Construction d'une loi de maintien BCAC en arrêt de travail

Alexandre Eby[1] / Frédéric Planchet[2]

Version 1.11 du 15/06/2017

La présente note a pour objet de décrire la construction d'une loi de maintien en « arrêt de travail », sans distinction de l'état « incapable » ou « invalide », à partir des trois familles de lois usuelles fournies par le BCAC (maintien en incapacité, transitions d'incapacité vers l'invalidité et maintien en invalidlité).

On note *T* la durée passée en arrêt de travail (incapacité et invalidité) ; on suppose que tous les arrêts de travail commencent par une période d'incapacité (pas d'entrée directe en invalidité). L'unité de temps pour la durée d'arrêt est le mois.

On a, pour tout $k \geq 0$,avec des notations évidentes, en écrivant $T = T^{INC} + T^{INV}$:

$$\left\{T = k\right\} = \left\{T^{INC} = k \cap T^{TRA} > k \cap k \leq 36\right\} \cup \bigcup_{l \leq (k-1) \wedge 36} \left\{T^{INC} = l \cap T^{TRA} = l\right\} \cap \left\{T^{INV} = k - l\right\}.$$

où T^{TRA} désigne la durée de maintien latente associée à l'entrée en invalidité. Autrement dit, pour qu'un arrêt de travail dure *k* mois, il faut qu'il y ait eu une incapacité de durée $l \leq (k - 1 \wedge 36)$ suivie d'une période d'invalidité de $k - l$ mois, ou une incapacité de durée *k*, sans invalidité (pour $k \leq 36$). On en déduit que

$$P(T = k) = P\left(T^{INC} = k \cap T^{TRA} > k\right) \times 1_{\{k \leq 36\}} + \sum_{l=0}^{k-1 \wedge 36} P\left(\left\{T^{INC} = l \cap T^{TRA} = l\right\} \cap \left\{T^{INV} = k - l\right\}\right) \times 1_{\{k>0\}}$$

.

En utilisant la notation $q_x = P\left(T < x + 1 \middle| T \geq x\right)$:

$$P\left(T^{INC} = k \cap T^{TRA} > k\right) = \frac{l_{x,k}^{INC}}{l_{x,0}^{INC}} \times \left(q_{x,k}^{INC} - q_{x,k}^{TRA}\right)$$

$$P\left(\left\{T^{INC} = l \cap T^{TRA} = l\right\} \cap \left\{T^{INV} = k - l\right\}\right) = \frac{l_{x,l}^{INC}}{l_{x,0}^{INC}} \times q_{x,l}^{TRA} \times \frac{l_{x+l+1,k-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \times q_{x+l+1,k-l-1}^{INV}$$

et donc, pour un individu d'âge *x* à l'entrée en arrêt de travail, la loi de la durée passée en arrêt :

$$P(T_x = k) = \frac{l_{x,k}^{INC}}{l_{x,0}^{INC}} \times \left(q_{x,k}^{INC} - q_{x,k}^{TRA}\right) \times 1_{\{k \leq 36\}} + \sum_{l=0}^{k-1 \wedge 36} \frac{l_{x,l}^{INC}}{l_{x,0}^{INC}} \times q_{x,l}^{TRA} \times \frac{l_{x+l+1,k-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \times q_{x+l+1,k-l-1}^{INV} \times 1_{\{k>0\}}.$$

On déduit aisément les $q_{x,a}^{AT} = \dfrac{l_{x,a}^{AT} - l_{x,a+1}^{AT}}{l_{x,a}^{AT}}$ des probabilités $P(T_x = k)$:

---

[1] PRIM'ACT, 52 avenue de la grande armée, 75017 PARIS.

[2] ISFA, PRIM'ACT.

$$\frac{l_{x,k}^{AT}}{l_{x,0}^{AT}} = \frac{l_{x,k}^{AT}}{l_{x,0}^{INC}} = P(T_x \geq k) = \sum_{u \geq k} P(T_x = u) = 1 - \sum_{u<k} P(T_x = u).$$

On en déduit l'expression du nombre de survivants en arrêt de travail

$$l_{x,k}^{AT} = l_{x,0}^{AT} \times \left(1 - \sum_{u<k} P(T_x = u) \times 1_{\{k>0\}} \right)$$

$$= l_{x,0}^{INC} - \sum_{u<k} l_{x,u}^{INC} \times \left(q_{x,u}^{INC} - q_{x,u}^{TRA} \right) \times 1_{\{u \leq 36, k>0\}} - \sum_{u<k} \sum_{l=0}^{u-1 \wedge 36} l_{x,l}^{INC} \times q_{x,l}^{TRA} \times \frac{l_{x+l+1,u-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \times q_{x+l+1,u-l-1}^{INV} \times 1_{\{k>0,u>0\}}$$

Par un premier télescopage, puis un second, on a

$$l_{x,k}^{AT} = l_{x,k}^{INC} \times 1_{\{k \leq 36\}} - \sum_{u<k} l_{x,u}^{TRA} \times 1_{\{u \leq 36, k>0\}} - \sum_{u<k} \sum_{l=0}^{u-1 \wedge 36} l_{x,l}^{TRA} \times \frac{l_{x+l+1,u-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \times q_{x+l+1,u-l-1}^{INV} \times 1_{\{u>0,k>1\}}$$

$$= l_{x,k}^{INC} \times 1_{\{k \leq 36\}} - \sum_{u<k} l_{x,u}^{TRA} \times 1_{\{u \leq 36, k>0\}} - \sum_{l=0}^{k-2} l_{x,l}^{TRA} \sum_{u=0}^{k-1} \frac{l_{x+l+1,u-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \times q_{x+l+1,u-l-1}^{INV} \times 1_{\{l \leq u-1, l \leq 36, u>0, k>1\}}$$

$$= l_{x,k}^{INC} \times 1_{\{k \leq 36\}} - \sum_{u=0}^{k-1} l_{x,u}^{TRA} \times 1_{\{u \leq 36, k>0\}} - \sum_{l=0}^{k-2} l_{x,l}^{TRA} \left(1 - \frac{l_{x+l+1,k-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \right) \times 1_{\{l \leq 36, k>1\}}$$

$$= l_{x,k}^{INC} \times 1_{\{k \leq 36\}} + \sum_{l=0}^{k-1 \wedge 36} l_{x,l}^{TRA} \times \frac{l_{x+l+1,k-l-1}^{INV}}{l_{x+l+1,0}^{INV}} \times 1_{\{k>0\}}$$

Une fois connue cette loi, on détermine facilement la loi conditionnelle pour la durée résiduelle pour un arrêt d'ancienneté a à la date du calcul :

$$T_{x,a} \overset{Loi}{=} (T_x - a) \big| (T_x \geq a).$$

Remarque : dans les termes relatifs à la loi de maintien en invalidité, par exemple $q_{x+l,l}^{INV}$, l'âge d'entrée et l'ancienneté sont exprimés en année, il faut donc ou bien interpoler préalablement ou bien considérer les instants arrondis de la forme $x_l = x + \left[\frac{l}{12} \right]$ et $\left[\frac{l}{12} \right]$.

Une solution *a priori* simple et cohérent consiste, pour chaque âge à l'entrée en invalidité, à interpoler mensuellement dans la dimension « ancienneté ».