



Modèles Financiers en Assurance

Cours EURIA

M. Marc JUILLARD Actuaire
mjuillard@winter-associes.fr

WINTER
& ASSOCIÉS



Les modèles usuels utilisés en assurance, que ce soit pour la tarification ou le provisionnement, reposent traditionnellement sur le calcul d'une espérance (notions de prime pure, de valeur actuelle probable, etc.) ;

cette démarche est légitimée par le « principe d'équivalence » qui s'appuie sur le constat que l'espérance est la constante qui résume le mieux la distribution d'intérêt au sens de la distance quadratique.

Au surplus la loi des grands nombres assure que, dans le cas de risques indépendants et pour un portefeuille de taille suffisante, la valeur observée sera peu différente de la valeur prédite ; le théorème central limite permet d'ailleurs d'évaluer l'incertitude associée à cette prédiction.



Nature des risques : risques mutualisables

Cette approche présente toutefois quelques limitations majeures :

- elle ne permet pas de différencier les risques entre eux : la volatilité de l'engagement n'étant pas prise en compte.
- elle ne permet pas de prendre en compte correctement les risques systématiques.



Sous l'impulsion des travaux menés en finance sur la valorisation d'actifs complexes, d'une part, et des progrès des puissances de calcul des ordinateurs, d'autre part, des approches alternatives, orientées vers l'utilisation de la loi du phénomène observé, et non plus seulement de l'espérance, se sont développées depuis quelques années.

Par ailleurs, les évolutions récentes des normes comptables internationales introduisant dans la méthode de valorisation les concepts de « juste valeur » (« fair value ») et de « valeur à risque donné » (« value at risk » ou « VaR ») renforcent l'intérêt pour ces méthodes d'évaluation, dont la mise en œuvre s'appuie en général sur des techniques de simulation.

Enfin, les évolutions à venir des règles prudentielles, dans le contexte du projet « Solvabilité 2 », vont nécessiter le recours systématique à la notion de valeur à risque donné et les modèles de détermination du capital devront être à même de quantifier des probabilités de ruine.



SOMMAIRE

1. Modélisation des risques
1.1 différents types de risques
2. Options cachées d'un contrat d'assurance
3. Provisionnement des garanties planchers

1. Modélisation des risques



Nature des risques

Tous les risques n'ont pas le même impact

Les passifs d'assurance sont soumis à deux types de risque :

- les risques mutualisables : ils correspondent à un risque n'introduisant pas de relation de dépendance entre les différentes têtes d'une cohorte (que cette classe de risque soit homogène ou non).
- les risques systématiques : à l'inverse des risques mutualisables, les risques systématiques introduisent une relation de dépendance entre une partie des individus constituant la cohorte.

1. Modélisation des risques



Nature des risques

risques mutualisables

Cette condition additionnée au fait que les prestations maximales sont bornées permet l'application du théorème central limite. De ce fait on observe une convergence en probabilité de la charge moyenne vers la charge moyenne espérée.

$$J_{\alpha} = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \bar{X}_n + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

De plus le calcul théorique de l'intervalle de confiance à 95% indique que les fluctuations autour de la valeur moyenne vont avoir tendance à diminuer avec le temps :

1. Modélisation des risques



Nature des risques

Risques systématiques

A l'inverse des risques mutualisables, les risques systématiques entraîne une relation de récurrence entre les individus constituant la cohorte. De ce fait l'approximation gaussienne couramment retenue n'est plus exacte.

Ils sont potentiellement plus dangereux que les risques mutualisables car ils sont source de volatilité et peuvent entraîner un biais sur la valeur moyenne de l'engagement.

Ces risques de risques peuvent aisément être mis en lumière lors de l'étude du risque systématique de longévité.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Nature des risques

Un exemple de risque systématique : le risque de longévité

Des études récentes (Currie et al. [2004]) font apparaître que l'évolution du taux instantané de mortalité présente, aux différents âges, des variations erratiques autour de la tendance qui se dégage, variations non expliquées par les fluctuations d'échantillonnage. Les données INED permettent de constater le même phénomène (illustré par la figure suivante).

Ces variations possèdent un impact systématique pour tous les âges et ne sont donc pas mutualisables.

Elles entraînent une augmentation de la volatilité de l'engagement et doivent donc être modélisées dans le calcul des provisions et du SCR sous solvabilité 2.

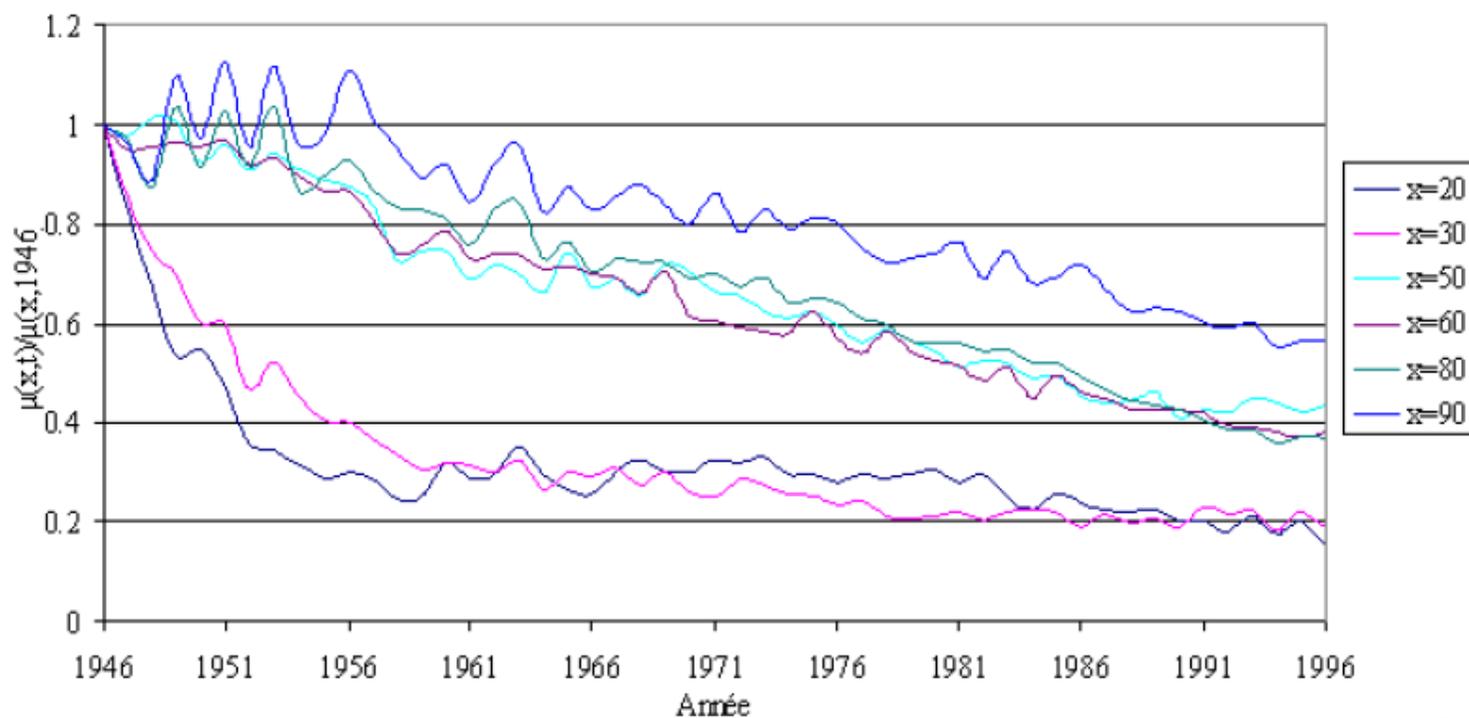
WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Nature des risques

Un exemple de risque systématique : le risque de longévité

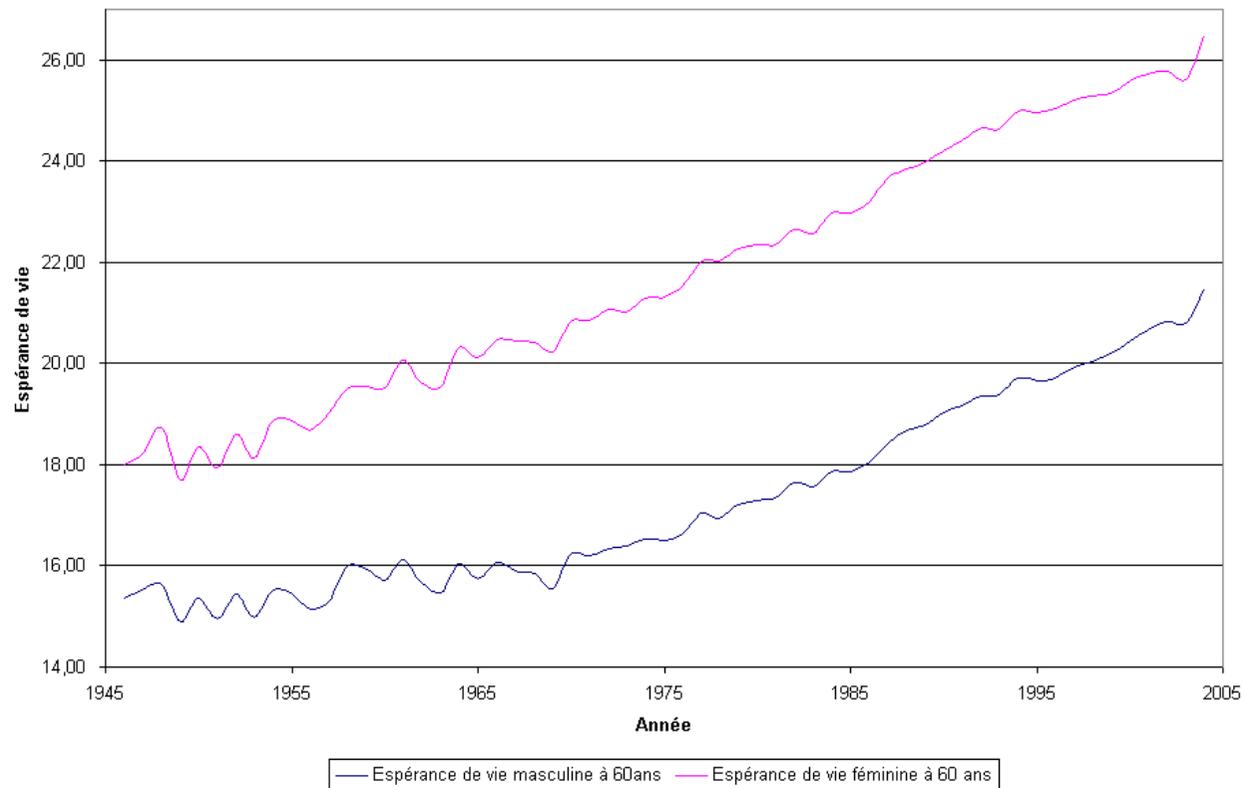


1. Modélisation des risques



Nature des risques

Un exemple de risque systématique : le risque de longévité



WINTER
& ASSOCIÉS

SOMMAIRE

1. **Modélisation des risques**
 - 1.1 *différents types de risques*
 - 1.2 *quel modèle ?*
2. Options cachées d'un contrat d'assurance
3. Provisionnement des garanties planchers

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Quel impact sur l'engagement

De part la différence de modélisation entre un aléa frappant différemment les diverses têtes du portefeuille et un aléa frappant de manière systématique l'ensemble du portefeuille, il est indispensable de décrire les risques en fonction de leur caractère mutualisable ou systématique.

Il convient également de noter qu'un risque mutualisable et un risque systématique présentent un impact différent sur la distribution de l'engagement : les risques systématiques pouvant être symétriques ou asymétriques.

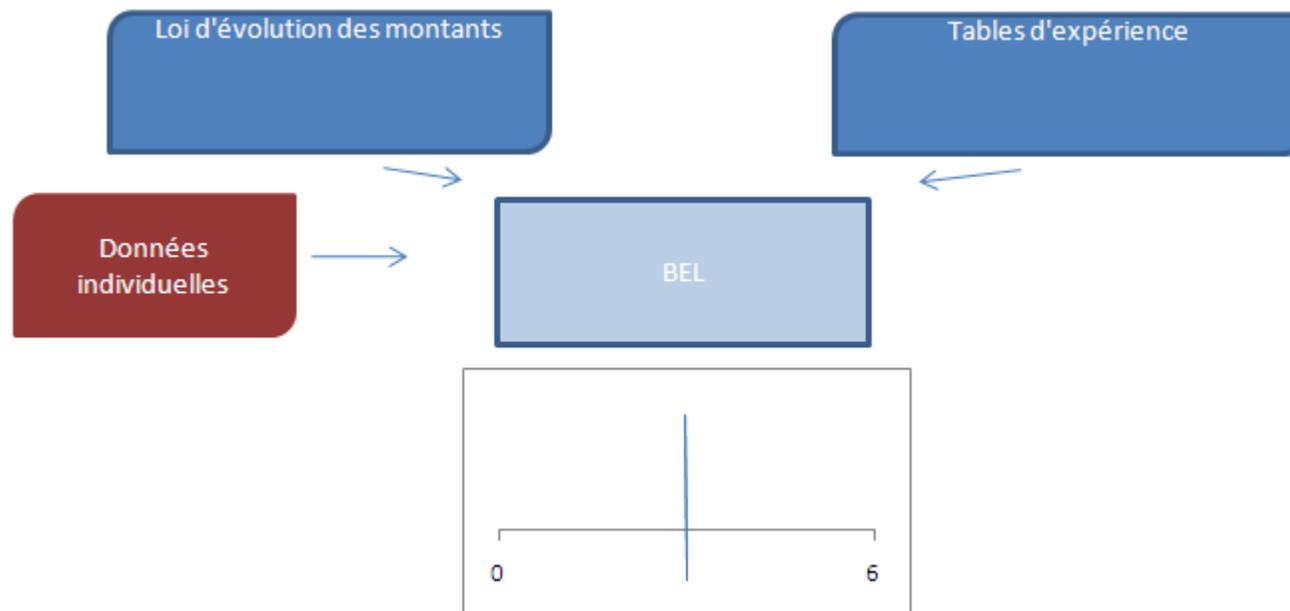
1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Quel impact sur l'engagement

- En l'absence d'aléas le best estimate correspond à une masse de Dirac.



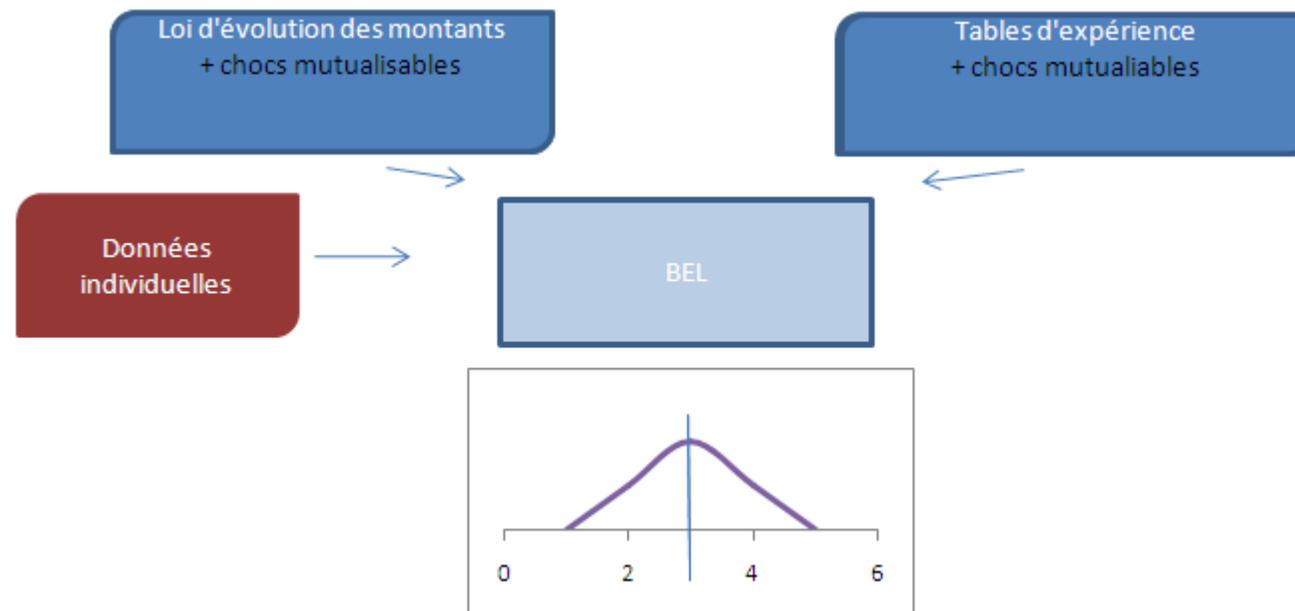
1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Quel impact sur l'engagement

- En l'absence d'aléas le best estimate correspond à une masse de Dirac.
- La prise en compte des risques mutualisables ne modifie pas la valeur du best estimate mais introduit de la volatilité dans le distribution de l'engagement.



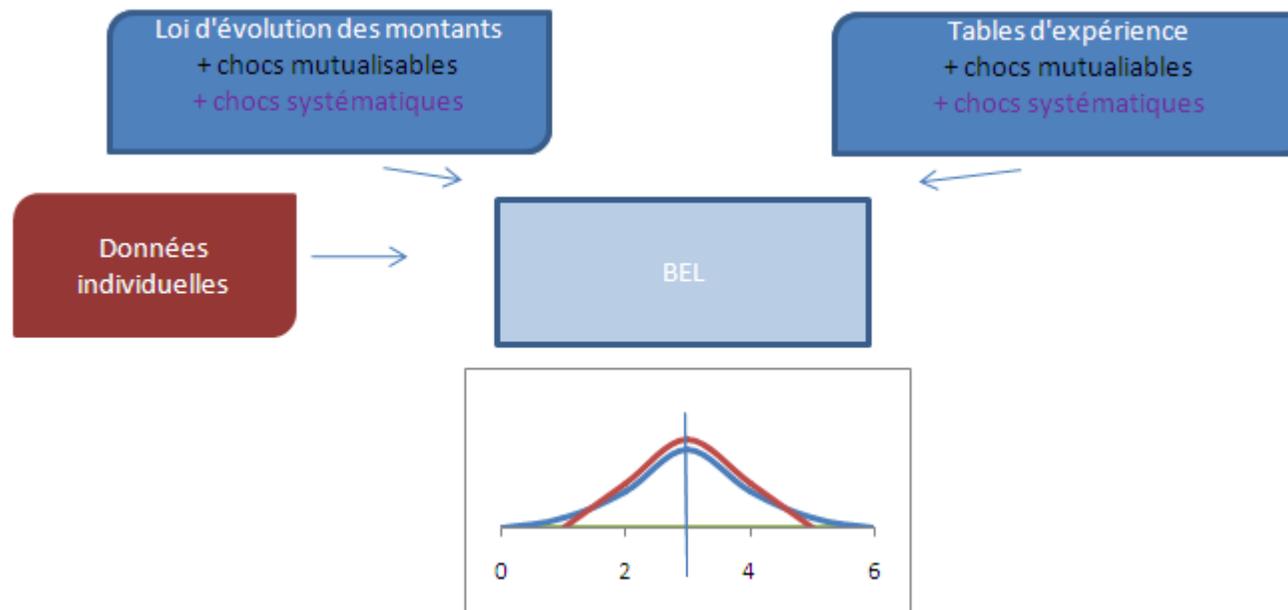
1. Modélisation des risques



Nature des risques

Quel impact sur l'engagement

- En l'absence d'aléas le best estimate correspond à une masse de Dirac.
- La prise en compte des risques mutualisables ne modifie pas la valeur du best estimate mais introduit de la volatilité dans le distribution de l'engagement.
- La prise en compte des risques systématiques modifie la valeur du best estimate et introduit de la volatilité dans le distribution de l'engagement.



1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Nécessité d'une approche stochastique

De part la présence de risque systématique asymétrique, le calcul du *best estimate* des engagement d'assurance doit être calculé sur la base de modèle stochastiques.

Cette modélisation stochastique est notamment nécessaire dans le cadre du calcul de la MCEV, d'une probabilité de ruine, le calcul du *best estimate* des provisions techniques ainsi que celui du SCR dans le cadre d'un modèle interne.

Par définition un modèle stochastique est un modèle dont l'objet est de fournir des informations sur la loi de probabilité du phénomène étudié et non un modèle basé obligatoirement sur de la simulation.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Que veut dire stochastique

Un tel modèle peut être mis en œuvre sur la base de formules analytiques et/ou de simulations.

Ainsi, la notion de modèle stochastique n'est pas synonyme de la notion de simulation : la simulation n'étant qu'une solution technique, pratiquement indispensable lorsque l'engagement ne peut être décrit de manière totalement analytique mais nécessitant la mise en place d'une formalisation probabiliste propre.

Les modèles peuvent être répartis en trois grandes catégories :

- La simulation dans l'univers historique ou risque neutre
- Les modèles semi analytiques
- Les modèles à déflateurs.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Comment choisir le modèle

Le choix du modèle qui sera retenu dépend principalement de la problématique. ces diverses calculs peuvent être répartis en trois grandes catégories :

- ✓ calcul d'une valeur de marché (*best estimate* et MCEV) ;
- ✓ calcul d'un quantile (probabilité de ruine) ;
- ✓ calcul d'un quantile et d'une valeur de marché (SCR).

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Que disent les textes réglementaires

En amont de la description des différents modèles à privilégier en fonction de la problématique rencontrée, il convient de décrire les recommandations issues des textes réglementaires. Ces textes sont issues de deux sources :

- ✓ les MCEV principes ;
- ✓ les consultation papers de niveau 2 publiés par le CEIOPS au cours de l'année 2009.

Au niveau des MCEV principes, peu d'indications sont données. La principale étant la possibilité de recourir aux modèles basés sur des déflateurs.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Que disent les textes réglementaires : CEIOPS

Le CEIOPS revient sur cette problématique dans le CP N°26. De manière synthétique, il pose en principe le caractère efficient et auditable du modèle.

Quatre types de modèles sont envisageables, à savoir les déterministes, les analytiques, ceux basés sur des simulations ou bien une combinaison des trois.

Les modèles stochastiques seront privilégiés dès lors que le contrat d'assurance étudié présente des options non linéaires, type participation aux bénéfices dans le cas de contrats d'épargne ou prise en compte du caractère rationnel des assurés (rachats conjoncturels dans le cas de contrats d'assurance euro comme UC).

Dans certains cas, une autre approche sera préférable. En particulier si la simulation conduit à des approximations dues à des agrégations, ou lorsqu'il conduit à un modèle peu auditable, entraîne des risques opérationnels.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Modèle basé sur la simulation

Cette technique consiste à approximer la distribution des flux de trésorerie actualisés sur la base de projections aléatoires de l'ensemble des trajectoires de flux de trésorerie possibles.

Elle permet de prendre en compte l'ensemble des risques impactant le best estimate mais présente trois inconvénients : son coût de mise en œuvre, le temps de calcul et le risque de modèle associé.

Au surplus, la mise en place d'indicateurs permettant de mesurer la précision des calculs effectués est difficile.

Elle présente également l'avantage de pouvoir être optimiser (via le choix des trajectoire d'actif par exemple).

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Modèle analytique

Cette technique consiste à décrire explicitement la loi sous-jacente de la distribution des flux de trésorerie actualisés.

Présentant un temps de calcul optimisé, elle permet de connaître le risque associé au portefeuille en évitant les erreurs d'échantillonnage associées à la mise en œuvre de techniques de simulation.

Cependant, elle présuppose une analyse statistique fine en amont du modèle sur certains risques et l'obtention des formules explicites associées à la modélisation probabiliste peut être complexe.

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Modèle analytique

D'une manière générale, un modèle analytique « pur » est rarement envisageable.

Il est alors préférable de se tourner vers des modèles semi-analytiques. Ce type de modèle utilise la simulation afin de modéliser les risques systématiques du portefeuille, puis pour chaque tirage de ces risques systématiques, l'impact des risques mutualisables est modélisé sur la base de formules analytiques.

Cette mécanique permet d'optimiser les temps de traitement, l'impact des risques mutualisables étant, sur la base de l'approximation gaussienne, parfaitement déterminé via la connaissance des moments d'ordre un et deux.

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Au-delà des capacités d'un modèle, le choix de ce dernier doit être guidé par la problématique. Cette dernière peut être de 3 types :

- calcul d'une valeur de marché (best estimate et MCEV). Dans ce cas le modèle devra être capable d'effectuer des calculs sous l'univers risque neutre.
- calcul d'un quantile (probabilité de ruine). Dans ce cas le modèle devra être capable de calculer des valeurs d'actifs et de passif (en $t=0$) sous l'univers historique.
- calcul d'un quantile et d'une valeur de marché (SCR). Dans ce cas le modèle devra être capable de calculer des valeurs de marché en $t=1$ (donc projection sous l'univers risque neutre) et de calculer un quantile en $t=1$ (donc projection sous l'univers historique).

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

En l'absence d'interactions actif-passifs optimisables (type allocation d'actif, ou gestion de la réserve de PB) la valeur de marché peut être calculer sur la base d'un modèle analytique ou d'une modèle basé sur la simulation. Le choix devra être effectué sur la base de présence ou non (et de son importance) de la simulation dans la simulation.

Sur la base de l'analyse des risques pesant sur le portefeuille le calcul de la distribution de l'engagement sur la base d'un modèle partiellement analytique est justifiable.

Dans le cadre d'une approche par simulation, il pourra être néanmoins utile de conserver un minimum d'éléments calculés de manière analytique pour étalonner le nombre de simulations.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Par ailleurs, le recours à la simulation peut parfois s'avérer indispensable pour le calcul de la distribution des flux futurs actualisés alors que l'espérance reste accessible analytiquement. Dans ce cas de figure, la formule fermée doit être utilisée afin d'optimiser le nombre de simulation assurant la convergence du modèle, la simulation étant quant à elle utilisée pour déterminer la distribution autour de ce best estimate.

En présence d'interactions actif-passifs optimisables, seul un modèle basé sur la simulation peut être retenu

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Dans ce cas, le modèle doit être capable de projeter les flux de trésorerie dans l'univers historique et dans l'univers risque neutre.

Si ce point peut être effectué via un modèle basé sur la simulation, une attention particulière devra être apportée au niveau de la cohérence des deux projections.

A titre d'exemple la projection sous l'univers risque neutre sera effectuée sur la base d'une volatilité implicite lorsque la projection sous l'univers historique sera effectuée sur la base d'une volatilité historique. Or ces deux volatilités s'avèrent souvent (et à tort de part la contrainte sur la prime de risque) différentes.

Une technique permettant de supprimer ces incohérences consiste à se tourner vers des modèles à déflateurs.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Quel modèle ?

Le déflateur est une fonction d'actualisation stochastique qui intègre une composante risque et une composante temps. Elle permet, sur la base de flux de trésorerie projeté dans l'univers historique d'obtenir la valeur de marché de ces flux et ceux à n'importe quelle date.

Aussi, dans le cadre de la mise en place d'un modèle interne, les modèles basés sur les déflateurs seront à privilégier.

SOMMAIRE

1. **Modélisation des risques**
 - 1.1 *différents types de risques*
 - 1.2 *quel modèle ?*
 - 1.3 *exemple de modèle analytique*
2. Options cachées d'un contrat d'assurance
3. Provisionnement des garanties planchers

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Mutualisation conditionnelle

En présence d'autres facteurs de risque, seule la distribution conditionnelle à ces risques présente un caractère gaussien.

Autrement dit, en notant Z la variable aléatoire synthétisant les risques pris en compte, on a la convergence en loi :

$$\frac{\Lambda|Z - E(\Lambda|Z)}{\sigma(\Lambda|Z)} \xrightarrow{|I| \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Partant de ce constat, on cherche à estimer la distribution de la loi sur la base de la connaissance de sa transformée de Laplace empirique. En effet, cette dernière permet de définir totalement la loi de l'engagement.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Mutualisation conditionnelle

Partant de l'équivalence suivante :

- la convergence de la loi conditionnelle de Λ vers une loi log-normale



- convergence de la transformée de Laplace de la loi conditionnelle vers la transformée de Laplace d'une gaussienne.

On a :

$$\lim_{|I| \rightarrow \infty} E(e^{-u\Lambda} | Z) = \exp\left(-uE(\Lambda | Z) + \frac{u^2 \sigma^2(\Lambda | Z)}{2}\right)$$

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Mutualisation conditionnelle

Sur la base de la connaissance de la transformée de Laplace conditionnelle, on déduit la transformée de Laplace par application de la propriété suivante :

$$E(g(\Lambda)) = E\left(E\left[g(\Lambda|Z)\right]\right)$$

De ce fait on a :

$$\lim_{|I| \rightarrow \infty} E\left(e^{-u\Lambda}\right) = \lim_{|I| \rightarrow \infty} E\left(E\left(e^{-u\Lambda} | Z\right)\right)$$

$$\lim_{|I| \rightarrow \infty} E\left(e^{-u\Lambda}\right) = E\left(\exp\left(-uE(\Lambda|Z) + \frac{u^2\sigma^2(\Lambda|Z)}{2}\right)\right)$$

Le calcul de cette espérance se faisant de manière empirique.

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Mutualisation conditionnelle

$$\Phi(u) = E(e^{-u\Lambda}) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \exp\left(-um^k + \frac{u^2 v^k}{2}\right)$$

avec $m^k = \sum_{i \in I} m_i^k$ et $v^k = \sum_{i \in I} v_i^k$ les espérances et variances empiriques du segment calculées à partir des valeurs individuelles.

On a finalement :

$$\Phi(u) = E(e^{-u\Lambda}) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \exp\left(-um^k + \frac{u^2 v^k}{2}\right)$$

Ainsi il reste à calculer les espérance et variance conditionnelle à la connaissance des risques systématiques.

WINTER
& ASSOCIÉS

1. Modélisation des risques



Modèle analytique

Risque mutualisable

Aussi, il est préférable de prendre en compte les risques mutualisables analytiquement puis de recourir à la simulation afin de capter l'impact des risques systématiques.

En ignorant les risques systématiques et de part la définition des risques mutualisables, on peut considérer les assurés comme indépendants. De plus, la prestation maximale étant bornée par une constance absolue on a :

$$\Lambda = \sum_{i \in I} p_i X_i \quad \longrightarrow \quad \frac{\Lambda - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)} \xrightarrow{|I| \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Aussi, sur la base de la connaissance de l'espérance et de la variance de Λ , la formule précédente permet d'approximer la distribution de la charge future actualisée.

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Risque mutualisable : calcul de l'espérance de Λ

Cette étude est menée sur la base de l'hypothèse (non restrictive) que les risques mutualisables présentent une espérance égale à 1 et ne présentent donc aucun impact sur la valeur du *best estimate* théorique. De ce fait, seul le calcul des volatilités théoriques fera référence à ces risques.

Notons π_t la probabilité que le flux soit payé et x_t le montant actualisé associé à ce flux. Comme on a :

$$E(\Lambda) = \sum_{t=0}^m x_t \pi_t$$

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Risque mutualisable : calcul de la variance de Λ

Ce risque peut être complexe : on peut y intégrer tous les aléas affectant les prestations qui se mutualisent entre les individus. Lorsqu'on prend en compte ces aléas en plus du risque d'échantillonnage associé au modèle de durée on utilise alors pour calculer la variance l'équation :

$$V(\Lambda) = V(E(\Lambda|P)) + E(V(\Lambda|P))$$

On note ε_t l'aléa impactant le montant de prestations payées en t et on suppose qu'il suit une loi log-normale d'espérance unitaire.

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Risque mutualisable : calcul de la variance de Λ

Dans le cas de contrats de rente on obtient :

$$E(\Lambda|\varepsilon) = \sum_{t=0}^m x_t \varepsilon_t \pi_t \quad V(\Lambda|\varepsilon) = \sum_{t=0}^m \pi_t \left[x_t^2 \varepsilon_t^2 + 2x_t \varepsilon_t \sum_{u<t} x_u \varepsilon_u \right] - \left(\sum_{t=0}^m x_t \varepsilon_t \pi_t \right)^2$$

Qui sachant la loi de ε_t permet d'obtenir :

$$V[E(\Lambda|\varepsilon)] = \sum_{t=0}^m x_t^2 (e^{\sigma_t^2} - 1) \pi_t^2 \quad E[V(\Lambda|\varepsilon)] = \sum_{t=0}^m \left[x_t^2 e^{\sigma_t^2} \pi_t (1 - \pi_t) + 2 \sum_{u<t} x_t x_u \pi_t (1 - \pi_u) \right]$$

1. Modélisation des risques



Exemple de modèle analytique

Risque mutualisable : calcul de la variance de Λ

Dans le cas de contrats capitaux décès on obtient :

$$E(\Lambda|\varepsilon) = \sum_{t=0}^m x_t \varepsilon_t \pi_t \quad V(\Lambda|\Sigma) = \sum_{t=0}^m \left[x_t^2 \varepsilon_t^2 \pi_t (1 - \pi_t) - 2 \sum_{t < u} x_t x_u \varepsilon_t \varepsilon_u \pi_t \pi_u \right]$$

Qui sachant la loi de ε_t permet d'obtenir :

$$V[E(\Lambda|\varepsilon)] = \sum_{t=0}^m x_t^2 (e^{\sigma_t^2} - 1) \pi_t^2 \quad E[V(\Lambda|\varepsilon)] = \sum_{t=0}^m \left[x_t^2 e^{\sigma_t^2} \pi_t (1 - \pi_t) - 2 \sum_{u < t} x_t x_u \pi_t \pi_u \right]$$

1. Modélisation des risques



Cas d'une modèle basé sur la simulation

Logique du modèle

Le modèle doit distinguer les risques primaires des risques secondaires.

Dans le cas présent on considère que les risques secondaires correspondent aux fluctuations autour des tables de survenance.

Les risques primaires correspondent au risque financiers et les risques de table

1. Modélisation des risques



Cas d'une modèle basé sur la simulation

Modélisation des risques primaires

Les risques primaires sont modélisés sur la base de tirages successifs de différents états de la nature.

Chaque état de la nature correspond à une réalisation des rendements d'actifs et des différentes tables (mortalité, incapacité, invalidité, maintient, rachats...)

1. Modélisation des risques



Cas d'un modèle basé sur la simulation

Modélisation des risques secondaires

Pour un individu, on simule la survenance de l'évènement associé à la loi décrite par la fonction survie .

Cet évènement est interprété comme la date de fin de paiement des prestations pour une rente ou comme la date de paiement de la prestation pour un capital.

En pratique la simulation de cet instant de survenance s'effectue en remarquant que si U est une variable uniforme :

$$\sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^j p_i \rightarrow T_x = x + j$$

avec :
$$p_i = q_{x+i} \times \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j})$$

SOMMAIRE

1. Modélisation des risques
 - 1.1 différents types de risques
 - 1.2 quel modèle ?
 - 1.3 exemple de modèle analytique
2. Options cachées d'un contrat d'assurance
3. Provisionnement des garanties planchers

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



De nombreuses clauses rattachées aux contrats d'assurance vie, telles que la clause permettant le rachat du contrat, l'obligation de rémunérer un contrat libellé en euros à un taux minimum ou la participation aux bénéfices, peuvent être interprétées comme des options.

Ces options présentent un cout pour l'assureur et doivent être pris en compte dès lors qu'un calcul de valorisation économique est réalisé.

De ce fait il est nécessaire d'étudier ces risques afin de pouvoir les valoriser d'une manière *best estimate*.



SOMMAIRE

1. Modélisation des risques
 - 1.1 *différents types de risques*
 - 1.2 *quel modèle ?*
 - 1.3 *exemple de modèle analytique*

2. Options cachées d'un contrat d'assurance
 - 2.1 *option de rachat*

2. Provisionnement des garanties planchers

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Rachats conjoncturels

La prise en compte du TMG via un modèle basé sur des simulations ne présente pas de complexité. Dans le cas d'un modèle analytique, le TMG peut être considéré comme un put.

Le risque de rachat et l'option de PB sont étroitement liés et nécessitent une analyse fine du comportement des assurés en amont de toute modélisation.

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Différents type de rachats

Les rachats intervenant sur les contrats d'épargne peuvent être classés en deux catégories :

- des rachats dits structurels. Ils traduisent des sorties d'épargne motivés par des besoins de trésorerie de la part des assurés. Ils sont indépendants de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance ;
- des rachats dits conjoncturels. Ils traduisent des arbitrages d'assurés qui se tournent vers des placements plus performants. Ils dépendent donc de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Mise en avant du risque de rachat conjoncturel

Le rachat conjoncturel correspond au risque pour une société d'assurance de se voir confrontée à une vague de rachats massifs en cas de hausse des taux.

Au début des années 80, une hausse des taux de près de 100 % sur le marché américain s'est accompagnée d'une multiplication des faillites des sociétés d'assurance par 5 (Cf. statistiques du conseil américain de l'assurance vie).

Si ces rachats conjoncturels n'expliquent pas à eux seuls cette augmentation (on peut citer comme autre facteur la dégradation de la qualité de l'actif des sociétés d'assurance) ils y ont fortement contribué en forçant les sociétés à réaliser des moins-values latentes.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Modélisation du rachat conjoncturel

Si des modèles de type logistique permettent de modéliser correctement les rachats conjoncturels d'un point de vue théorique, la difficulté pratique réside dans la faiblesse des historiques permettant d'en estimer les paramètres.

En effet, de part la chute constante des taux depuis le début des années 80 aucun historique français n'existe afin de calibrer un modèle permettant d'appréhender ce phénomène. Cependant, les sources d'informations suivantes peuvent être utilisées :

- Les données propres au marché américain;
- Les données relatives aux rachats observés en Corée lors de la hausse des taux de 1998.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Modélisation du rachat conjoncturel

- Les données relatives aux 4 vagues de rachats conjoncturels des prêts immobiliers français sur les périodes 1986-1988, 1994, 1996 et 1997. En effet, les rachats conjoncturels des prêts immobiliers durant une baisse des taux et les rachats conjoncturels des contrats d'assurance durant une hausse des taux sont tous deux causés par l'apparition d'une opportunité d'arbitrage. Ces données peuvent donc être utilisées afin d'étudier la sensibilité des assurés à une variation des taux;
- L'étude lancée par le CREP (centre de recherche sur l'épargne) en octobre 1997;

Cependant, du fait des particularités de la fiscalité française sur le droit des successions, ces données ne peuvent être utilisées au-delà de 70 ans.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Modèle classique de rachat conjoncturel

Le taux de rachat conjoncturel (exprimé en % du nombre de polices) est classiquement modélisé par une fonction croissante de l'écart entre le taux de revalorisation cible de la période précédente et le taux de revalorisation effectif de la période précédente.

$$RConj(t) = \text{Min}\left(\beta; \text{Max}\left(0; c\left(\Delta(t-1) - \alpha\right)\right)\right);$$

où :

- $RConj(t)$ correspond au taux de rachat conjoncturel à appliquer sur l'année t ;
- $\Delta(t-1)$ correspond à l'écart constaté en $t-1$ entre le taux cible et le taux servi.

De manière générale et dans le cas d'une projection sous l'univers risque-neutre le taux cible retenue correspond à un taux sans risque type TME ou OAT 10 ans.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Modèle classique de rachat conjoncturel

Un seuil d'inertie noté α : il traduit le fait qu'en deçà d'un certain écart de taux aucun rachat supplémentaire n'est comptabilisé. Ceci traduit l'existence de pénalité en cas de rachat (diminuant l'opportunité d'arbitrage), l'impact de la perte de l'antériorité fiscale et le fait que les assurés ne sont pas parfaitement informés. Il est généralement compris entre 0 et 0,5 %.

Un taux de rachat maximal β : la présence de ce plafond (généralement situé entre 15 % et 30 %) traduit le fait qu'une vague de rachat excessive ne serait pas isolée au cas de l'assureur et entraînerait une intervention de la part de l'État.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Option de rachat

Modèle classique de rachat conjoncturel

Une pente c : elle permet de relier l'écart de taux constaté et le pourcentage de rachats conjoncturels. Elle est généralement comprise entre 6 et 8.

Ainsi la fonction retenue peut s'exprimer via la formule suivante :



SOMMAIRE

1. Modélisation des risques
 - 1.1 différents types de risques
 - 1.2 quel modèle ?
 - 1.3 exemple de modèle analytique

2. Options cachées d'un contrat d'assurance
 - 2.1 option de rachat
 - 2.2 TMG

3. Provisionnement des garanties planchers

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Lecture optionnelle d'un contrat d'épargne

On considère dans un premier temps un contrat d'assurance présentant les caractéristiques suivantes :

- Il est non rachetable ;

- à échéance fixe : n ;

- Il intègre un TMG r_g

A la date t , notons respectivement PM_t , K_t et S_t la valeur des provisions mathématiques, fonds propres et actifs.

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Lecture optionnelle d'un contrat d'épargne

Date	Flux des assurés	Flux des actionnaires
0	$-\Pi$	$-\mathbf{K}_0$
T	$\text{Min}(\text{PM}_T, S_T)$	$[S_T - \text{PM}_T]^+$

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Lecture optionnelle d'un contrat d'épargne

Les flux de trésorerie en T revenant aux assurés sont :

$$\text{Min}(PM_T, S_T) = PM_T + S_T - \text{Max}(PM_T, S_T),$$

$$\text{Min}(PM_T, S_T) = PM_T - (PM_T - S_T)^+.$$

Ce flux est celui d'une obligation zéro-coupon, sans risque de défaut, d'échéance T et de la vente d'un Put européen de sous-jacent S, de prix d'exercice PM_T et d'échéance T.

De même le flux à l'échéance des actionnaires correspond à celui d'un Call européen de sous-jacent S, de prix d'exercice PM_T et d'échéance T.

WINTER
& ASSOCIÉS

2. Options cachées d'un contrat d'assurance



Lecture optionnelle d'un contrat d'épargne

En suppose dorénavant que le contrat prévoit une faculté de rachat.

La possibilité de racheter le contrat à tout instant t ($0 < t < T$) s'apparente à un Put américain dont le sous-jacent est le contrat et le prix d'exercice le minimum entre la valeur de l'actif en t et le montant de la provision mathématique à la date de l'exercice de l'option. Toutefois, il nous faut remarquer qu'à la signature du contrat, on ne connaît pas le futur prix d'exercice, puisque S est une variable aléatoire.

SOMMAIRE

1. Modélisation des risques
 - 1.1 différents types de risques
 - 1.2 quel modèle ?
 - 1.3 exemple de modèle analytique

2. Options cachées d'un contrat d'assurance
 - 2.1 option de rachat
 - 2.2 TMG

3. Provisionnement des garanties planchers

3. Provisionnement des garanties planchers



On distingue principalement deux types de contrats d'épargne : les contrats dits « en euros » et les contrats « en unités de compte » (UC).

Les premiers offrent aux assurés, à leur échéance, une somme fixée à laquelle s'ajoutent les participations aux bénéfices techniques et financiers alors que les seconds garantissent des parts d'actifs.

Ces actifs sont appelés supports, ils sont de divers types (FCP, actions, SCPI, SICAV, etc.) et sont sélectionnés par l'assuré lors de ses versements selon des règles variables selon le contrat. Remarquons que l'assureur ne supporte alors aucun risque financier.



3. Provisionnement des garanties planchers



Toutefois de nombreuses garanties sont intégrées aux contrats en UC pour les rendre plus attractifs. Exprimées en euros, ces garanties font supporter un risque à l'assureur, qu'il convient d'évaluer et de provisionner, dans le cadre de l'application des normes IFRS.

Une de ces options est la garantie plancher : elle consiste à garantir le versement lors du décès de l'assuré du maximum entre l'épargne acquise et la somme des primes non capitalisées.

Aussi cette option s'apparente à une option de vente que le bénéficiaire possède vis-à-vis de la compagnie.

Il est à noter que des variantes peuvent exister (effet cliquet et revalorisation).

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Définition des risques

Il s'agit d'une combinaison d'un risque de mortalité et d'un risque de marché.

- Le risque de mortalité est un risque classique pour un assureur vie, il peut être pris en compte avec les tables de mortalité et il se mutualise. Dans l'hypothèse d'une mutualisation suffisante, c'est à dire sur un gros portefeuille, aucune prime de risque n'est donc associée à ce risque.
- Le risque de marché, quant à lui, est beaucoup plus délicat à évaluer et à maîtriser, notamment du fait qu'il ne se mutualise pas. Il provient des fluctuations boursières des supports que l'assuré a choisis dans son contrat. Evaluer ce risque implique donc des modélisations de cours boursiers.

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Prise en compte du risque financier : méthodes stochastiques

Afin de provisionner les contrats en UC présentant des options et garanties financières, il est nécessaire de valoriser la valeur temps et la valeur intrinsèque de ces options et garanties. Le marché français utilise plusieurs techniques différentes, certaines stochastiques et d'autres déterministes. Parmi les méthodes stochastiques on peut retenir deux méthodes :

La méthode de Monte Carlo : cette méthode revient à projeter dans l'univers risque neutre les flux liés aux contrats en fonction de différents scénarios financiers, puis en retenir la valeur actuelle moyenne. La méthode des put constitue un cas particulier de cette méthode.

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Prise en compte du risque financier : méthodes stochastiques

La méthode Value At Risk : cette méthode conduit à retenir un niveau de provisions qui ne serait insuffisant que pour un certain nombre d'états de la nature. Le degré de prudence découle de la probabilité d'insuffisance retenue.

3. Provisionnement des garanties planchers



Prise en compte du risque financier : méthodes déterministes

Parmi les méthodes déterministes, on peut retenir deux méthodes :

- La méthode par scénario déterministe choisi : cette méthode consiste à projeter les flux liés aux contrats en fonction d'un scénario financier choisi au préalable.
- La méthode des kraks : cette méthode consiste à projeter les flux liés aux contrats en fonction d'un scénario financier prévoyant une forte baisse des marchés durant les premières années.

Il est à noter que le degré de prudence des méthodes déterministes dépend du scénario retenu.

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Positionnement de l'ACAM

Pour l'ACAM, le calcul doit être effectué tête par tête et doit être réalisé par un faisceau de méthodes en retenant des paramètres prudents.

In fine, l'ACAM recommande de comparer la provision constituée et le maximum entre une méthode déterministe et une méthode par option de vente. Les diverses techniques envisageables sont :

Pour l'évaluation de l'engagement de l'assureur :

- la méthode des options de vente
- la méthode par scénario déterministe choisi
- les méthodes par quantiles (ou value at risk) .

3. Provisionnement des garanties planchers



Positionnement de l'ACAM

Engagement de l'assuré

- Courbe au pire
- Scénario déterministe.

Table de mortalité à retenir dans les projections :

- TD pour les garanties en cas de décès
- La plus prudente de TD et TV pour les garanties mixtes (PEP)
- Tables d'expérience certifiées

3. Provisionnement des garanties planchers



Positionnement de l'ACAM

L'ACAM définit également un ensemble de paramètres à retenir lors des calculs de projection.

Dans le cas d'une modélisation de l'engagement de l'assureur via la méthode des Put :

- Taux sans risque : Min (3,5 % ; 60 %.TME) quelle que soit l'échéance
- Volatilité historique annualisée sans quelle soit à 20 % (part action) ou 10 % (part obligataire)

Dans le cas d'une modélisation via un scénario déterministe

- Baisse annuelle progressive de 15% x volatilité, sans que cette baisse ne dépasse 50% x volatilité.

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Positionnement de la FFSA

La FFSA a publié un ensemble de recommandations relatives au calcul de la garantie plancher en cas de vie.

Engagement de l'assureur

L'assureur est considéré comme un vendeur d'options de vente (Put) accordées aux assurés au moment de la survenance de leur décès. L'engagement de l'assureur est donc déterminé par le prix d'une suite de n puts européens calculés indépendamment les uns des autres et pondérés par les probabilités de décès de l'assuré. La valorisation des puts européens se fait par le modèle Black and Scholes. A la date t , l'engagement de l'assureur est obtenu en sommant les puts pondérés correspondant à chacune des années d'assurance. La formule de calcul est donnée en annexe 1.

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Positionnement de la FFSA

L'engagement de l'assuré se calcule comme la valeur actuelle des primes contractuelles restant à payer par l'assuré. Le niveau de prime peut être déterminé:

- par un scénario déterministe judicieusement choisi

ou

- par la courbe au pire déterminée par un seuil de probabilité préalablement fixé. Cette courbe est calculée selon la méthode de la perte maximale, ce qui signifie qu'à une date t donnée, la probabilité pour que les cours futurs atteignent des niveaux inférieurs à la courbe « au pire » est inférieure ou égale au seuil de probabilité fixé.

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Provisionnement via les put

L'engagement pris par l'assureur est le suivant : si l'assuré décède durant l'année t , l'assureur s'engage à verser en complément de la valeur du fond un capital garanti pouvant être égale :

à la prime unique versée en 0 . Dans ce cas, la garantie correspond à un put européen dont le strike est égale à la prime initiale ;

à la prime unique versée en 0 capitalisée annuellement au taux x . Dans ce cas, la garantie correspond à un put européen dont le strike est égale à la prime initiale capitalisée au taux x ;

à la valeur maximale atteinte par le fond à diverses dates anniversaires. Dans ce cas, la garantie correspond à un put Lookback;

WINTER
& ASSOCIÉS

3. Provisionnement des garanties planchers



Notons ${}_t Q_x$ la probabilité qu'un individu d'âge x meurt dans t années ;

Notons $Put(S_t, S_0, t)$ la valeur d'un put européen de sous jacent S_t de prix d'exercice S_0 et de maturité t . Cette valeur se calcule via la formule fermée de Black & Scholls ;

Notons $PLB(S_t, t)$ la valeur d'un put Lookback de sous jacent S_t et de maturité t . Cette valeur se calcule via une formule fermée ;

3. Provisionnement des garanties planchers



Dans le cas d'un contrat ne prévoyant pas d'effet cliquet ni de Roll-up, le calcul de la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur est :

$$\sum_t Q_x Put(S_t, S_0, t)$$

L'ajout d'une garantie Roll-up ne modifie pas les principes de calcul (la revalorisation étant certaine). En effet, notons x le taux de revalorisation annuel appliqué au capital garanti. Le calcul de la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur est : $\sum_t Q_x Put(S_t, S_0(1+x)^t, t)$

L'ajout d'une garantie cliquet modifie les principes de calcul dans le sens où les options à considérer ne sont plus des Put européens mais des Put LookBack., le calcul de la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur est :

$$\sum_t Q_x PLB(S_t, t)$$



3. Provisionnement des garanties planchers



D'autres garanties sur contrats en unité de compte peuvent être envisagée :

GMAB : garantie de revenu en cas de survie (provisionnement par les puts)

GMWB : Il s'agit d'un contrat garantissant des montants de retraits minimum. L'assuré a la possibilité de retirer X% (des sommes versées) par an dès la première année. Les retraits sont garantis quelque soit la performance des actifs (garantie pertes pécuniaires). Ces contrats offrent la possibilité d'une garantie de capital (sous réserve que les rachats n'excèdent pas les montants prédéterminés)

Le provisionnement doit prendre en compte le comportement de rachat rationnel de l'assuré via le théorème d'Hamilton Jacobi Bellman. En tant qu'individu rationnel, ce dernier pilote ses rachats afin de maximiser son gain et en fonction de l'importance qu'il donne au montant qu'il récupérera à la fin de la garantie.

Frédéric PLANCHET
fplanchet@winter-associes.fr

Marc JUILLARD
mjuillard@winter-associes.fr

WINTER & Associés

Bureau de Paris
43-46 avenue de la Grande
Armée
F-75 116 Paris
+33-(0)1-45-72-63-00

Bureau de Lyon
55 avenue René Cassin
CS70410
69338 LYON CEDEX 09
+33-(0)4-37-37-80-90

<http://www.winter-associes.fr/>
<http://www.ressources-actuarielles.net/>
<http://www.winter-associes.fr/blog>

WINTER
& ASSOCIÉS