent ζ où ζ est une v.a. positive $\mathcal{F}_T$ mesurable, intégrable (on admet l'existence d'un tel portefeuille pour le moment). Dans le cas d'un call européen, ζ est égale à $(S_T - K)^+$.

Proposition 6.2.1 *Le processus VR est une Q-martingale et*

$$E_Q(R_T V_T \,|\mathcal{F}_t) = E_Q[R_T\zeta\,|\mathcal{F}_t] = V_t R_t.$$

DÉMONSTRATION: Admettons l'existence d'un portefeuille de duplication α, π tel que $V_t := \alpha_t S_t^0 + \pi_t S_t$ et $V_T = \zeta$. La condition d'autofinancement est, par définition $dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \pi_t dS_t$. Si on note $\tilde{V}_t := e^{-rt}V_t$ et $\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, les valeurs actualisées on montre facilement que $d\tilde{V}_t = \pi_t d\tilde{S}_t$ soit

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \pi_s d\tilde{S}_s = V_0 + \int_0^t \pi_s S_s R_s \sigma_s d\widetilde{B}_s. \tag{6.2}$$

On remarque qu'à tout processus π et à toute valeur initiale x on peut associer un α tel que le couple (α, π) soit autofinancant de valeur initiale x. Il suffit de calculer $\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \pi_s d\tilde{S}_s$ et de choisir α_t tel que $V_t = e^{rt}\tilde{V}_t = \alpha_t S_t^0 + \pi_t S_t$.

Le processus $\widetilde{V}$ est une intégrale stochastique par rapport à une Q-martingale, c'est donc une Q martingale locale. Si c'est une martingale,

$$\tilde{V}_t = E_Q(\tilde{V}_T\,|\mathcal{F}_t) = E_Q(e^{-rT}\zeta\,|\mathcal{F}_t). \tag{6.3}$$

Le portefeuille de couverture s'obtient au moyen de (6.2). Comme nous l'avons dit, si l'on connait π, il reste à poser $\alpha_t = \dfrac{1}{S_t^0}(V_t - \pi_t S_t) = \tilde{V}_t - \pi_t\tilde{S}_t$.

Il reste à prouver l'existence de π ce qui est obtenu au moins théoriquement au moyen d'un théorème de représentation (Voir chapitre sur les compléments).
La méthode est alors la suivante: pour évaluer ζ, il faut identifier la probabilité risque neutre, calculer $E_Q(e^{-rT}\zeta\,|\mathcal{F}_t)$ et identifier le π. On peut remarquer que, puisque ζ est positif, la valeur V_t du portefeuille de duplication aussi.

Dans le cas du modèle de Black et Scholes, $dS(t) = S(t)[bdt + \sigma\, dB_t]$ où b et σ sont constants,

$$dS_t = S(t)(rdt + \sigma d\tilde{B}_t)$$

où $\tilde{B}$ est un Q-MB et S est un Brownien géométrique. On a $dQ = L_t dP$ avec $dL_t = L_t\theta dB_t$ pour $\theta = -\dfrac{\mu - r}{\sigma}$. Le MB $\tilde{B}$ est $d\tilde{B} = dB - \theta dt$.

On peut donc calculer l'espérance conditionnelle (6.3) dans le cas $\zeta = (S_T - K)^+$. Il est facile de vérifier (utiliser la propriété de Markov) que $V_t = F(t, S_t)$ avec $F(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ (cf. formule de Black-Scholes).
Soit $\tilde{F}(t,x) := e^{-rt}F(t,x)$. La formule d'Itô montre que

$$\tilde{F}(t, S_t) = \tilde{F}(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u) d\tilde{S}_u$$

en tenant compte du fait que $\tilde{F}(t, S_t)$ est une martingale. On retrouve l'EDP d'évaluation en écrivant que le drift de $\tilde{F}(t, S_t)$ est nul
On peut donc prendre

$$\pi_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t).$$

Le terme $\frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$ est appellé le Delta du call, et on parle de Delta hedging.

On obtient également

$$\begin{aligned} V_t &= E_Q(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+)|\mathcal{F}_t) \\ &= e^{-rt}E_Q(S_T e^{-rT}\mathbb{1}_{S_T>K}) - Ke^{-rt}E_Q(e^{-rT}\mathbb{1}_{S_T>K}) \end{aligned}$$

Le premier terme peut se calculer à la main. On peut aussi écrire que $S_t e^{-rt}/S_0$ est une martingale positive d'espérance 1 et faire un changement de probabilité. On pose $S_t e^{-rt} = S_0 M_t$ où M est la

Q-martingale $dM_t = \sigma M_t dB_t$. C'est une martingale positive d'espérance 1, on peut donc l'utiliser comme changement de probabilité. Soit $\hat{Q} = M_t dQ$. Sous $\hat{Q}$, le processus $\hat{B} = B - \sigma dt$ est un MB et $dS_t = S_t(rdt + \sigma(d\hat{B}_t + \sigma dt)) = S_t(r + \sigma^2)dt + \sigma d\hat{B})$ soit

$$S_T = S_0 \exp[(r + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \hat{B}_T] = S_0 \exp[(r + \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \hat{B}_T]$$

$$E_Q(S_T e^{-rT} \mathbb{1}_{S_T > K}) = S_0 E_Q(M_T \mathbb{1}_{S_T > K/S_0}) = S_0 \hat{Q}(S_T > K/S_0)$$

et nous savons calculer cette quantité qui s'écrit

$$\hat{Q}(\hat{B}_T > \frac{1}{\sigma} \ln(K/S_0) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T).$$

Voir le paragraphe sur le changement de numéraire.

6.2.2 Arbitrages

Un arbitrage est une possibilité d'investir dans le marché financier sans mise de fonds (avec une richesse initiale nulle) et de terminer avec un portefeuille de valeur positive quelque soit l'évolution du marché, non identiquement nul. En termes probabilistes, c'est un portefeuille π adapté tel que la valeur terminale de la stratégie auto-financante associée soit positive:

$$V_0(\pi) = 0, V_T(\pi) \geq 0, E(V_T) > 0\,.$$

L'hypothèse de non arbitrage stipule que l'on doit exclure de telles opportunités du modèle.

6.2.3 Hedging methodology

Let S be a semi-martingale which represents the price of the risky asset and denote by $(\mathcal{F}_t^S, t \geq 0)$ the filtration generated by S. A contingent claim H is an $\mathcal{F}_T^S$-measurable random variable where T is a fixed horizon. An hedging portfolio consists of a pair of predictable processes $(\pi_t^0, \pi_t; t \geq 0)$ such that, if $V_t(\pi^0, \pi) = \pi_t^0 e^{rt} + \pi_t S_t$ is the t-time value of the portfolio, the self-financing condition

$$dV_t(\pi^0, \pi) = r\pi_t^0 e^{rt} dt + \pi_t dS_t$$

holds and $V_T = H$. The value $V_t = V_t(\pi^0, \pi)$ is the t-time price of H. In particular if $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ is the discounted value of the portfolio, Itô's formula implies that $\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \pi_s d\tilde{S}_s$. Hence, a self-financing strategy (π^0, π) is characterized by the knowledge of its initial value V_0 and of its risky part π. Some technical hypotheses (integrability of π and existence of a lower bound for V) have to be taken into account in order to avoid arbitrage strategies as doubling strategies. The first theorem of asset pricing states that the market is arbitrage free if and only if there exists a probability Q (called an equivalent martingale measure, in short emm), equivalent to P such that discounted prices are Q-martingales. A market is said to be complete if any contingent claim H admits an hedging portfolio. From the second theorem of asset pricing, an arbitrage free market is complete if and only if there exists a unique emm. In that case, the price $V_t(H)$ of the contingent claim H is defined as the value of the hedging portfolio and is given by

$$V_t(H) = e^{rt} E_Q(He^{-rT} | \mathcal{F}_t^S)\,.$$

Indeed, from the definition, the discounted value of an hedging portfolio is a stochastic integral with respect to the discounted value of the asset, hence is a Q-martingale. (We avoid here the distinction between local martingales and martingales). The uniqueness of the emm is linked with the predictable representation property of the discounted price process $\widetilde{S}$, which states that any $\mathcal{F}_T^S$-measurable random variable can be written as $x + \int_0^T \pi_s d\tilde{S}_s$ for a predictable process π.

In that case, denoting by L the Radon-Nikodym density of the emm (i.e. $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$) a process Z is the t-time value of a self-financing portfolio if and only if the process $(L_t \tilde{Z}_t, t \geq 0)$ is a P-martingale (i.e. the discounted process $\tilde{Z}$ is a Q-martingale).

In the Black and Scholes framework, the market is shown to be complete. Indeed, the Brownian motion enjoys the predictable representation property, whence the existence of an hedging strategy is obtained from the obvious remark that the filtration generated by S is equal to the filtration generated by B, and from the hypothesis that σ and S do not vanish.

In order to hedge contingent claims, the explicit value of the hedging portfolio π is crucial. In a Markovian setting, it can be obtained from the hedging price process V as follows.
Let us recall that a Markov process X is an $\mathbf{F}$-adapted process such that for $t \geq s$ and for every bounded Borelian function f, $E(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = E(f(X_t)|X_s)$. The process X is a strong Markov process if for any finite stopping time τ and any bounded Borelian function f, $E(f(X_{\tau+t})|\mathcal{F}_T) = E(f(X_{\tau+t})|X_T)$. The infinitesimal generator of a Markov process is the operator $\mathcal{L}$ defined on a set D of smooth functions such that for $f \in D$, the process $f(t, X_t) - \int_0^t \mathcal{F}f(s, X_s)ds$ is a martingale. The solution of a stochastic differential equation $dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ where a and σ are Lipschitz function is a Markov process (see Karatzas and Shreve (1999)) with generator $\mathcal{F}(f) = \partial_t f + a(t,x)\partial_x f + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\partial_{xx} f$.
Let S be a solution of $dS_t = S_t(\mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t)$, and assume that S is a Markov process. If moreover, the contingent claim is of European type, i.e. $H = h(S_T)$, then $V_t(H)$ is a function of t and S_t, say $V_t(H) = v(t, S_t)$. Thanks to the martingale property of the discounted prices and using Itô's formula, one gets that h satisfies the so-called evaluation equation

$$\partial_t v(t,x) + r(t)x\partial_x v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)x^2\partial_{xx} v(t,x) = r(t)v(t,x)$$

with the boundary condition $v(T, x) = h(x)$ and the risky part π of the hedging strategy is given by the derivative of v with respect to the second variable.

In a more general setting, one can use Malliavin's derivative (see Nualart (1995) for more comments). For $h \in L^2([0,T])$, let $W(h) = \int_0^T h(s)dW_s$. For a smooth function f, the derivative of a random variable of the form $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))$ is defined as the process $(D_t F, t \leq T)$ by

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \ldots, W(h_n))h_i(t)\,.$$

It is noticeable that this derivative can be interpreted as a Frèchet derivative. The Clark-Ocone representation formula states that

$$F = E(F) + \int_0^T E(D_t F|\mathcal{F}_t)dW_t\,.$$

As an example, the derivative of $F = f(W_T)$ is $f'(W_T)$, hence

$$f(W_T) = E(f(W_T)) + \int_0^T E(f'(W_T)|\mathcal{F}_t)dW_t\,.$$

6.2.4 Arbitrage et mme

On peut montrer que l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage équivaut à l'existence d'une probabilité Q telle que sous Q les prix actualisés sont des martingales. Ce théorème est très difficile et nécessite quelques hypothèses techniques. On consultera [?] et, dans le cas général [?].

6.2.5 Cas général

Lorsqu'il existe une unique probabilité telle que les actifs actualisés sont des martingales, on évalue les actifs de la même façon. De telles probabilités sont appellées mesures martingale équivalentes (MME). Il se peut qu'il existe plusieurs (et dans ce cas c'est une infinité) MME. Dans ce cas, le marché n'est pas complet, et l'on peut associer à toute v.a. $\zeta = h(S_T)$ une fourchette de prix définie par $]\inf_Q E_Q(e^{-rT}h(S_T)), \sup_Q E_Q(e^{-rT}h(S_T))[$. On peut montrer que la borne supérieure de la fourchette de prix est la plus petite valeur initiale d'un portefeuille de surcouverture.

6.3 Probabilité forward-neutre

Différentes approches sont utilisées en temps continu pour étudier la structure par terme des taux. La première consiste à modèliser le prix des zéro-coupons en respectant l'hypothèse d'A.O.A. et à en déduire l'expression du taux spot. Une autre approche utilise le taux spot comme variable explicative. Nous allons évoquer ici comment un changement de probabilité permet de valoriser facilement des produits sur taux.

6.3.1 Définitions

On donne les mêmes définitions qu'en temps discret. On appelle *zéro-coupon de maturité T*, un titre versant un franc à la date T, et ne donnant aucun flux entre t et T. On suppose[2] que, pour tout T, il existe un zéro-coupon de maturité T.

Le prix à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T est noté $P(t,T)$. On a $P(T,T) = 1$.

Si $S(t)$ est le prix d'un actif financier en unités de la date t, on appelle *prix forward* de S le prix exprimé en unités de la date T, soit $S_F(t) = \dfrac{S(t)}{P(t,T)}$.

On introduit *le rendement à l'échéance*[3] en t, soit $Y(t,T)$ défini par

$$P(t,T) = \exp -(T-t)Y(t,T).$$

Le *taux spot forward* en t pour la maturité T est

$$f(t,T) = -\left[\frac{\partial \ln P(t,\theta)}{\partial \theta}\right]_{\theta=T}.$$

On a alors $Y(t,T) = \dfrac{1}{T-t}\displaystyle\int_t^T f(t,u)\,du$.

Le *taux spot instantané* est

$$r(t) \;=\; \lim_{T\to t} Y(t,T) \;:=\; -\left[\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}\right]_{T=t} = f(t,t).$$

La courbe des taux est la fonction $\theta \to Y(t,\theta)$.

Le facteur d'actualisation est

$$R(t) := \exp\; -\int_0^t r(s)\,ds.$$

[2]cette hypothèse n'est pas réalisée en pratique.
[3]yield to maturity.

On peut à chaque instant t observer une gamme des taux, c'est-à-dire la famille $s \to Y(t, s+t)$ des taux d'intérêt de maturité $s+t$ au jour t. On désire étudier le comportement de la courbe $Y(t,\theta)$ en fonction de la courbe des taux aujourd'hui, c'est à dire $Y(0,\theta)$.

Dans un modèle déterministe, on doit avoir

$$P(t,T) = P(t,u)P(u,T), \quad \forall\, t \leq u \leq T\,,$$

pour éviter les opportunités d'arbitrage. On en déduit, sous une hypothèse de différentiabilité, l'existence d'une fonction r telle que $P(t,T) = \exp - \int_t^T r(s)\, ds$. On vérifie que, comme dans le modèle discret, on a $f(t,T) = f(0,T) = r(T)\,, \quad \forall\, t \leq T$ et $Y(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(u)\, du$. Le rendement à l'échéance est la valeur moyenne du taux spot.

Dans un modèle stochastique, on se donne comme toujours un espace probabilisé muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$ que l'on supposera être une filtration Brownienne. On suppose qu'à la date t, le prix $P(t,.)$ des zéro-coupons est connu, c'est-à-dire que les variables $P(t,.)$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables. Pour expliciter l'hypothèse d'A.O.A., on suppose que les processus $P(.\,,T)$ sont positifs, adaptés, continus et que $P(t,T)$ est dérivable par rapport à T de dérivée continue.¡

On suppose qu'il existe une probabilité Q sous laquelle les prix actualisés sont des martingales de carré intégrable : sous Q, le processus $R(t)P(t,T)$ est une martingale. Cette propriété est vraie pour tout T, pour éviter les opportunités d'arbitrage entre des produits de maturités différentes.

Cette propriété entraîne des résultats intéressants. Tout d'abord, puisque $P(T,T) = 1$, on obtient que $P(0,T) \;=\; E_Q(R(T))$, et que

$$P(t,T) \;= E_Q[\exp - \int_t^T r(u)\, du\,|\mathcal{F}_t]$$

6.3.2 Changement de numéraire

a. Probabilité forward-neutre

La valeur à la date t d'un flux déterministe F reçu à la date T est

$$FP(t,T) = \; F\, E_Q[\exp - \int_t^T r(u)\, du\,|\mathcal{F}_t].$$

Si ce flux est aléatoire, la valeur à la date t de ce flux est

$$E_Q[F\, \exp - \int_t^T r(u)\, du\,|\mathcal{F}_t].$$

Il est possible d'interpréter cette formule en l'écrivant $F_c P(t,T)$, où F_c est *l'équivalent certain*[4] de F et est défini par

$$F_c = \; \frac{1}{P(t,T)} E_Q[F\, \exp - \int_t^T r(u)\, du\,|\mathcal{F}_t].$$

Nous allons écrire cette dernière égalité en utilisant un changement de probabilité.

Par hypothése A.O.A, le processus $R(t)P(t,T)$ est une Q-martingale, son espérance est constante, égale à $P(0,T)$.

[4] "Je préfère la certitude aux calculs des probabilités" Prévert, La Tour, Oeuvres complètes, Ed. Pléiade, p.247

Pour tout T, le processus $\zeta_t^T := \dfrac{R(t)P(t,T)}{P(0,T)}$ est une Q-martingale positive d'espérance 1. On peut donc utiliser ζ_t^T comme densité de changement de probabilité. Soit Q_T la mesure de probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par $Q_T(A) = E_Q(\zeta_t^T 1_A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$. Lorsque T est fixé, on notera $\zeta_t = \zeta_t^T$.

Définition 6.3.1 *La probabilité Q_T définie sur $\mathcal{F}_T$, par $\dfrac{dQ_T}{dQ} = \zeta_t^T$ est appelée probabilité forward-neutre de maturité T.*

Avec cette notation

$$E_{Q_T}(F\,|\mathcal{F}_t) = E_Q(F\,\frac{\zeta_T}{\zeta_t}|\mathcal{F}_t) = F_c.$$

Lorsque F est la valeur d'un titre, l'équivalent certain F_c est appellé le prix à terme de F.

Lorsque r est déterministe, $Q_T = Q$.

La mesure Q_T est la martingale mesure associée au choix du zéro-coupon de maturité T comme numéraire, comme l'explicite la propriété suivante.

Proposition 6.3.1 *Si X est un processus de prix, le prix forward $(X_t/P(t,T), 0 \le t \le T)$ est une martingale sous Q_T.*

Soit T fixé. Soit X un processus de prix. Par définition de la martingale mesure Q, le processus des prix actualisés $(X_t R(t), t \ge 0)$ est une Q-martingale. Nous voulons montrer que $(X_t/P(t,T); t \le T)$ est une Q_T-martingale, ce qui équivaut à $(X_t\zeta_t/P(t,T)$ est une Q martingale. Comme $X_t\zeta_t/P(t,T) = X_t R(t)/P(0,T)$, c'est immédiat.
On peut aussi détailler: D'après la formule du changement de probabilité dans les espérances conditionnelles on a

$$E_{Q_T}\left[\frac{X_t}{P(t,T)}\,|\mathcal{F}_s\right] \;=\; \frac{E_Q\left[\frac{X_t\zeta_t}{P(t,T)}\,|\mathcal{F}_s\right]}{E_Q[\zeta_t\,|\mathcal{F}_s]} \;=\; \frac{E_Q\left[X_t R_t\,|\mathcal{F}_s\right]}{P(0,T)\zeta_s} \;=\; \frac{X_s}{P(s,T)}.\;\square$$

b. Contrats forward et futures

Un contrat forward est l'engagement d'acheter le sous jacent au prix prévu au moment de la signature du contrat. Il n'y a aucun versement d'argent à la signature.

Proposition 6.3.2 *Le prix à la date t d'un contrat forward de maturité T sur un actif dont le processus de prix est $V(s)$ est*

$$G(t) \;=\; E_{Q_T}(V(T)|\mathcal{F}_t)\,.$$

Le prix d'un contrat future (prix future) est

$$H(t) = E_Q(V(T)|\mathcal{F}_t)\,.$$

Si r est déterministe, prix future et forward sont égaux.

c. Taux spot

Proposition 6.3.3 *Le taux spot forward $f(t,T)$ est une Q_T-martingale*

$$f(t,T) = E_{Q_T}\left[r_T\,|\mathcal{F}_t\right]\,,\; t \le T,$$

égale au prix forward d'un contrat écrit sur le taux spot.

En particulier $f(0,T) = E_{Q_T}(r(T))$ est le prix à la date 0 d'un contrat forward écrit sur le taux spot de même maturité.

Le prix d'un zéro-coupon s'exprime en fonction du taux spot par

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T E_{Q_s}\left[r_s\,|\mathcal{F}_t\right] ds\right)\ ,\ t \leq T.$$

Par définition, le taux forward $f(t,T)$ est égal à $\lim_{h\to 0} \frac{P(t,T+h)-P(t,T)}{h\,P(t,T)}$. Le processus $P(t,T+h)$ est un processus de prix, donc $\frac{P(t,T+h)}{P(t,T)}$ est une Q_T-martingale; il en résulte que

$$f(t,T) = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E_{Q_T}\{(P(T,T+h)-1)\,|\mathcal{F}_t\},$$

soit $f(t,T) = E_{Q_T}\left[r_T|\mathcal{F}_t\right]$. Par définition $\ln P(t,T) = -\int_t^T f(t,s)ds$, d'où

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T E_{Q_s}\left[r_s\,|\mathcal{F}_t\right]\,ds\right). \square$$

d. Prix forward, prix future

On peut préciser la relation entre prix forward et prix future. Soit Z une variable intégrable $\mathcal{F}_T$ mesurable et $Z_u = E_Q(Z|F_u)$

$$E_{Q_T}(Z\,|\mathcal{F}_t) = E_Q(Z\,|\mathcal{F}_t) - \int_t^T \mathrm{Cov}_{Q_u}(Z_u, r(u)\,|\mathcal{F}_t)\,du.$$

où $\mathrm{Cov}_{Q_u}(X,Y\,|\mathcal{F}_t) = E_{Q_u}(XY|\mathcal{F}_t) - E_{Q_u}(X|\mathcal{F}_t)E_{Q_u}(Y|\mathcal{F}_t)$.

En particulier

$$E_{Q_T}(Z) = E_Q(Z) - \int_0^T \mathrm{Cov}_{Q_u}(Z, r(u))\,du.$$

Proposition 6.3.4 *Le prix à la date* 0 *d'un contrat forward de maturité T écrit sur Z est le prix à la date* 0 *d'un contrat future de même nature moins un biais de covariance.*

6.3.3 Changement de numéraire

Il peut être utile de faire un autre changement de numéraire, par exemple de choisir un actif S comme unité monétaire.

6.3.4 Valorisation d'une option sur obligation à coupons

Le prix d'une option Européenne de payoff $h(T)$ à la date T est donné par

$$C(t) \ = \ R_t^{-1}E_Q\left[h(T)R_T\,|\mathcal{F}_t\right].$$

Considérons une option de maturité T sur un produit qui verse des flux déterministes F_n aux dates $T_n,\ T < T_n < T_{n+1}$ et soit $V(t) \ = \ \sum_{n=1}^N F_n P(t,T_n)$.

Théorème 6.3.1 *Le prix d'une option Européenne de prix d'exercice K et de maturité T sur un produit qui verse des flux F_n aux dates T_n est*

$$C(0) \;=\; \sum_{n=1}^{N} F_n P(0,T_n) Q_n[V(T) > K] - K P(0,T) Q_T[V(T) > K]$$

où Q_n est la probabilité forward neutre de maturité T_n.

Par définition

$$C(0) = E_Q(R_T(V(T) - K)^+) = E_Q\left[R_T\left(\sum_{n=1}^{N} F_n P(T,T_n) - K\right)^+\right],$$

ce qui s'écrit

$$C(0) = \sum_{n=1}^{N} F_n E_Q[R_T P(T,T_n) 1_{\{V(T)>K\}}] - K E_Q[R_T 1_{\{V(T)>K\}}].$$

Par définition de Q_n, on a

$$E_Q[R_T P(T,T_n) 1_{\{V(T)>K\}}] = P(0,T_n) E_{Q_n}[1_{\{V(T)>K\}}]$$

ce qui donne le résultat. $\square$

Chapter 7

Hitting Times

Les lois des temps d'atteinte de frontières sont d'un usage constant en finance. Nous avons rassemblé ici les résultats connus. Ce chapitre contiendra sans doute des redites. Ce chapitre est un extrait d'un ouvrage à paraitre, ce qui explique (mais ne justifie pas) sa rédaction en Anglais. In this chapter, a Brownian motion $(W_t, t \geq 0)$ starting from 0 is given on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_\mathbf{t}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0})$ is its natural filtration. The function $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ $\mathcal{N}(x)$ cumulative function of the standard Gaussian law is the cumulative function of a standard Gaussian law. We establish well known results on hitting time of a level for a geometric Brownian motion, and we study Barrier options. We emphasize that main results on Barrier option valuation can be obtained without any knowledge of hitting time law. We give also an extended bibliography related with hitting times. An excellent reference is the book of Borodin and Salminen [**?**] where many results and references can be found.
For a continuous process X, we shall denote by $T_a(X)$ (or, if there are no ambiguity, T_a) the hitting time of the level a defined as

$$T_a(X) = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t = a\}\,.$$

The first time where X is above (resp. below) the level a is

$$T_a^+ = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \geq a\}, \quad \text{resp.}\, T_a^- = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \leq a\}\,.$$

For $X_0 = x$ and $a > x$, we have $T_a^+ = T_a$.

7.1 Hitting Times and Law of the Maximum for Brownian Motion

Let us study the law of the pair of random variables (W_t, M_t) where M is the maximum process of the Brownian motion, i.e., $M_t \stackrel{def}{=} \sup_{s \leq t} W_s$. Maximum! of a BM over $[0, t]$ Let us remark that the process M is an increasing process, with non-negative values. Then, we deduce the law of hitting times of a given level by the Brownian motion.

7.1.1 Law of the Pair of the Random Variables (W_t, M_t)

Let us show the reflection principle Reflection principle

Proposition 7.1.1 Reflection principle. *For* $0 \leq y,\, x \leq y$ *:*

$$P(W_t \leq x \,, M_t \geq y) = P(W_t \geq 2y - x)\,. \tag{7.1}$$

DÉMONSTRATION: Let $T_y^{=} = \inf\{t : W_t \geq y\}$ be the first time where the Brownian motion is greater than y. This is an $\mathbf{F}$-stopping time and $(T_y^{+} \leq t) = (M_t \geq y)$ for $y \geq 0$. Furthermore, from $y \geq 0$ and by relying on the continuity of Brownian motion paths, the stopping time $T_y^{=}$ is also the hitting time of y, i.e., $T_y^{+} = T_y = \inf\{t : W_t = y\}$ and $W_{T_y} = y$. Therefore

$$P(W_t \leq x\,, M_t \geq y) = P(W_t \leq x\,, T_y \leq t) = P(W_t - W_{T_y} \leq x - y\,, T_y \leq t)\,.$$

For the sake of simplicity, we denote $E_P(\mathbb{1}_A|T_y) = P(A|T_y)$. By relying on the strong Markov property, we obtain

$$\begin{aligned} P(W_t - W_{T_y} \leq x - y\,, T_y \leq t) &= E(\mathbb{1}_{T_y \leq t}\, P(W_t - W_{T_y} \leq x - y\,|T_y)) \\ &= E(\mathbb{1}_{T_y \leq t}\, \Phi(T_y)) \end{aligned}$$

with $\Phi(u) = P(\tilde{W}_{t-u} \leq x - y\,)$ where $(\tilde{W}_u \stackrel{def}{=} W_{T_y+u} - W_{T_y}, u \geq 0)$ is a Brownian motion independent of $(W_t, t \leq T_y)$, and with the same law as $-\tilde{W}$. Therefore $\Phi(u) = P(\tilde{W}_{t-u} \geq y - x\,)$ and by proceeding backward:

$$E(\mathbb{1}_{T_y \leq t}\, \Phi(T_y)) = E[\mathbb{1}_{T_y \leq t} P(W_t - W_{T_y} \geq y - x\,|T_y)] = P(W_t \geq 2y - x\,, T_y \leq t).$$

Hence

$$P(W_t \leq x, M_t \geq y) = P(W_t \geq 2y - x, M_t \geq y) \tag{7.2}$$

The right-hand side of (7.2) is equal to $P(W_t \geq 2y - x)$ since $2y - x \geq y$ which implies that, on the set $\{W_t \geq 2y - x\}$, the hitting time T_y is smaller than t (or $M_t \geq y$.) □

Théorème 7.1.1 *Let W be a Brownian motion starting from 0 and $M_t = \sup(W_s, 0 \leq s \leq t)$.*

$$\text{for} \quad y \geq 0, x \leq y, \quad P(W_t \leq x, M_t \leq y) = \mathcal{N}(\frac{x}{\sqrt{t}}) - \mathcal{N}(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}), \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} \text{for} \quad y \geq 0,\, x \geq y, \quad P(W_t \leq x, M_t \leq y) &= P(M_t \leq y) \\ &= \mathcal{N}(\frac{y}{\sqrt{t}}) - \mathcal{N}(\frac{-y}{\sqrt{t}}), \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\text{for} \quad y \leq 0, \quad P(W_t \leq x, M_t \leq y) = 0\,. \tag{7.5}$$

The density of the pair (W_t, M_t) is

$$P(W_t \in dx, M_t \in dy) = \mathbb{1}_{y \geq 0} \mathbb{1}_{x \leq y} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\, (2y - x) \exp\left(-\frac{(x-2y)^2}{2t}\right) dx\, dy\,. \tag{7.6}$$

DÉMONSTRATION: From the reflection principle it follows that, for $y \geq 0, x \leq y$,

$$\begin{aligned} P(W_t \leq x\,, M_t \leq y) &= P(W_t \leq x) - P(W_t \leq x\,, M_t \geq y) \\ &= P(W_t \leq x) - P(W_t \geq 2y - x)\,, \end{aligned}$$

hence (7.3) is obtained.
For $0 \leq y \leq x$,

$$P(W_t \leq x, M_t \leq y) = P(W_t \leq y, M_t \leq y)$$

since $M_t \geq W_t$. Furthermore, by setting $x = y$ in (7.3)

$$P(M_t \leq y) = P(W_t \leq y, M_t \leq y) = \mathcal{N}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{-y}{\sqrt{t}}\right)\,. \tag{7.7}$$

Finally, for $y \leq 0$, $\quad P(W_t \leq x, M_t \leq y) = 0$ since $M_t \geq M_0 = 0$. □

Comments 1 We have also proved that the process B defined as

$$B_t = W_t 1\!\!1_{t<T_y} + (2y - W_t) 1\!\!1_{T_y \le t}$$

is a Brownian motion.

Remarque 7.1.1 Let $\tau = \inf\{t > 0 \,:\, B_t = 0\}$. Then $P(\tau = 0) = 1$.

7.1.2 Hitting Time Process

Proposition 7.1.2 *Let W be a Brownian motion and define $T_y = \inf\{t \,:\, W_t = y\}$ for any $y > 0$. The increasing process $(T_y, y \ge 0)$ has independent and stationary increments. It enjoys the scaling property*

$$T_{\lambda y} \overset{loi}{=} (\lambda^2 T_y, y \ge 0)\,.$$

Démonstration: The increasing property follows from the continuity of paths of the Brownian motion. For $z > y$,

$$T_z - T_y = \inf\{t \ge 0 \,:\, W_{T_y + t} - W_{T_y} = z - y\}\,.$$

Hence, the independence and the stationarity properties follow from the Markov property. Let $\lambda > 0$. Then, from scaling property of the BM,

$$T_{\lambda y} = \inf\{t \,:\, \frac{1}{\lambda} W_t = y\} \overset{loi}{=} \lambda^2 \inf\{t \,:\, \hat{W}_t = y\}$$

where $\hat{W}$ is the BM $\hat{W}_t = \dfrac{1}{\lambda} W_{\lambda^2 t}$. □

The process $(T_y, y \ge 0)$ is a stable subordinator. (See Section **??**.)

7.1.3 Law of the Supremum of a Brownian Motion over $[0, t]$

Proposition 7.1.3 *The random variable M_t has the same law as $|W_t|$.*

Démonstration: This follows from (7.7). □

Comments 2 The process M does not have the same law as the process $|W|$. Indeed, the process M is an increasing process, this is not the case for $|W|$. Nevertheless, there are some further equalities in law, as $M - W \overset{loi}{=} |W|$ between these processes (See Lévy's Theorem **??**).

7.1.4 Law of the Hitting Time

For $x > 0$, the law of the hitting time of the level x defined as $T_x = \inf\{s : W_s = x\}$ can be now easily deduced from

$$P(T_x \le t) = P(x \le M_t) = P(x \le |W_t|) = P(x \le |G|\sqrt{t}) = P(\frac{x^2}{G^2} \le t)\,, \tag{7.8}$$

where, as usual G stands for a Gaussian random variable, with zero expectation and unit variance. Hence, $T_x \overset{loi}{=} \dfrac{x^2}{G^2}$ and the density of the r.v. T_x follows:

$$P(T_x \in dt) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) 1\!\!1_{t \ge 0}\, dt\,.$$

For $x < 0$, we have, using the symmetry of the BM

$$T_x = \inf\{t \,:\, W_t = x\} = \inf\{t \,:\, -W_t = -x\} \overset{loi}{=} T_{-x}$$

and it follows that, for any $x \neq 0$,

$$P(T_x \in dt) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) 1\!\!1_{t\geq 0}\, dt\,. \tag{7.9}$$

In particular, for $x \neq 0$, $P(T_x < \infty) = 1$ and $E(T_x) = \infty$.

7.1.5 Law of the Infimum

The law of the infimum of a Brownian motion is obtained by relying on the same procedure. It can also be deduced by observing that

$$m_t \stackrel{def}{=} \inf_{s\leq t} W_s = -\sup_{s\leq t}(-W_s) = -\sup_{s\leq t}(B_s)$$

where $B = -W$ is a Brownian motion. Hence

$$\begin{aligned}
&\text{for} \quad y \leq 0, x \geq y \qquad && P(W_t \geq x, m_t \geq y) && = \mathcal{N}(\frac{-x}{\sqrt{t}}) - \mathcal{N}(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}),\\
&\text{for} \quad y \leq 0,\, x \leq y && P(W_t \geq x, m_t \geq y) && = \mathcal{N}(\frac{-y}{\sqrt{t}}) - \mathcal{N}(\frac{y}{\sqrt{t}})\\
&&&&& = 1 - 2\mathcal{N}(\frac{y}{\sqrt{t}})\,,\\
&\text{for} \quad y \geq 0 && P(W_t \geq x, m_t \geq y) && = 0\,.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

In particular, for $y \leq 0$, $P(m_t \geq y) = \mathcal{N}(\frac{-y}{\sqrt{t}}) - \mathcal{N}(\frac{y}{\sqrt{t}})$.
If the Brownian motion W starts from z at time 0 and $T_0 = \inf\{t \,:\, W_t = 0\}$, then, for $z > 0, x > 0$, we obtain

$$P_z(W_t \in dx, T_0 > t) = P_0(W_t + z \in dx, T_{-z} > t) = P_0(W_t + z \in dx, m_t > -z)\,.$$

Therefore, for $z > 0$, differentiating (7.10) with respect to x,

$$P_z(W_t \in dx, T_0 > t) = \frac{1\!\!1_{x\geq 0}}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(z+x)^2}{2t}\right)\right] dx\,. \tag{7.11}$$

7.1.6 Laplace Transform of the Hitting Time

Laplace transform of! hitting time for a BM

Proposition 7.1.4 *Let T_y be the hitting time of $y \in \mathbb{R}$ for a standard Brownian motion. Then, for $\lambda > 0$*

$$E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2} T_y)] = \exp(-|y|\lambda)\,.$$

DÉMONSTRATION: Recall that, for any $\lambda > 0$ the process $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t),\, t \geq 0)$ is a martingale. Let $y \geq 0$, $\lambda \geq 0$ and T_y be the hitting time of y. The martingale

$$(\exp(\lambda W_{t\wedge T_y} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_y)),\ t \geq 0)$$

is bounded by $e^{\lambda y}$. Doob's optional sampling theorem yields

$$E[\exp(\lambda W_{T_y} - \frac{\lambda^2}{2} T_y)] = 1\,.$$

Using that $P(T_y < \infty) = 1$ and $W_{T_y} = y$, we obtain the Laplace transform of T_y. The case where $y < 0$ is obtained by studying the Brownian motion $-W$. □

Warning 1 In order to apply Doob's optional sampling theorem, we have to check carefully that the martingale $\exp(\lambda W_{t\wedge T_y} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge T_y))$ is uniformly integrable. In the case $\lambda > 0$ and $y < 0$, a wrong use of this theorem would lead to the equality of 1 and

$$E[\exp(\lambda W_{T_y} - \frac{\lambda^2}{2}T_y)] = e^{\lambda y} E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T_y)]$$

that is the two quantities $E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T_y)]$ and $\exp(-y\lambda)$ would be the same. This is obviously false since the quantity $E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T_y)]$ is smaller than 1 whereas $\exp(-y\lambda)$ is strictly greater than 1.

Remarque 7.1.2 From (7.9), we check that Hitting time! of a drifted BM

$$\exp(-|y|\lambda) = \int_0^\infty dt \frac{|y|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right). \tag{7.12}$$

Exercice 7.1.1 Apply Proposition **??** for $\tau = T_y$ and $\theta = 1$ to find the expectation of T_y.

Exercice 7.1.2 Let $T^* = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = a\}$. Using that $e^{\lambda^2 t/2}\cosh(\lambda W_t)$ is a martingale, prove that $E(\exp(-\lambda^2 T^*/2) = [\cosh(a\lambda)]^{-1}$.

7.2 Hitting Times for a Drifted Brownian Motion

We study now the case where $X_t = \nu t + W_t$, where W is a Brownian motion. Let $M_t^X = \sup(X_s, s \leq t)$, $m_t^X = \inf(X_s, s \leq t)$ and $T_y(X) = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t = y\}$. We recall that $\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \in A)$ denotes the probability that the Brownian motion X_t with drift ν belongs to A.

7.2.1 Joint Laws of the Pairs (M, X) and (m, X) at Time t

Proposition 7.2.1 *For $y \geq 0, y \geq x$*

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq x, M_t^X \leq y) = \mathcal{N}(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}) - e^{2\nu y}\mathcal{N}(\frac{x - 2y - \nu t}{\sqrt{t}})$$

and for $y \leq 0, y \leq x$

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \geq x, m_t^X \geq y) = \mathcal{N}(\frac{-x + \nu t}{\sqrt{t}}) - e^{2\nu y}\mathcal{N}(\frac{-x + 2y + \nu t}{\sqrt{t}}).$$

Démonstration: From Cameron-Martin's theorem (see Proposition **??**)

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq x, M_t^X \geq y) = E\left[\exp\left(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t\right) 1\!\!1_{\{W_t \leq x, M_t^W \geq y\}}\right].$$

From the reflection principle (7.2) for $y \geq 0, x \leq y$,

$$P(W_t \leq x, M_t^W \geq y) = P(x \geq 2y - W_t, M_t^W \geq y),$$

hence

$$\begin{aligned} & E\left[\exp\left(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t\right) 1\!\!1_{\{W_t \leq x, M_t^W \geq y\}}\right] \\ = \; & E\left[\exp\left(\nu(2y - W_t) - \frac{\nu^2}{2}t\right) 1\!\!1_{\{2y - W_t \leq x, M_t^W \geq y\}}\right] \\ = \; & e^{2\nu y} E\left[\exp\left(-\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t\right) 1\!\!1_{\{W_t \geq 2y - x\}}\right]. \end{aligned}$$

We apply again Cameron-Martin's theorem

$$E\left[\exp\left(-\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t\right) \mathbb{1}_{\{W_t \geq 2y - x\}}\right] = P(W_t - \nu t \geq 2y - x).$$

It follows that for $y \geq 0, y \geq x$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq x, M_t^X \geq y) &= e^{2\nu y} P(W_t \geq 2y - x + \nu t) \\
&= e^{2\nu y} \mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \geq 2y - x + 2\nu t) \\
&= e^{2\nu y} P(-W_t \geq 2y - x + \nu t) \\
&= e^{2\nu y} P(X_t \leq x - 2y) \\
&= e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{-2y + x - \nu t}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq x, M_t^X \leq y) &= \mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq x) - \mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq x, M_t^X \geq y) \\
&= \mathcal{N}\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{x - 2y - \nu t}{\sqrt{t}}\right),
\end{aligned}$$

and for $y \leq 0, y \leq x$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \geq x, m_t^X \leq y) &= P(W_t + \nu t \geq x, \inf_{s \leq t}(W_s + \nu s) \leq y) \\
&= P(-W_t - \nu t \leq -x, \sup_{s \leq t}(-W_s - \nu s) \geq -y) \\
&= e^{2\nu y} P(W_t - \nu t \geq -y) \\
&= e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{2y - x + \nu t}{\sqrt{t}}\right). \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

□

7.2.2 Laws of Maximum, Minimum and Hitting Times

In particular, the laws of the maximum and of the minimum of a drifted Brownian motion are deduced : from $\mathbf{W}^{(\nu)}(M_t^X \leq y) = \mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \leq y, M_t^X \leq y)$ and $\mathbf{W}^{(\nu)}(m_t^X \geq y) = \mathbf{W}^{(\nu)}(X_t \geq y, m_t^X \geq y)$, we get

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(\nu)}(M_t^X \leq y) &= \mathcal{N}\left(\frac{y - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{-y - \nu t}{\sqrt{t}}\right), \quad y \geq 0 \\
\mathbf{W}^{(\nu)}(M_t^X \geq y) &= \mathcal{N}\left(\frac{-y + \nu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{-y - \nu t}{\sqrt{t}}\right), \quad y \geq 0 \\
\mathbf{W}^{(\nu)}(m_t^X \geq y) &= \mathcal{N}\left(\frac{-y + \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{y + \nu t}{\sqrt{t}}\right), \quad y \leq 0 \\
\mathbf{W}^{(\nu)}(m_t^X \leq y) &= \mathcal{N}\left(\frac{y - \nu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{y + \nu t}{\sqrt{t}}\right), \quad y \leq 0.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y(X) \geq t) &= \mathbf{W}^{(\nu)}(M_t^X \leq y) = \mathcal{N}\left(\frac{y - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{-y - \nu t}{\sqrt{t}}\right), \, y > 0 \\
&= \mathbf{W}^{(\nu)}(m_t^X \geq y) = \mathcal{N}\left(\frac{-y + \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y} \mathcal{N}\left(\frac{y + \nu t}{\sqrt{t}}\right), \, y < 0
\end{aligned}$$

In particular, when $t \to \infty$ in $\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y \geq t)$, we obtain $\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y = \infty) = 1 - e^{2\nu y}$, for $\nu \leq 0$. In this case, the density of T_y under $\mathbf{W}^{(\nu)}$ is defective.

7.2.3 Laplace Transforms

Laplace transform of! hitting time for a drifted BM From Cameron-Martin's theorem,

$$\mathbf{W}^{(\nu)}\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T_y(X)\right)\right) = E\left(\exp\left(\nu W_{T_y} - \frac{\nu^2+\lambda^2}{2}T_y(W)\right)\right) ,$$

where $\mathbf{W}^{(\nu)}(\cdot)$ is the expectation under $\mathbf{W}^{(\nu)}$. From Proposition 7.1.4, the right-hand side equals

$$e^{\nu y}E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(\nu^2+\lambda^2)T_y(W)\right)\right] = e^{\nu y}\exp[-|y|\sqrt{\nu^2+\lambda^2}] .$$

Therefore

$$\mathbf{W}^{(\nu)}\left(\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}T_y(X)\right]\right) = e^{\nu y}\exp[-|y|\sqrt{\nu^2+\lambda^2}] . \tag{7.14}$$

Hence, setting $\lambda = 0$ in (7.14), in the case $\nu y < 0$

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y < \infty) = e^{2\nu y} ,$$

which proves again that the probability that a Brownian motion with positive drift hits a negative level is not equal to one. In the case $\nu y > 0$, obviously $\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y < \infty) = 1$. This is explained by the fact that $(W_t + \nu t)/t$ goes to ν when t goes to infinity, hence the drift drives the process to infinity. In the case $\nu y > 0$, taking the derivative of (7.14) for $\lambda = 0$, we obtain $\mathbf{W}^{(\nu)}(T_y(X)) = y/\nu$. When $\nu y < 0$, the differentiation does not work, and obviously the expectation of the stopping time is equal to infinity.

7.3 Hitting Times for Geometric Brownian Motion

7.3.1 Notation

Let us assume that

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) , S_0 = x \tag{7.15}$$

with $\sigma > 0$, i.e.,

$$S_t = x\exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\right) = xe^{\sigma X_t} ,$$

where $X_t = \nu t + W_t$, $\nu = \dfrac{\mu}{\sigma} - \dfrac{\sigma}{2}$. We denote the first hitting time of a by

$$T_a(S) = \inf\{t \geq 0 \,:\, S_t = a\} = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t = \frac{1}{\sigma}\ln(a/x)\}$$

Then $T_a(S) = T_\alpha(X)$ where $\alpha = \dfrac{1}{\sigma}\ln(a/x)$. When a level b is used for the geometric Brownian motion S, we shall denote $\beta = \dfrac{1}{\sigma}\ln(b/x)$. Using the previous results, we give the law of the hitting time, as well as the law of maximum (resp. minimum) of S over time interval $[0, t]$.

7.3.2 Law of the Pair (Maximum, Minimum)

We deduce from Proposition 7.2.1 that for $b > a, b > x$

$$\begin{aligned} P(S_t \leq a, M_t^S \leq b) &= P(X_t \leq \alpha, M_t^X \leq \beta) \\ &= \mathcal{N}(\frac{\alpha - \nu t}{\sqrt{t}}) - e^{2\nu\beta}\mathcal{N}(\frac{\alpha - 2\beta - \nu t}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

whereas, for $a > b, b < x$

$$\begin{aligned} P(S_t \geq a, m_t^S \geq b) &= P(X_t \geq \alpha, m_t^X \geq \beta) \\ &= \mathcal{N}(\frac{-\alpha + \nu t}{\sqrt{t}}) - e^{2\nu\beta}\mathcal{N}(\frac{-\alpha + 2\beta + \nu t}{\sqrt{t}}) \,. \end{aligned}$$

It follows that, for $a > x$ (or $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} P(T_a(S) < t) &= P(M_t^S \geq a) = 1 - P(M_t^S \leq a) \\ &= 1 - P(S_t \leq a, M_t^S \leq a) \\ &= 1 - \mathcal{N}(\frac{\alpha - \nu t}{\sqrt{t}}) + e^{2\nu\alpha}\mathcal{N}(\frac{-\nu t - \alpha}{\sqrt{t}}) \\ &= \mathcal{N}(\frac{-\alpha + \nu t}{\sqrt{t}}) + e^{2\nu\alpha}\mathcal{N}(\frac{-\nu t - \alpha}{\sqrt{t}}) \end{aligned} \tag{7.16}$$

and, for $a < x$ (or $\alpha < 0$)

$$\begin{aligned} P(T_a(S) < t) &= P(m_t^S \leq a) = 1 - P(m_t^S \geq a) \\ &= \mathcal{N}(\frac{\alpha - \nu t}{\sqrt{t}}) + e^{2\nu\alpha}\mathcal{N}(\frac{\nu t + \alpha}{\sqrt{t}}) \,. \end{aligned} \tag{7.17}$$

7.3.3 Laplace Transforms

Laplace transform of! hitting time for a GBM From the equality $T_a(S) = T_\alpha(X)$,

$$E\left(\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}T_a(S)\right]\right) = \mathbf{W}^{(\nu)}\left(\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}T_\alpha(X)\right]\right) \,.$$

Therefore, from (7.14)

$$E\left(\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}T_a(S)\right]\right) = \exp\left(\nu\alpha - |\alpha|\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}\right) \,. \tag{7.18}$$

7.4 Other Cases

7.4.1 Vasicek Processes

Process! Vacisek - Let $(r_t, t \geq 0)$ be a Vasicek process defined as

$$dr_t = k(\theta - r_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \quad r_0 = \rho,$$

and $T_0 = \inf\{t \geq 0 \,:\, r_t = 0\}$. For any $\rho > 0$, the density function of T equals

$$f(t) = \frac{\rho}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{k}{\sinh kt}\right)^{3/2} e^{kt/2} \exp\Big[-\frac{k}{2\sigma^2}\Big(\big(\rho - \theta\big)^2 - \theta^2 + \rho^2 \coth kt\Big)\Big].$$

DÉMONSTRATION: We present here the proof of Patie [**?**] Patie, P. in the case $\theta = 0, \sigma = 1$. The Vasicek process is $r_t = e^{-kt}(x + \int_0^t e^{ks} dB_s)$. Hence

$$\begin{aligned} T_0 &= \inf\{t \geq 0 \,:\, r_t = 0\} \\ &= \inf\{t \,:\, x + \int_0^t e^{ks} dB_s = 0\} \\ &= \inf\{t \,:\, W_{A(t)} = -x\} \end{aligned}$$

where, from Dubins' theorem we have written the martingale $\int_0^t e^{ks} dB_s$ as a Brownian motion W, changed of time (See Section **??** for comments) $A(t) = \int_0^t e^{2ks} ds$. It follows that

$$T_0 = A(\inf\{t \geq 0 \,:\, W_t = -x\})$$

and

$$P_x(T_0 \in dt) = A'(t) P_0(T_{-x}(W) \in dA(t))\,.$$

□

7.4.2 Deterministic Volatility and Non-constant Barrier

Let us study the case where the process S is a geometric Brownian motion with deterministic volatility

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma(t) dW_t), S_0 = x$$

and

$$T_a(S) = \inf\{t \,:\, S_t = a\} = \inf\{t \,:\, rt - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s = \alpha\}\,,$$

where $\alpha = \ln(a/x)$. As we shall see in Section **??**, the process $U_t = \displaystyle\int_0^t \sigma(s) dW_s$ is a time changed Brownian motion and can be written as $Z_{A(t)}$ where Z is a Brownian motion and $A(t) = \displaystyle\int_0^t \sigma^2(s) ds$. Hence, introducing the inverse C of the function A

$$T_a(S) = \inf\{t \,:\, rt - \frac{1}{2}A(t) + Z_{A(t)} = \alpha\} = \inf\{C(u) \,:\, rC(u) - \frac{1}{2}u + Z_u = \alpha\}\,,$$

and we are reduced to the study of the hitting time of the non-constant boundary $\alpha - rC(u)$ by the drifted Brownian motion $(Z_u - \frac{1}{2}u, u \geq 0)$.

More generally, let $T_h(V) = \inf\{t \geq 0 \,:\, V_t = h(t)\}$, where h is a deterministic function and V a diffusion process. There are only few cases for which the law of $T_h(V)$ is explicitly known.

7.5 Hitting Time of a Two-sided Barrier

7.5.1 Brownian Case

Let $a < 0 < b$ and T_a, T_b the two hitting times of a and b

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \,:\, W_t = a\}, T_b = \inf\{t \geq 0 \,:\, W_t = b\}$$

and $T^* = T_a \wedge T_b$ be the exit time from the tunnel. As before M_t denotes the maximum of the Brownian motion over the interval $[0, t]$ and m_t the minimum.

Proposition 7.5.1 *Let W be a Brownian motion and $T^* = T_a \wedge T_b$. Then, for any a, b, x with $a < x < b$*

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{b - x}{b - a}$$

and $E(T^*) = x(b + a) - ab - x^2$.

Démonstration: The martingale $(W_{t \wedge T_a \wedge T_b}, t \geq 0)$ is bounded, so that

$$x = E_x(W_{T_a \wedge T_b}) = aP_x(T_a < T_b) + bP_x(T_b < T_a)\,,$$

the result follows from the obvious equality

$$P_x(T_a < T_b) + P_x(T_b < T_a) = 1\,.$$

Using the martingale $(W^2_{t\wedge T_a\wedge T_b} - (t\wedge T_a\wedge T_b), t \geq 0)$, we get $x^2 = E_x(W^2_{t\wedge T_a\wedge T_b}) - E_x(t\wedge T_a\wedge T_b)$. Passing to the limit when t goes to infinity $x^2 = a^2 P_x(T_a < T_b) + b^2 P_x(T_b < T_a) - E_x(T_a \wedge T_b)$, hence $E_x(T_a \wedge T_b) = x(b+a) - ab - x^2$. □

Comments 3 The proposition can be generalized to diffusions by using the scale function. See Section **??**.

Proposition 7.5.2 *The Laplace transform of T^* is*

$$E[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*)] = \frac{\cosh[\lambda(a+b)/2]}{\cosh[\lambda(b-a)/2]}$$

The joint law of (M_t, m_t, W_t) is given by

$$P(a \leq m_t < M_t \leq b, W_t \in E) = \int_E \varphi(t,x)\,dx$$

where, for $E \subset [a,b]$

$$\begin{aligned} \varphi(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{2t}(x+2k(b-a))^2\right)\right. \\ &\qquad \left. - \exp\left(-\frac{1}{2t}(x-2b+2k(b-a))^2\right)\right] \end{aligned} \tag{7.19}$$

Démonstration: The Laplace transform of T^* is obtained by Doob's optional sampling theorem. Indeed

$$\begin{aligned} \exp[-\lambda(\frac{a+b}{2})] &= E\big[\exp(\lambda(W_{T^*} - \frac{a+b}{2}) - \frac{\lambda^2\,T^*}{2})\big] \\ &= \exp(\lambda\frac{b-a}{2})\,E\left[\exp(-\frac{\lambda^2\,T^*}{2})\mathbb{1}_{\{T^*=T_b\}}\right] \\ &\quad + \exp(\lambda\frac{a-b}{2})\,E\left[\exp(-\frac{\lambda^2\,T^*}{2})\mathbb{1}_{\{T^*=T_a\}}\right] \end{aligned}$$

and using $-W$ leads to

$$\begin{aligned} \exp[-\lambda(\frac{a+b}{2})] &= E\big[\exp(\lambda(-W_{T^*} - \frac{a+b}{2}) - \frac{\lambda^2\,T^*}{2})\big] \\ &= \exp(\lambda\frac{-3b-a}{2})\,E\left[\exp(-\frac{\lambda^2\,T^*}{2})\mathbb{1}_{T^*=T_b}\right] \\ &\quad + \exp(\lambda\frac{-b-3a}{2})\,E\left[\exp(-\frac{\lambda^2\,T^*}{2})\mathbb{1}_{\{T^*=T_a\}}\right]. \end{aligned}$$

By solving a linear system of two equations, the following result is obtained :

$$\left\{ \begin{aligned} E\left[\exp(-\frac{\lambda^2\,T^*}{2})\mathbb{1}_{\{T^*=T_b\}}\right] &= \frac{\sinh(-\lambda a)}{\sinh(\lambda(b-a))} \\ E\left[\exp(-\frac{\lambda^2\,T^*}{2})\mathbb{1}_{\{T^*=T_a\}}\right] &= \frac{\sinh(\lambda b)}{\sinh(\lambda(b-a))} \end{aligned} \right. \tag{7.20}$$

The proposition is finally derived from

$$E\left[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*)\right] = E\left[\exp(-\frac{\lambda^2 T^*}{2})1\!\!1_{\{T^*=T_b\}}\right] + E\left[\exp(-\frac{\lambda^2 T^*}{2})1\!\!1_{\{T^*=T_a\}}\right].$$

By inverting the Laplace transform, the density is obtained.

DONNER CETTE DENSITE, DONNER LA LOI DU COUPLE m, M, VOIR LEBLANC

In the case $-a = b$, we get the formula obtained in Exercice 7.1.2

$$E\left[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*)\right] = (\cosh(b\lambda))^{-1}$$

and, inverting Laplace transform leads to the density

$$P(T^* \in dt) = \frac{1}{b^2}\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}(n+\frac{1}{2})e^{-(1/2)(n+1/2)^2\pi^2 t/b^2}dt.$$

. □

7.5.2 Drifted Brownian Motion

Let $X_t = \nu t + W_t$ be a drifted Brownian motion and $T^* = T_\alpha \wedge T_\beta$ with $\alpha < 0 < \beta$. From Cameron-Martin's theorem

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(\nu)}(\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*(X))) &= E(\exp(\nu W_{T^*} - \frac{\nu^2}{2}T^*)\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*)) \\
&= E(\exp(\nu W_{T^*} - \frac{\nu^2+\lambda^2}{2}T^*)1\!\!1_{\{T^*=T_\alpha\}}) \\
&\quad + E(\exp(\nu W_{T^*} - \frac{\nu^2+\lambda^2}{2}T^*)1\!\!1_{\{T^*=T_\beta\}}) \\
&= \exp(\nu\alpha)E(\exp(-\frac{\nu^2+\lambda^2}{2}T^*)1\!\!1_{\{T^*=T_\alpha\}}) \\
&\quad + \exp(\nu\beta)E(\exp(-\frac{\nu^2+\lambda^2}{2}T^*)1\!\!1_{\{T^*=T_\beta\}}).
\end{aligned}$$

From (7.20) it follows that

$$\mathbf{W}^{(\nu)}(\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*(X))) = \exp(\nu\alpha)\frac{\sinh(\mu\beta)}{\sinh(\mu(\beta-\alpha))} + \exp(\nu\beta)\frac{\sinh(-\mu\alpha)}{\sinh(\mu(\beta-\alpha))}$$

where $\mu^2 = \nu^2 + \lambda^2$. In the particular case $\alpha = -\beta$, the above formula simplifies and gives

$$\mathbf{W}^{(\nu)}\left(\exp(-\frac{\lambda^2}{2}T^*(X))\right) = \frac{\cosh(\nu\beta)}{\cosh(\beta\sqrt{\nu^2+\lambda^2})}.$$

Chapter 8

Compléments sur le mouvement Brownien

8.1 Théorème de représentation prévisible

Soit B un mouvement brownien et $\mathbf{F}$ sa filtration naturelle, soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. (il est important que $(\mathcal{F}_t)$ soit la filtration naturelle).

8.1.1 Représentation prévisible

Théorème 8.1.1 *Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, telle que $\sup_{t\leq T} E[M_t^2] < \infty$. Il existe un unique processus prévisible H vérifiant $E(\int_0^T H_s^2\, ds) < \infty$, tel que*

$$\forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dB_s\,.$$

Si M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que

$$\forall t \;\; M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dB_s$$

Démonstration: On montre tout d'abord que si F est une v.a. $\mathcal{F}_\infty$ mesurable, de carré intégrable, elle admet la représentation

$$F = E(F) + \int_0^\infty H_s\, dB_s$$

Pour cela, notant $\mathcal{H}$ l'ensemble de v.a. possédant la propriété de représentation, on montre que $\mathcal{H}$ est fermé dans L^2 et contient les v.a. de la forme $F = \mathcal{E}(f\dot{B})_\infty$ avec $f = \sum_i \lambda_i 1\!\!1_{]t_{i-1},t_i]}$, qui sont totales dans L^2. On en déduit le résultat pour des martingales bornées, puis le cas général par densité et localisation. □

Remarque 8.1.1 Ce résultat est très souvent utilisé en finance pour exhiber un portefeuille de couverture. On remarque que $d\langle M, B\rangle_t = H_t dt$. Si M est une martingale de la forme $f(t, B_t)$, on trouve $H_t = f'_x(t, B_t)$ en appliquant la formule d'Itô. Ce théorème se généralise aux Browniens d-dimensionnels.
Les conditions d'intégrabilité exigées sur H sont importantes. Dudley [?] a montré que pour toute

v.a. $\zeta \in \mathcal{F}_T$ on peut trouver un processus prévisible H tel que $\zeta = \displaystyle\int_0^T H_s dB_s$. (le cas où ζ est déterministe n'est pas sans intérêt, surtout en finance, puisqu'il génére un arbitrage). Ce résultat a été généralisé par Emery et al. [?] au cas de semi-martingales.

Corollaire 8.1.1 *Toutes les $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales sont continues.*

8.1.2 Représentation prévisible et théorème de Girsanov

Soit B un P-mouvement Brownien de filtration canonique $(\mathcal{F}_t)$ et θ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté vérifiant la condition de Novikov $E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds\right)\right) < \infty$. Soit Q la probabilité équivalente à P définie sur $\mathcal{F}_t$ par

$$dQ = \exp(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds)dP = L_t dP\,.$$

Le théorème de Girsanov nous montre que $\tilde{B}_t \stackrel{def}{=} B_t - \displaystyle\int_0^t \theta_s ds$ est un $(\mathcal{F}_t) - Q$-mouvement Brownien. Mais, en général, la filtration de $\tilde{B}$ n'est pas celle de B, on a simplement $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$. (l'égalité est réalisée par exemple si θ est déterministe, il peut y avoir inclusion stricte). Néanmoins, le théorème de représentation prévisible s'applique dans cette situation: si M est une $\mathcal{F}_t$-Q-martingale locale, il existe un processus $\mathcal{F}_t$-prévisible H tel que

$$\forall t \;\; M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, d\tilde{B}_s$$

Il suffit d'écrire la représentation prévisible de la P martingale ML et d'en déduire, grâce à la formule d'Itô la représentation de M sous Q. Si $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dB_t)$ sous la probabilité historique, le processus de prix actualisés vérifie

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{B}_t$$

On en déduit la complétion du marché.

8.1.3 Calcul de Malliavin

L'espace de Cameron-Martin est l'espace des fonctions γ de l'espace de Wiener $\Omega = C_0([0,1])$ qui s'écrivent $\gamma(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$ avec $g \in L^2([0,T])$.

Soit $F : \Omega \to I\!\!R$ une v.a. La dérivée directionelle de F dans la direction γ est, si elle existe, la quantité

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{d}{d\epsilon}(F(\omega + \epsilon\gamma))$$

On dit que F est différentiable s'il existe $\psi \in L^2([0,T] \times \Omega)$ telle que

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \psi(t,\omega) g(t) dt$$

On pose alors $D_t F(\omega) = \psi(t,\omega)$.

Une autre façon d'introduire la dérivée de Malliavin ast la suivante: (see Nualart [?] and Oksendal[?] for more comments). For $h \in L^2([0,T])$, let $W(h) = \int_0^T h(s)dW_s$. For a smooth function f, the derivative of a random variable of the form $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ is defined as the process $(D_t F, t \le T)$ by

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t) \, .$$

Exemple 8.1.1 Dans le cas où $F(\omega) = \int_0^T f(s) dB_s$, où f est une fonction,

$$D_t F(\omega) = f(t)$$

The Clark-Ocone representation formula states that

$$F = E(F) + \int_0^T E(D_t F | \mathcal{F}_t) dW_t \, .$$

As an example, the derivative of $F = f(W_T)$ is $f'(W_T)$, hence

$$f(W_T) = E(f(W_T)) + \int_0^T E(f'(W_T)|\mathcal{F}_t) dW_t \, .$$

8.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Ce paragraphe peut être omis en première lecture. On consultera l'ouvrage collectif [**?**], l'ouvrage de Ma et Yong [**?**] et pour une belle application aux options américaines le cours de N. El Karoui dans [**?**].

Les données sont un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un brownien B-d-dimensionnel sur cet espace dont la filtration naturelle est $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_\mathbf{t})$, une fonction b définie sur $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d})$, uniformément lipschitzienne

$$|b(t, x_1, y_1) - b(t, x_2, y_2)| \le K[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$$

et une variable ζ $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable. Le problème est de résoudre l'équation différentielle rétrograde[1]

$$-dX_t = b(t, X_t, Y_t) \, dt - Y_t^* \, dB_t$$

soumis à la condition terminale $X_T = \zeta$, c'est-à-dire de trouver un couple (X, Y) $\mathbf{F}$-*adapté* qui vérifie

$$X_t = \zeta + \int_t^T b(s, X_s, Y_s) \, ds - \int_t^T Y_s^* \, dB_s \tag{8.1}$$

Un cas simple est celui où b ne dépend pas ni de X ni de Y. S'il existe une solution à $X_t = \zeta + \int_t^T b(s) \, ds - \int_t^T Y_s^* \, dB_s$, la variable $X_t + \int_0^t b(s) \, ds$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et égale à $\zeta + \int_0^T b(s) \, ds - \int_t^T Y_s^* \, dB_s$. Donc en prenant les espérances conditionnelles des deux cotés, on obtient

$$X_t + \int_0^t b(s) \, ds = E(\zeta + \int_0^T b(s) \, ds | \mathcal{F}_t)$$

ce qui montre que le processus $X_t + \int_0^t b(s) \, ds$ est une martingale de valeur terminale connue $\zeta + \int_0^T b(s) \, ds$. Le théorème de représentation prévisible assure qu'il existe un processus Y tel que $X_t + \int_0^t b(s, X_s) \, ds = y + \int_0^t Y_s dB_s$ et nous obtenons la solution souhaitée.

[1] "L'avenir est devant toi. Mais tu l'auras dans le dos chaque fois que tu feras demi-tour". Pierre Dac.

Il est important de comprendre que l'on recherche un couple solution : en étudiant le cas $b = 0$, on voit bien que Y ne saurait être imposé, puisque dans ce cas $X_t = E(\zeta|\mathcal{F}_t)$ et Y est le processus obtenu en appliquant le théorème de représentation prévisible des martingales continues.
Ce résultat est très utile en finance, pour valoriser des flux terminaux.

The main references on this subject are the collective book [**?**], the book of Ma and Yong [**?**], El Karoui's lecture in [**?**] and Buckdhan's lecture in [**?**] .

8.2.1 Definition

A probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a n-dimensional Brownian motion W and its natural filtration $\mathbf{F}$, an $\mathcal{F}_T$-measurable square integrable random variable ζ and a family of $\mathbf{F}$-adapted, $I\!R^d$-valued processes $f(t, \cdot, x, y), x, y \in I\!R^d \times I\!R^{d\times n}$ are given. The problem is to solve a stochastic differential equation where the terminal condition as well as the form of the drift term (called the driver) are given.

The Backward Stochastic Differential Equation (B.S.D.E.) has the form

$$-dX_t = f(t, X_t, Y_t)\, dt - Y_t^* dW_t$$

where Y^* is the transposed matrix Y, whereas the terminal condition is $X_T = \zeta$. Let us recall that this equation is a short way to write for $s < t$

$$X_s - X_t = \int_s^t f(u, X_u, Y_u)\, du - \int_s^t Y_u^* dW_u\,.$$

The solution is a pair (X, Y) of $\mathbf{F}$-*adapted* processes which satisfies,

$$X_t = \zeta + \int_t^T f(s, X_s, Y_s)\, ds - \int_t^T Y_s^*\, dW_s\,. \tag{8.2}$$

We emphasize that the diffusion term is a part of the solution.

Exemple 8.2.1 Let us study the easy case where b is a deterministic function of time and $d = n = 1$. If there exists a solution to $X_t = \zeta + \int_t^T f(s)\, ds - \int_t^T Y_s\, dW_s$, then the $\mathbf{F}$-adapted process $X_t + \int_0^t b(s)\, ds$ is equal to $\zeta + \int_0^T f(s)\, ds - \int_t^T Y_s\, dW_s$. Taking conditional expectation w.r.t. $\mathcal{F}_t$, and assuming that Y is square integrable, we get

$$X_t + \int_0^t f(s)\, ds = E(\zeta + \int_0^T f(s)\, ds|\mathcal{F}_t) \tag{8.3}$$

therefore, the process $X_t + \int_0^t f(s)\, ds$ is a $\mathbf{F}$-martingale with terminal value $\zeta + \int_0^T b(s)\, ds$. The predictable representation theorem asserts that there exists an adapted process Y such that $X_t + \int_0^t f(s)\, ds = y + \displaystyle\int_0^t Y_s dW_s$ and the pair (X, Y) is the solution of the BSDE.

8.2.2 Existence

Définition 8.2.1 *Let $L^2([0, T], I\!R^d)$ be the set of $I\!R^d$-valued square integrable $\mathcal{F}_t$ progressively measurable processes, i.e. processes Z such that $E\left[\displaystyle\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] < \infty$.*

Théorème 8.2.1 *Let us assume that for any $(x,y) \in I\!\!R^n \times I\!\!R^{d\times n}$, the process $f(\cdot,x,y)$ is progressively measurable, with $f(\cdot,\cdot,0,0) \in L^2([0,T], I\!\!R^d)$ and that the function $f(t,\omega,\cdot,\cdot)$ is uniformly lipschitzian, i.e.,*

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \le K[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$$

Then there exists a unique pair (X,Y) in $L^2([0,T], I\!\!R^d) \times L^2([0,T], I\!\!R^d)$ which satisfies (8.2).

Démonstration: We prove the uniqueness of the solution in the case $n = d = 1$. Let (X^1, Y^1) and (X^2, Y^2) be two solutions in $L^2([0,T], I\!\!R) \times L^2([0,T], I\!\!R)$. We denote $\Delta X_s = X^1 - X^2$ and $\Delta Y_s = Y^1 - Y^2$. From Itô's formula applied to $(\Delta X_s)^2$, we get

$$(\Delta X_t)^2 + \int_t^T (\Delta Y_s)^2 ds = -2\int_t^T (f(s,X_s^1,Y_s^1) - f(s,X_s^2,Y_s^2))\,\Delta X_s ds - 2\int_t^T \Delta X_s \Delta Y_s dW_s\,.$$

The stochastic integral being a martingale, and using the Lipschitz property of f, we obtain :

$$E[(\Delta X_t)^2] + E\left[\int_t^T (\Delta Y_s)^2 ds\right] \le cE\left[\int_t^T ds(\Delta X_s)^2\right] + \frac{1}{2}E\left[\int_t^T (\Delta Y_s)^2 ds\right]$$

Hence, the uniqueness follows from Gronwall's theorem.

We now prove the existence in few steps.

First step. We show the existence in the particular case :

$$-dX_t = f_t dt - Y_t dW_t, X_T = \zeta$$

when $f \in H^2(I\!\!R^d)$. Following (8.3), we set

$$X_t = E[\zeta + \int_t^T f_s ds|\mathcal{F}_t]\ , 0 \le t \le T\,.$$

The representation theorem yields to the existence of $Y \in L^2([0,T], I\!\!R)$ such that the martingale $X_t, t \ge 0)$ admits a representation on the form

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s dW_s\,.$$

Second step. We consider

$$-dX_t = f(t,Y_t)dt - Y_t dW_t\,, X_T = \zeta$$

where $f(t,y)$ is progressively measurable, with $f(t,\omega,0,0) \in L^2$ and the function $f(t,\omega,\cdot)$ is uniformly lipschitzian. We construct an iterative sequence of processes (X_n, Y_n) as follows $Y_0(t) \equiv 0$, and from the first step, we can construct a pair (X_1, Y_1) solution of

$$-dX_1(t) = f_1(t)dt - Y_1(t)dW_t\,, X_1(T) = \zeta$$

where $f_1(t) = f(t, Y_0(t))$ is known.

From the first step, the sequence $(X_n, Y_n, n \ge 1)$ belongs to $L^2([0,T], I\!\!R) \times L^2([0,T], I\!\!R)$. We now check that this sequence converges to the solution of the BSDE.

We apply Itô's lemma to $(X_{n+1}(t) - X_n(t))^2$. From

$$-d(X_{n+1}(t) - X_n(t)) = [f(t,Y_n(t)) - f(t,Y_{n-1}(t))]dt - [Y_n(t) - Y_{n-1}(t)]dW_t$$

We obtain, as in the uniqueness proof

$$\begin{aligned} E\left[(X_{n+1}(t) - X_n(t))^2\right] &+ E\left[\int_t^T [Y_n(s) - Y_{n-1}(s)]^2]ds\right] \\ &\le cE\left[\int_t^T (X_{n+1}(s) - X_n(s))^2 ds + \int_t^T [Y_n(s) - Y_{n-1}(s)]^2]ds\right]\,. \end{aligned}$$

From $2ab = 2\frac{a}{c}\,cb \leq \frac{a^2}{c^2} + c^2b^2$, we obtain

$$\begin{aligned} E\left([X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 + \int_t^T [Y_{n+1}(s) - Y_n(s)]^2 ds\right) &\leq K[\frac{1}{c^2}E\int_t^T \mid X_{n+1}(s) - X_n(s) \mid^2 ds] \\ &+ c^2 E\int_t^T \mid Y_n(s) - Y_{n-1}(s) \mid^2 ds \end{aligned}$$

Let $\varphi_n(t) = e^{ct}E\left[\int_t^T (X_n(s) - X_{n-1}(s))^2 ds\right]$ and $\psi_n(t) = e^{ct}E[\int_t^T (Y_n(s) - Y_{n-1}(s))^2 ds]$. Using these notation, the above inequality writes

$$-\varphi_n'(t) + \psi_{n+1}(t) \leq \frac{1}{2}\psi_n(t) \tag{8.4}$$

and integrating this inequality between t and T

$$\varphi_n(t) + \int_t^T \psi_{n+1}(s)ds \leq \frac{1}{2}\int_t^T \psi_n(s)ds\,.$$

In particular

$$\varphi_n(0) \leq \varphi_n(0) + \int_0^T \psi_{n+1}(s)ds \leq \frac{1}{2^n}\int_t^T \psi_1(s)ds$$

From (8.4) and $\varphi_n'(t) \leq 0$, we get

$$\psi_{n+1}(0) \leq \tilde{c}2^{-n} + \frac{1}{2}\psi_n(0)$$

therefore, both series $\sqrt{\varphi_n(0)}$ and $\sqrt{\psi(0)}$ converge, and the sequences X_n and Y_n converge in L^2.
Third step. We now consider the recurrence relation

$$\{Y_0(t) \equiv 0, -dX_n(t) = \int_t^T f(s, X_{n-1}(s), Y_n(s))ds - \int_t^T Y_n(s)dW_s\,, X_n(T) = \zeta\ ,\ 0 \leq t \leq T\}$$

The sequence $(X_n(t), Y_n(t), 0 \leq t \leq T)_{n\geq 1}$ is shown to be a Cauchy sequence, hence it converges to a pair X, Y which can be shown to be a solution of the BDSE.

8.2.3 Hedging terminal wealth and consumption

Suppose that an agent would like to get a terminal wealth X_T as well as an (adapted) consumption process c. The financial market consists of d securities

The wealth associated with a portfolio $(\pi_i, i = 0, \dots d)$ is $X_t = \pi_0(t)S_t^0 + \sum_{i=1}^d \pi_i(t)S_t^i$. The self-financing condition $dX_t = \pi_0(t)dS_t^0 + \sum_{i=1}^d \pi_i(t)dS_t^i - c_t dt$ allows us to write

$$dX_t = \pi_t^*(b_t - r\mathbf{1})dt - c_t dt + \pi_t^*\sigma_t dW_t\,,$$

where $\mathbf{1}$ is the d-dimensional vector with all components equal to 1. Therefore, we have to solve the backward s.d.e.

$$dX_t = b(t, X_t, Y_t)dt + Y_t^* dW_t$$

with $b(t,\omega,x,y) = rx + y^*(b - r\mathbf{1}) - c_t(\omega)$ and the portfolio $(\pi_i, i = 1, \dots, d)$ is given by $\pi_t = Y_t^*\sigma_t^{-1}$.

In that case, the process $R_tX_t + \int_0^t c_sR_sds$ is a martingale under the e.m.m. Q, hence

$$H_tX_t = E_P(X_TH_T + \int_t^T c_sH_sds|\mathcal{F}_t)$$

where, as usual H is the product of the discounted factor and the Radon-Nikodym density. In particular, the value of the t-time wealth needed to hedge a non-negative terminal wealth and a non-negative consumption if always non-negative. This case is a very particular case of linear BSDE (see below). Moreover, if $X_T^1 \leq X_T^2$ and $c_1 \leq c_2$, then $X_t^1 \leq X_t^2$. This is a particular case of the following comparison theorem. This particular case can be explained using arbitrage principle. If a contingent claim ζ_2 is greater than a contingent claim ζ_1, then the price of ζ_2 is greater than the price of ζ_1;

8.2.4 Comparison theorem

Théorème 8.2.2 *Let $f^i, i = 1, 2$ be two processes satisfying the previous hypotheses and $f^1(t, x, y) \leq f^2(t, x, y)$. Let ζ^i be two $\mathcal{F}_T$ measurable, square integrable r.v. such that $\zeta^1 \leq \zeta^2$. Let (X^i, Y^i) be the solution of*

$$-dX_t^i = b^i(t, X_t^i, Y_t^i)\, dt - (Y_t^i)^* dW_t$$

Then $X_t^i \leq Y_t^i, \forall t \leq T$.

DÉMONSTRATION: Let $Y_t = X_t^1 - X_t^2$ and $\widehat{Y}_t = Y_t^1 - Y_t^2$. The process Y is a solution of

$$\begin{aligned} -d(Y_t) &= [\Delta_x b^1(t)\widehat{X}_t + \Delta_y b^1 \widehat{Y}_t + b^1(t, X_t^2, Y_t^2) - b^2(t, X_t^2, Y_t^2)]dt - \widehat{Y}_t^\star dW_t \\ Y_t &= \zeta^1 - \zeta^2 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_y b_t^1 &= \frac{b_1(t, X_t^1, Y_t^1) - b_1(t, X_t^2, Y_t^1)}{X_t^1 - X_t^2} \times 1\!\!1_{X_t^1 \neq X_t^2} \\ \Delta_z b_1(t) &= \frac{b^1(t, X_t^1, Y_t^1) - b^1(t, X_t^1, Y_t^2)}{Y_t^1 - Y_t^2} \times 1\!\!1_{Y_t^1 \neq Y_t^2} \end{aligned}$$

and we conclude using the Lipschitz character of b^1. (In particular $\Delta_X b_t^1$ and $\Delta_Y b_t^1$ are bounded).

Remarque 8.2.1 It is worthwhile to note that the weaker hypothesis $f^1(t, X_1, Y_1) \leq f^2(t, X_1, Y_1)$ suffices to lead to the conclusion.

8.2.5 Linear BSDE

Let us consider two bounded adapted processes A and B respectively $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^k$ valued and C a process in $H^2(\mathbb{R})$. VERIFIER QUE CELA A ETE DEFINI The case where $b(t, x, y) = A_t x + B_t^\star y + C_t$ is called the linear case.
We define the adjoint process Γ as the solution of the SDE

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\Gamma_t &=& \Gamma_t[A_t dt + B_t^\star dW_t] \\ \Gamma_0 &=& 1 \end{array} \right.$$

Théorème 8.2.3 *The solution of the linear BSDE*

$$-dX_t = (A_t X_t + B_t^\star Y_t + C_t)dt - Y_t^\star dW_t,\ X_T = \zeta$$

is given by

$$\Gamma_t X_t = E[\Gamma_T \zeta + \int_t^T \Gamma_s C_s ds | \mathcal{F}_t]\,.$$

Comments 4 Backward-Stochastic differential equations are also studied in the case where the driving martingale is a process with jumps. The reader can refer to Nualart and Schoutens [?]

8.3 Changement de temps

8.3.1 Inverse d'un changement de temps

Par convention, un processus croissant est nul en 0, continu à droite, adapté. Soit A un processus croissant et C le processus croissant inverse de A défini par

$$C_u = \inf\{t | A_t > u\} \tag{8.5}$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Le processus C est croissant, continu à droite, vérifie

$$C_{u-} = \inf\{t | A_t \geq u\}$$

et $\{C_u > t\} = \{A_t < u\}$. On a aussi $A_{C_s} \geq s$ et $A_t = \inf\{u | C_u > t\}$. Pour tout u, la v.a. C_u est un temps d'arrêt. Si A est continu et strictement croissant, C est continu et on a $C(A(t)) = t$. On peut effectuer des changement de temps dans une intégrale

$$\int_0^\infty f(s)\, dA_s = \int_0^\infty f(C_s)\, \mathbb{1}_{C_s < \infty} ds$$

8.3.2 Brownien et changement de temps

Il est bien connu que si M est une martingale continue de carré intégrable, il existe un unique processus croissant continu, noté $\langle M \rangle$ (le crochet de M, noté aussi $\langle M, M \rangle_t$) tel que le processus $(M_t^2 - \langle M \rangle_t, t \geq 0)$ est une martingale. Dans le cas $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$ le crochet de M est le processus croissant $\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Proposition 8.3.1 *(Théorème de Dubins Schwarz). Une martingale continue M telle que $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ est un Brownien changé de temps. Autrement dit, il existe un brownien W tel que $M_t = W_{A_t}$, avec $A_t = \langle M, M \rangle_t$.*

DÉMONSTRATION: Soit $A = < M >$ et $W_t = M_{C_t}$ où C est l'inverse de A. Il est alors évident que W est une martingale (par rapport à $\mathcal{F}_{C_t}$) de processus croissant $< M >_{C_t} = t$. C'est donc un Brownien. On a donc par inversion, $M_t = W_{A(t)}$. □

Remarque 8.3.1 Ce résultat est en fait très général. Monroe [?] a montré que toute martingale était égale à un Brownien changé de temps.

Lemme 8.3.1 *Avec les notations du théorème de Dubins-Schwarz, si Z est un processus progressivement mesurable tel que $\int_0^\infty Z_s^2 d < M >_s < \infty$ alors le processus $Y_t \stackrel{def}{=} Z_{C_t}$ vérifie*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty Y_s^2\, ds &< \infty \\
\int_0^t Z_s dM_s &= \int_0^{< M >_t} Y_u dW_u \\
\int_0^{C_t} Z_v dM_v &= \int_0^t Y_u dW_u
\end{aligned}$$

On peut remarquer que $Z_1(t) = \int_0^t H_s dM_s$ et $Z_2(t) = \int_0^{A_t} Y_u dW_u$ sont des martingales de même crochet. Voir Karatzas et Shreve, proposition 4.8 pour une démonstration.

Dans le cas $M_t = \int_0^t H_s dB_s$, on a $A(t) = \int_0^t H_s^2 ds$, soit, si l'on sait que H est positif et continu, $H_s = \sqrt{A'(s)}$. En écrivant $M_t = \int_0^{A(t)} dW_s$, on en déduit $d(\int_0^{A(t)} dW_s) = dM_t = H_t dB_t = \sqrt{A'(t)} dB_t$.

Lemme 8.3.2 *Soit $X_t = \int_0^{A(t)} \psi(s) dW_s$, où A est un changement de temps différentiable. Alors*

$$dX_t = \psi(A(t))\,\sqrt{A'(t)} dW_t$$

DÉMONSTRATION: Le processus X est une martingale (pour la filtration $\mathcal{F}_{A(t)}$) de crochet $\int_0^{A(t)} \psi_s^2 ds$. C'est donc un Brownien changé de temps. □

8.3.3 Application aux Processus de Bessel

Un résultat important est le théorème de Lamperti:

Théorème 8.3.1 *Soit W un mouvement Brownien. Le processus $(\exp(W_t + \nu t), t \geq 0)$, avec $\nu \in \mathbb{R}^+$ est un Bessel d'indice ν changé de temps*

$$\exp(W_t + \nu t) = R^{(\nu)}(A_t(\nu)) \tag{8.6}$$

où $A_t(\nu) = \int_0^t \exp(2(W_s + \nu s))\, ds$ et $R^{(\nu)}$ un BES d'indice ν.

Remark that, thanks to the scaling property of the Brownian motion, this result can be extented to $\exp(\sigma B_t + \nu t)$

DÉMONSTRATION: Let us introduce the increasing process $A_t = \int_0^t \exp[2(W_s + \nu s)]\, ds$ and C its inverse $C_u = \inf\{t \geq 0 \,:\, A_t = u\}$. Notice that $A_{C_t} = t = \int_0^{C_t} \exp[2(W_s + \nu s)]\, ds$ implies $dt = \exp[2(W_{C_t} + \nu C_t)] dC_t$. The continuous process $\widetilde{W}$ defined as

$$\widetilde{W}_u = \int_0^{C_u} \exp(W_s + \nu s)\, dW_s$$

is a martingale with increasing process equal to $\int_0^{C_u} \exp 2(W_s + \nu s)\, ds = u$ and is a Brownian motion. From the definition of $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}_{A_t} = \int_0^t \exp(W_s + \nu s)\, dW_s$ which can be written

$$d\widetilde{W}_{A_t} = \exp(W_t + \nu t)\, dW_t$$

We now prove that $R_u \stackrel{def}{=} \exp(W_{C_u} + \nu C_u)$ is a Bessel process. Itô's formula leads to

$$\begin{aligned} d\exp(W_t + \nu t) &= \exp(W_t + \nu t)\,(dW_t + \nu dt) + \frac{1}{2}\exp(W_t + \nu t) dt \\ &= d\widetilde{W}_{A_t} + (\nu + \frac{1}{2})\exp(W_t + \nu t) dt \end{aligned}$$

This equality can be written on an integral form

$$\exp(W_t + \nu t) = 1 + \widetilde{W}_{A_t} + \int_0^t (\nu + \frac{1}{2})\exp(W_s + \nu s) ds$$

Therefore

$$\exp(W_{C_u} + \nu C_u) = 1 + \widetilde{W}_u + \int_0^{C_u} (\nu + \frac{1}{2}) \exp(W_s + \nu s) ds$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^{C_u} \exp(W_s + \nu s) ds &= \int_0^u \exp(W_{C_s} + \nu C_s) dC_s = \int_{s=0}^u \frac{\exp 2(W_{C_s} + \nu C_s)}{\exp(W_{C_s} + \nu C_s)} dC_s \\ &= \int_0^u \frac{ds}{\exp(W_{C_s} + \nu C_s)}\,.\end{aligned}$$

Then, in a differential form

$$d \exp(W_{C_u} + \nu C_u) = d\widetilde{W}_u + (\nu + \frac{1}{2}) \frac{du}{\exp(W_{C_u} + \nu C_u)}$$

and

$$dR_u = d\widetilde{W}_u + (\nu + \frac{1}{2}) \frac{du}{R_u}\,.$$

The result follows from the unicity of the solution to the differential equation associated with the BES$^{(\nu)}$, and from $R_{A_t} = \exp(W_t + \nu t)$. □

8.3.4 Application aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Let U be a OU process

$$dU_t = dW_t - \lambda U_t dt\,.$$

It is easy to prove that

$$U_t \stackrel{loi}{=} e^{-\lambda t} B_{u(\lambda,t)}, \text{where} \quad u(\lambda, t) = \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2\lambda}$$

8.3.5 Application aux processus de Cox-Ingersoll-Ross

The CIR process

$$dr_t = (a + br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t\,, r_0 = \alpha$$

is a space-time changed BESQ process: more precisely, $r_t = e^{bt} R(\frac{\sigma^2}{4b}(1 - e^{-bt}))$, where R is a $BESQ^\delta(\alpha)$ process, with $\delta = \frac{4a}{\sigma^2}$.

More generally, we prove the following result

Théorème 8.3.2 *If r is the solution of*

$$dr_t = (a + b(t)r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t\,, r_0 = \alpha$$

where b is a continuous function, then $(r_t, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (\frac{1}{\beta(t)} R(\frac{\sigma^2}{4} \int_0^t \beta(s) ds), t \geq 0)$ *where* $\beta(s) = \exp - \int_0^s b(t) dt$ *and R is a squared Bessel process with index* $\frac{4a}{\sigma^2}$.

Démonstration: Let us introduce $\rho_t = r_t \exp - \int_0^t b(s) ds = r_t \beta(t)$. From Itô's formula

$$\rho_t = \rho_0 + a \int_0^t \beta(s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{\beta(s)}\,\sqrt{\rho(s)}\, dW_s$$

Let us define the increasing process $C(u) = \sigma^2 \int_0^u \beta(s)\,\rho(s)ds$ and its inverse $A(t) = \inf\{u | C(u) = t\}$. We apply the change of time formula

$$\rho_{A(t)} = \rho_0 + a \int_0^{A(t)} \beta(s)ds + \sigma \int_0^{A(t)} \sqrt{\beta(s)}\,\sqrt{\rho(s)}dW_s$$

Since $A'(t) = \dfrac{1}{\beta(A(t))}$ we obtain

$$\rho_{A(t)} = \rho_0 + at + \int_0^t \sqrt{\rho(A(s))}\,dZ_s \tag{8.7}$$

where Z is a Brownian motion. □

Remarque 8.3.2 Les changements de temps interviennent beaucoup en finance. On pourra consulter les articles de Geman et al. [**?**].

8.3.6 Extended CIR process

Théorème 8.3.3 *If r is the solution of*

$$dr_t = (a - \lambda(t)r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t\,, r_0 = x \tag{8.8}$$

where λ is a continuous function, then $(r_t, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (\frac{1}{\Lambda(t)}\rho(\frac{\sigma^2}{4}\int_0^t \Lambda(s)ds), t \geq 0)$ where $\Lambda(s) = \exp\left(\int_0^s \lambda(t)dt\right)$ and ρ is a squared Bessel process with dimension $4a/\sigma^2$.

Démonstration: Let us introduce $Z_t = r_t \exp(\int_0^t \lambda(s)ds) = r_t\Lambda(t)$. From Itô's formula

$$Z_t = Z_0 + a\int_0^t \Lambda(s)ds + \sigma\int_0^t \sqrt{\Lambda(s)}\,\sqrt{Z_s}\,dW_s\,.$$

Let us define the increasing function $C(u) = \dfrac{\sigma^2}{4}\int_0^u \Lambda(s)\,ds$ and its inverse $A(t) = \inf\{u : C(u) = t\}$. We apply a change of time

$$Z_{A(t)} = Z_0 + a\int_0^{A(t)} \Lambda(s)ds + \sigma\int_0^{A(t)} \sqrt{\Lambda(s)}\,\sqrt{Z_s}dW_s\,.$$

The process $\sigma\int_0^{A(t)} \sqrt{\Lambda(s)}\,\sqrt{Z_s}dW_s$ is a martingale with increasing process $\sigma^2\int_0^{A(t)} \Lambda(s)\,Z_s ds = 4\int_0^t Z_{A(s)}ds$, hence

$$\rho_t \stackrel{def}{=} Z_{A(t)} = Z_0 + \frac{4a}{\sigma^2}t + 2\int_0^t \sqrt{Z_{A(s)}}\,dB_s = \rho_0 + \frac{4a}{\sigma^2}t + 2\int_0^t \sqrt{\rho_s}\,dB_s \tag{8.9}$$

where B is a Brownian motion. □

Proposition 5.6.1 admits an immediate extension

Proposition 8.3.2 *The transition density of the process 8.8 is*

$$P(r_t \in dr | r_s = \rho) = \frac{\Lambda(s,t)}{2\Lambda^*(s,t)}\exp\left(-\frac{\rho + r\Lambda(s,t)}{2\Lambda^*(s,t)}\right)\left(\frac{r\Lambda(s,t)}{\rho}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(\frac{\sqrt{r\rho\Lambda(s,t)}}{\Lambda^*(s,t)}\right) \tag{8.10}$$

where $\Lambda(s,t) = \exp\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$ and $\Lambda^*(s,t) = \dfrac{\sigma^2}{4}\int_s^t \Lambda(s,u)du$ and $\nu = (2a)/\sigma^2 - 1$.

Pricing bonds in that model require as usual the computation of

$$B(0,T) = E[\exp - \int_0^T r_s ds] .$$

8.3.7 Constant Elasticity of Variance process

The Constant Elasticity of Variance (CEV) process of Cox [?] has dynamics

$$dS_t = S_t(\mu dt + \delta S_t^\beta dW_t) \tag{8.11}$$

Setting $X_t = S_t^{-2\beta}$, we obtain

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

with $\sigma = -2\beta\delta, k = 2\mu\beta, \theta = \delta^2 \frac{2\beta+1}{2\mu}$. (See Davydov and Linetsky [?] for option pricing when the underlying asset follows a CEV model)

8.3.8 Pont de Bessel et processus de CIR

Let us now study the links between a CIR process and a Bessel bridge.

$$dr_t = (a + \beta r_t)\, dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \tag{8.12}$$

Let $({}^\beta Q_x^d, x \geq 0)$ the law of this process. We have seen that for all $\beta \neq 0$, we obtain by change of time a BESQ. More precisely, $({}^\beta Q_x^d, x \geq 0)$ is the Q_x^d law of the process

$$e^{\beta t} X(\frac{1 - e^{-2\beta t}}{2\beta})$$

We work now under a change of law. A routine application of Girsanov theorem leads to

$$\frac{d^\beta Q_x^d}{dQ_x^d} = \exp\left(\frac{\beta}{2}\,[X_t - x - dt] - \frac{\beta^2}{2}\int_0^t X_s\, ds\right) \tag{8.13}$$

and

$${}^\beta Q_{x\to y}^{d,t} = \frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\int_0^t X_s ds\right)}{Q_{x\to y}^{d,t}\left[\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\int_0^t X_s ds\right)\right]} Q_{x\to y}^{d,t} \tag{8.14}$$

where ${}^\beta Q_{x\to y}^{d,t}$ denotes the bridge for $X_u, 0 \leq u \leq t)$ obtained by conditioning ${}^\beta Q_x^d$ by $(X_t = y)$.

For more details, see Pitman-Yor (1982)

8.4 Temps local

8.4.1 Temps d'occupation

Théorème 8.4.1 Formule de temps d'occupation. *Il existe une famille de processus croissants (les temps locaux) $(L(.,x),\, x \in I\!R)$ tels que pour toute fonction f mesurable bornée*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(t,x) f(x)\, dx = \int_0^t f(B_s)\, ds . \tag{8.15}$$

En particulier,

$$\nu(t,A) \stackrel{def}{=} \int_0^t 1\!\!1_{\{B_s \in A\}}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} 1\!\!1_A(x)\, L(t,x)\, dx \tag{8.16}$$

pour tout t, pour tout borélien A est le temps d'occupation de A entre 0 et t.

Démonstration: On fait la démonstration de (8.15) pour f continue à support compact. La formule (8.16) en résulte. Soit F telle que $F'(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, 1\!\!1_{x>y}\, dy$ et

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} dz \int_{-\infty}^{z} dy f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^+ f(y) dy$$

La formule d'Itô appliquée à F et le théorème de Fubini stochastique donnent

$$\int_{-\infty}^{\infty} (B_t - y)^+ f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (B_0 - y)^+ f(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_0^t 1\!\!1_{B_s > y} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f(B_s) ds$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\int_0^t f(B_s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \left((B_t - y)^+ - (B_0 - y)^+ - \int_0^t 1\!\!1_{B_s > y} dB_s \right)$$

et par suite la formule (8.15) est obtenue en posant

$$\frac{1}{2} L(t,y) = (B_t - y)^+ - (B_0 - y)^+ - \int_0^t 1\!\!1_{B_s > y} dB_s$$

De la même façon, en utilisant $F'(x) = -\int_x^{\infty} f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, 1\!\!1_{x>y}\, dy$, on obtiendrait

$$\frac{1}{2}\tilde{L}(t,y) = (B_t - y)^- - (B_0 - y)^- + \int_0^t 1\!\!1_{B_s < y} dB_s$$

avec $L(t,y) - \tilde{L}(t,y) = 2\int_0^t dB_s 1\!\!1_{B_s = 0}$. L'intégrale $\int_0^t dB_s 1\!\!1_{B_s=0}$ est nulle car son espérance et sa variance sont nulles

$$\int_0^t E(1\!\!1_{B_s=0}) ds = 0$$

Le même raisonnement s'applique pour une semi-martingale (somme d'une martingale et d'un processus à variation bornée. Dans ce cas, les deux expressions du temps local peuvent différer. □

On dit que $L(t,x)$ est le temps local du brownien en x entre 0 et t. A partir de (8.15) on obtient l'égalité (voir [**?**])

$$L(t,x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1\!\!1_{[x-\epsilon, x+\epsilon]}(B_s)\, ds\,,$$

la limite étant prise au sens L^2 ou au sens p.s., qui permet d'interprèter le temps local comme la moyenne du temps passé "en x". Cette égalité montre en particulier que le temps local est un processus croissant.
Le temps local est continu par rapport aux deux variables x et t (il faut utiliser le critère de continuité de Kolmogorov).

Une propriété importante (Voir Revuz-Yor) est que le temps local en 0 est un processus croissant qui ne croit que sur l'ensemble des zéros du Brownien. On a en particulier $\int_0^t f(B_s) dL_s^0 = f(0) L_t^0$. L'inverse du temps local est un processus de changement de temps, en général noté τ.

8.4.2 Formule de Tanaka

Cette formule généralise la formule d'Itô à certaines fonctions qui ne sont pas de classe C^2, mais qui sont différence de fonctions convexes.
Si l'on pouvait appliquer le lemme d'Itô à $|x|$, en pensant (à tort) que la discontinuité de la dérivée première en un point ne doit pas jouer de rôle, puisqu'un Brownien ne reste pas en ce point, on obtiendrait que $|B_t|$ est égal à $\int_0^t \mathrm{sgn}\,(B_s)\,dB_s$, ce qui serait une abérration puisque $|B_t|$ est positif et que $\int_0^t \mathrm{sgn}\,(B_s)\,dB_s$ est une martingale centrée. Le temps que le Brownien passe en 0 a donc une grande importance.

Proposition 8.4.1 Formules de Tanaka *Pour tout* (t, x)*, on a p.s.*

$$\begin{aligned} |B_t - x| &= |B_0 - x| + \int_0^t sgn\,(B_s - x)\,dB_s + L(t,x) &(8.17)\\ (B_t - x)^+ &= (B_0 - x)^+ + \int_0^t 1\!\!1_{B_s > x}\,dB_s + \frac{1}{2}L(t,x) &(8.18)\\ (B_t - x)^- &= (B_0 - x)^- - \int_0^t 1\!\!1_{B_s \leq x}\,dB_s + \frac{1}{2}L(t,x) &(8.19)\end{aligned}$$

où $sgn(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $sgn(x) = -1$ *si* $x \leq 0$.

Cette formule se généralise à la différence de deux fonctions convexes

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'_-(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_{I\!R} L(t,a) f''(da)$$

où f'' est la dérivée au sens des distributions, c'est-à-dire $\displaystyle\int f''(da)g(a) = -\int g'(a)f'_-(a)da$ pour toute fonction g dérivable à support compact, f'_- désignant la dérivée à gauche de f.

8.4.3 Le lemme de réflexion de Skohorod

On résout le problème déterministe suivant: Soit $y(t)$ une fonction continue. On dit que (z, k) est solution du lemme de Skohorod si

$k(t)$ est une fonction croissante telle que

$$\left\{\begin{array}{rcl} k(0) &=& 0\\ z(t) = y(t) + k(t) &\geq& 0\\ \int_0^t 1\!\!1_{z(s)>0}dk(s) &=& 0\end{array}\right.$$

Le lemme de Skohorod admet une unique solution définie par

$$k(t) = \sup_{0<s\leq t}(-y(s)) \vee 0.$$

On a le même résultat pour un processus continu, en raisonnant à ω fixé.

Soit B un mouvement Brownien. D'après la formule de Tanaka

$$|B_t| = \int_0^t \mathrm{signe}(B_s)dB_s + L_t^0$$

où L_t^0 est le processus croissant temps local en zéro. On obtient ainsi que $(|B|, L^0)$ est solution du lemme de Skohorod associé à $\beta_t = \int_0^t \mathrm{signe}(B_s)dB_s$ qui est un mouvement Brownien, car c'est une martingale continue de crochet t; soit $L_t = \sup_{s \le t}(-\beta_s)$. Nous avons ainsi, en notant $M_t = \sup_{s \le t} B_s$, les deux décompositions

$$\begin{aligned} |B_t| &= \beta_t + L^0_t \\ M_t - B_t &= (-B_t) + M_t \end{aligned}$$

Le couple $(M - B, M)$ est solution du lemme de Skohorod associé au brownien $(-B)$, car M ne croit que sur $M - B = 0$. Il en résulte que les processus $(|B|, L^0)$ et $(M - B, M)$ ont même loi (en tant que processus). Le processus $|B|$ est appellé Brownien réfléchi.

Théorème 8.4.2 (Lévy) *Les processus $(|B|, L^0)$ et $(M - B, M)$ ont même loi, soit*

$$(|B_t|, L^0_t \,;\, t \ge 0) \stackrel{loi}{=} (M_t - B_t, M_t \,;\, t \ge 0)$$

Application :
1) Si τ est l'inverse du temps local, on a $T_x \stackrel{loi}{=} \tau_x$. En effet,

$$P(T_x > t) = P(M_t < x) = P(L_t < x) = P(\tau_x > t)$$

2) Soit $\theta_t = \inf\{s \le t \,|\, M_t = B_s\}$. Supposons $t = 1$. En utilisant le principe de reflexion et l'identité de Lévy on montre que

$$(\theta \le u) = \{\sup_{s \ge u} B_s \le \sup_{s \le u} B_s\} = \{\sup_{1 \ge s \ge u} (B_s - B_u) + B_u \le \sup_{s \le u} B_s\}$$

d'où $P(\theta \le u) = P(\widehat{M}_{1-u} \le M_u - B_u) = P(\widehat{M}_{1-u} \le |B_u|)$. Finalement, pour $s \le t$

$$P(\theta_t \le s) = \frac{2}{\pi} \text{arc sin} \sqrt{\frac{s}{t}}$$

De la même façon, on a

$$P(M_t \in dx, \theta_t \in du) = \frac{x}{\pi u \sqrt{u(t-u)}} \exp(-\frac{x^2}{2u}) 1\!\!1_{x \ge 0, u \le t}\, du\, dx$$

3) Il est facile d'obtenir, en utilisant la récurrence du MB que $P(L^a_\infty = \infty) = 1$.

8.4.4 Temps local d'une semi-martingale

Théorème 8.4.3 Formule de temps d'occupation. *Soit Y une semi-martingale continue. Il existe une famille de processus croissants (les temps locaux) $(L^y_t(Y),\, y \in I\!R)$ tels que pour toute fonction f mesurable bornée*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L^y_t(Y) f(y)\, dy = \int_0^t f(Y_s)\, d\langle Y\rangle_s \tag{8.20}$$

Le temps local est continu en y si Y est une martingale.

Application: Dupire

Proposition 8.4.2 *Si on suppose connus les prix $C(K,T)$ des calls européens sur un actif pour toutes les maturités T et tous les prix d'exercice K, si l'on suppose que la dynamique du prix de l'actif est*

$$dS_t = rS_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dW_t \tag{8.21}$$

où σ est une fonction déterministe, alors

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t,x) = \frac{\partial_t C(x,t) + rx\partial_k C(x,t)}{x^2 \partial_{kk} C(x,t)}$$

où ∂_t, ∂_k désignent les opérateurs de dérivée partielle.

Démonstration: Soit $C(k,t) = E(e^{-rt}(S_t - k)^+)$. Sous la modélisation (8.21), $M_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale vérifiant $dM_t = M_t\sigma(t, e^{rt}M_t)\,dW_t$ et la formule de Tanaka donne

$$(M_t - k)^+ = (M_0 - k)^+ + \int_0^t 1\!\!1_{M_s > k} dM_s + \frac{1}{2}L_t^k(M)$$

et on en déduit, en prenant l'espérance

$$C(ke^{rt}, t) = E((e^{-rt}S_t - k)^+) = E((M_t - k)^+) = (M_0 - k)^+ + \frac{1}{2}E[L_t^k(M)]$$

Soit f continue à support compact. Le théorème de Fubini et la formule de temps d'ocupation conduisent à

$$\int_{I\!R} f(k)C(ke^{rt}, t)\,dk = \int_{I\!R} f(k)(S_0 - k)^+ dk + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{I\!R} f(k)\sigma^2(t, ke^{rt})k^2\varphi_t(k)dk$$

où φ_t est la densité de la v.a. M_t. Ce résultat étant vrai pour toute fonction f, on obtient

$$\frac{\partial C}{\partial t}(ke^{rt}, t) + rke^{rt}\frac{\partial C}{\partial k}(ke^{rt}, t) = \frac{1}{2}(\sigma(t, ke^{rt}))^2 k^2 e^{2rt}\varphi_t(k)$$

et, de l'égalité $C(Ke^{rt}, t) = E((M_t - K)^+)$, on déduit

$$\varphi_t(k) = \frac{\partial^2 C}{\partial k^2}(ke^{rt}, t)$$

L'égalité désirée suit.

Options boost

The Knock-out Boost is an option which pays the time that the underlying asset remains above a level b, and is lost if the asset reaches the level a before maturity. Using occupation time formula which writes

$$E^{(\nu)}\int_0^{T_a(X)\wedge T} f(X_s)\,ds = \int_{-\infty}^a f(x)E^{(\nu)}[L^x_{T_a\wedge T}]dx\,,$$

the value of this option is [**?**]

$$\text{KOB}(a,b;T) = E_Q\left[e^{-rT}\int_0^{T\wedge T_a} 1\!\!1_{(S_s>b)}\,ds\right] = E^{(\nu)}\left[e^{-rT}\int_0^{T\wedge T_\alpha} 1\!\!1_{(X_s>\beta)}\,ds\right] = e^{-rT}\int_\beta^\alpha \Psi^T_{\alpha,\nu}(y)\,dy$$

where $\Psi^T_{\alpha,\nu}(y) = E^{(\nu)}(L^y_{T_\alpha\wedge T})$.

A terminer

The computation of Ψ can be done with Tanaka's formula

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Psi_{\alpha,\nu}(y) &= E^{(\nu)}[(X_{T_\alpha\wedge T} - y)^+] - (-y)^+ - \nu\int_y^\alpha \Psi_{\alpha,\nu}(z)dz \qquad (8.22)\\ &= (\alpha - y)^+E^{(\nu)}(T_\alpha < T) + E^{(\nu)}\left[(X_T - y)^+ 1\!\!1_{T_\alpha > T}\right] - (-y)^+ - \nu\int_y^\alpha \Psi_{\alpha,\nu}(z)dz\end{aligned}$$

Let us compute explicitely the expectation of the local time in the case $T = \infty$. The formula (8.22) reads

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E^{(\nu)}[\mathrm{L}^x_{T_\alpha}] &= (\alpha - x)^+ - (-x)^+ - \nu E^{(\nu)}[\int_0^{T_\alpha} 1\!\!1_{(X_s>x)}ds]\\ &= (\alpha - x)^+ - (-x)^+ - \nu E^{(\nu)}[\int_x^\alpha L^y_{T_\alpha}dy]\end{aligned}$$

Therefore,

$$\frac{1}{2}\Psi_{\alpha,\nu}(x) = (\alpha - x)^+ - (-x)^+ - \nu \int_x^\alpha \Psi_{\alpha,\nu}(y)dy, \ \Psi_{\alpha,\nu}(\alpha) = 0$$

which gives

$$\Psi_{\alpha,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu}(1 - \exp(2\nu(x-\alpha)) & \text{for } 0 \le x \le \alpha \\ \\ \frac{1}{\nu}(1 - \exp(-2\nu\alpha)) \exp(2\nu x) & \text{for } x \le 0 \end{cases}$$

8.5 Ponts, excursions et méandres

8.5.1 Les zéros du Brownien

Soit $Z(\omega)$ l'ensemble des instants auxquels la trajectoire du Brownien s'annule, soit $Z = \{t \ge 0 | B_t = 0\}$. C'est un ensemble aléatoire, de structure compliquée. En particulier, il n'y a pas de point isolé dans Z: si $t \in Z$, t est limite d'une suite de points dans Z, ce qui explique qu'un Brownien quittant 0 par exemple revient en zéro immédiatement après, de telle sorte que le premier temps de retour en 0, que l'on a noté T_0 est nul (p.s.) : $P_0(T_0 = 0) = 1$. L'ensemble Z est un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle (en particulier, il ne contient aucun intervalle). Le complémentaire de Z est une union dénombrable d'intervalles disjoints I_n que l'on appelle les intervalles d'excursion.

8.5.2 Excursions

Soit $g_t = \sup\{s \le t \,|B_s = 0\}$ le dernier temps de passage par zéro avant t et $d_t = \inf\{s \ge t|B_s = 0\}$ le premier temps de retour en zéro après t. On appelle excursion du Brownien traversant t la trajectoire comprise entre g_t et d_t. Il faut remarquer que g_t n'est pas un $(\mathcal{F}_s)$-temps d'arrêt.

Nous étudions ici la loi des couples (B_t, d_t) et (B_t, g_t). La première s'obtient relativement facilement en appliquant la propriété de Markov forte, la seconde est plus délicate.

Proposition 8.5.1 *La loi jointe des couples (B_t, d_t) et (B_t, g_t) est donnée par:*

$$P(B_t \in dx, d_t \in ds) = 1\!\!1_{(s \ge t)} \left(\frac{|x|}{2\pi\sqrt{t(s-t)^3}} \right) \exp - \left(\frac{sx^2}{2t(s-t)} \right) dx\, ds \tag{8.23}$$

$$P(B_t \in dx, g_t \in ds) = 1\!\!1_{(s \le t)} \left(\frac{|x|}{2\pi\sqrt{s(t-s)^3}} \right) \exp - \left(\frac{x^2}{2(t-s)} \right) dx\, ds \tag{8.24}$$

Démonstration: Nous commençons par la loi de (B_t, d_t):

$$\begin{aligned} P(B_t \in dx, d_t \in ds) &= P(B_t \in dx) P(d_t \in ds | B_t = x) \\ &= P(B_t \in dx) P_x(T_0 \in ds - t) \\ &= P(B_t \in dx) P_0(T_x \in ds - t) \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov forte du mouvement brownien. On obtient alors le résultat en faisant le produit des densités. Pour démontrer la seconde partie, nous commençons par énoncer un résultat sur le lien entre d_t et g_t. Etant donné les définitions de d_t et g_t, on voit que:

$$\begin{aligned} d_t &= \inf\{s \ge t \, : \, B_s = 0\} = \inf\{\frac{1}{s} \ge t \, : \, sB_{1/s} = 0\} \\ &= 1/\sup\{u \le \frac{1}{t} : \hat{B}_u = 0\} = \frac{1}{\hat{g}_{1/t}} \end{aligned}$$

où $\{\hat{B}_t = tB_{1/t}, t > 0\}$ est un mouvement brownien standard. On écrit alors, en remarquant que $B_t = t\hat{B}_{1/t}$

$$P(B_t \leq x, g_t \leq s) = P(\hat{B}_{1/t} \leq \frac{x}{t}, \hat{d}_{1/t} \geq \frac{1}{s})$$

On obtient à l'aide de la première partie en notant $f_t(x,s)$ la densité de (B_t, d_t)

$$P(B_t \in dx, g_t \in ds) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} P(\hat{B}_{1/t} \leq \frac{x}{t}, \hat{d}_{1/t} \geq \frac{1}{s}) = \frac{1}{ts^2} f_{1/t}(\frac{x}{t}, \frac{1}{s})$$

ce qui conduit au résultat. □

On trouvera dans Chung [**?**]une autre démonstration basée sur la remarque suivante

$$P(g_t \leq s, B_s \in dx, B_t \in dy) = P(B_s \in dx, B_u \neq 0, u \in [s,t], B_t \in dy)$$

$$= P(B_s \in dx)\, P(B_{t-s} \in dy,\, T_0 < t-s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{x^2}{2s}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \left[\exp -\frac{(x-y)^2}{2(t-s)} - \exp -\frac{(x+y)^2}{2(t-s)} \right] dx\, dy$$

et il suffit d'intégrer par rapport à dx.

Lois de T_x, d_t et g_t

Soit $T_x = \inf\{t \,|\, B_t = x\}$.

Proposition 8.5.2

$$T_x \stackrel{loi}{=} x^2 T_1 \stackrel{loi}{=} \left(\frac{x}{M_1}\right)^2 \stackrel{loi}{=} \left(\frac{x}{B_1}\right)^2$$

Démonstration:

$$T_x = \inf\{t \,|\, B_t = x\} = \inf\{t \,|\, \frac{B_t}{x} = 1\}$$

$$= \inf\{x^2 t \,|\, \frac{1}{x} B_{x^2 t} = 1\} = \inf\{x^2 t \,|\, B_t^{(x)} = 1\}$$

avec $B_t^{(x)} = \frac{1}{x} B_{x^2 t}$ un MB. D'où $T_x \stackrel{loi}{=} x^2 T_1$. Par scaling $M_t \stackrel{loi}{=} \sqrt{t} M_1$ et $P(T_1 \geq u) = P(M_u \leq 1) = P(\sqrt{u} M_1 \leq 1) = P(\left(\frac{1}{M_1}\right)^2 \geq u)$, ce qui implique les autres égalités en loi. □.

Proposition 8.5.3

$$d_u \stackrel{loi}{=} u(1 + C^2)\,,\ C\ \ de\ \ densite\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

La loi de g_t est une loi Arc sinus:

$$P(g_t \in ds) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{s(t-s)}} 1\!\!1_{s \leq t}\, ds$$

Par définition $d_u = u + \inf\{v \,|\, B_{u+v} - B_u = -B_u\}$. On note $\hat{B} = B_{\cdot+u} - B_u$ le brownien indépendant de B_u et $\hat{T}$ les temps d'atteinte relatifs à ce Brownien. En utilisant les résultats de la proposition précédente et le scaling du MB

$$d_u \stackrel{loi}{=} u + \hat{T}_{-B_u} \stackrel{loi}{=} u + B_u^2 \hat{T}_1 \stackrel{loi}{=} u + u B_1^2 \hat{T}_1 \stackrel{loi}{=} u(1 + \frac{\hat{T}_1}{T_1})$$

On en déduit que

$$d_u \stackrel{loi}{=} u(1+C^2)\,,\ C \text{ de densite } \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

On a les égalités en loi $g_t \stackrel{loi}{=} tg_1$ et $2\mathbf{e}g_1 \stackrel{loi}{=} N^2$ où $\mathbf{e}$ a une loi exponentielle de paramètre 1, N une loi normale réduite centrée, g_1 et $\mathbf{e}$ étant indépendantes.

Etant donné un processus $(X_t, t \geq 0)$, nous définissons pour $0 < a < b$ le processus $(X_t^{[a,b]}, t \leq 1)$ par

$$X_t^{[a,b]} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, X_{a+t(b-a)}$$

8.5.3 Pont Brownien

Le pont Brownien est le processus $(B_t, t \leq 1)$ conditionné à être en 0 à l'instant 1. En utilisant que $B_t = (B_t - tB_1) + tB_1$ et que les deux variables $(B_t - tB_1)$ et tB_1 sont indépendantes, on obtient que le pont Brownien a même loi que le processus $(Z_t = B_t - tB_1,\ 0 \leq t \leq 1)$. Ce processus est un processus gaussien, centré de covariance $s(1-t)$. Il vérifie $Z_0 = Z_1 = 0$.

Les processus gaussiens $(Y_t = (1-t)B(\frac{t}{1-t}),\ 0 \leq t < 1)$ $(Z_t = tB_{\frac{1}{t}-1}, 0 < t < 1)$ et $(X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}\,;\ 0 \leq t < 1)$ ont les mêmes propriétés et sont aussi des représentations de ponts Brownien. Le processus X est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= \dfrac{X_t}{t-1}\,dt + dB_t\,;\ 0 \leq t < 1 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$

Théorème 8.5.1 *Etant donné un mouvement brownien standard $(B_t, t \geq 0)$, le processus $B^{[0,g_1]}$ défini par:*

$$B^{[0,g_1]} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{g_1}} B_{ug_1}, u \leq 1\right) \tag{8.25}$$

est un pont brownien indépendant de la tribu $\sigma\{g_1, B_{g_1+u}, u \geq 0\}$.

Démonstration: Pour démontrer ce résultat, nous utilisons les notations du paragraphe précédent et le fait que : $\hat{d}_1 = \frac{1}{g_1}$. On a alors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g_1}} B(ug_1) &= u\sqrt{g_1}\,\hat{B}(\frac{1}{ug_1}) = \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}}\left[\hat{B}(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_1}(\frac{1}{u}-1)) - \hat{B}(\frac{1}{g_1})\right] \\ &= \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}}\left[\hat{B}(\hat{d}_1 + \hat{d}_1(\frac{1}{u}-1)) - \hat{B}(\hat{d}_1)\right] \end{aligned}$$

Etant donné que $(\hat{B}_{\hat{d}_1+s} - \hat{B}_{\hat{d}_1}\,; s \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\hat{d}_1}$ et $\hat{B}_{\hat{d}_1} = 0$, le processus $\tilde{B}_u = \frac{1}{\sqrt{\hat{d}_1}} \hat{B}_{\hat{d}_1 + \hat{d}_1 u}$ est aussi un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\hat{d}_1}$ d'où on tire que $t\tilde{B}_{(\frac{1}{t}-1)}$ est un pont brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\hat{d}_1}$ ce qui nous donne le résultat. □

On peut de manière évidente généraliser ce résultat à $B^{[0,g_t]}$. En effet, on a:

$$\begin{aligned} g_t &= \sup\{s \leq t : B_s = 0\} = \sup\{ut \leq t : \frac{1}{\sqrt{t}} B_{ut} = 0\} \\ &= t \sup\{u \leq 1 : B_u^{(\sqrt{t})} = 0\} \stackrel{loi}{=} tg_1 \end{aligned}$$

où $B^{(\sqrt{t})}$ est le mouvement brownien obtenu par scaling $(B_u^{(\sqrt{t})} = \frac{1}{\sqrt{t}} B_{ut}, t \geq 0)$. En utilisant ce résultat, on généralise aisément le théorème précédent. `xxx resultat de Jim, Applications`

8.5.4 Méandre

Définition 8.5.1 *Le méandre brownien de longueur 1 est le processus défini par:*

$$m_u \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{1-g_1}} |B_{g_1+u(1-g_1)}|;\ u \leq 1 \tag{8.26}$$

La loi de m_1 est connue, elle s'obtient à partir de la loi du couple (g_1, B_1) et a pour densité $xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{x\geq 0}$. En effet,

$$P(B_1 \in dx, g_1 \in ds) = \mathbb{1}_{(s\leq 1)} \left(\frac{|x|dxds}{2\pi\sqrt{s(1-s)^3}}\right) \exp -\left(\frac{x^2}{2(1-s)}\right)$$

On obtient alors que:

$$P(m_1 \in dx) = \int P(m_1 \in dx, g_1 \in ds) = \int P(\frac{|B_1|}{\sqrt{1-s}} \in dx, g_1 \in ds)$$

$$= \int_0^1 ds \frac{2x\sqrt{1-s}}{2\pi\sqrt{s(1-s)^3}} \exp -\left(\frac{x^2(1-s)}{2(1-s)}\right)$$

En opérant le changement de variable: $y = \frac{u}{\sqrt{1-z}}$, on obtient:

$$P(m_1 \in dx) = 2x \exp -\left(x^2/2\right) \int_0^1 dz \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{z(1-z)}}\right) \mathbb{1}_{(x\geq 0)} dx = xe^{-x^2/2} \mathbb{1}_{(x\geq 0)} dx \tag{8.27}$$

Soit t fixé. Le processus

$$(m_u^{(t)} = \frac{1}{\sqrt{t-g_t}} |B_{g_t+u(t-g_t)}|\,, u \leq 1)$$

a une loi qui ne dépend pas de t (scaling). De plus ce processus est indépendant du passé avant g_t et donc de g_t.

8.6 Le Brownien Fractionnaire

Soit $\alpha \in]0,1[$. Le mouvement brownien fractionnaire d'indice H, avec $0 < H \leq 1$, noté B^H est le processus continu gaussien centré de covariance $E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$.
Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, c'est le mouvement Brownien. Le mouvement Brownien fractionnaire est un processus à accroissements stationnaires. Ce n'est pas une semi-martingale. Cependant, il a été démontré récemment que pour certaines valeurs de H ($H > 3/4$), la somme d'un MBf et d'un MB est une semi-martingale (pour sa propre filtration).

The seminal paper of Mandelbrot and Van Ness [?] opened the study of Fractional Brownian motion in Finance. The main problem is the a fractional Brownian motion (fBm in short) is not a semi martingale, and arbitrage opportunities occurs. Nevertheless, this kind of process is extensively studied for financial purpose. We present here the main definitions. we refer to the book of Embrechts and Maejima [?] for details. Application to finance can be found in Comte and Renault [?] and Hu [?] where the stochastic volatility is driven by a fBm.

8.6.1 Self-similar processes

A process X is said to be self-similar with index α if, for any $c > 0$

$$(X_{ct}, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (c^\alpha X_t, t \geq 0) \tag{8.28}$$

Exemple 8.6.1 The Brownian motion is self-similar with index 1/2. The process $\int_0^t s^m dW_s$ is self-similar with index $m + 1/2$, as well as the process $\int_0^t (t-u)^m dW_u$.

If W and $\tilde{W}$ are independent Brownian motion, the process $\int_0^t \tilde{W}_s dW_s$ is self-similar with index 1, nevertheless, this is neither a Gaussian process nor a Markov process.

8.6.2 Definition of fractional Brownian motion

A fractional Brownian motion with index H, with $0 < H < 1$ is a continuous Gaussian process with stationary increments, such that, for $0 < s < t$ $E((B^H_t - B^H_s)^2) = (t-s)^{2H}$. Its covariance is $\text{cov}(B^H_t, B^H_s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$. It is an homogenous process with index H. It can be also defined as $\int_{-\infty}^t K(t,s) dW_s$ where W is a Brownian motion and K the kernel

$$K(t,s) = (t-s)^{\alpha-1} - [(-s)^+]^{\alpha-1}\,.$$

The fractional Brownian motion is a Brownian motion for $H = 1/2$, otherwise, this is not a semi-martingale. Therefore, a financial market where the prices are driven by a fBm induces arbitrages (See Rogers [?], Shiryaev [?]). However, quite recently, Cheridito [?] proved that $\epsilon B_t + B^H_t$, with $\epsilon \neq 0$ is a semi-martingale in its own filtration if and only if $H > 3/4$.

The stochastic integral $\int_0^t f(B^H_u) dB^H_u$ can be defined as the limit (in probability) of $\sum_i f(B^H_{t\wedge t_i})(B^h_{t\wedge t_{i+1}} - B^H_{t_i})$

Oksendal [?, ?] gives a different definition of the stochastic integration w.r.t. a fBm, which allows him to define a market withput arbitrage opportunities.

Chapter 9

Appendix

9.1 Gamma function

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} z^{\nu-1}\exp(-z)dz$$

9.2 Bessel functions

The modified Bessel function I_ν and K_ν satisfy the Bessel differential equation

$$x^2u''(x) + xu'(x) - (x^2+\nu^2)u(x) = 0$$

and are given by :

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))}{2\sin\pi z}\,.$$

Some relations:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}(z^\nu I_\nu(z)) = z^\nu I_{\nu-1}(z) && \frac{d}{dz}(z^\nu K_\nu(z)) = -z^\nu K_{\nu-1}(z) \\
&\frac{d}{dz}(z^{-\nu} I_\nu(z)) = z^{-\nu} I_{\nu+1}(z) && \frac{d}{dz}(z^{-\nu} K_\nu(z)) = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \\
&I_{\nu-1} - I_{\nu+1} = \frac{2\nu}{z}I_\nu(z) && K_{\nu-1} - K_{\nu+1} = -\frac{2\nu}{z}K_\nu(z)
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Explicit formulae for some values of ν.

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\,\sinh z, \qquad I_{3/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\,(\cosh z - z^{-1}\sinh z)$$
$$I_{5/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\,((1+3z^{-2})\sinh z - 3z^{-1}\sinh z)$$

9.3 Parabolic cylinder functions

A bounded solution of

$$u''(x) = (k^2 + \theta^2)u,$$

is $D_{-\nu}(x\sqrt{2\theta})$ where $\nu = \frac{1}{2}(1 + k^2/\theta)$ and

$$\begin{aligned} D_{-\nu}(z) \quad = \quad & \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) 2^{-\nu/2}\sqrt{\pi} \\ & \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\left(\nu+1\right)/2\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu\left(\nu+2\right)\ldots\left(\nu+2k-2\right)}{3.5\ldots\left(2k-1\right)k!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k\right) \right. \\ & \left. - \frac{z\sqrt{2}}{\Gamma\left(\nu/2\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\nu+1\right)\left(\nu+3\right)\ldots\left(\nu+2k-1\right)}{3.5\ldots\left(2k+1\right)k!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k\right) \right\} \end{aligned}$$

$$D'_{-\nu}(z) = -\frac{z}{2} D_{-\nu}(z) - \nu D_{-\nu-1}(z)\,.$$

9.4 Airy function

The Airy function $(\mathrm{Ai})(x)$ is solution of the Sturm-Liouville equation

$$(\mathrm{Ai})''(x) = x(\mathrm{Ai})(x),\ (\mathrm{Ai})(0) = 1\,,$$

and is given by

$$(\mathrm{Ai})(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{3}\right)^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

9.5 Whittaker functions

The Whittaker function $W_{k,m}$ is solution of

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} - \frac{m^2 - 1/4}{x^2}\right) u = 0$$

Whittaker functions are related to the confluent hypergeometric functions

$$\begin{aligned} W_{k,m}(x) \quad &= \quad \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2-m-k)} M_{k,m}(x) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(1/2+m-k)} M_{k,-m}(x) \\ M_{k,m}(x) \quad &= \quad e^{-x/2} x^{m+1/2}\, {}_1F_1(m-k+1/2; 1+2m; x) \end{aligned}$$

$${}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(a)} \frac{z^n}{n!}$$

Parabolic cylinder function

$$\begin{aligned} D_{-\nu}(z) \quad = \quad & \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) 2^{-\nu/2}\sqrt{\pi} \\ & \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\left(\nu+1\right)/2\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu\left(\nu+2\right)\ldots\left(\nu+2k-2\right)}{3.5\ldots\left(2k-1\right)k!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k\right) \right. \\ & \left. - \frac{z\sqrt{2}}{\Gamma\left(\nu/2\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\nu+1\right)\left(\nu+3\right)\ldots\left(\nu+2k-1\right)}{3.5\ldots\left(2k+1\right)k!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k\right) \right\}\,. \end{aligned}$$

Le livre n'est pas terminé.
La fin n'a pas été écrite, elle n'a jamais été trouvée.
M. Duras, L'été 80. Editions de Minuit.

Bibliography

[1] J. Azéma and M. Yor. Etude d'une martingale remarquable. In J. Azéma and M. Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XXIII*, volume 1557 of *Lecture Notes in Maths.*, pages 88–130. Springer-Verlag, 1989.

[2] B. Biais, T. Björk, J. Cvitanić, N. El Karoui, E. Jouini, and J.C. Rochet. Financial mathematics. In W. Runggaldier, editor, *Financial Mathematics, Bressanone, 1996*, volume 1656 of *Lecture Notes in Maths.*, pages 133–158. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[3] A. Borodin and P. Salminen. *Handbook of Brownian motion : facts and formulae.* Birkhäuser, 1996.

[4] L. Breiman. *Probability.* Addison-Wesley, Reading MA, 1968.

[5] A. Cheridito. Mixed fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 7:913–934, 2001.

[6] K.L. Chung. Excursions in Brownian motion. *Ark. für Math.*, 14:155–177, 1976.

[7] F. Comte and E. Renault. Long memory in continuous time stochastic volatility models. *Math. Finance*, 3:291–323, 1998.

[8] J.C. Cox. Notes on option pricing i : Constant elasticity of variance diffusions. *Journal of Portfolio management*, 22:15–17, 1996.

[9] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. A theory of term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–408, 1985.

[10] D. Davydov and V. Linetsky. Pricing options in one dimensional diffusions: a unified approach. *Preprint*, 1999.

[11] R.M. Dudley. Wiener functionals as Itô integrals. *The Annals of Prob.*, 5:140–141, 1977.

[12] N El Karoui and L. Mazliak. *Backward stochastic differential Equations.* Longman, Pitman research notes in Mathematics series, 364, Harlow, 1997.

[13] P. Embrechts and M. Maejima. *Selfsimilar processes.* Forthcoming, Zurich, 2001.

[14] M. Emery, C. Stricker, and J-A. Yan. Valeurs prises par les martingales locales continues à un instant donné. *The Annals of Proba.*, 11:635–641, 1983.

[15] H. Geman, D. Madan, and M. Yor. Asset prices are Brownian motions: only in business time. *working paper*, 1998.

[16] A. Göing-Jaeschke and M. Yor. A survey and some generalizations of Bessel processes. *Preprint, MaPhySto*, 2002.

[17] Y. Hu. Option pricing in a market when the volatility is driven by fractional Brownian motion. In J. Yong, editor, *International conference on Mathematical Finance: Recent developmentss in Mathematical Finance*, pages 49–59. World Scientific, 2001.

[18] Y. Hu and B. Oksendal. Fractional white noise calculus and applications to finance. *Preprint, Oslo University*, 1999.

[19] Y. Hu, B. Oksendal, and A. Sulem. Optimal portfolio in a fractional Black and Scholes market. *Preprint, Oslo University*, 1999.

[20] J. Kent. Some probabilistic properties of Bessel functions. *Annals of Probability*, 6:760–770, 1978.

[21] B. Leblanc. *Modélisations de la volatilité d'un actif financier et Applications.* Thèse, Paris VII, Septembre 1997.

[22] J. Ma and J. Yong. *Forward-Backward stochastic differential equations*, volume 1702 of *Lecture Notes in Maths.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[23] B. Mandelbrot and J.W. Van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10:422–437, 1968.

[24] I. Monroe. Processes that can be embedded in Brownian motion. *Ann. Prob.*, 6:42–56, 1978.

[25] J. Neveu. *Bases mathématiques des probabilités.* Masson, Paris, 1964.

[26] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1995.

[27] D. Nualart and W. Schoutens. Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes with applications in finance. *Bernoulli*, 7:761–776, 2001.

[28] J.W. Pitman and M. Yor. A decomposition of Bessel bridges. *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, 59:425–457, 1982.

[29] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Third edition. Springer Verlag, Berlin, 1999.

[30] L.C.G. Rogers. Arbitrage with fractional Brownian motion. *Math. Fina.*, 7:95–105, 1997.

[31] A.N. Shiryaev. On arbitrage and replication for fractal models. In A. Sulem, editor, *Worshop on Mathematical Finance.* INRIA, 1998.

[32] W. Szatzschneider. Comments about CIR model as a part of a financial market. *Preprint*, 2001.

[33] W. Szatzschneider. Extended Cox, Ingersoll and Ross model. *Preprint*, 2001.

Index