

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

PARIS

MEMOIRE

Présenté en vue d'obtenir le

MASTER PROFESSIONNEL EN SCIENCES DE GESTION

Mention Finance de marché, Spécialité Actuariat

Par

Bruno GRAPPIN

Un état de l'art des techniques de génération des variables aléatoires

Une réglementation assurantielle en mutation toujours plus friande de modèles

Quelques techniques d'estimation de la VaR du portefeuille de négociation bancaire

Soutenu le 8 juillet 2010

JURY

Président :

Michel FROMENTEAU

Membres:

François Weiss

Vincent Ruol

Remerciements

Avant de commencer, je voudrais remercier toutes les personnes sans lesquelles la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été possible.

Tout d'abord, je tiens à remercier l'ensemble des enseignants du centre d'expertise en finance, assurance et banque du CNAM, dont les enseignements m'ont permis d'accéder aux dernières avancées avec une attention toute particulière pour Michel Fromenteau pour ses encouragements.

Je tiens à remercier la bibliothèque nationale de France, du CNAM, de la cité des sciences et plus particulièrement la bibliothèque du centre Pompidou sans laquelle ce travail n'aurait pu être rédigé.

Je tiens enfin à remercier tous mes camarades du CNAM et tous ceux dont les échanges ont nourris mes réflexions : Denis Gérôme, Abdelmonaem Ben Said, Gottlieb Pirsic et enfin Frédéric Planchet pour ses remarques tant orthographiques que de fond.

Summary

Since the first Basel Accord issued in 1988 on financial institutions capital requirement, successive crises led the Basel Committee to enlarge its risk management framework. European Union that has already implemented these Accords is now adapting its risk management framework to the Insurance industry with Solvency II project.

In the early 90's, the bank raised objection to regulator about the use of standard formulae to define their capital requirement at a time when Value At Risk was thriving in the industry and calculating capacity growing exponentially. Finally the 1996 amendment to the first Accord let them opt for their own internal models instead of the old fashion standard formulae to compute their trading book capital requirement.

The purpose of this dissertation is to give a general survey on the state of art in the simulation methods available to implement internal models 20 years after the pioneers' works; with a particular focus in the first section on last developments in random numbers generators, simulation methods and risk measures...

The second section presents main lines of the laws in force in the French insurance industry (before the France's Prudential Control Authority establishment that merges existing structures for surveillance of banks and insurance companies in mars 2010) and the changes to come with Solvency II project and International Accounting Standards adoption process by the European Union.

The last section presents parametric and non parametric methods for calculating the value at Risk 10 days required to estimate the bank trading book capital requirement. The trading book gathers investment bank positions detained for short-term operations whereas the Bank portfolio gathers medium and long-term operations subjected to a separate capital requirement. The bank trading book on frontline with markets has always been subjected to a more sophisticated regulation often generalized to the bank portfolio and the insurance regulation.

These works concludes that great improvements made in random numbers' generation, simulations methods, calculating capacities, risk measures, mask the blindness of available back testing methods applied to extreme risk measures introduced by VaR 99%, 99,5%... and the poverty of methods dealing with complex dependencies models. And so the controls authorities must continue to both encourage players to improve their internal risk models and remind them their can suspend their public service agreements and transfer their insurance or credit portfolios

Key words

Pseudo and quasi random numbers, Monte Carlo, discrepancy, correlations, Copula, bootstrap, Value At Risk, Back Testing, IAS/IFRS, Solvency II, Basel II, Trading book

Résumé

Depuis le premier accord de Bâle de 1988 sur l'exigence de fonds propres faite aux établissements de crédit et aux entreprises d'investissement, au fil des crises bancaires le régulateur a revisité une législation dont le corpus vise à présent l'assurance au travers le projet Européen Solvency II.

Sous la pression des objections des banques au début des années 1990 quant à la pertinence de continuer à appliquer des formules standards à une heure où perçait le concept de Value at Risk et la puissance de calcul croissait exponentiellement, a été fait le choix de permettre aux acteurs d'opter pour des modèles internes exploitant ces nouveautés.

L'objet de ce mémoire est dans une première partie d'offrir un tour d'horizon des techniques de simulation pour mettre en œuvre des modèles internes disponibles vingt ans après les travaux des pionniers et, plus particulièrement, de faire un focus sur les avancées touchant la génération de nombres aléatoires, les techniques de simulation et les mesures de risques.

Dans une seconde partie sont présentées les grandes lignes de la réglementation assurantielle en vigueur en France (avant la fusion des autorités de contrôle bancaire et assurantielle au sein de la nouvelle Autorité de Contrôle prudentielle en mars 2010) et les mutations en cours consécutives aux projets Européens d'exigence de fond propre Solvency II et aux travaux relatifs aux normes comptables IAS/IFRS.

Enfin la dernière partie présente plusieurs méthodes de calcul de la Value at Risk 10 jours exigée pour couvrir le portefeuille de négociation bancaire. Ce dernier regroupe les opérations de court terme des établissements de crédit et des entreprises d'investissement par opposition à celles de long terme regroupées dans leur portefeuille bancaire. Cette Value at Risk présente l'intérêt d'être l'objet d'innovations parfois reprises dans le corpus de la législation assurantielle et bancaire.

Mots clefs

Générateurs pseudo et quasi aléatoires, Monte Carlo, Discrépance faible, Corrélations, Bootstrap, Copules, Value At Risk, Back Testing, IAS/IFRS, Solvabilité II, Bales II, Portefeuille de négociation

Table des matières

UN ÉTAT DE L'ART DES TECHNIQUES DE GÉNÉRATION DES VARIABLES ALÉATOIRES	11
1. LES GÉNÉRATEURS PSEUDO-ALÉATOIRE	11
Les LCG.....	12
Les MRG.....	16
Les générateurs combinés.....	17
Les MLCG d'ordre d	19
Les générateurs à décalage de registre et rétroaction	20
2. LES GÉNÉRATEURS QUASI-ALÉATOIRES	28
La translation irrationnelle du Tore	29
Des suites de Van Der Corput aux suites de Halton généralisées	30
Les (t,s)séquences digitales	32
3. BENCHMARK DE QUELQUES GENERATEURS RECENTS	37
4. SIMULATIONS DES LOIS NON UNIFORMES	41
La technique de l'anamorphose	41
La technique de la décomposition.....	49
Les techniques liées aux chaînes de Markov	50
L'algorithme de Gibbs.....	51
Algorithmes de simulation des permutations.....	52
5. CONVERGENCE DE LA METHODE DE MONTE CARLO.....	53
6. INTRODUCTION DES DEPENDANCES ENTRE LES LOIS.....	54
Les copules	54
Dépendances au sein d'un vecteur aléatoire gaussien.....	61
La technique du bootstrap.....	62
7. SIMULATION DES MESURES DE RISQUE	64
8. MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DES TRIS.....	66
9. LA RUPTURE TECHNOLOGIQUE GPU DE 2004.....	68
10. CONCLUSION.....	70
UNE RÉGLEMENTATION ASSURANTIELLE EN MUTATION TOUJOURS PLUS FRIANDE DE MODÈLES 71	
1. PROVISIONS RÈGLEMENTÉES EN COUVERTURES DES RISQUES ASSURÉS	72
Provisions règlementées par branche	72
Définition des provisions règlementées	73
Actifs en représentation des provisions règlementées	74
2. LA MARGE DE SOLVABILITE	75
L'exigence de marge de solvabilité.....	75
Les actifs en représentation de la marge de solvabilité.....	75

3. EN DERNIER RESSORT LE FONDS DE GARANTIE.....	76
4. UN REPORTING ANNUEL ET TRIMESTRIEL PERMANENT	77
5. SOLVABILITE 2	78
6. FOCUS SUR LE QIS 4	82
7. UNE REGLEMENTATION COMPTABLE EN MUTATION	83
8. LA MISE EN PLACE DES NORMES IFRS	84
9. CONCLUSION.....	85
QUELQUES TECHNIQUES D'ESTIMATION DE LA VAR DU PORTEFEUILLE DE NÉGOCIATION BANCAIRE	86
1. L'EXIGENCE DE FOND PROPRE DU PORTEFEUILLE DE NEGOCIATIONS BANCAIRE.....	86
2. BACK-TESTING	87
3. COMPARAISON DE QUELQUES TECHNIQUES DE CALCUL DE LA VAR 10 JOURS.....	88
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	90
NOTATIONS.....	93
BIBLIOGRAPHIE	95
ANNEXES.....	107
Cours du 29/10/04 au 21/10/05 des titres : BNP-Paribas(FR0000131104), Michelin(FR0000121261) et Danone(FR0000120644)	108
Fonctions de répartition empirique des rendements 10 jours des titres : BNP-Paribas, Michelin et Danone du sur la période 29/10/04-21/10/05	109
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique BNP-Paribas du 29/10/04-21/10/05	110
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique Michelin du 29/10/04-21/10/05.....	111
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique Danone du 29/10/04-21/10/05.....	112
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique du portefeuille du 29/10/04-21/10/05	113
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo) sur l'historique BNP-Paribas du 29/10/04-21/10/05	114
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo) sur l'historique Michelin du 29/10/04-21/10/05.....	115
Diagramme de convergence des VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo) sur l'historique Danone du 29/10/04-21/10/05.....	116
Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo) sur l'historique du portefeuille du 29/10/04-21/10/05	117

Un état de l'art des techniques de génération des variables aléatoires

Calculer au moyen de formules fermées les grandeurs caractéristiques d'une loi statistique comme ses moments (moyenne, écart type, skewness, kurtosis) ou ses quantiles... est un exercice scolaire difficilement applicable aux modèles complexes dont les variables dépassent les quelques unités et présentent des dépendances complexes. Les techniques dites de Monte Carlo en référence à la ville célèbre pour ces jeux de casinos, permettent d'estimer et fournir des intervalles de confiance de ces grandeurs en s'appuyant sur un échantillon d'événements aléatoires. Aux procédés physiques : roues de loteries, phénomènes quantiques comme la traversée ou non d'un miroir semi-transparent par des photons... qui ne peuvent garantir les qualités statistiques des tirages, les praticiens préfèrent les tirages informatiques « pseudo-aléatoires » et « quasi aléatoires ». Ces derniers permettent de simuler à partir de la seule loi uniforme les lois paramétriques et non paramétriques. Leur déterminisme assure la reproductibilité de tout ou partie des tirages nécessaires à la comparaison des modèles. Ce chapitre énumère quelques méthodes de génération de la loi uniforme, avant de présenter les techniques de bootstrap, d'anamorphose, de rejets et de Metropolis-Hasting dont les simulations des autres lois découlent. Enfin, nous verrons les principales techniques utilisées pour prendre en compte les dépendances et les nouvelles possibilités offertes par les GPU.

1. Les générateurs pseudo-aléatoire

Les tirages informatiques, qui ne recourent pas à la mesure d'événements physiques aléatoires, sont dits « pseudo-aléatoires », car ils reposent sur des algorithmes déterministes. Leur algorithme s'appuie sur une suite mathématique à valeur dans un espace d'état fini S . Le premier terme de la suite X_0 appelée graine, permet de calculer les valeurs suivantes $X_1=f(X_0)$ $X_n=f(X_{n-1})$... au moyen d'une fonction de transition $f : S \rightarrow S$. $(U_n)_{n \geq 0}$, l'image de cette suite par une fonction de transfert $g : S \rightarrow (0,1)$, est qualifiée de suite « pseudo aléatoire » lorsqu'aucun test statistique ne permet de distinguer les premiers éléments de la suite d'une réalisation de tirages indépendants dans la loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{f} & X_{p-1} & \xrightarrow{f} & X_0 & \xrightarrow{f} & X_1 & \xrightarrow{f} & \dots & \xrightarrow{f} & X_{n-1} & \xrightarrow{f} & X_n & \xrightarrow{f} & \dots \\
 & & g \downarrow & & g \downarrow & & g \downarrow & & & & g \downarrow & & g \downarrow & & \\
 & & U_{p-1} & & U_0 & & U_1 & & \dots & & U_{n-1} & & U_n & &
 \end{array}$$

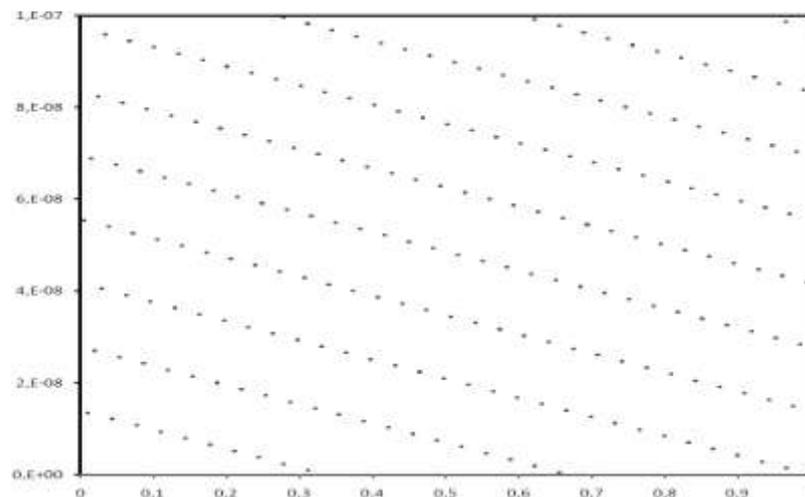
S n'étant pas infini, la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ finit par reprendre les mêmes valeurs. La suite $(U_n)_{n \geq 0}$ possède donc un cycle de longueur au plus égale au nombre d'éléments de S . L'augmentation des capacités de calcul des ordinateurs donnant accès à des suites toujours plus longues, devant satisfaire des tests statistiques toujours plus nombreux, la recherche de la suite pseudo aléatoire idéale est une quête du Graal contemporaine. Depuis les premiers travaux fondateurs de John Von Neumann, qui à élaboré en 1946 le générateur middle-square pour l'ordinateur ENIAC, la recherche a permis de donner des bases théoriques à cette discipline à part entière.

Les LCG

Les Linear Congruential Generator, ou générateurs congruencielles linéaires reposent sur l'algorithme introduit par Lehmer en 1951. Ils s'appuient sur une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ d'entiers positifs inférieurs à m , dont le premier terme X_0 est fixé arbitrairement et les suivants sont obtenus par récurrence avec la formule $X_n = (a \cdot X_{n-1} + b) \bmod m$. La division par m des termes de cette suite donne sous réserve de présenter des qualités statistiques adéquates, le tirage « pseudo-aléatoire » sur $0, 1/m \dots (m-1)/m$. Lorsque b est nul le générateur est dit multiplicatif, c'est alors un Multiplicative Linear Congruential Generator.

L'imposante littérature, dont ils ont été l'objet a permis de démontrer quelques-unes de leurs propriétés parmi lesquelles les suivantes.

- Martin Greenberger a montré en 1961 que les auto-corrélations entre les X_i et X_{i+1} étaient comprises dans l'intervalle $\left[\frac{1}{a} - \frac{6b}{am} \cdot \left(1 - \frac{b}{m} \right) \pm \frac{a}{m} \right]$
- Marsaglia a montré en 1968 que les suites (X_1, X_2, \dots, X_n) , $(X_2, X_3, \dots, X_{n+1})$, $(X_3, X_4, \dots, X_{n+2}) \dots$ appartiennent à un réseau de base $\{v_i\} : \left\{ \sum_{i=1}^n z_i \cdot v_i \text{ où } z_i \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0,1]^n$. En particulier leurs points se projettent sur au plus $(n/m)^{1/n}$ hyperplans parallèles.



Les couples $(X_i, X_{i+1}) \in [0, 10^{-7}] \times [0, 1]$ du Générateur Standard Minimal

- En 1976 Bays, Carter et Durham ont proposé la méthode du shuffling pour augmenter à la fois la période, le nombre des hyperplans précédents et réduire les corrélations terme à terme. La méthode consiste à énumérer les X_i dans un ordre différent de celui dans lequel ils ont été générés. Pour ce faire les k premiers X_i sont placés dans un tableau (T_i) où $T_i = X_i$. Puis pour $k+l = k+1, k+2, \dots$ un entier i_{k+l} est tiré uniformément sur $\{1, 2, \dots, k\}$ et la l -ième sortie du générateur est la i_{k+l} -ième valeur du tableau, laquelle est remplacée par X_{k+l} et ainsi de suite. Les auteurs ont proposé diverses méthodes de tirage sur $\{1, 2, \dots, k\}$ dont $X_{k+l} \bmod k$ et ont montré que la période du nouveau générateur était en $O((k!p)^{1/2})$ où p est la période du générateur initial. En conséquence le nouveau générateur possède une plus grande période que l'original lorsque $k! > p$.

- Knuth a donné en 1981 les paramètres a , b et m maximisant la longueur de la séquence périodique sous plusieurs hypothèses facilitant plus ou moins l'implémentation :

Un LCG possède un cycle de longueur maximale m si et seulement si [Knuth D.E. (1981), The Art of Computer Programming Volume. 2 (2nd ed.), p16.] :

- b est non nul et b et m sont premiers entre eux (i.e. sans diviseur commun)
- $a \equiv 1 \pmod{q}$ pour tout q facteur premier de m
- $a \equiv 1 \pmod{4}$ si m est multiple de 4

Lorsque b est nul, le générateur est dit multiplicatif. La nullité d'un X_i entraînant la nullité des suivants, une telle suite maximale ne comprend pas de zéro et donc au maximum $m-1$ valeurs. Cette limite est atteinte si et seulement si [Knuth D.E. (1981), The Art of Computer Programming Volume. 2 (2nd ed.), p19.] :

- m est premier et
- m divise $a^i - 1$ pour $i = m-1$ et aucun i inférieur à $m-1$

Un choix de $b=0$ et $m=2^q$ permet d'éviter l'implémentation de l'addition et de la division euclidienne remplacée par une opération bit à bit. Sous ces conditions avec $q > 2$, la longueur du cycle maximal est 2^{q-2} est atteinte si et seulement si [Knuth D.E. (1981), The Art of Computer Programming Volume. 2 (2nd ed.), p19] :

- X_0 est impaire et
- m divise $k^i - 1$ pour $i = m-1$ et aucun i inférieur à $m-1$

Mais alors la suite $Y_i = X_i \cdot 2^j \pmod{2^q}$ avec $0 < j < q$, obéit à la récurrence $Y_i = Y_{i-1} \cdot 2^j \pmod{2^q}$ [Knuth 1981, pp. 12-14] et donc les j bits les moins significatifs de X_i suivent un cycle de longueur au plus 2^j . En particulier le bit unité de $(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots)$ suit nécessairement l'une des séquences suivantes : $(0, 0, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, 1, \dots)$, $(1, 0, 1, 0, \dots)$ ou $(1, 1, 1, 1, \dots)$. Cette imperfection est masquée en pratique en ne retenant que les bits de poids forts.

- Schrage a proposé en 1983 un algorithme permettant de surmonter le problème de débordement arithmétique survenant lorsque $X_n = a \cdot X_{n-1} + b$ dépasse le plus grand entier de l'ordinateur.

Sous l'hypothèse que $a^2 < m$ ou qu'il existe un entier i tel que $a = m \text{ div } i$ et $i^2 < m$, $q = m \text{ div } a$ et $r = m \text{ mod } a$ sont préalablement calculés avant de procéder comme suit

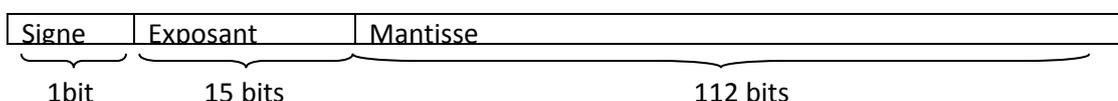
$$y \leftarrow \overbrace{a \cdot (X_{n-1} \bmod q)}^{\in [0, m-1]} - \overbrace{r \cdot (X_{n-1} \text{ div } q)}^{\in [0, m-1]} \quad \text{on a alors } y \in]-m, m[$$

$$X_n = \begin{cases} y - (m - b) & \text{si } y > (m - b) \\ (y + b) + m & \text{si } y < -b \\ y + b & \text{sinon} \end{cases}$$

De cette façon, toutes les variables intermédiaires appartiennent à l'intervalle $] -m, m[$.
 [Bratley, P., Fox, B.L., and Schrage. E.L.(1983). A guide to simulation. Springer-Verlag, New York, pp.180-213.]

Lorsque $a = \pm 2^r \pm 2^q$ et $m = 2^e - h$ avec h petit et $r > q$, la décomposition $X_n = 2^{e-q} Y_n + Z_n$, donne $2^q X_n \text{ mod } m = 2^q Z_n + h \cdot Y_n$ lorsque $h < 2^q$ et $h \cdot (2^q - (h+1) 2^{-e+q}) < m$ auquel cas chaque terme est inférieur à m et la soustraction de m chaque fois que nécessaire ramène sur l'intervalle $[0, m[$. Ce résultat a été établi par Wu en 1999 pour $h=1$, avant d'être généralisé pour h petit par l'Ecuyer et Simard en 1999.

Une autre pratique consiste à utiliser la mantisse entière des nombres flottants des machines. La norme IEEE 754-2008 adoptée en août 2008 introduit les flottants Quadruple Precision sur 128 bits, dont l'encodage qui figure ci-dessous permet de manipuler des entiers de 34 décimales.



Si la version 4.2 du compilateur C/C++ GCC implémente déjà la nouvelle norme, le standard actuel demeure la norme précédente IEEE 754-1985.

Precision	Encodage	Signe	Exposant	Mantisse	Décimales implicites de la mantisse $\log_{10}(2^{\text{Mantisse}+1})$
Half	16 bits	1 bit	5 bits	10 bits	≈ 3.311
Simple	32 bits	1 bit	8 bits	23 bits	≈ 7.225
Double	64 bits	1 bit	11 bits	52 bits	≈ 15.955
Extended Simple	≥ 44 bits	1 bit	≥ 11 bits	≥ 32 bits	≈ 9.934
Extended Double	≥ 80 bits	1 bit	≥ 15 bits	≥ 64 bits	≈ 19.567
Quadruple	128 bits	1 bit	15 bits	112 bits	≈ 34.016

Encodage des nombres flottants dans les normes IEEE 754-1985 et IEEE 754-2008

L'utilisation de bibliothèques de nombres flottants multi-précision, comme la bibliothèque MPFR en langage C permet implémenter les LCG de plus grands modulo, comme ceux ci-après extraits de l'imposante liste de LCG constituée par Karl Entacher, accessible sur le site : <http://random.mat.sbg.ac.at/results/karl/server/node1.html>.

A	B	m
73268029776996600788346432152	0	$2^{96} - 17$
15616651902759982847603972189	0	2^{96}
243267374564284687042667403923350539132	0	$2^{128} - 159$
25096281518912105342191851917838718629	0	2^{128}

Lemieux C. and L'Ecuyer P.(2001)

- En 1987 Ripley, a proposé que le nombre maximal de points générés avec un LCG de période p soit très inférieur à $\sqrt{p/200}$. Dix ans plus tard, Knuth considérait que le nombre maximum de points ne devait excéder un millième de sa période [Knuth D.E. (1997), The Art of Computer Programming Volume. 2 (3rd ed.)].

Au fil des années, les tests ont écarté les LCG. Certains possédaient des défauts si rédhibitoires qu'ils sont aujourd'hui déconseillés même pour des tirages de petites tailles.

Générateur	A	B	M
RANDU(Package SSP d'IBM, Microsoft Visual Basic 6.0)	$2^{16}+3=65\ 539$	0	2^{31}
RAND UNIX ANSI C	1 103 515 245	12345	2^{31}
RANDOM PASCAL ISO	16 807	0	2^{31}

Générateurs aux défauts rédhibitoires [Park S.K., Miller K.W. (1988)]

D'autres comme le Standard Minimal, qui servi un temps de référence pour sa portabilité avant de se révéler inférieur à nombre de générateurs de même modulo.

Générateur	a	B	M
Suite cyclique de 256 nombres	137	187	2^8
Standard Minimal (Parker&Miller 1988)	$7^5=16\ 807$	0	$2^{31}-1$
Knuth&Lewis	1 664 525	1 013 904 223	2^{32}
Marsaglia 1972	69069	0	2^{32}
Lavaux et Jenssens	31 167 285	1	2^{48}
Haynes	6 364 136 223 846 793	1	2^{64}

Générateurs de qualité [Knuth D.E. (1981), The Art of Computer Programming Volume. 2 (2nd ed.)]

En 1995, Alfonso Sánchez-Bruno and Concepción San Luis-Costas liste le Standard Minimal parmi les mauvais générateurs modulo $2^{31}-1$ avec le générateur rndu() du logiciel Gauss (a=397204094, b=0).

Générateur	a	b	M
Fishman and Moore (1986)	742 938 285	0	$2^{31}-1$
Fishman and Moore(1986)	950 706 376	0	$2^{31}-1$
Fishman and Moore(1986)	1 226 874 159	0	$2^{31}-1$
L'écuyer(1988)	39 373	0	$2^{31}-1$
L'écuyer(1988)	40 692	0	$2^{31}-249$
L'écuyer(1988)	40 014	0	$2^{31}-85$

Générateurs surpassant en qualité le Standard Minimal pour une période comparable Fisman, G.S., and Moore, L.R. (1986) & L'Ecuyer, P (1988)

Les tableurs, calculatrices et librairies des langages de programmation, fournissent un LCG. Même si leur implémentation ne permet pas toujours de fixer librement la graine parfois calculée à partir de l'horloge système, ça n'est pas là le moindre de leur défaut. Les tests ont montrés que tous les générateurs de période inférieur à 2^{32} doivent être définitivement écartés, car ils échouent tous à plusieurs tests statistiques parmi les moins exigeants du Diehard de Marsaglia (1996) ou du Test01 de l'Ecuyer et Simard (2007). Ces derniers concluent même à l'obsolescence des LCG de période inférieure à 2^{61} qu'ils ont testé, car ils échouent tous à plusieurs de leurs tests les plus exigeants.

Les MRG

Une première famille généralisant les MLCG est la famille des Multiple Recurcive Generators ou générateurs récursifs multiples. Ils s'appuient sur une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de Z_m construite avec la formule de récurrence : $X_n = (a_1 \cdot X_{n-1} + \dots + a_L \cdot X_{n-L}) \text{ MOD } m$. Où Z_m désigne l'ensemble des entiers $\{0, \dots, m-1\}$ doté des quatre opérations usuelles modulo m . Pour m premier, la suite est de période maximale $m^L - 1$, lorsque le polynôme caractéristique $P(z) = z^L - a_1 \cdot z^{L-1} - \dots - a_L$ est premier dans Z_m . Ce résultat a été établi pour les MLCG d'ordre d , qui généralisent les MRG et les MLCG. Leur fonction de transition étant linéaire, les suites $(X_1, \dots, X_L, \dots, X_n), (X_2, \dots, X_{L+1}, \dots, X_{n+1}) \dots$ possèdent encore une structure de réseau :

$$\left\{ \sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i \text{ avec } x_i \in Z_m \right\} \quad \text{où} \quad \begin{cases} V_1 & = (1, 0, \dots, 0, V_{1,L}, \dots, V_{1,n-1}) \\ & \vdots \\ V_L & = (0, 0, \dots, 1, V_{L,L}, \dots, V_{L,n-1}) \\ V_{L+1} & = (0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0) \\ & \vdots \\ V_{n+1} & = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 1) \end{cases}$$

Aussi simple d'implémentation que les LCG, ils les surpassent à modulo égal en période et qualitativement, comme en atteste leur succès au test Test01 de l'Ecuyer et Simard des générateurs suivants :

$$X_i = (107\,374\,182 X_{i-1} + 104\,480 X_{i-5}) \text{ mod } (2^{31} - 1) \quad \text{L'Ecuyer et al. [1993]}$$

$$X_i = (2^{26} + 2^{19})(X_{i-1} + X_{i-24} + X_{i-47}) \text{ mod } (2^{31} - 1) \quad \text{Deng [2005]}$$

$$X_i = (-2^{25} - 2^7)(X_{i-7} + X_{i-1597}) \text{ mod } (2^{31} - 1) \quad \text{Deng [2005]}$$

$$X_i = (X_{i-55} + X_{i-119} + X_{i-179} + X_{i-256}) \text{ mod } 2^{32} \quad \text{Marsaglia[1999].}$$

Les Additive Lagged Fibonacci Generator ou générateurs Fibonacci à retard additifs, introduits par Mitchell & Moore en 1958 sont les plus connus des MRG. Ils s'appuient sur une récurrence de la forme $X_n = (\pm X_{n-r} \pm X_{n-k}) \text{ MOD } m$ avec $r > k \geq 1$:

$$X_n = (X_{n-24} + X_{n-55} + c) \text{ MOD } m. \quad \text{où } c=0 \quad \text{Mitchell \& Moore en 1958}$$

$$X_n = (X_{n-24} - X_{n-55}) \text{ MOD } m \quad \text{Knuth, 1981 Chap 3.2.2}$$

Ils sont à bannir, car leurs suites $(X_n, X_{n+k-r}, X_{n+k}) \dots$ n'appartiennent qu'à deux hyperplans.

En 1991 dans la lignée de ces générateurs, Marsaglia et Zaman ont proposé deux variantes baptisées Add-With-Carry et Subtract-With-Borrow. La formule de récurrence de Add-With-Carry s'écrit : $X_n = (X_{n-r} + X_{n-k} + c_n) \bmod m$ où $c_1 = 0$, et $c_{n+1} = 0$ si $X_{n-r} + X_{n-k} + c_n < m$ et $c_{n+1} = 1$ sinon. En 1992, Tézuka et l'Ecuyer ont montré qu'il s'agissait d'une manière efficace d'implémenter l'équivalent d'un LCG de très grande période. Mais encore une fois leurs suites $(X_n, X_{n+k-r}, X_{n+k})$ n'appartiennent qu'à deux hyperplans.

D'une manière générale, les générateurs reposant sur une formule de récurrence de la forme $X_n = X_{n-r} \oplus X_{n-k} \bmod m$ où $r > k \geq 1$ sont appelés Multiple Recursive Generator ou générateurs Fibonacci à retard. Ils sont notés LFib(m, r, q, \oplus). Si le test01 de 2007 pointe du doigt les mauvaises qualités statistiques des générateurs additifs, il confirme les excellentes qualités statistiques des générateurs multiplicatifs proposés par Marsaglia en 1985 : LFib(2^{64} , 17,5, \times), LFib(2^{64} , 55,24, \times), LFib(2^{64} , 607,273, \times), LFib(2^{64} , 1279,861, \times), qui passent haut la main le test01 de l'Ecuyer et Simard (2007).

Les générateurs combinés.

En 1982, Wichmann et Hill ont proposé de prendre comme série $(U_n)_{n \geq 0}$ la partie fractionnaire de la somme de trois MLCG.

$$X_i = 171 X_{i-1} \bmod 30\,269$$

$$Y_i = 172 Y_{i-1} \bmod 30\,307$$

$$Z_i = 170 Z_{i-1} \bmod 30\,323$$

$$U_i = (X_i/30\,269 + Y_i/30\,307 + Z_i/30\,323) \bmod 1 \text{ (où } x \bmod 1 \text{ désigne la partie fractionnaire de } x)$$

Zeisel a montré en 1986 qu'il s'agissait du MLCG de paramètres $a = 16\,555\,425\,264\,690$ et de modulo $27\,817\,185\,604\,309$.

Microsoft a choisi de l'implémenter dans Excel en dépit d'une période de seulement 2^{42} moindre que d'autres générateurs plus rapides. Si les mises à jour décrites dans les Microsoft Knowledge Base Articles 834520 et 828795 ont résolu le problème de génération de valeurs négatives, B.D. McCullough a démontré en 2008 qu'il ne s'agissait toujours pas d'une implémentation rigoureuse du Wichmann et Hill.

En 1988, l'Ecuyer a proposé la combinaison suivante :

$$X_n = (a_{1,1} X_{n-1} + \dots + a_{1,k} X_{n-k}) \bmod m_1$$

$$Y_n = (a_{2,1} Y_{n-1} + \dots + a_{2,k} Y_{n-k}) \bmod m_2$$

$$Z_n = (X_n - Y_n) \bmod m_1$$

$$U_n = Z_n / m_1$$

$$W_n = \text{frac} (X_{n-1} / m_1 - Y_{n-1} / m_2) \bmod 1 \text{ où } \text{frac}(x) \text{ est la partie fractionnaire de } x$$

Il a montré que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est la sortie d'un MLCG de module $m = m_1 \cdot m_2$. Si m_1 et m_2 sont proches, les suites $(W_n)_{n \geq 0}$ et $(U_n)_{n \geq 0}$ le sont aussi ; mais par ailleurs, la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ peut atteindre une période de $(m_1^k - 1)(m_2^k - 1)/2$. Comblec88, sa première implémentation en arithmétique entière permettait d'atteindre une période de 2^{61} !

Le tableau ci-après donnent les périodes et les temps de calculs relatifs des générateurs de Wichmann & Hill, CombLec88, d'une première variante proposée par Knuth (Knuth D.E. (1997), The Art of Computer Programming Volume. 2 (3rd ed.) p108) et d'une seconde Ran2 utilisant le shuffling proposée par Press et Teukolsky (1992). Contrairement aux précédents, Ran2 a passé avec succès tous les tests de l'Ecuyer et Simard ; comme les générateurs proposés ultérieurement par l'Ecuyer (1996a), l'Ecuyer (1999a) et l'Ecuyer & Touzin (2000). La version 64 bits de l'Ecuyer (1999a) fait aujourd'hui figure de standard dans l'industrie des logiciels statistiques étant implémenté dans VSL, SAS, Arena, Automod, Witness et SSJ.

	Wichmann-Hill	CombLec88	Knuth (1998 p108, eq38)	Ran2 (numerical recipe)	Ecuyer (1996a)	Ecuyer (1999a) 32bits	Ecuyer & Touzinn (2000)	Ecuyer (1999a) 64bits
Log₂(période)	42.7	61	56	61	185	185	191	377
Temps	10	7	7.9	7.5	9.4	7.3	10	--

l'Ecuyer et Simard (Test01, ACM Trans. on Math. Software, 2007)

L'implémentation en arithmétique entière proposé par l'Ecuyer en 1996, permet d'atteindre une période d'environ 2^{185} et possède une bien meilleure uniformité que les parties qui la compose comme en attestent ses excellents résultats aux tests spectraux jusqu'en dimension 20.

i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	m_i
1	0	63 308	-183 326	$2^{31}-1$
2	86 098	0	-539 608	$2^{31}-2\,000\,169$

Paramètres proposés par l'Ecuyer en 1996

Une autre implémentation en arithmétique flottante proposée par l'Ecuyer en 1999, permet d'atteindre une période d'environ 2^{319} et possède une encore meilleure uniformité donnant d'excellents résultats aux tests spectraux jusqu'en dimension 32 !

i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	m_i
1	0	1 154 721	0	1 739 991	1 108 499	$2^{32}-18\,269$
2	1 776 413	0	865 203	0	1 641 052	$2^{32}-32\,969$

Paramètres proposés par l'Ecuyer en 1999

Le générateur KISS de Marsaglia et Zaman (1993) est un autre bon exemple de générateur obtenu en sommant modulo 2^{32} le LCG, $I_{n+1} = 69069I_n + 23606797 \bmod 2^{32}$ avec les générateurs à décalage de registre $J_{n+1} = (I + L^{15})(I + R^{17}) \cdot J_n \bmod 2^{32}$ et $K_{n+1} = (I + L^{13})(I + R^{18}) \cdot K_n \bmod 2^{32}$. I , R , L représentent ici respectivement les opérateurs bit à bit identité, décalage à droite et décalage à gauche. Cette version de période 2^{95} baptisée KISS93, possède une période de 2^{95} et passe la batterie de test Diehard. Elle échoue à deux tests de la batterie Test01 de l'Ecuyer contrairement à KISS99 sa version de période 2^{123} !

Les MLCG d'ordre d

Un MLCG d'ordre d possède pour formule de récurrence : $X_n = A \cdot X_{n-1} \bmod m$ où X_n, X_{n-1} sont des vecteurs de dimension d et A une matrice $d \times d$, tous à valeur dans Z_m , l'ensemble des entiers $\{0, \dots, m-1\}$ doté des quatre opérations usuelles modulo m . Lorsque m est premier, Z_m et Z_m^d sont isomorphes aux corps finis de dimension m et m^d , désignés respectivement par $GF(m)$ et $GF(m^d)$ dans la théorie de Galois. La suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est maximale dans Z_m privé de zéro, si et seulement si toute les puissances de A modulo m , plus 0 forment un espace vectoriel à m^d éléments, isomorphe à $GF(m^d)$. Une condition équivalente est que le polynôme caractéristique de A , $P(z) = \det(zI - A) = z^d - a_1 z^{d-1} - \dots - a_d$ est premier dans Z_m . (Cf. Lidl, R. and Niederreiter, H. (1986) et Niederreiter, H. (1986))

En posant $r = (m^d - 1)/(m - 1)$, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que $P(z)$ soit premier dans Z_m :

- $((-1)^{k+1} a_k)^{(m-1)/q} \not\equiv 1 \pmod m$ pour tout facteur premier q de $m-1$
- $((-1)^{k+1} a_k) \equiv ((x^r \bmod P(x)) \bmod m$
- $((x^{r/q} \bmod P(x)) \bmod m$, n'est pas constant pour chaque facteur premier q de r

[Knuth, D.E. (1981) The Art of Computer Programming Vol.2 (2d ed.)]

Pour m^k grand, factoriser r est difficile. Aussi, l'Ecuyer propose-t-il en 1990 de ne retenir que les couples (m, k) tels que r est premier. Puis rechercher les coefficients du polynôme caractéristique de manière aléatoire. Car pour m premier, exactement $N(m, k) = (m^k - 1)(1 - 1/q_1) \dots (1 - 1/q_k) / k$ choix de (a_1, \dots, a_k) satisfont ces conditions, où q_1, \dots, q_k désignent les facteurs premiers de $m^k - 1$.

Des sauts de n valeurs peuvent être aisément réalisés en calculant $A^n \bmod m$ avec l'algorithme Divide-to-conquer ci-après, qui effectue au plus $2 \cdot \log_2(n)$ produits de matrices $k \times k$ modulo m .

```

Power ← A
Result ← Id
While n > 0
    If n is odd Then Result ← Result * Power
    n ← n div 2
    Power ← Power * Power
Return Result

```

Tout LCG d'ordre d obéissant à la récurrence $X_n = A' \cdot X_{n-1} + B' \pmod{m}$ où X_n, X_{n-1} et B' sont des vecteurs de dimension d et A' une matrice $d \times d$ tous dans \mathbb{Z}_m , peut s'écrire comme une MLCG d'ordre $d = d' + 1$ de matrice $A = \begin{bmatrix} A' & B' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Le coût des opérations arithmétiques croissant avec la taille des entiers manipulés, ces générateurs ont perdu en efficacité à mesure que leur modulo augmentait. Tant est si bien, qu'il leur fut progressivement préférés les générateurs à décalage de registre et rétroaction.

Les générateurs à décalage de registre et rétroaction

Les Generalized Feedback Shift Register Generators ou générateurs à décalage de registre et rétroaction généralisés ne requièrent pour leur implémentation que les opérateurs binaires des ordinateurs :

\otimes : Produit binaire dont le résultat est le produit bit à bit des opérandes

\oplus : Addition binaire dont le résultat est la somme bit à bit des opérandes

\ll_l : Opérateur unaire de décalage à gauche de l'opérande de l bits

\gg_r : Opérateur unaire de décalage à droite de l'opérande de r bit

Ils s'appuient sur une suite $(X_i)_{i \geq 0}$ de $\text{GF}(2^k)$, obéissant à la formule de récurrence : $X_i = A \cdot X_{i-1}$. Leur fonction de transition $g : X_i \in \text{GF}(2^k) \rightarrow U_i \in (0,1)$ est définie comme suit :

$$X_i \rightarrow Y_i = T \cdot X_i \in \{0,1\}^N \quad \text{où } T \text{ est une matrice } N \times k \text{ appelée matrice de tempering}$$

$$Y_i \rightarrow U_i = \sum_{j=1}^N Y_{i,j} \cdot 2^{-j} \in (0,1) \text{ est ainsi codable sur } N \text{ bits}$$

En 1965, Tausworthe définit les Linear Feedback Shift Register Generators de paramètres :

$$T = I_k, \quad A = \alpha^k \quad \text{où } \alpha \text{ est une matrice } \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{dont le polynôme caractéristique}$$

$$\varphi_\alpha(t) = t^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \cdot t^j \text{ est premier sur } \text{GF}(2).$$

En 1973, Lewis et Payne ont généralisé les LFSR en étendant le champ des paramètres à

$$T = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_k \\ C \end{bmatrix} & \text{où } C \text{ permet le calcul des bits les moins significatifs, si } N > k \\ I_{N \times k} & \text{la matrice } I_k \text{ à laquelle ont été enlevés les } k - N \text{ dernières lignes, sinon} \end{cases}$$

et $A = \alpha^s$ avec $s \geq k$.

Lorsque $\varphi_\alpha(t) = t^k + t^m + 1$ avec $k > m > 0$ chacun des bits de X_i suit la récurrence $X_{i+k}^1 = X_{i+m}^1 \oplus X_i^1$. Les regroupements de ω bits consécutifs suivent toujours la récurrence $(X_{i+k}^1 \cdots X_{i+k}^\omega) = (X_{i+m}^1 \cdots X_{i+m}^\omega) \oplus (X_i^1 \cdots X_i^\omega)$ et dès lors que ω et $2^k - 1$ sont premiers entre eux, la série $(X_{i+k}^1 \cdots X_{i+k}^\omega)_{n \geq 0}$ est de période maximale $2^k - 1$. (Cf. L'Ecuyer P. (1996b))

En pratique ω étant une puissance de 2, la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est maximale et peut être générée au moyen d'un tableau de k entiers codés sur ω bits: x_0, x_1, \dots, x_{k-1} comme suit:

Step 1. $i \leftarrow 0$

Step 2. Set x_0, x_1, \dots, x_{k-1} to some suitable initial values.

Step 3. Output x_i .

Step 4. $x_i \leftarrow x_{(i+m) \bmod k} \oplus x_i$

Step 5. $i \leftarrow (i+m) \bmod k$

Step 6. goto Step 3

[Cf. Matsumoto, M., Kurita, Y. (1992)].

En 1968, E. Berlekamp a proposé un algorithme pour le décodage des codes BCH, dont J.L. Massey a montré en 1969, qu'il permettait de trouver le plus petit LFSRG générant la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ à partir de ses premiers bits. Cet algorithme est connu aujourd'hui sous le nom de d'algorithme de Berlekamp-Massey. [Cf. Matsumoto, M., Kurita, Y. (1992)].

En 1968, Zierle et Brillhart ont donné une liste des trinômes premiers de degré inférieurs à 1000, complétée en 2000 par Kumada et al. puis en 2000 et 2003 de Brent, Larvala et Zimmermann.

En 1981, par Kirkpatrick et Stoll ont proposé le célèbre R250 basé sur $x_{i+250} = x_{i+103} \oplus x_i$, dont ils ont optimisé l'initialisation.

En 1982, Golomb a complété la théorie montrant entre autre la formule de récurrence :

$$x_{i+k} = x_{i+m} \oplus x_i \Rightarrow x_{i+k \cdot p} = x_{i+p \cdot m} \oplus x_i \text{ pour } p=2^e$$

qui permet de générer les séquences : $x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, x_{i+4k}, x_{i+8k}, \dots$

Rapidement les auteurs Lindholm, J. H. (1968), Jordan, H. F. and Wood, D. C. M. (1973), Fredricsson, S. A. (1975), Matsumoto, M. and Kurita, Y. (1992), Matsumoto, M. and Kurita, Y. (1996)... ont constaté la piètre qualité d'équidistribution des bits de ces générateurs avec des tests de Khi2. Pour améliorer l'équidistribution les praticiens ont adopté des générateurs de polynôme caractéristique de degré supérieur avec plus de 5 termes non nuls ($a_0 = a_{j_1} = a_{j_2} = a_{j_3} = 1$ où $0 < j_1 < j_2 < j_3 < k$).

En 2000, M. Matsumoto, T. Nishimura ont défini le weight discrepancy test donnant les limites d'utilisation de ces générateurs.

Nb of terms	3	5	15	25	51	99	157	259
Safe N	$7.54 \cdot 10^6$	$1.97 \cdot 10^{11}$	$4.92 \cdot 10^{28}$	$6.11 \cdot 10^{42}$	$6.96 \cdot 10^{71}$	$3.94 \cdot 10^{109}$	$2.41 \cdot 10^{138}$	$3.46 \cdot 10^{156}$
Risky N	$3.05 \cdot 10^7$	$7.98 \cdot 10^{11}$	$1.99 \cdot 10^{29}$	$2.47 \cdot 10^{43}$	$2.82 \cdot 10^{72}$	$1.59 \cdot 10^{110}$	$9.74 \cdot 10^{138}$	$1.40 \cdot 10^{157}$

Weight discrepancy tests on GFSR of degree 521 with eight different numbers of nonzero terms [Cf. Matsumoto M. and Nishimura T.(2000)]

En 1992, Makoto Matsumoto et Yoshiharu Kurita ont proposé les Twisted GFSR pour lesquels l'étape 4 de l'algorithme précédent est devenue :

$$\text{Step 4'}. x_i \leftarrow x_{(i+m) \bmod k} \oplus (x_i \gg 1) \oplus \begin{cases} a & \text{si } x_i^{\omega-1} = 1 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

La suite $(x_i)_{i \geq 0}$ ainsi définie suit la récurrence $x_{i+k} = x_{i+m} \oplus x_i \alpha$ où α est une matrice $\omega \times \omega$ de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{\omega-2} & \alpha_{\omega-1} & \end{bmatrix} \quad \text{dont le polynôme caractéristique } \varphi_\alpha(t) = t^k + \sum_{j=0}^{\omega-1} \alpha_j \cdot t^j \text{ est tel que}$$

$\varphi_\alpha(t^k + t^m)$ est premier sur $GF(2)$. Sous cette hypothèse les auteurs ont démontré que la suite $(x_i)_{i \geq 0}$ est de période maximale $2^{\omega \cdot k} - 1$. La suite est ainsi par construction équidistribuée sur k dimension, au sens où chaque k tuple $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ de $GF(2^{\omega \cdot k})$ est généré autant de fois par période à l'exception du tuple nulle généré une fois de moins. En 1994, Tezuka mit en évidence la mauvaise équidistribution sur deux bits du TGFSR. En réponse les auteurs du TGFSR ont soumis une deuxième version présentant mieux k -équidistribuée.

En 1997 Makoto Matsumoto et Takuji Nishimura ont proposé le Mersenne Twister, qui s'appuie sur une suite $(x_i)_{i \geq 0}$ obéissant à la formule de récurrence : $x_{i+n} = x_{i+m} \oplus (x_i^u | x_{i+1}^l) \alpha$ où $(a^u | b^l)$ désigne les ω - r bits de poids forts concaténés aux r bits de poids faibles de b et α une matrice $\omega \times \omega$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{\omega-2} & \alpha_{\omega-1} & \end{bmatrix} \quad \text{permettant d'implémenter efficacement le produit comme en Step 4'. En}$$

posant $p = n\omega - r$, sous l'hypothèse où le nombre de Mersenne $2^p - 1$ est premier, l'application : $(x_0^u, x_1, \dots, x_{n-1}) \in GL(2^p) \mapsto (x_0^u, x_1, \dots, x_{n-1}) \mathbf{B} = (x_1^u, x_2, \dots, x_n) \in GL(2^p)$ garantie une période maximale au générateur dès lors que son polynôme caractéristique $\varphi_B(t)$ vérifie : $t^2 \neq t \bmod \varphi_B(t)$ et $t^{2^p} = t \bmod \varphi_B(t)$. Pour obtenir une équidistribution de 32 bits sur 623 dimensions, les auteurs ont choisi pour Mersenne premier $2^{19937} - 1$, soit $n=624$, $\omega=32$ et $r=31$ et un polynôme de degré $2^p - 1$ possédant plus de cent termes non nuls (135 exactement). Tester la propriété précédente au moyen d'un algorithme Divide & Conquer est en $O(l \cdot p^2)$, où l désigne le nombre de termes non nuls de $\varphi_B(t)$. Les auteurs ont levé cette difficulté en créant la méthode de décimation inverse en $O(p^2)$, qui leur a permis de trouver un polynôme satisfaisant au terme de deux

semaines de calcul. Pour maximiser encore la distribution des bits les plus significatifs, ils ont appliqué le tempering $y_i = x_i \cdot T$ où les y_i sont calculés aux moyens des opérations binaires suivantes :

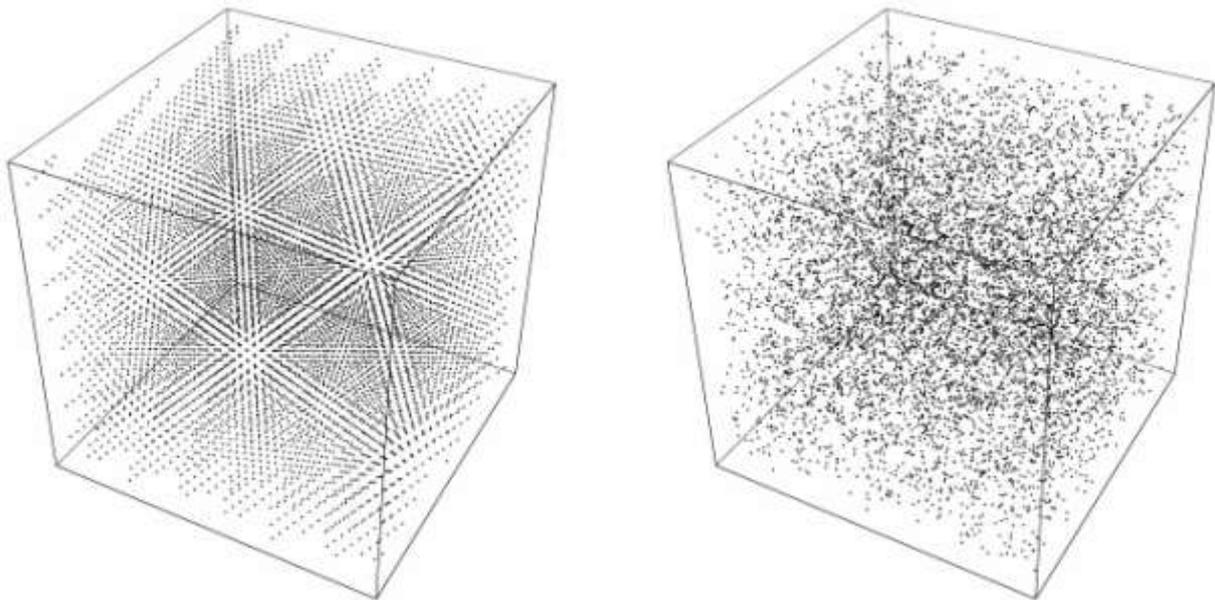
$$y_i \leftarrow x_i \oplus (x_i \gg u)$$

$$y_i \leftarrow y_i \oplus ((y_i \ll s) \otimes b)$$

$$y_i \leftarrow y_i \oplus ((y_i \ll t) \otimes c)$$

$$y_i \leftarrow y_i \oplus (y_i \gg l)$$

Leur implémentation MT19937 en langage C est équilibrée sur dimension 623, de période $2^{19937}-1$ passe les tests Diehard de Marsaglia et tous les test de TestU01 de l'Ecuyer à l'exception de ceux de linéarité comme le test du rand de Marsaglia (1985) et le test de complexité de Erdmann(1992). Elle sera l'une des nouveautés de librairie standard du langage C++1x en cours d'élaboration. Cette implémentation est quatre fois plus rapide que rand() de la librairie standard ANSI-C dernièrement remplacée dans la librairie standard BSD STANDARD C par random() un Lagged Fibonacci souffrant de nombreux travers dicit Matsumoto, M. and Nishimura, T. (2003) & Matsumoto, M., Wada, I., Kuramoto, A. and Ashihara, H.(2007).



Points des suites $(X_{3n}, X_{3n+1}, X_{3n+2})$ inclus dans $[0,0.015]^3$ générés avec random (à gauche) et MT19937 (à droite)
[Cf. Matsumoto, M., Saito, M., Haramoto, H., Nishimura, T.(2006)]

Dans la lignée du Mersenne Twister plusieurs générateurs plus rapides et mieux équilibrés ont été proposés par Matsuo Saito et Makoto Matsumoto, comme le SIMD-Oriented Fast Mersenne Twister(2006) prenant en compte les architectures des nouveaux processeurs, puis le Double Precision SFMT déclinée dans deux versions(2008). François Panneton et Pierre l'Ecuyer introduirent en 2006 les générateurs WELL pour Well Equidistributed Long-Period Linear présentant de meilleures (k,l) équilibres.

Une séquence de b bits de période P est dite (t,l) équadistribuée si ses l bits les plus significatifs sont équadistribués selon t dimension(s), une partition en 2^{tl} cubes possède alors exactement $P/2^{tl}$ valeurs dans chacun de ses sous-cubes. Pour l fixé, t_l est majoré par $t^* = \min(\omega, \lfloor \log_2(P)/l \rfloor)$. Les auteurs définissent le défaut de dimension par $\delta_l = t^* - t_l$, le défaut de dimension maximum par $\Delta_\infty = \max_{1 \leq l \leq l}(\delta_l)$ et le défaut de dimension total $\Delta_1 = \sum_{1 \leq l \leq l}(\delta_l)$.

Lorsque $\Delta_\infty = \Delta_1 = 0$ la suite est dite Maximalement Equidistribuée. Fushimi et Tezuka en 1983, repris par l'Ecuyer en 1996(b), ont démontré que cette propriété était vérifiable sans réaliser les tirages. Une condition nécessaire et suffisante était que la matrice (t×l, k) générant les t×l bits les plus significatifs était de rang maximum. En 2000, Couture et L'Ecuyer ont proposé une méthode effective pour les matrices de grand k, en générant les plus petits vecteurs du réseau associé à la série de Laurent associée au générateur.

Les auteurs des générateurs WELL ont recherché des matrices A, dont la structure généralise celle du Mersenne Twister et le polynôme caractéristique possède environ k/2 termes non nuls. Ils ont ainsi réussi à construire des générateurs sans tempering pour k=512, 521, 607, 1024 (baptisés respectivement WELL512a...WELL1024a) et avec le tempering de Matsumoto-Kurita pour k=19937, 44497(baptisés respectivement WELL19937c et WELL44497b)

	MT19937	SFMT19937	dSFMTv2-19937*	Well19937a	Well19937b	Well21701a	Well23209a	Well23209b	Well44A97a
Δ_1	564	543	220	1	1	1	1	1	1
Δ_∞	6750	4188	2608	4	5	1	3	3	7

Δ_1 et Δ_∞ de générateurs publiés par Matsuo Saito & Makoto Matsumoto (2006,2008) et François Panneton & Pierre L'Ecuyer avant le tempering de Matsumoto-Kurita (2006) (*) ces générateurs offrent 32bits de précision excepté le dSFMTv2-19937 qui offre 52 bits

Les cases grises du tableau ci-après désignent les valeurs de k pour lesquels l'équadistribution n'est pas maximale avant le tempering pour les WELL.

k	MT19937	SFMT19937	dSFMTv2-	Well19937a	Well19937b	Well21701a	Well23209a	Well23209b	Well44A97a
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	1	0	0	0	0	1
3	405	1	1	0	1	0	0	1	1
4	0	2	1	0	0	0	0	1	1
5	249	2	0	0	0	0	0	0	0
6	207	0	0	0	0	0	1	0	0
7	355	1	1	1	0	0	0	0	0
8	0	1	1	0	0	0	0	0	1
9	346	1	0	0	1	0	0	0	0
10	124	0	0	0	0	0	0	0	0
11	564	0	0	0	0	0	0	0	0
12	415	117	0	0	0	0	0	1	0
13	287	285	0	0	0	0	0	0	0
14	178	176	1	1	1	0	0	0	0
15	83	85	1	0	0	0	0	0	0
16	0	2	1	0	1	0	0	0	1
17	549	543	0	0	0	0	0	0	0
18	484	478	0	0	0	0	0	0	0
19	426	425	0	0	0	0	0	0	0
20	373	372	0	0	0	1	0	0	0
21	326	325	0	0	0	0	0	0	0
22	283	282	134	0	0	0	0	0	0
23	243	242	94	0	0	0	1	0	0
24	207	206	58	0	0	0	1	0	1
25	174	173	25	0	0	0	0	0	0
26	143	142	0	0	0	0	0	0	1
27	115	114	4	0	0	0	0	0	0
28	89	88	10	1	0	0	0	0	0
29	64	63	67	0	0	0	0	0	0
30	41	40	126	0	0	0	0	0	0
31	20	19	107	0	0	0	0	0	0
32	0	1	88	0	1	0	0	0	0

δ_i de générateurs publiés par Matsuo Saito & Makoto Matsumoto (2006,2008) et François Panneton & Pierre L'Ecuyer (2006)(*) ces générateurs offrent 32bits de précision excepté le dSFMTv2-19937 qui offre 52 bits

Les implémentations en C des générateurs WELL512a, WELL19937a, WELL19937c, WELL44497b sont en ligne sur les pages personnelles des auteurs. Ci-après figure l'implémentation en C du WELL1024a calculant les modulus 32 par l'application du masque 0x0000001f.

```
#define R 32
#define M1 3
#define M2 24
#define M3 10
#define MAT3POS(t,v) (v^(v>>t))
#define MAT3NEG(t,v) (v^(v<<(-t)))
#define Identity(v) (v)
#define V0 STATE[ state_i ]
#define VM1 STATE[ (state_i+M1) & 0x0000001fUL ]
#define VM2 STATE[ (state_i+M2) & 0x0000001fUL ]
#define VM3 STATE[ (state_i+M3) & 0x0000001fUL ]
#define VRm1 STATE[ (state_i+31) & 0x0000001fUL ]
#define newV0 STATE[ (state_i+31) & 0x0000001fUL ]
#define newV1 STATE[ state_i ]

static unsigned int z0, z1, z2, state_i;
static unsigned int STATE[R];

void InitWELL1024a (unsigned int *init)
{
    int j;
    state_i = 0;
    for (j = 0; j < R; j++) STATE[j] = init[j];
}

double WELL1024a (void)
{
    z0 = VRm1;
    z1 = Identity(V0) ^ MAT3POS (8, VM1);
    z2 = MAT3NEG (-19, VM2) ^ MAT3NEG(-14,VM3);
    newV1 = z1 ^ z2;
    newV0 = MAT3NEG (-11,z0) ^ MAT3NEG(-7,z1) ^ MAT3NEG(-13,z2) ;
    state_i = (state_i + 31) & 0x0000001fUL;
    return ((double) STATE[state_i] * 2.32830643653869628906e-10);
}
```

Une implémentation en C du Well1024a (k=1024, sans tempering)

Les tableaux suivant montrent que ces générateurs permettent de réaliser sur des ordinateurs de bureau actuels un milliard de tirages en moins d'une minute. Ils permettent par ailleurs d'estimer les gains obtenus en générant les nombres par tableau de 50000 et en exploitant les nouvelles architectures SIMD. Ils montrent aussi que le tempering ne conduit pas toujours à un surcoût de calcul !

Générateur	MT19937	MT19937	SFMT19937	SFMT19937	dSFMTv2-19937	dSFMTv2-19937
Instructions SIMD	Sans	Avec	Sans	Avec	Sans	Avec
Par tableau 50 000	25.15	9.87	19.29	6.15	10.79	2.54
Une à une	35.34	33.39	34.95	30.4	14.31	6.92

Temps en secondes pour réaliser un milliard de tirages sur un Intel Pentium IV 3GHZ - Compilateur Intel ICC - Implémentant un masque IEEE754[Matsuo Saito, Makoto Matsumoto (MCQMC'08)]

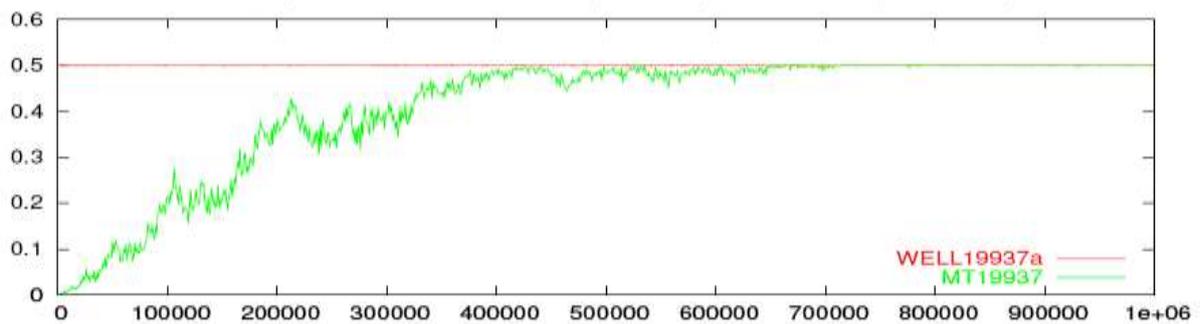
Générateur	Well19937a	Well19937c	Well44A97a	Well44A97b
Tempering	Sans	Avec	Sans	Avec
Une à une	37.1	37.2	40.9	38.8 !

Temps en secondes pour réaliser un milliard de tirages sur un Intel Pentium IV 2.8GHZ - Compilateur gcc option -O2 - Sous Linux [François Panneton, Pierre l'Ecuyer (2006)]

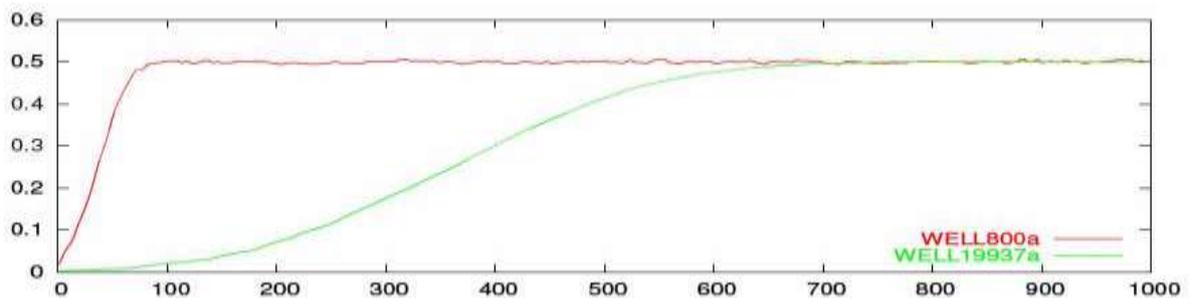
L'initialisation des générateurs linéaires est un point qui mérite une attention très particulière. En effet les opérateurs linéaires possèdent tous pour point fixe zéro et tendent à concentrer les valeurs proches de zéro autour de celui-ci. Les praticiens éloignent cette difficulté en choisissant des racines dotées d'autant de zéros que de uns. Si les générateurs WELL se montrent particulièrement plus robustes que le Mersenne Twister sur ce point, ils n'en demeurent pas moins que cette robustesse décroît avec k, aussi est-il préférable de tester les valeurs générées par la graine choisie.

François Panneton et Pierre l'Ecuyer ont quantifié la vitesse du retour à la moyenne, de $\gamma_{n,p}$, moyenne

mobile du taux de 1 des images $n \dots n+p-1$ des k vecteurs unités e_j :
$$\gamma_{n,p} = \frac{\sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=1}^k \text{Nombre de 1 de } A^i(e_j)}{p.k.\omega}$$



$\gamma_{n,1000}$ pour WELL19937a et MT19937



$\gamma_{n,5}$ pour WELL800a et WELL19937a

Conclusion : Les générateurs WELL : WELL512a, WELL 521a, WELL 607a, WELL 1024a, WELL19937c et WELL44497b en plus de passer les tests TestU01 de l'Ecuyer & Simmard hors tests de linéarité et de complexité sont maximalelement équidistribués. Ils sont des outils idéaux pour réaliser des calculs d'intégrales et des calculs de quantiles par Monte Carlo pouvant générer plus d'un million de tirages pour un millier de variables aléatoires uniformes indépendantes sur les ordinateurs de bureaux actuels en moins d'une minute.

2. Les générateurs quasi-aléatoires

Une alternative à la recherche d'une suite « pseudo aléatoire » émulant parfaitement des tirages aléatoires dans la loi uniforme sur $[0,1]^d$ est la recherche d'une suite recouvrant de manière aussi équirépartie que possible $[0,1]^d$. Par définition, une suite $X=(X_n)_{n \geq 1} \in [0,1]^d$ est équirépartie si pour tout $a=(a_1, \dots, a_d) \in [0,1]^d$: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{\{X_n \in [0,a]\}} = \prod_{i=1}^d a_i = \prod(a)$

A la notion d'équirépartition se rattache celle de discrédance extrême et de discrédance étoile d'une suite $X=(X_n)_{1 \leq n \leq N} \in [0,1]^d$ définies respectivement par :

$$D_N(X) = \sup_{[a,b] \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{\{X_n \in [a,b]\}} - \prod(b-a) \right| \quad \text{et} \quad D_N^*(X) = \sup_{a \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{\{X_n \in [0,a]\}} - \prod(a) \right|$$

Niederreiter a démontré en 1992 que $D_N^*(X) \leq D_N(X) \leq 2^d \cdot D_N^*(X)$

Si la discrédance étoile de la grille unidimensionnelles $P_n = \{1/2n, 3/n, \dots, (2n-1)/2n\}$ est minimale avec une valeur de $1/2n$, les discrédances étoiles des grilles multidimensionnelles P_n^d , qui valent $1-(1-1/2n)^d = O(N^{-1/d})$ où $N=n^d$ s'éloignent rapidement des bornes inférieures connues :

- Pour $d=1$: $D_N^*(X) \geq 0.5/N$
- Pour $d=2$: $D_N^*(X) \geq C \cdot \ln(N)/N$ où $C = \max_{t \geq 3} (t-3)/(16t \cdot \ln(t)) \approx 0.0233 \dots$ [Schmidt (1972)]
- Pour $d > 1$: $D_N^*(X) \geq (\ln(N)/(d-1)\ln(2))^{d-1} / 2^{4d} N$ [K. F. Roth (1954)]

Chung(1949) et Kiefer(1961) ont même montré qu'une suite $X=(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]^d$ vérifie presque sûrement : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt{\frac{2n}{\ln(\ln(n))}} D_n^* = 1$ et donc possède une meilleure discrédance étoile que la grille P_n^d !

Les suites de $[0,1]^d$ possédant les meilleures discrédances connues dites de discrédance faible sont asymptotiquement en $O(\ln(n)^d/n)$. Equiréparties par construction, elles constituent la base des simulations Quasi Monte Carlo. Le calcul des discrédances en norme L_1 est très difficile en pratique, celui de D étant même NP-complet selon l'article de Jinsoo Oh & Byung-Ro Moon de 2007. En norme L_2 Warnock en 1972, puis Morokoff et Calflish en 1994 ont respectivement établis des formules polynomiales en $O(d \cdot n^2)$ pour T_n^* et T_n .

$$T_n^*(X) = \sqrt{\int_{a \in [0,1]^d} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \in [0,a]\}} - \prod(a) \right)^2}$$

$$(T_n^*(X))^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - \max(X_{i,k}, X_{j,k})) - \frac{2^{1-d}}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - X_{i,k}^2) + 3^{-d}$$

$$T_n(X) = \sqrt{\int_{[a,b] \in [0,1]^d} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \in [a,b]\}} - \prod(b-a) \right)^2}$$

$$(T_n(X))^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - \max(X_{i,k}, X_{j,k})) \min(X_{i,k}, X_{j,k}) - \frac{2^{1-d}}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^d X_{i,k} (1 - X_{i,k}) + 12^{-d}$$

L'espérance du carré de ces discrédances pour une suite parfaitement aléatoire vaut: $E[(T_n(X))^2] = 6^{-d}(1-2^{-d})/n$ et $E[(T_n^*(X))^2] = (2^{-d} - 3^{-d})/n$.

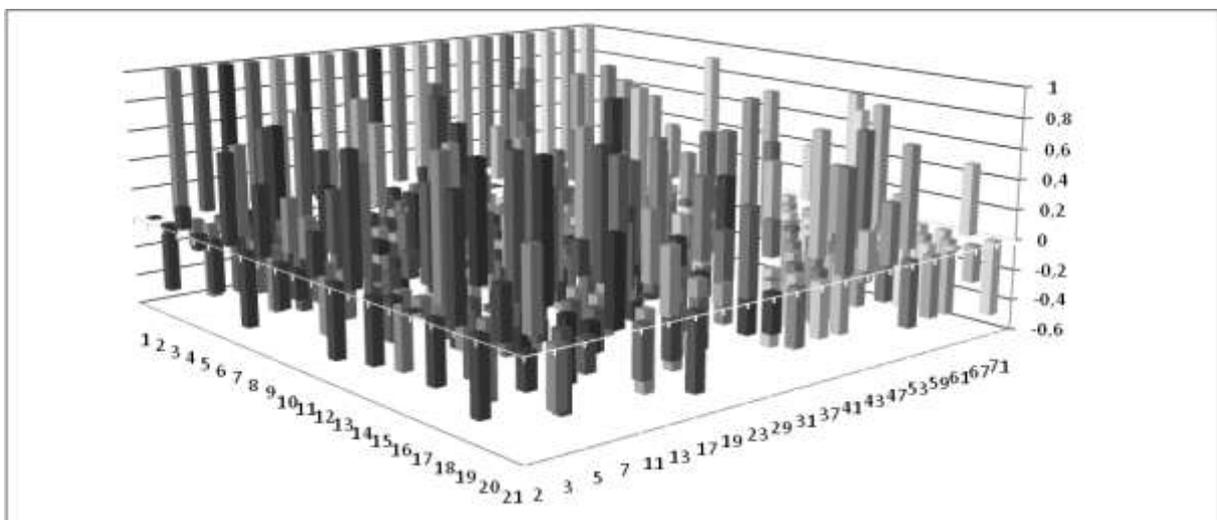
Ci-après trois grandes familles de suites de discrédance faible sont présentées: la translation irrationnelle du Tore, les suites de Halton et les (t,s) séquences digitales plus complexes. Cette revue est loin d'être exhaustive, ne présentant pas notamment les techniques de carré latin basées sur la permutation des entiers $\{1, \dots, n\}$ peu souple quant au du choix de n et du nombre de dimensions. Le lecteur intéressé par les avancées ressenties dans ce domaine pourra se référer à l'article de 1999 de Kai-Tai Fang, Wai-Chee Shui et Jian-Xin Pan de 1999.

La translation irrationnelle du Tore

Les suites obtenues par la translation irrationnelle du Tore, $X=(X_n)_{n \geq 1}$ de $[0,1]^d$, possèdent pour $n^{\text{ième}}$ terme la partie fractionnaire de $n \cdot \alpha$ où $\alpha=(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur réel telle que $\{1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$ constitue une famille libre sur l'ensemble des rationnels. Il a été démontré qu'alors $D_n^*(X) = O(n^{\epsilon-1})$ pour tout ϵ positif. Nous utiliserons dans la suite de cette section, la famille bien connue des praticiens $\alpha_i = \sqrt{p_i}$ où p_i désigne le $i^{\text{ème}}$ nombre premier.

L'étude des autocorrélations d'une série chronologique $X=(X_n)_{1 \leq n \leq N} \in [0,1]$ est communément réalisée au travers celle de son corrélogramme défini comme la série dont le $k^{\text{ième}}$ terme est le coefficient d'autocorrélation empirique d'ordre k : $r_k = \frac{\sum_{n=1}^{N-k} (x_n - \bar{x})(x_{n+k} - \bar{x})}{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$.

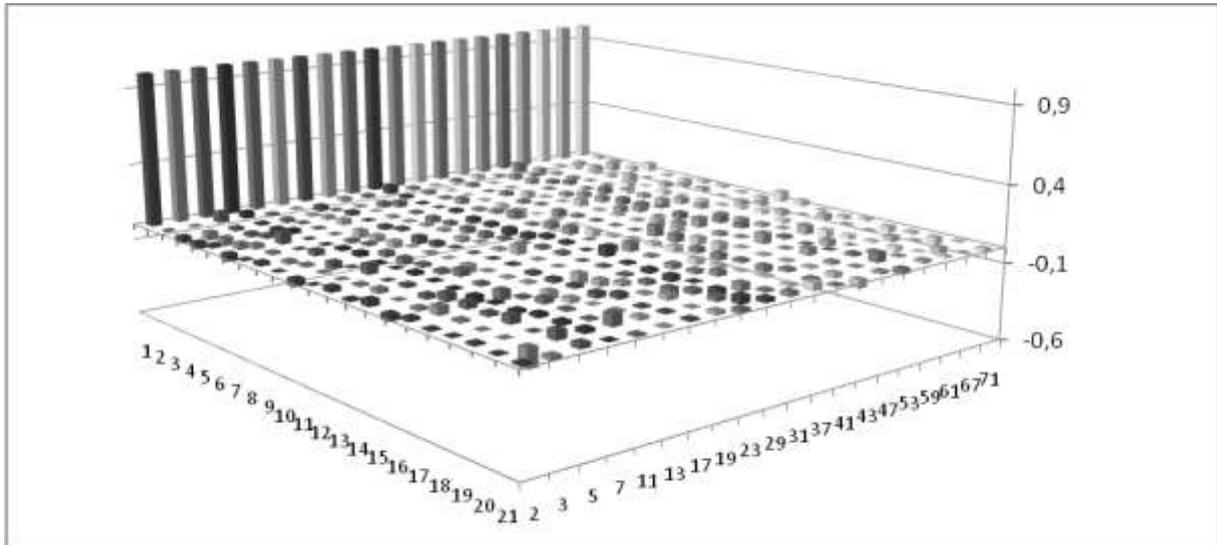
Les études menées sur les premiers termes de la translation irrationnelle du Tore ont montrés combien ils étaient fortement autocorrélés comme l'illustre le graphique ci-dessous.



Premiers termes des corrélogrammes des milles premiers termes des séries obtenues par translation irrationnelle du tore des racines des nombres premiers compris entre 2 et 71

Pour éliminer ces autocorrélations en conservant les propriétés asymptotiques de ces suites Frédéric Planchet et Pierre-E Thérond ont proposé l'algorithme du Tore Mélangé. Il consiste à prendre les termes de la suite dans un ordre différent, en tirant par exemple les indices successifs de N réalisations avec un LCG. Ils suggèrent de prendre comme suite $y=(y_n)_{n \geq 1}$ de terme $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi(n)$ est la partie entière de $\alpha \cdot \text{RND}() \cdot N + 1$ avec $\alpha=10$. Le graphique ci-dessous montre la réduction des

autocorrélations obtenue avec la suite $z=(z_n)_{n \geq 1}$ mélangée par le LCG proposé par l'Ecuyer en 1988 avec $\varphi(n)=39373 \times \varphi(n-1) \bmod 2^{31}-1$.



Premiers termes des corrélogrammes des milles premiers termes des séries obtenues par translation irrationnelle du tore des racines des nombres premiers compris entre 2 et 71, après mélange avec le LCG proposé par l'Ecuyer en 1988 ($a=39\ 373$, $b=0$, $m=2^{31}-1$)

Le mélange opéré réduit en plus des autocorrélations, les corrélations entre composantes données par la formule $\rho_{i,j} = \frac{\sum_{n=1}^N (x_n^i - \bar{x})(x_n^j - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n^i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{n=1}^N (x_n^j - \bar{x})^2}} \in [-1;+1]$ Toutefois elles n'en demeurent pas moins trop fortes pour pouvoir considérer ces suites comme indépendantes :

$$\underbrace{\text{Max}_{\substack{(i,j) \in \{1..25\}^2 \\ \text{avec } i < j}} \left[\frac{\sum_{n=1}^{1000} (x_n^i - \bar{x})(x_n^j - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{n=1}^{1000} (x_n^i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{n=1}^{1000} (x_n^j - \bar{x})^2}} \right]}_{\approx 85\% \text{ pour } (i,j)=(59,1206)} \gg \underbrace{\text{Max}_{\substack{(i,j) \in \{1..25\}^2 \\ \text{avec } i < j}} \left[\frac{\sum_{n=1}^{1000} (z_n^i - \bar{z})(z_n^j - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{n=1}^{1000} (z_n^i - \bar{z})^2 \cdot \sum_{n=1}^{1000} (z_n^j - \bar{z})^2}} \right]}_{\approx 12\% \text{ pour } (i,j)=(51,189)}$$

Des suites de Van Der Corput aux suites de Halton généralisées

Les suites de Van Der Corput

Van der Corput a introduit en 1935 les suites qui portent son nom. Pour p entier positif, le $n^{\text{ième}}$

terme de la suite en base p est $\phi_n(n) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}}$ où a_0, a_1, \dots, a_r sont les coefficients de la

décomposition p -adique de n , c'est-à-dire les entiers de $\{0..p-1\}$ tels que $n-1 = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_r \cdot p^r$ avec $a_r > 0$. Leur discrédance étoile vérifie :

$$D_n^*(\mathbf{X}) \leq \frac{n}{p} \cdot \frac{\ln(p \cdot n)}{\ln(p)} = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Les suites de Halton

Les suites introduites par Halton en 1960 généralisent les suites de Van Der Corput en dimension d .

Leur $n^{\text{ième}}$ terme s'écrit $\mathbf{X}_n^d = (\phi_{p_1}(n), \dots, \phi_{p_d}(n))$ où $p_1 \dots p_d$ sont des entiers premiers entre eux et supérieurs à 1 (par exemple les d premiers nombres premiers). L'inversion des coefficients p -adiques induit des corrélations bien visibles dès les dimensions 20 et 21, si bien qu'elles ne sont plus utilisées

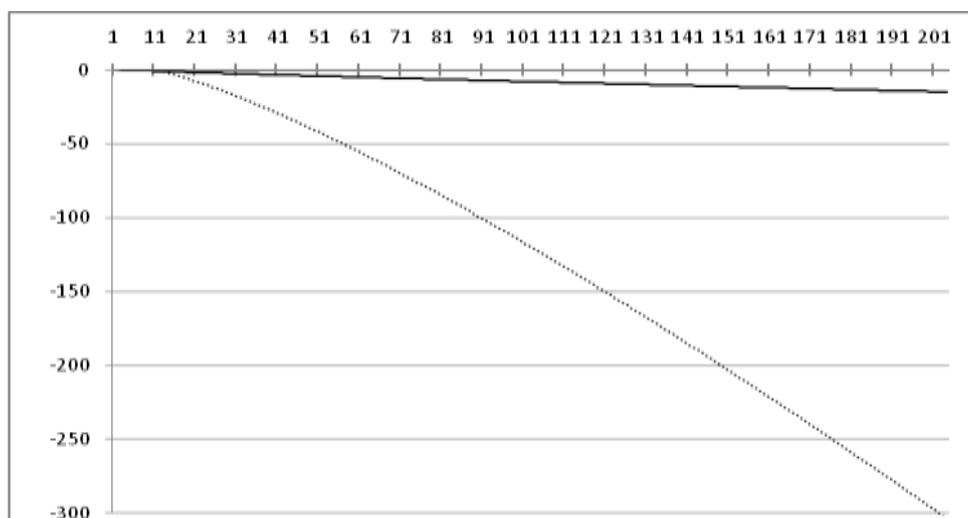
au delà de dix dimensions. Fauré a démontré en 1982 que $D_n(\mathbf{X}) \leq C_d \cdot \ln(n)^d / n + O(\ln(n)^{d-1} / n)$ avec $C_d = \prod_{j=1}^d (p_j - 1) / \ln(p_j)$ une quantité tendant rapidement vers des valeurs astronomiques. La division par Atanassov en 2004 de C_d par factorielle de d , faisant tendre cette quantité vers zéro lorsque d tend vers l'infini, fut un véritable électrochoc qui relança les travaux sur les suites de Halton généralisées naguère abandonnés au profit de l'étude des (t,s) -séquences.

Les suites de Halton généralisées

Les suites de Halton généralisées sont des suites de Halton, dont les valeurs des coefficients $a_{i,r} \in \{0 \dots p_i - 1\}$ ont été l'objet d'une permutation Σ_i sur $\{0 \dots p_i - 1\}$. Le $n^{\text{ième}}$ terme d'une telle suite de dimension d est ainsi de la forme : $X_n^d = (\phi_{p_1}^{\Sigma_1}(n), \dots, \phi_{p_d}^{\Sigma_d}(n))$ où $\phi_{p_i}^{\Sigma_i}(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Sigma_i(a_{i,r}(n))}{p_i^{r+1}}$

A partir de 1978, les auteurs comme Fauré ont proposés des permutations. Les permutations majoritairement utilisées aujourd'hui sont des mélanges linéaires tels que définis par Matousek en 1998. Il s'agit de permutations de la forme $\Sigma_{i,r}(a_r) = f_{i,r} \cdot a_r + g_{i,r} \pmod{p_i}$ où les $f_{i,r}$ sont non nuls et premiers avec p_i . Elles vérifient généralement $f_{i,r} = f_i$ et sont homogènes c'est à dire avec $g_{i,r} = 0$. En 1995, Tezuka a même donnée la formulation encore plus générale : $\Sigma_{i;a_0, a_1 \dots a_{r-1}}(a_{r-1}) = \sum_{j=0}^r f_{i,r,j} \cdot a_j + g_{i,r} \pmod{b_i}$

Après que Braasten et Weller en 1979, suivis par Tuffin en 1997 aient proposé des permutations sélectionnées aux moyens de calculs intensifs en grandes dimensions, Kocis et Whiten ont proposé en 1997 un jeu de permutations particulièrement simples. Ces auteurs ont remarqué qu'en multipliant par 2^{n_d} où $n_d = \lceil \ln(p_d) / \ln(2) \rceil$ les 2^{n_d} premiers termes de la suite de Halton de base 2, ils généraient $0 \dots 2^{n_d} - 1$ dans un nouvel ordre. Ainsi pour $d=3$ où $n_3 = \lceil \ln(5) / \ln(2) \rceil = 3$, le nouvel ordre est $\{0, 4, 2, 6, 1, 3, 5, 7\}$. En lisant alors dans cet ordre les nombres inférieurs aux bases 2, 3 et 5, ils obtiennent trois permutations : $\{0,1\}$, $\{0,2,1\}$ et $\{0,4,2,1,3\}$. Cette méthode trivialement généralisable à tout d donne de bons résultats pratiques. Dans le même article Kocis et Whiten ont proposée une seconde méthodes donnant d'aussi bons résultats. Elle consiste à réaliser des sauts de P valeurs où P est un nombre premiers supérieurs aux p_i .



Comparaison des Logarithmes décimaux des C_d des suites de Halton et de Atanassov & Durchova pour $d \leq 200$

En 2003 Atanassov et Durchova ont proposés une famille de permutations telles que $C_d = \frac{2^d}{d!} \left(\sum_{j=1}^d \ln(p_j) \right) \prod_{j=1}^d \frac{p_j (1 + \ln(p_j))}{(p_j - 1) \ln(p_j)}$ converge encore plus vite vers zéro ! Ces permutations sont de la

forme $\sum_{i,r}(a_r) = a_r \cdot m_i^r \pmod{p_i}$ où tout les m_i pour $i \in \{1..d\}$ remplissent les conditions suivantes:

- i) p_i ne divise pas m_i ,
- ii) pour tous les entiers n_1, \dots, n_d tels que p_j ne divise pas n_j , il existe des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ tels que

$$m_i^{\alpha_i} \prod_{1 \leq j \leq d \text{ et } i \neq j} p_j^{\alpha_j} \equiv n_i \pmod{p_i}$$

Les m_i satisfaisant ces conditions sont dits admissibles vis-à-vis des p_i

<p>1, 1, 2, 4, 2, 11, 14, 7, 13, 6, 9, 25, 39, 20, 23, 36, 32, 18, 36, 40, 28, 69, 37, 86, 10, 67, 78, 37, 17, 81, 72, 6, 97, 105, 75, 53, 31, 149, 65, 1, 104, 105, 128, 30, 165, 137, 49, 31, 86, 12, 112, 176, 14, 12, 70, 83, 208, 174, 30, 156, 228, 271, 163, 263, 24, 1, 103, 41, 100, 289, 213, 318, 8, 62, 123, 166, 237, 13, 334, 186, 405, 85, 319, 112, 130, 376, 61, 161, 169, 308, 308, 426, 1, 21, 93, 221, 220, 98, 216, 336, 351, 367, 457, 516, 257, 76, 334, 190, 487, 21, 525, 595, 500, 198, 236, 402, 615, 306, 354, 312, 81, 658, 202, 220, 641, 49, 94, 588, 175, 434, 145, 538, 448, 369, 395, 187, 509, 6, 33, 454, 785, 718, 162, 464, 518, 225, 716, 287, 705, 680, 696, 734, 321, 588, 316, 26, 396, 572, 339, 303, 736, 189, 729, 730, 326, 895, 727, 201, 634, 673, 609, 615, 148, 805, 777, 117, 225, 805, 21, 674, 842, 414, 906, 121, 924, 458, 973, 81, 815, 1142, 541, 806, 1005, 1078, 1153, 329, 205, 1186, 1191, 643, 509, 468, 1177, 802, 988, 1235, 380, 1079, 1032, 247, 206, 1014, 725, 242, 1095, 370, 748, 1335, 469, 561, 1302, 722, 274, 465, 748, 349, 1358, 1148, 777, 52, 1068, 1397, 1210, 142, 1286, 95, 1012, 805, 1098, 1019, 1172, 1096, 263, 715, 349, 1406, 832, 415, 575, 826, 1118, 864, 899, 1138, 1089, 1380, 1353, 1373, 296, 1032, 576, 1009, 508, 925, 1223, 68, 1115, 455, 6, 505, 467, 336, 1004, 992, 234, 949, 1276, 1058, 1102, 991, 1454, 1303, 545, 180, 968, 1859, 1207, 1372, 561, 1463, 1632, 337, 971, 1415, 491, 142, 804, 839, 920, 1191, 432, 101, 1643, 320, 42, 534, 521, 229, 1648, 561, 1569, 833, 707, 462, 526, 456, 547, 1473, 1818, 1220, 333, 131, 988, 992, 809, 1856, 773, 570, 2031, 252, 1315, 2158, 81, 1908, 588, 1939, 1051, 619, 1415, 873, 1761, 1923, 360, 934, 781, 725, 1175, 2135, 1914, 639, 1725, 443, 2127, 1259, 2173, 1368, 2091, 837, 138, 1047, 1394, 1277, 905, 1771, 2109, 2275, 1520, 1104, 1853, 250, 1637, 1866, 2005, 1088, 1767, 240, 1140, 825, 677, 2473, 1760, 1495, 2303, 2559, 1465, 1043, 1045, 1606, 1780, 2265, 1499, 1578, 2060, 1968, 2277, 739, 998, 409, 2323, 2100, 672, 565, 528, 2556, 132, 355, 429, 1847, 40, 441, 2014, 98, 2453, 1545, 962, 243, 1782, 323, 2578, 1273, 1887, 1399, 1613, 2045, 1871, 540, 1330, 1348, 1661, 1947, 2397, 50, 1985, 2275, 334, 1526, 2830, 621, 2313, 2213, 854, 2340, 2136, 1715, 788, 1194, 2801, 254, 100, 2479, 1923, 1637, 1074, 2687, 723, 127, 2468, 2904, 613, 2288, 1632, 2765, 1742, 279, 2878, 661, 1871, 553, 720, 726, 464, 38, 1412, 2545, 2396, 944, 2660, 2225, 1413, 351, 3064, 2323, 706, 778, 767, 1255, 1036, 2315, 1652, 194, 191, 2791, 1311, 2873, 1319, 1106, 1327, 1967, 2797, 1769, 1235, 2206, 2524, 3253, 926, 2976, 789, 3469, 1199, 2163, 138, 141, 1624, 813, 274, 137, 3495, 2698, 1607, 2079, 2720, 2559, 233, 1715, 509, 495, 3434, 2909, 3180, 246, 375, 3662, 1548, 1995, 2872, 258, 1871, 1326, 736, 450, 2440, 3228, 2899, 871, 3183, 2465, 387, 3258, 1310, 179, 3019, 1361, 2846, 3301, 1390, 2694, 70, 704, 3783, 1971, 3121, 1549, 3247, 1301, 2102, 2413, 330, 3762, 2212, 420, 3774, 69, 1077, 3105, 2207, 328, 189, 1693, 369, 2152, 3183, 1778, 4038, 3071, 154, 1817, 2475, 446, 213, 276, 390, 1725, 3516, 192, 2282, 1997, 2353, 5, 639, 604, 3082, 1224, 4415, 3195, 3471, 575, 3521, 4091, 3164, 2794, 1738, 1634, 2572, 2276, 2286, 206, 2399, 3199, 1752, 648, 2957, 3251, 1984, 2066, 1862, 463, 245, 4206, 4116, 109, 1824, 2999, 1866, 2037, 4185, 1623, 905, 298, 3016, 2112, 1632, 4193, 2627, 2325, 922, 868, 605, 3484, 3804, 2294, 1684, 905, 1800, 4385, 1558, 1291, 2339, 1962, 4809, 2170, 3091, 842, 3788, 4181, 3899, 766, 2868, 2335, 666, 4147, 2564, 55, 3026, 2361, 728, 253, 4612, 4437, 385, 4832, 3385, 2719, 4906, 3165, 3651, 744, 4576, 4940, 3764, 1705, 649, 1747, 1599, 3308, 1303, 4976, 2346, 1229, 2236, 2734, 1695, 1147, 4889, 2226, 4251, 1364, 96, 183, 3048, 1885, 623, 3753, 5150, 4404, 5248, 1182, 716, 4943, 1674, 4093, 2649, 1558, 3613, 3937, 3234, 3621, 4582, 3569, 3022, 5168, 4439, 721, 4776, 4783, 2761, 2466, 387, 2949, 2164, 5610, 646, 3145, 1376, 3606, 5390, 3393, 4470, 5483, 3414, 3585, 2626, 4477, 3916, 2974, 4316, 1513, 1361, 5109, 2831, 5507, 2362, 922, 18, 1203, 4732, 2483, 661, 3110, 1819, 108, 2654, 570, 1493, 4440, 223, 3899, 1685, 263, 2544, 5165, 4715, 5865, 4420, 2038, 2464, 3446, 644, 5092, 1753, 1882, 5444, 3666, 4819, 5586, 2327, 3417, 1395, 1601, 2069, 2597, 3044, 53, 1120, 4118, 5045, 4381, 4917, 3010, 6181, 1734, 2504, 2907, 2520, 6242, 4896, 1165, 2364, 2317, 1779, 5191, 126, 3439, 5013, 6237, 2351, 3635, 98, 4073, 2875, 708, 279, 5358, 3309, 2325, 2742, 5646, 5027, 3375, 388, 3503, 6187, 520, 472, 6492, 849, 1818, 1545, 5142, 6340, 4465, 144, 4745, 6081, 247, 3232, 3243, 875, 656, 4053, 6258, 4459, 2832, 5417, 2700, 5350, 2490, 2664, 2868, 6468, 4494, 5839, 1066, 1692, 3100, 5851, 1613, 5230, 5428, 5958, 4623, 2690, 1325, 3381, 2510, 960, 1591, 4203, 2056, 5893, 2446, 2333, 4171, 1149, 3882, 5054, 2739, 1224, 132, 3164, 6832, 2615, 2678, 100, 4011, 5621, 2376, 2466, 928, 2584, 6645, 4972, 5967, 5153, 4730, 5272, 6313, 1624, 5368, 7004, 178, 2666, 3469, 3272, 4281, 2578, 6912, 5537, 3621, 1716, 2467, 2578, 5819, 4750, 525, 5472, 5469, 6937, 6039, 4359, 7243, 4059, 6766, 4263, 449, 2837, 7118, 7354, 2104, 5666, 1164, 5593, 7230, 4247, 3853, 6740, 5248, 4392, 4465, 4460, 6547, 1555, 490, 5545, 5158, 4326, 2824, 2866, 1315, 77, 7538, 3233, 4728, 1093, 4754, 7233, 1956, 2653, 6865, 3309, 6193, 1090, 6912, 6606, 2395, 2506, 5859, 4204, 1506, 643, 557, 5590, 1968, 5130, 414, 3180, 32, 1687, 6198, 3966, 313</p>

Suite de 1000 entiers admissibles vis-à-vis des 1000 premiers entiers au sens de Atanotov issus du fichiers haltondat.h disponible sur <http://parallel.bas.bg/~emanouil/sequences.html>

Les (t,s) séquences digitales

Une séquence digitale de dimension s est caractérisée par sa base b (un entier premier) et C_1, \dots, C_s matrices de Z_b . La $i^{\text{ème}}$ composante de son $n^{\text{ème}}$ terme de décomposition b-adique $n = \sum_{j \geq 1} a_j(n) \cdot b^{-j}$

s'écrit $X_{n,i} = \sum_{j \geq 1} y_{i,j} \cdot b^{-j}$ avec $y_i = C_i a(n)$. Les (t,s) séquences digitales ont la particularité d'être infinies

et telles que pour tout $m \geq t$ leurs b^m sous-séquences forment un (t,m,s) net en base b, c'est à dire possèdent b^t éléments dans tout pavé de $[0,1]^s$ d'hyper volume b^{t-m} .

La première construction de (t,s) séquence digitale a été donnée par Sobol en 1967 pour b=2. Vinrent ensuite en 1982 les (0,s) séquences proposées par Fauré. En 1987, Niederreiter introduisit le premier schéma de construction général ci-après.

- i) R est un anneau commutatif de cardinal b et $B = \{0, 1, \dots, b-1\}$
- ii) $(\psi_r)_{r \geq 1}$ une famille de bijection de B dans R telle que $\psi_r(0) = 0$ pour tout r assez grand
- iii) $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq s \ \& \ j \geq 1}$ une famille de bijection de R dans B telle que $\lambda_{i,j}(0) = 0$ pour tout j assez grand
- iv) Pour tous les indices i, j, r précédents sont choisis $C_{j,r}^{(i)} \in R$.

si $\sum_{r \geq 1} a_r(n) \cdot b^{-r}$ est la décomposition b -adique de $n \geq 0$ et $X_{n,i} = \sum_{j \geq 1} x_{n,i,j} \cdot b^{-j}$ où $x_{n,i,j} = \lambda_{i,j} \sum_{r \geq 1} C_{j,r}^{(i)} \psi_r(a_r(n))$

alors (X_n) est une (t, s) séquence sous réserve que les matrices génératrices $(C_{j,r}^{(i)})_{j,r \geq 1}$ sont bien choisies.

Puis en 1988, il proposa une nouvelle généralisation basée sur les séries formelles de Laurent, laquelle fut encore généralisée par Tezuka en 1993 et 1995. Cette dernière construction ci-après est connue sous le nom de séquence de Neiderreider généralisées.

Soit F_b un corps fini, $F_b[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $F_b[x]$ et G le corps des séries formelles de Laurent dont les éléments s'écrivent $S = \sum_{r \geq 0} a_r(n) \cdot b^{-r}$ pour ω entier ou $S=0$ correspond à $\omega = \infty$.

- i) $p_1, p_2, \dots, p_s \in F_b[x]$ premiers entre eux sur $F_b[x]$ et tels que $\deg(p_i) = e_i \geq 1$
- ii) $y_{i,k} \in F_b[x]$ tels que les parties polynomiales de $y_{i,k} \bmod p_i$ notées $[y_{i,k}]_{p_i}$ avec $(j-1) \cdot e_i \leq k-1 \leq j \cdot e_i$ sont linéairement indépendantes sur F_b pour $j \geq 1$ et $1 \leq i \leq s$.
- iii) $\frac{y_{i,k}(x)}{p_i(x)^j} = \sum_{r \geq \omega(i,j,k)} a^{(i)}(j, k, r) \cdot x^{-r}$

Tezuka a montré que sous ces conditions les matrices génératrices C_i de coefficients $C_{i,j,r} = a^{(i)}(j_i, k, r)$ où $j \geq 1, r \geq 1$ et $j_i = j-1 \bmod e_i$ définissent des (t, s) séquences digitales de $t = \sum d_i \cdot s$. Les séries formelles $y_{i,k}$ sont appelées générateurs formels des séquences.

En 1995 Owen a proposé les (t, s) séquences hybrides mélangeant les digits : $Y_{n,i} = \sum_{j \geq 1} y_{n,i,j} \cdot b^{-j}$ avec $y_{n,i,1} = \pi_i(x_{n,i,1}), y_{n,i,2} = \pi_{i, x_{n,i,1}}(x_{n,i,2}), \dots$ où π_i permute le premier digit de $x_{n,i}$, puis le second digit de $x_{n,i}$ en regard du précédent et ainsi de suite jusqu'au dernier digit de $x_{n,i}$ calculé en regard tout de ces prédécesseurs. Il a montré que dès lors que les π_i sont uniformément et indépendamment distribués (Y_n) est « presque sûrement » une (t, s) séquence. Tezuka montra ensuite qu'en introduisant la troncation des développements en base b dans le schéma général le « presque sûrement » pouvait être supprimé.

En 1995 Niederreiter & Xing ont construit avec la première (t, s) séquence de t optimum en $O(s)$ au lieu de $O(s \cdot \ln(s))$ pour les précédentes. La discrédance des (t, s) digitales croissant avec t , cette construction offre donc une meilleur discrédance que ces dernières.

La discrédance étoile d'une (t,s) séquence vérifie: $D_s^*(\mathbf{X}) \leq C_s \cdot \ln(n)^s / n + O(\ln(n)^{s-1} / n)$. Les plus petites constantes C_s établies à la parution des articles pour t donné étaient :

- i pour les séquences de Sobol, qui sont des (t,s) séquences en base 2 : $C_s = \frac{2^t}{s!} \left(\frac{2}{\ln(2)} \right)^s$
- ii pour les séquences de Faure, qui sont toutes des (0,s) séquences en base $b > s$: $C_s = \frac{1}{s!} \left(\frac{b-1}{\ln(b)} \right)^s$
- iii pour toutes les (t,s) séquences en base b Niederreiter a montré que $C_s = \frac{b^t}{s!} \frac{b-1}{2^{\lfloor b/2 \rfloor}} \left(\frac{2^{\lfloor b/2 \rfloor}}{\ln(b)} \right)^s$

Lorsque b impair premier est supérieur à s, t peut être minimal et iii se réduit en ii. Mais lorsque $b=2$, iii améliore i d'un facteur $\frac{1}{2}$. De meilleures constantes ont été trouvées par Niederreiter en 1988 pour $2 \leq s \leq 4$, puis par Niederreiter(1992), Niederreiter et Xing(1995), Owen(1995), Tezuka(1993), Tezuka(1995) pour les variantes de ses constructions dont les digits ont été permutés. Finalement Kritzer en 2006, a amélioré ii et iii d'un facteur $\frac{1}{2}$ pour $b \geq 3$ et $s \geq 2$ et d'un facteur $\frac{1}{3}$ pour $b=2$ et $s \geq 5$.

S	Halton	Faure	Niederreiter-Xing	Halton- Atanassov
10	$2,18 \cdot 10^{-1}$	$2,19 \cdot 10^{-1}$	$4,46 \cdot 10^{-3}$	2,82
20	$2,85 \cdot 10^{-2}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	$1,75 \cdot 10^{-8}$	$1,44 \cdot 10^{-07}$
30	$3,53 \cdot 10^{-3}$	$3,27 \cdot 10^{-5}$	$1,40 \cdot 10^{-6}$	$1,91 \cdot 10^{-17}$
40	$5,78 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-7}$	$1,07 \cdot 10^{-24}$	$6,17 \cdot 10^{-29}$
50	$9,50 \cdot 10^{-5}$	$1,19 \cdot 10^{-9}$	$7,56 \cdot 10^{-35}$	$1,34 \cdot 10^{-41}$

Meilleures valeurs connues pour C_s associé aux séquences de Halton, Faure, Niederreiter-Xing, Halton- Atanassov

Selon Henri Faure et Christiane Lemieux, au regard du comportement asymptotiques des $\log(C_s)$ connus en 2008 les meilleurs séquences sont celles Halton-Atanassov et Niederreiter-Xing d'ordre $-s \cdot \ln(s)$, suivies de celles de Faure d'ordre $-s \cdot \ln(\ln(s))$, suivies de celles de Halton d'ordre $-\ln(s)$ et enfin des séquences de Sobol d'ordre $s \cdot \ln(\ln(s))$. Ce classement provisoire ne doit pas faire oublier qu'en pratiques les suites de Sobol sont une famille de générateur donnant d'excellents résultats pour les estimations d'intégrales en grandes dimensions. Les (t,s) séquences sont l'objet d'une si importante littérature que certaines d'entre elles ne possèdent toujours pas d'implémentation publique. Aussi nous ne présenterons ci-après quelques (t,s) séquences possédant des implémentations disponibles sur internet.

Les suites de Sobol

Les suites de Sobol ont été introduites par leur auteur dès 1967, bien qu'elles ne fussent implémentées pour la première fois en Fortran 77 par Bratley et Fox qu'en 1988. Cette première implémentation connue sous le nom algorithme 659, permettait de générer seulement 40 dimensions. Paskov et Traub ont implémenté jusqu'à 370 dimensions dans la version 1995 du logiciel Finder de l'université de Columbia. Joe et Kuo ont étendu l'implémentation de l'algorithme 659 à 1111 dimensions en 2003. Dans leur article de 2008, ils se sont fixés pour objectif d'atteindre 21201 dimensions. Objectif atteint par leur dernière implémentation disponible en ligne sur <http://web.maths.unsw.edu.au/~fkuo/sobol/index.html>.

Une séquence de Sobol de dimension s s'appuie sur une famille de s polynômes premiers de Z_2 . Chacun est associé à une dimension. Le polynôme associé à la $j^{\text{ème}}$ dimension de degré s_j s'écrit : $x^{s_j} + a_{1,j} \cdot x^{s_j-1} + \dots + a_{s_j-1,j} \cdot x + a_{s_j,j}$ avec $a_{s_j,j} = 1$. Ses coefficients plus la données de s_j entiers impairs, tels que $m_{k,j} < 2^k$ pour $k=1..s_j$ suffisent à définir les « nombres directeurs » $(v_{k,j})_{k \geq 1} \in (0,1)$ où $v_{k,j} = m_{k,j} \cdot 2^{-k}$ et $m_{k,j} = 2 \cdot a_{1,j} \cdot m_{k-1,j} \oplus \dots \oplus 2^{s_j-1} \cdot a_{s_j,j} \cdot m_{k-s_j,j} \oplus m_{k-s_j,j}$ pour $k \geq s_j$. La $j^{\text{ème}}$ composante du $i^{\text{ème}}$ terme de la séquence de Sobol est alors définie comme $X_{i,j} = b_1 \cdot v_{1,j} \oplus b_2 \cdot v_{2,j} \oplus \dots$ où b_l désigne le $l^{\text{ème}}$ bit de l'écriture binaire de i soit $(\dots b_2 b_1)_2$. En pratique c'est le code gris introduit en 1979 par Antonov et Saleev ne changeant qu'un seul b_l à chaque itération qui est implémenté.

En 1967 Sobol avait montré que cette méthode construit des (t,s) séquences de $t = \sum (d_j - 1)$ et pour peu que les polynômes étaient de plus petit degré possible $t = O(s \cdot \log(s))$. Mais, le choix des nombres directeurs est d'autant plus délicat que le nombre de dimensions est grand, ainsi que l'a illustré Peter Jackel dans son ouvrage Monte Carlo methods in finance paru chez Wiley en prenant en l'espèce les nombres directeurs unitaires. En pratique, les nombres directeurs sont généralement choisis de manière que toutes les sous séquences de dimension d satisfont la propriété A définie par Sobol. C'est-à-dire telles que les 2^d premiers points se répartissent également dans une partition constituée par 2^d sous cubes de côté $1/2$ de $[0,1]^d$. [Cf. Sobol, I. M. (1976)] En 1994 Morokoff et Caflish ont montré que cette propriété ne garantissait en rien des corrélations dimensionnelles. Aussi Cheng et Druzdzel en 2000, puis Joe et Kuo en 2008 ont proposés de nouveaux « nombres directeurs » offrant de meilleures projections bidimensionnelles. L'implémentation actuellement recommandée par ces derniers atteint déjà 21 000 dimensions !

Des suites de Fauré aux GFauré

Les suites de Fauré de dimension s introduites par leur auteur en 1982 s'appuient sur une unique suite de Van der Corput de base b , le premier nombre premier supérieur à s . Leur $n^{\text{ème}}$ terme s'écrit :

$$X_n^s = (T_b^0(\phi_b(n)), T_b^1(\phi_b(n)), \dots, T_b^n(\phi_b(n))) \text{ où } T_b \left(\sum_{j=0}^s \frac{a_j}{b^{j+1}} \right) \rightarrow \left(\sum_{j=0}^s \frac{a'_j}{b^{j+1}} \right) \text{ avec } a'_j = \sum_{r \geq j} \frac{r!}{j!(r-j)!} a_j \pmod{b}$$

Elles possèdent pour matrices génératrices $C_i = P^{i-1} = \left(\binom{r-1}{j-1} (i-1)^{r-j} \right)_{\substack{j \geq 1, r \geq 1}} \pmod{b}$ où P est la matrice de Pascal. Leur générateur formel dans le cadre des séquences généralisées de Niederreiter est $1/(x-i)^j$. L'accumulation observée des premiers points autour de zéro a conduit Fauré à suggérer d'initier la suite à $n=b^4-1$. Mais pour s grand, $b \geq s$ l'est aussi ce qui regroupent les points sur la diagonale de

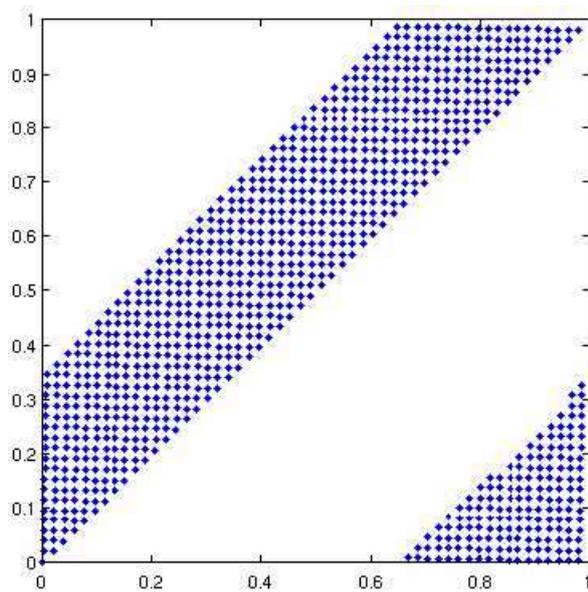
l'hyper-cube du fait des uns sur la diagonale des C_i . Conscients de ce phénomène les praticiens n'utilisent plus ces dernières au-delà de $d=25$.

Plusieurs généralisations suivirent Niederreiter proposa en 1988 les générateurs formels $g_{i,j}(x)/(x-i)^j$ où $g_{i,j}$ une famille de polynôme de F_b satisfaisant $\text{pgcd}(g_{i,j}(x), x-i)=1$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} (j - \deg(g_{i,j})) = \infty$ pour $1 \leq i \leq s$. Puis en 1994, Tezuka et Tokuyama proposèrent les matrices génératrices

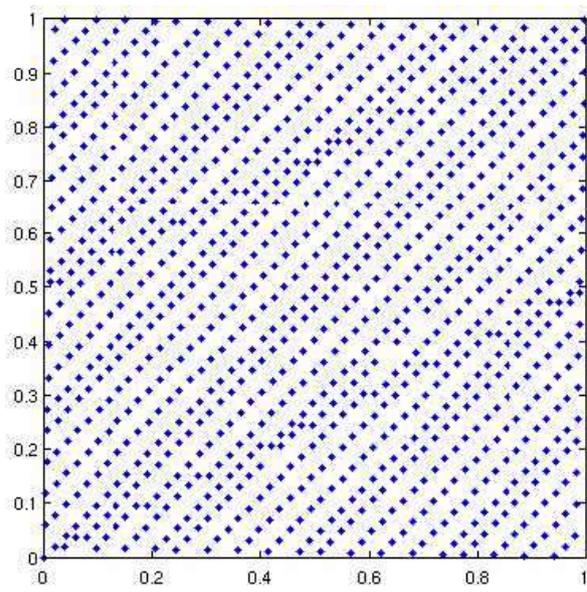
$$C_{i,j,r} = \sum_{q=0}^{\min(i-1, r-1)} \binom{j-1}{q} \cdot \binom{r-1}{q} \cdot b_i^{j+r-2q-2} \pmod{b}$$

dont les b_i sont des éléments distincts de F_b . Enfin cette même

année Tezuka, proposa pour matrice génératrice $C_i = A^{(i)} \cdot P^{i-1}$ où les $A^{(i)}$ sont des matrices triangulaires inférieures inversibles de F_b arbitrairement choisies. Cette dernière implémentation plus connue sous le nom de GFaure donnent à condition de bien choisir les $A^{(i)}$ de bons résultats pratiques. Elle a été notamment implémentée par Papageorgiou et Traub dans le logiciel Finder de l'université de Columbia [Cf. A. Papageorgiou and J. Traub(1996)]



49ème et 50ème coordonnées des 1000 premiers point de la séquence de Faure de base b=53



49ème et 50ème coordonnées des 1000 premiers point de la séquence de GFaure de base b=53

Les Séquences de Niederreiter-Xing

En 1995 Niederreiter & Xing ont proposé la première construction d'une (t,s) séquence t optimum en $O(s)$. Cette construction utilise les séries formelles de Laurent non plus pour étendre des fractions rationnelles mais des fonctions algébriques. Elle repose sur des notions de géométrie algébrique comme la notion de place... hors du champ de cette étude. C'est seulement en 2000 que fut donnée sa première implémentation par Gottlieb Pirsic. Cette implémentation disponible en ligne sur <http://www.ricam.oeaw.ac.at/dismat/pirs/niedxing.html> est intégrée à la librairie Libseq de Alexander Keller et Ilja Friedel où elle possède déjà une matrice génératrice pour 511 dimensions. En 2008 Joseph Dick et Harald Niederreiter ont réussi à montrer la supériorité des séquences de Niederreiter-Xing sur celles de Sobol en comparant leur t -value. L'on ne possédait jusqu'alors pour ces dernières que des bornes supérieures et une borne inférieure commune à toutes les (t,s) séquences. En 1998, Art B. Owen a montré que les $(0,t,s)$ net dont les bits ont été mélangés produisent des estimations d'intégrale non biaisées, possédant une variance 2.718 fois inférieure à celle obtenue par

Monte Carlo pour toute fonction de carrée intégrable. Cette quantité est portée à $b^t \cdot [(b+1)/(b-1)]^s$ pour les (t,m,s) net en base b. Les mélanges sur les autres (t,s) séquences digitales sont l'objet d'une importante littérature, aussi leur application aux Niderreiter-Xing séquences est très attendue. [Cf. H. S. Hong and F. J. Hickernell(2003a) et Hong, H. S., Hickernell, F. J., and Wei, G. (2003)].

3. Benchmark de quelques générateurs récents

Si les générateurs des éditeurs doivent toujours être considérés comme des boîtes noires implémentant parfois mal des générateurs éventuellement inconnus, la complexité des générateurs actuels conduit à utiliser avec autant d'aveuglement les codes sources des auteurs. Aussi la validation préalable des échantillons utilisés pour les simulations est-elle indispensable. D'autant qu'il n'existe pas dans l'absolu de bon générateur chacun présentant des faiblesses rédhibitoires ou non au regard de la simulation à réaliser.

Parmi les générateurs équidistribués sur plus de 512 dimensions précédemment énumérés, ces quatre possèdent des sources en ligne et affichent des résultats aux statistiques présentables :

- SFMT de graine 91827321
- Well19937b de graine 1 initialisé avec une graine ad hoc
- Sobol de Joe & Kuo sans graine
- Atanassov sans graine
- Atanassov scrambled sans graine

```
s←1; Mask[0]←1997779402; Mask[1]←350067891; Mask[2]←216392486;
For r=0 to 511
    s←39373 s mod 231; seed[r] ←s^(r×Mask[r%3]);
Return seed[0]...seed[511]
```

Algorithme générant la graine ad hoc du Well 19937b où ^ désigne l'opérateur ou bit à bit

Pour chaque générateur quatre jeux de 16392x512 valeurs ont été produits par combinaison de deux techniques de réduction de la variance. Il s'agit d'une part de la technique des variables antithétiques construisant 2 par 2 les X'_i en prenant $X'_{2i}=X_i$ et $X'_{2i+1}=1-X_i$ où X_i provient du générateur testé. Et il s'agit de la technique du mélange modulo 12 construisant les X'_j 12 par 12 en prenant $X'_j=(\pi(j)/12+X_j)/12$ pour $j=1..12$ où X_j provient encore du générateur testé et $\pi(j)$ est une permutation sur $\{0,..,11\}$ obtenue par composition du LCG(a=39373,b=0, m=2³¹-1, graine=1) avec l'algorithme de Moses.

Pour chaque échantillon ont été calculé pour les 512 dimensions les quatre premiers moments, le Khi2 global sur [0,1/24[..<23/24,1[, et Khi2 global des paires de [0,1/24[..<23/24,1[x[0,1/24[..<23/24,1[, les discrédances étoiles et les corrélations maximales en valeur absolue.

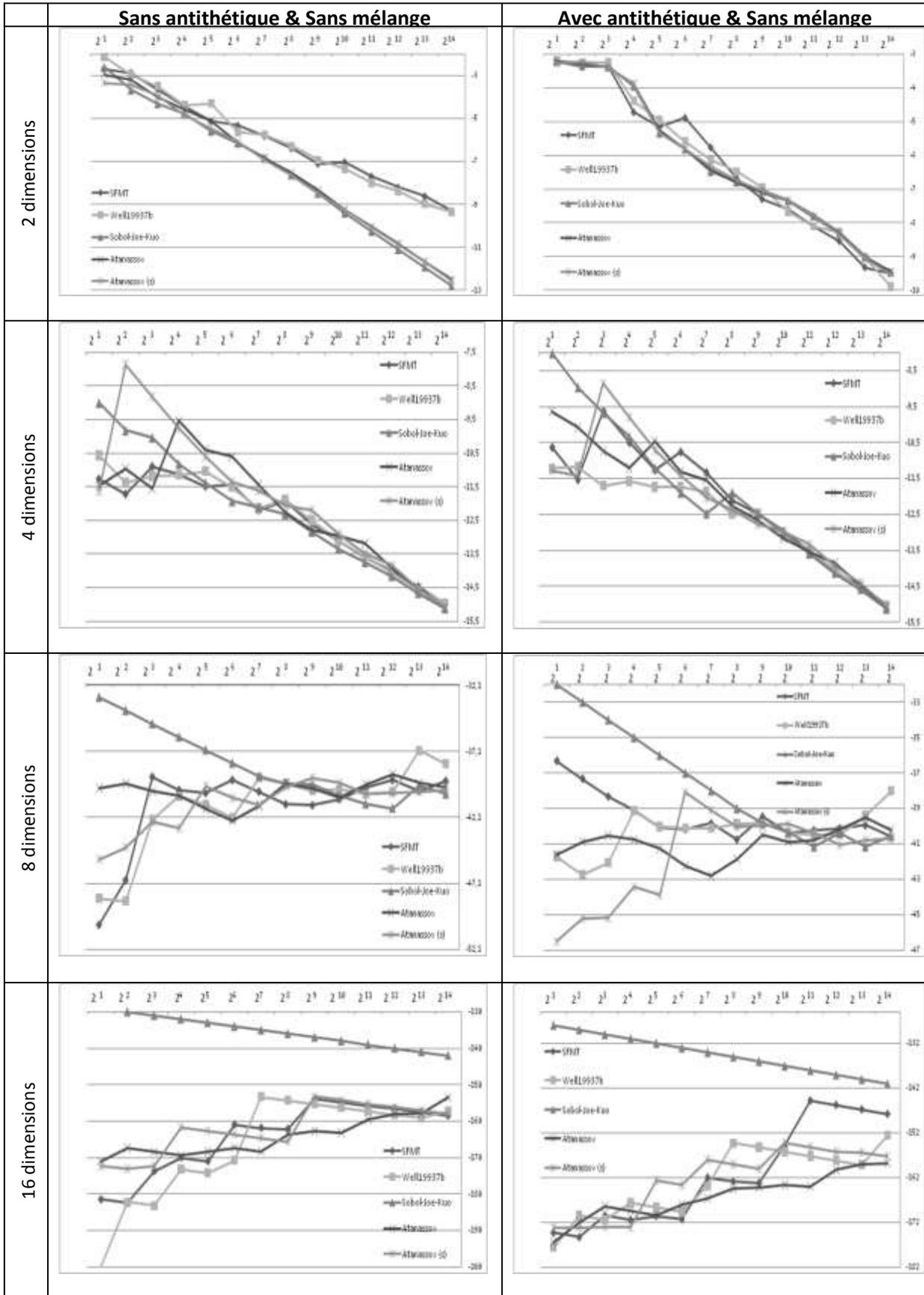
Tous les tirages ont présentés des moments présentant de très faibles erreurs, des khi2 simples très bons à l'exception du SFMT avec antithétiques et sans mélange. En revanche seuls les Atanassov et le Sobol de Joe-Kuo non mélangés présentent des Khi2 de paires permettant d'accepter l'indépendance de deux dimensions consécutives. Si l'introduction des variables antithétique généralement accroît les corrélations, la séquence de Sobol de Joe & Kuo atteint par ce procédé un niveau de corrélation exceptionnellement bas. On remarque que les deux procédés de réduction de la variance utilisés agissent aussi comme des réducteurs de discrédances au-delà de 4 dimensions. Il est intéressant de noter que les séquences de Atanassov possédant de très bonnes discrédances

sont aussi les plus corrélées, et qu'à l'inverse la séquence de Sobol de Joe et Kuo qui ne brille pas pour sa discrétion est l'une des moins corrélée et certainement celle qui emporte ce benchmark.

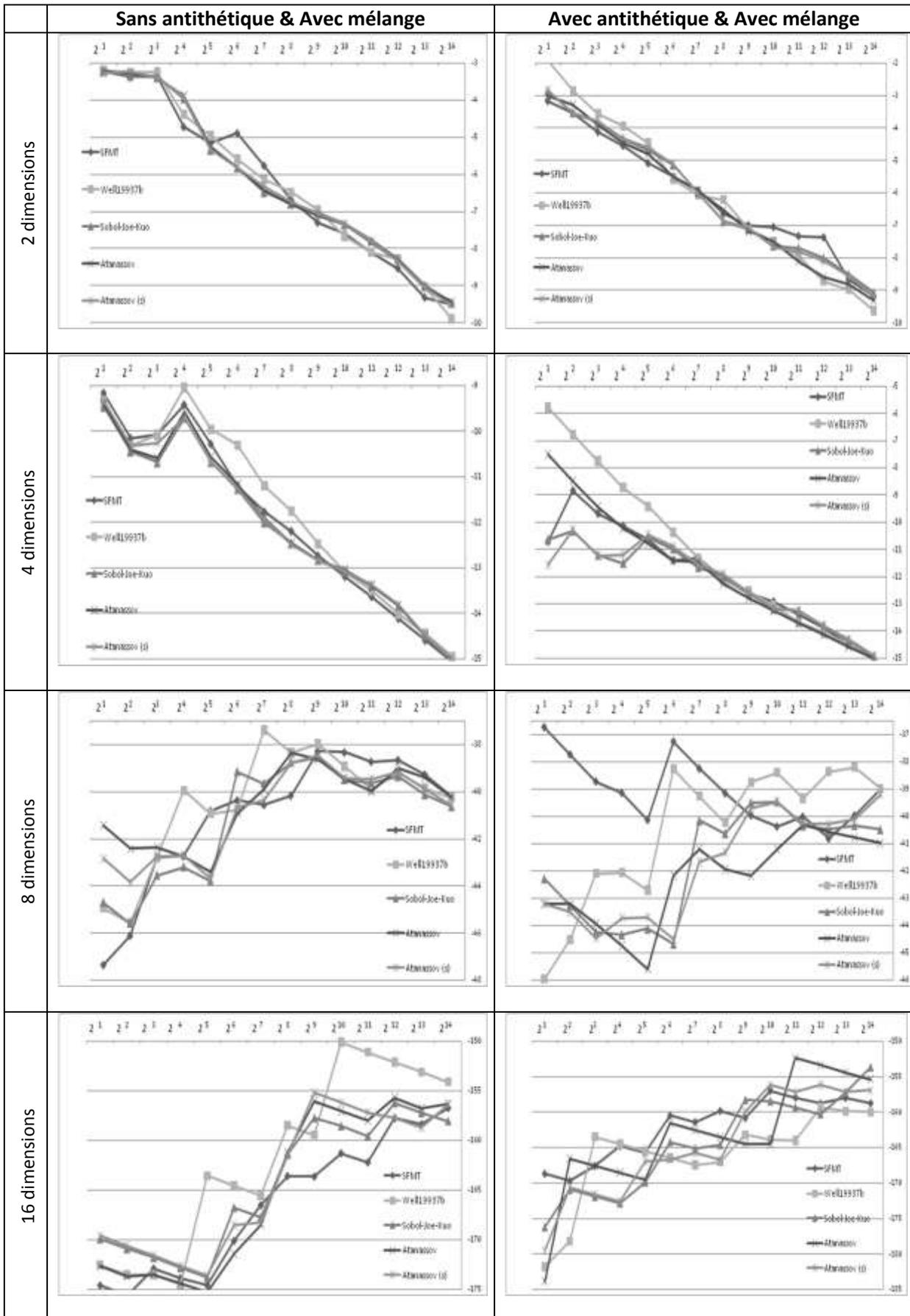
P(X>Khi2) Modulo 24	Sans mélange		Avec mélange	
	Sans antithétique	Avec antithétique	Sans antithétique	Avec antithétique
SFMT	97.73%	42.86%	99.97%	95.03%
Well19937b	99.94%	98.56%	99.96%	100.00%
Sobol de Joe-Kuo	100.00%	89.94%	99.65%	100.00%
Atanassov	100.00%	100.00%	97.20%	99.97%
Atanassov scrambled	100.00%	100.00%	98.19%	100.00%

P(X>Khi2) paires Modulo 24x24	Sans mélange		Avec mélange	
	Sans antithétique	Avec antithétique	Sans antithétique	Avec antithétique
SFMT	4.79%	0.05%	6.02%	11.86%
Well19937c	43.71%	60.41%	46.23%	16.22%
Sobol-Joe-Kuo	99.86%	99.92%	2.44%	4.21%
Atanassov	98.19%	99.99%	8.69%	41.64%
Atanassov scrambled	99.43%	98.16%	37.01%	98.16%

Corrélation maximale En valeur absolue	Sans mélange		Avec mélange	
	Sans antithétique	Avec antithétique	Sans antithétique	Avec antithétique
SFMT	3.46%	4.98%	3.89%	-5.71%
Well19937c	-3.45%	-4.98%	-3.78%	-5.10%
Sobol-Joe-Kuo	4.74%	18.7%	-3.67%	-5.21%
Atanassov	87.2%	93.4%	3.55%	5.32%
Atanassov scrambled	58.4%	59.8%	3.73%	-5.41%



Logarithme en base 2 des discrédances étoiles L_2 des générateurs pour les dimensions 2,4, 8,16



Logarithme en base 2 des discrédances étoiles L_2 des générateurs pour les dimensions 2,4, 8,16

4. Simulations des lois non uniformes

Cette section dresse un rapide inventaire des méthodes utilisées pour générer les lois de probabilités à partir des tirages dans la loi uniforme. Seront abordées les techniques d'anamorphose, de composition à partir de la loi exponentielle, d'acceptation-rejet et les chaînes de Markov.

La technique de l'anamorphose

Cette première technique encore appelée méthode de transformation inverse génère une variable aléatoire X au moyen de F^{-1} l'inverse de sa fonction de répartition $F(x)=P(X\leq x)$. Si F^{-1} est bien défini dès lors que F est strictement croissante, l'on remarquera qu'elle peut toujours l'être en posant $F^{-1}(u)=\inf\{x : F(x)\geq u\}$ et alors $F^{-1}(U)$ où U suit la loi uniforme sur $(0,1)$ suit la loi de X .

Application de l'anamorphose aux lois continues

Loi	Distribution	E(X)	VAR(X)	F(x)	$F^{-1}(u)$ Après éventuelle réduction de 1-u en u
Uniforme [$\mu\pm\sigma/2$]	$\frac{1_{[\mu\pm\sigma/2]}(x)}{\sigma}$	μ	$\sigma^2/12$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < \mu - \sigma/2 \\ 1 & \text{si } x > \mu + \sigma/2 \\ (x - \mu)/\sigma & \text{sinon} \end{cases}$	$\mu + \sigma(u - 1/2)$
Normale (μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$\Phi((x-\mu)/\sigma)$	$\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)$
Log-Normale (μ, σ^2)	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\exp(\mu + \sigma^2/2)$	$E^2(X)[\exp(\sigma^2) - 1]$	$\Phi((\ln(x) - \mu)/\sigma)$	$\exp(\mu + \sigma \Phi^{-1}(u))$
Exponentielle ($\lambda > 0$)	$\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$1 - \exp(-\lambda \cdot x)$	$-\ln(u)/\lambda$
Pareto (t, α)	$1_{[t, +\infty[} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$	$\frac{\alpha \cdot t}{\alpha - 1}$ avec $\alpha > 1$	$\frac{\alpha \cdot t^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}$ avec $\alpha > 2$	$\begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha & \text{si } x > t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{t}{\sqrt[\alpha]{u}}$
Cauchy	$\frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)}$	sans	sans	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$	$\tan(\pi(x - 1/2))$
EV1 : Gumbel	$\exp(-x - \exp(-x))$	0.57722...	$\pi^2/6$	$\exp(-\exp(-x))$	$-\ln(-\ln(u))$
EV2 : Weibull ou Fréchet ($\alpha > 0, \beta$)	$1_{[0, +\infty[} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$	$\beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$	$\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - E^2\right] \cdot \beta^2$	$1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$	$\beta \cdot [-\ln(u)]^{1/\alpha}$
Logistique	$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\exp(-(x-\alpha)/\beta)}{(1 + \exp(-(x-\alpha)/\beta))^2}$	α	$\frac{\pi^2\beta^2}{3}$	$\frac{1}{1 + \exp(-(x-\alpha)/\beta)}$	$\alpha + \beta \cdot \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$

Paramètres des lois continues pour lesquelles la technique de l'anamorphose est recommandée
(G. Saporta(2006) Probabilités Analyse des données et statistique 2^{ème} édition révisée et augmentée Ed Technip)
Paramètres de la loi logistique [Monfort, (2007) Cours d'économétrie de la finance (STA202) du CNAM]

La loi normale standard $N(0,1)$ a pour fonction de répartition $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$. Cette dernière étant symétrique en 0 : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, elle peut être définie à partir de $\Phi(x)$ pour $x \geq 0$, dont il n'est pas connue de formule fermée, mais seulement de très bonnes approximations comme celle du à Hastings, Abramowitz et Stegun ou encore celle du à Marsaglia et AI.

L'approximation proposée par Hastings en 1955 pour $x \geq 0$ de $\Phi(x) \approx 1 - (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ où $t = 1/(1 + p \cdot x)$ possède une erreur inférieure à $7,5 \times 10^{-8}$ selon son auteur.

```

b1=0.319381530;   b2=-0.356563782;   b3=1.781477937;   b4=-1.821255978;   b5=1.330274429;
p=0.2316419;      c =ln(√2π)=0.918938533204672;
Input : x
Output : y approximation to Φ(x)
  a←|x|; t←-1/(1+a×p); s←-((( b5×t+ b4)×t+ b3) ×t+ b2) ×t+ b1) ×t; y←-s × exp(-0.5 × x × x -c);
  if (x>0) then y←-1-y;
  return y;

```

Implémentation par Abramowitz et Stegun en 1964 de l'approximation de Hastings

L'approximation due à Marsaglia et Al. en 1994 affiche au prix d'un temps de calcul trois fois supérieur une erreur majorée par 10^{-15} pour $0 \leq x \leq 6.23025$ et 10^{-12} au-delà. Ses auteurs en proposent une seconde variante plus rapide et de même précision utilisant 121 constantes, ainsi qu'une troisième plus précise encore grâce à 2000 constantes !

```

v1=1.253314137315500   v2=0.6556795424187985;   v3=0.4213692292880545;   v4=0.3045902987101033;
v5=0.2366523829135607;   v6=0.1928081047153158;   v7=0.1623776608968675;   v8=0.1401041834530502;
v9=0.1231319632579329;   v10=0.1097872825783083;   v11=0.09902859647173193; v12=0.09017567550106468;
v13=0.08276628650136917; v14=0.0764757610162485;   v15=0.07106958053885211;
c =ln(√2π)=0.918938533204672;
Input : x between -15 and 15
Output : y approximation to Φ(x)
  j←⌊ min(|x|+0.5, 14) ⌋; z←-j; h← |x|-z; a←-vj+1; b←-z×a-1; q←-1; s←-a+h×b;
  for i=2, 4, 6, ... 24-j
    a←-(a+z×b)/i; b←-(b+z×a)/(i+1); q←-q×h×h; s←-s+q×(a+h×b)
  y←-s × exp(-0.5 × x × x -c);
  if (x>0) then y←-1-y;
  return y;

```

Algorithme de Marsaglia et Al. approximant la fonction de répartition de la loi normale

Grâce à ces approximations $\Phi^{-1}(u)$ peut être approximée en cherchant x tel que $\Phi(x)=u$ au moyen notamment de la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n + (u - \Phi(x_n)) e^{x_n^2/2} / \sqrt{2\pi}$. En Prenant comme point de départ la formule de Moro, dont la précision est de $3 \cdot 10^{-9}$ pour $-7 \leq x \leq 7$ la première itération permet d'accéder à une précision de l'ordre de 10^{-15} . La formule de Moro s'appuie sur l'approximation due à Beasley et Springer pour $0.5 \leq u \leq 0.92$: $\Phi^{-1}(u) \approx \sum_{i=0}^3 a_i (u - 0.5)^{2i+1} / 1 + \sum_{i=0}^3 b_i (u - 0.5)^{2i}$ couplée à l'approximation de Chebychev pour $0.92 \leq u < 1$: $\Phi^{-1}(u) \approx \sum_{i=0}^8 c_i (\ln(-\ln(1-u)))^i$.

```

a0=2.50662823884;    a1=-18.61500062529;    a2=41.39119773534;    a3=-25.44106049637;
b0=-847351093090;    b1=23.08336743743;    b2=21.06224101826;    b3=3.13082909833;
c0=0.3374754822726147;    c1=0.9761690190917186;    c2=0.1607979714918209;    c3=0.0276438810333863;
c4=0.0038405729373609;    c5=0.0003951896511919;    c6=0.0000321767881768;    c7=0.0000002888167364;
c8=0.0000003960315187;

Input : u ≈Uniforme]0,1[

Output : x approximation to Φ-1(u)

    y←-u-0.5;
    if |y|<0.42 then    r←-y×y ; x←-y× (((a3×r+ a2) ×r+ a1) ×r+ a0)/ (((b3×r+ b2) ×r+ b1) ×r+ b0) ×r+1);
    else    r←-u ; if (y>0) then r←-1-u
    r←-ln(-ln(r)) ; x←-c0+r×( c1+r×( c2+r×( c3+r×( c4+r×( c5+r×( c6+r×( c7+r×c8)))))) ;
    if (y<0) then x←-x ; return x ;

```

Algorithme de Beasley-Springer-Moro approximant l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale

Application de l'anamorphose aux lois discrètes

La loi de Bernoulli de paramètre p sur {0,1} et la loi uniforme sur {1..n} possèdent pour fonctions de répartition inverses les fonctions I_[0,p](u) et u ↦ ⌈u·n⌉ où ⌈x⌉ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Loi	P{X=n}	E(X)	VAR(X)	F(x)	F ⁻¹ (u)
Bernoulli (0<p<1)	p ⁿ ·(1-p) ¹⁻ⁿ	p	p·(1-p)	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-p & \text{sin on} \end{cases}$	I _[0,p] (u)
Uniforme sur {1..n}	1/n	(n+1)/2	(n ² -1)/12	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq n \\ \lceil x \rceil / n & \text{sin on} \end{cases}$	⌈u·n⌉

Paramètres des lois de distribution de Bernoulli de paramètre p et Uniforme sur {1..n} [Cf. G. Saporta(2006)]

Les lois discrètes telles que pour n ≥ n₀ P{X=n+1}=f (P{X=n}) peuvent elles aussi être aisément simulées avec l'algorithme chop down proposé par Kemp en 1981 :

```

Input : u ∈]0,1[
Output : n≈X

    n←-n0; p←-p0;
    while (u>p)
        u←u-p ; p←f(p) ; n←-n+1;
    Output : n

```

Algorithme Chop Down du à Kemp(1981)

Il permet notamment d'implémenter les lois possédant la propriété de Panjer, c'est-à-dire vérifiant P{X=n+1}= P{X=n}·[a+b/(n+1)].

Loi	$P\{X=n\}$	$E(X)$	$VAR(X)$	a	B
Poisson (λ)	$e^{-\lambda} \lambda^n/n!$	λ	λ	0	λ
Binômiale (N,p) Optimisation : si $u > 0,5$ utiliser $F^{-1}(1-u) = N - F^{-1}(u)$	$C_N^n \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}$	$N \cdot p$	$N \cdot p \cdot (1-p)$	0	$(N-n) p/(1-p)$
Géométrique 1 (p)	$p (1-p)^{n-1}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	0	$(1-p)$
Géométrique 2 (p)	$p (1-p)^n$	$(1-p)/p$	$(1-p)/p^2$	0	$(1-p)$

Lois discrètes possédant la propriété de Panger [Cf. Partrat C., Besson J-L. (2005)]

Pour les lois discrètes X sur $\{x_1..x_N\}$ avec $P\{X=x_n\}=p_n$ ne permettant d'exploiter pareille régularité comme c'est le cas pour les lois empiriques, Marsaglia proposa dès 1963 les techniques de parcours d'arbre puis Marsaglia, Norman et Cannon en 1972 suivis de Chen et Asau en 1974 proposèrent d'autres méthodes utilisant des tableaux sur-indexant les x_n .

Chen et Asau proposèrent en 1974 de définir pour $j=1..N$ $g_j = \max \left\{ i : \sum_{n=1}^i p_n < j/N \right\}$ et d'appliquer l'algorithme suivant :

```

Input : u ∈]0,1[
Output : x ≈ X
    j ← ⌈ u · N ⌉ ; j ← g_j + 1;
    while ( ∑_{n=1}^j p_n > u ) j ← j - 1;
    Output x_j

```

Algorithme de Chen et Asau(1974)

Marsaglia proposa de poser $p_n \approx \sum_{g=1}^G p_{n,g} \cdot b^{-g}$ approximation de p_n en base b jusqu'à l'ordre G , définir une liste d'indice contenant bout à bout pour $g=1$ à G les groupes g composés exactement de $p_{n,g}$ indices pour chaque $n \in \{1..N\}$. Chaque groupe g contenant $\sum_{n=1}^N p_{n,g}$ indices la liste en comprend $I = \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N p_{n,g}$. L'algorithme consiste pour chaque simulation à tirer u dans la loi uniforme et retourner $X_{\lceil u \cdot I \rceil}$. Car alors :

$P(X = x_i) = \sum_{g=1}^G$ Probabilité d'appartenir au groupe g × Probabilité d'être parmi les $p_{g,i}$ indice i du groupe g

$$= \sum_{g=1}^G \left(\frac{b^{-g} \cdot \sum_{n=1}^N p_{n,g}}{\sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N p_{n,g} \cdot b^{-g}} \times \frac{p_{i,g}}{\sum_{n=1}^N p_{n,g}} \right) = \sum_{g=1}^G (p_{i,g} \cdot b^{-g}) \approx p_i$$

Norman and Cannon donnèrent en 1972 la première implémentation de cet algorithme.

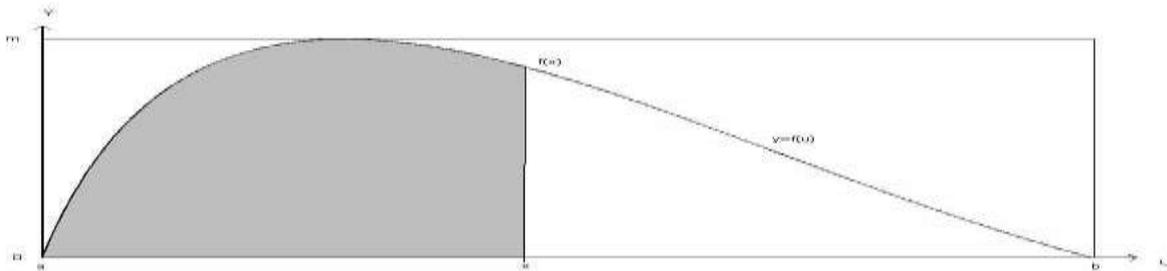
La méthode du rejet et ses déclinaisons

Tirer Y peut revenir à tirer les X satisfaisant une condition donnée comme l'appartenance à Ω_y .

Pour les variables aléatoires X à support bornée sur [a, b] dont la fonction de densité f est majorée par m, Von Neumann proposa de tirer u et y respectivement dans les lois uniformes sur [a,b] et [0,m], et ne retenir que les $u^* = u$ tels $y \leq f(u)$. Car alors la probabilité de retenir u est :

$$P\{y \leq f(u)\} = \frac{\text{Surface}\{(u, v) : a \leq u \leq b, 0 \leq y \leq f(u)\}}{\text{Surface}\{(u, v) \in [a, b] \times [0, m]\}} = \frac{1}{(b-a) \cdot m}$$

$$\begin{aligned} P\{u^* \leq x\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P((u_i, y_i) \text{ est retenu})}_{=1} \times P(u_i \in [0, x] | u_i \text{ est retenu}) \\ &= \int_{u \in [a, x]} \int_{y \in [0, m]} 1_{\{y < f(u)\}} \cdot dy \cdot du = \int_{u \in [a, x]} f(u) \cdot du = P(X \leq x) \end{aligned}$$



La zone grise contient les $u^* \leq x$ correspondant aux u tels que $a \leq u \leq x$ et $0 \leq y \leq f(u)$ où $u \sim U[a, b]$ et $y \sim [0, m]$

Pour les variables aléatoires X dont la densité peut s'écrire $f(x) = \tilde{f}(x)/M$ avec $\tilde{f}(x) \leq c \cdot g(x)$ où g est la densité d'une loi facilement simulable X peut être simulée en tirant u dans la loi uniforme sur [0,1], y suivant la loi Y et en ne retenant que les y tels que $c \cdot u \cdot g(y) \leq \tilde{f}(y)$ Car alors la probabilité de retenir u à une étape est :

$$P\{c \cdot u \cdot g(y) \leq \tilde{f}(y)\} = \int_{u \in [0,1]} \int_y 1_{\{c \cdot u \cdot g(y) \leq \tilde{f}(y)\}} \cdot g(y) dy \cdot du = \int_y \frac{\tilde{f}(y) \cdot g(y)}{c \cdot g(y)} du = \frac{M}{c}$$

$$\begin{aligned} P\{u^* \leq x\} &= \sum_{i=1}^{\infty} P((u_i, y_i) \text{ est retenu et } y_i \in [0, x]) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{M}{c}\right)^{i-1}}_{=c/M} \int_{u \in [0,1]} \int_{y \in [0, x]} 1_{\{c \cdot u \cdot g(y) \leq \tilde{f}(y)\}} \cdot g(y) dy \cdot du \\ &= \frac{c}{M} \cdot \int_{y \in [0, x]} \frac{\tilde{f}(y) \cdot g(y)}{c \cdot g(y)} \cdot du = P\{X \leq x\} \end{aligned}$$

La vérification de l'inégalité $c \cdot u \cdot g(y) \leq \tilde{f}(y)$ pouvant s'avérer complexe, s'il existe encore l facilement calculable telle que $1 \leq \tilde{f}$ alors X peut être plus efficacement simulée en tirant u dans la loi uniforme sur [0,1], y suivant la loi Y et en ne retenant que les y tels que $c \cdot u \cdot g(y) \leq I(y)$ ou

sinon tels que $c \cdot u \cdot g(y) \leq \tilde{f}(y)$. Cette dernière méthode est connue sous le nom de méthode de l'enveloppe.

Application à la loi de poisson

Loi	$P\{X=n\}$	$E(X)$	$VAR(X)$	γ_1	γ_2	$F(x)$
Poisson ($\lambda>0$)	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$3 + \frac{1}{\lambda}$	$e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{n \leq x} \frac{\lambda^n}{n!}$

Paramètres de la loi de poisson [Cf. G. Saporta(2006)]

La loi de poisson X de paramètre $\lambda>0$ peut être générée à partir d'une ou plusieurs lois exponentielles E_i de même paramètre en simulant les E_i jusqu'à ce que leur somme dépasse 1, car : $P(X_\lambda=n)=e^{-\lambda} \cdot \lambda^n / n! = P(E_1+\dots+E_k \leq 1 < E_1+\dots+E_{k+1})$. Cette méthode simple n'étant plus envisageable pour λ grand, Atkinson proposa en 1979 une méthode d'acceptation-rejet utilisant une loi logistique Y de paramètre α et β restreinte à $[-1/2, +\infty]$. Pour tout n entier on a :

$$P(n-0.5 \leq Y < n+0.5) = \left[1 + e^{-(0.5+\alpha)/\beta} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + e^{-(n+0.5-\alpha)/\beta}} - \frac{1}{1 + e^{-(n-0.5-\alpha)/\beta}} \right]$$

Il proposa de prendre $\alpha=\lambda$ et

$\beta = \pi / \sqrt{3\lambda}$ de manière que leurs deux premiers moments soient égaux et valida numériquement le choix de $c=0.767+3.36/\lambda$.

Input : $\lambda>0$;

Output : $x \approx \text{Poisson}(\lambda)$

$\beta \leftarrow \pi / \sqrt{3\lambda}$; $\alpha \leftarrow \lambda \cdot \beta$; $k \leftarrow \ln(c) - \lambda \cdot \ln(\beta)$;

Repeat $u_1 \leftarrow U(0,1)$; $x \leftarrow \lceil [\alpha - \ln((1-u_1)/u_1)] / \beta \rceil$;

Until $x > 0.5$;

$n \leftarrow \lfloor x - 0.5 \rfloor$;

Repeat $u_2 \leftarrow U(0,1)$;

Until $\alpha - \beta x + \ln(u_2 / [1 + \exp(\alpha - \beta x)])^2 \leq k + n \cdot \ln(\lambda) - \ln(n!)$

Return x ;

Algorithme de Atkinson(1979)

Application aux lois gamma et béta

Les lois gamma et béta sont étroitement liées de par leur définition basée sur la fonction gamma, qui à x positif associe $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot dt > 0$. En particulier $\Gamma(n+1)$ vaut $n!$ pour n entier car $\Gamma(1)=1$ et $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ pour tout x positif. Les lois gamma de paramètre de forme $\alpha>0$ et d'échelle $\beta>0$ notées $\gamma(\alpha,\beta)$ ont pour densité sur $[0,+\infty]$: $f(x) = \beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} / \Gamma(\alpha)$.

La loi du khi-2 à n degrés de liberté avec n entier strictement positif, $\chi^2(n)$ est la loi suivie par le carré de n lois normales centrées réduites $N(0,1)$. Elle possède pour densité sur $[0,+\infty]$: $x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2} / 2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)$.

Les lois béta de type 1 et 2, de paramètres de forme α et β positifs s'appuient sur la fonction béta, qui à x et y positifs associe $B(x,y) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) / \Gamma(x+y) > 0$. Les lois béta de type 1 de paramètres α et β sont

notées $I(\alpha, \beta)$, elles possèdent pour densité sur $[0, 1]$: $f(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/B(\alpha, \beta)$. Les lois béta de type 2 de paramètres α et β sont notées $II(\alpha, \beta)$, elles possèdent pour densité sur $[0, +\infty]$: $f(x) = x^{\alpha-1}/(1-x)^{\alpha+\beta}/B(\alpha, \beta)$.

Loi	Distribution	E(X)	VAR(X)	F(x)
Gamma $\gamma(\alpha > 0, \beta > 0)$	$\frac{1_{[0, +\infty[}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \beta^\alpha \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta t} \cdot dt$
Loi du khi-2 $\chi^2(n)$	$\frac{1_{[0, +\infty[}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	N	2n	$1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^i \frac{1}{i!}$ si n pair $2\Phi^{-1}(\sqrt{x}) - 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{i-\frac{1}{2}}}{1 \cdot \dots \cdot (2i-1)}$ sin on
Beta (de type 1) $I(\alpha > 0, \beta > 0)$	$\frac{1_{[0, 1]}}{B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}$	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$	$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot (1-t)^{\beta-1} \cdot dt$
Beta de type 2 $II(\alpha > 0, \beta > 0)$	$\frac{1_{[0, +\infty[}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}$	$\frac{\alpha}{\beta-1}$	$\frac{\alpha \cdot (\alpha + \beta - 1)}{(\beta-2)(\beta-1)^2}$	$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \cdot dt$

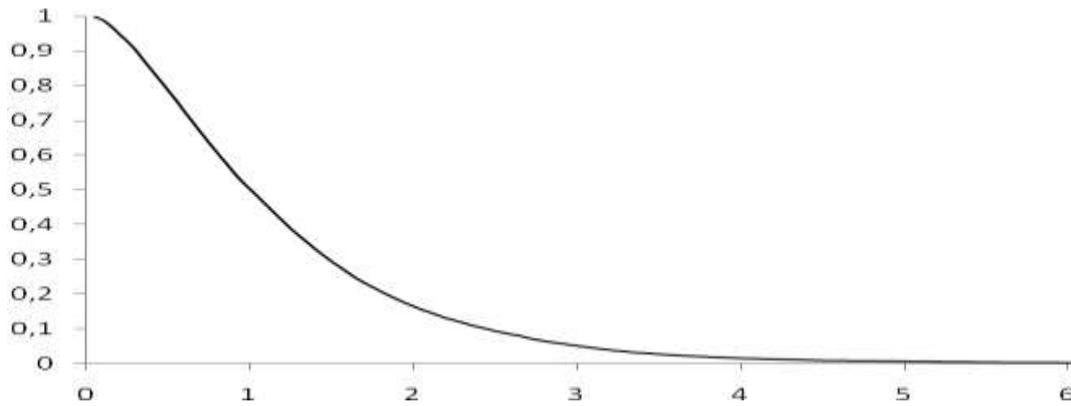
Paramètres des lois gamma et béta de type I [Cf. Y. Dodge, (2004)]

Paramètres des lois béta de type II et χ^2 [Cf. G. Saporta (2006)]

Propriétés et relations notamment avec la loi exponentielle

1. Si $X \approx I(1, 1)$ alors $X \approx$ Uniforme sur $[0, 1]$
2. Si $X \approx \gamma(1, \beta)$ alors $X \approx$ Exponentielle(β)
3. Si $X \approx I(\alpha, \beta)$ alors $X/(X-1) \approx II(\alpha, \beta)$
4. Si $X \approx \gamma(\alpha, 1)$ alors $X/\beta \approx \gamma(\alpha, \beta)$
5. Si $X_1 \approx \gamma(\alpha_1, \beta)$ et $X_2 \approx \gamma(\alpha_2, \beta)$ alors $X_1 + X_2 \approx \gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$
6. Si $X \approx \gamma(n/2, 1/2)$ alors $X \approx \chi^2(n)$
7. Si $X \approx \gamma(\alpha+1, 1)$ avec $\alpha < 1$ et $U \approx$ Uniforme sur $[0, 1]$ alors $X \cdot U^{1/\alpha} \approx \gamma(\alpha, 1)$
8. Si $X \approx I(\alpha, 1-\alpha)$ avec $\alpha < 1$ et $E \approx$ Exponentielle(β) alors $X \cdot E \approx \gamma(\alpha, \beta)$
9. Si pour $i=1..n$ $E_i \approx$ Exponentielle(1) alors $\sum_{i=1}^n E_i \approx \chi^2(n)$
10. Si pour $i=1..\alpha + \beta$ avec α et β entiers $E_i \approx$ Exponentielle(1) alors $\sum_{i=1}^{\alpha} E_i / \sum_{i=1}^{\alpha+\beta} E_i \approx I(\alpha, \beta)$

Si simuler une loi $I(1, 1)$ consiste simplement à simuler une loi uniforme sur $[0, 1]$, il y a lieu de choisir une parmi les méthodes existantes la plus efficiente au regard des paramètres à simuler. L'algorithme de rejet proposé par Jöhnk en 1964 est efficient pour α et β inférieurs à 1, mais moins que sa version de 1979 lorsqu'un seul des paramètres est supérieur à 1. Enfin, lorsque les deux paramètres sont supérieurs à 1 c'est l'algorithme proposé Schmeiser et Babu qui est le plus efficace. La librairie IMSL utilise le plus efficient de ces algorithmes ou de celui proposé par Cheng en 1978. L'algorithme de Jöhnk (ci-après) repose sur le théorème de l'auteur qui dit que si U_1 et U_2 suivent des lois uniformes sur $[0, 1]$, $U_1^{1/\alpha} / [U_1^{1/\alpha} + U_2^{1/\beta}]$ conditionnellement à $U_1^{1/\alpha} + U_2^{1/\beta} \leq 1$ suit une loi $I(\alpha, \beta)$. La probabilité d'acceptation de l'algorithme de Jöhnk en fonction α pour $\alpha = \beta$ tend rapidement vers 0 lorsque α croît, comme l'illustre le graphique suivant.



Taux d'acceptation de l'algorithme de Jöhnk en fonction α avec $\beta=\alpha$ estimé avec 20000 tirages dans la loi uniforme sur $[0,1]$

```

Input :  $\alpha > 0, \beta > 0$ 
Output :  $x \approx l(\alpha, \beta)$ 

Repeat  $u_1 \leftarrow U(0,1); u_2 \leftarrow U(0,1); v_1 \leftarrow u_1^{1/\alpha}; v_2 \leftarrow u_2^{1/\beta}; w \leftarrow v_1 + v_2$ 
Until  $w \leq 1$ ;

return  $v_1/w$ ;

```

Algorithme de Jöhnk(1964)

De même, si simuler $\gamma(1, \beta)$ consiste simplement à simuler la loi exponentielle(β), il est préférable de simuler γ pour $\alpha < 1$ avec une technique distincte de celle adoptée pour $\alpha > 1$. L'algorithme d'acceptation rejet (ci-après) proposé par Ahrens et Dieter en 1974, modifié par Best en 1983 est selon James E. Gentle particulièrement efficient.

```

Input :  $0 < \alpha < 1, \beta > 0$ 
Output :  $x \approx \gamma(\alpha, \beta)$ 

 $t \leftarrow 0.07 + 0.075\sqrt{1-\alpha}$  ;  $b \leftarrow 1 + \alpha \cdot e^{-t}$  ;

Repeat  $u_1 \leftarrow U(0,1); u_2 \leftarrow U(0,1); v \leftarrow b \cdot u_1$ ;
  if  $v \leq 1$  then
     $x \leftarrow t \cdot v^{1/\alpha}$ ;
    if  $u_2(2+x) \leq 2-x$  return  $x$ ;
    if  $u_2 \leq e^{-x}$  return  $x$ ;
     $x \leftarrow -\ln(t \cdot (b-v)/\alpha)$  ;  $y \leftarrow x/t$ ;
    if  $u_2(\alpha + \gamma(1-\alpha)) \leq 1$  return  $x$ ;
    if  $u_2 \leq y^{\alpha-1}$  return  $x$ ;

```

Algorithme de Best(1983)

Cheng et Feast proposèrent en 1979 le premier algorithme en $O(\alpha^{1/2})$ rapidement suivi d'un second plus efficient pour α grand. Mais Schmeiser et Lal furent les premiers à proposer en 1980 une technique de mélanges de densité dont le coût ne dépendait plus du choix de α . Cette dernière fut améliorée par Sarkar en 1996 qui recourut notamment à plus d'intervalles.

Input : $\alpha > 1, \beta > 0$
 Output : $x \approx \gamma(\alpha, \beta)$
 Repeat $u_1 \leftarrow U(0,1); u_2 \leftarrow U(0,1); v \leftarrow (\alpha - 1/6\alpha) \cdot u_1 / ((\alpha - 1) \cdot u_2);$
 if $v + 1/v + 2 \cdot (u_2 - 1) / (\alpha - 1) \leq 2$ return $x = (\alpha - 1)v$
 if $v \cdot \ln(v) + 2 \cdot \ln(u_2) / (\alpha - 1) \leq 1$ return $x = (\alpha - 1)v$

Algorithme de Cheng et Feast(1979)

On notera enfin que les lois de Erlang, lois gamma de paramètre α entier peuvent être aisément simulées comme somme de α lois exponentielles de paramètre β , en tirant α $u_i \approx U[0,1]$ indépendamment et prenant $x = -\ln\left(\prod_{i=1}^{\alpha} u_i\right) / \beta$.

Fort de ce résultat, l'on peut simuler $\gamma(\alpha, \beta)$ pour $\alpha > 1$ en simulant $\gamma(\alpha, 1) / \beta$ par acceptation rejet de $\gamma(\alpha, 1)$ avec $\gamma(a, b)$ où $a = \lceil \alpha \rceil$ est le plus petit entier supérieur à α et $b = \alpha/a$. On pourra prendre $\tilde{f}(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}$, $g(x) = e^{-bx} \cdot x^{a-1} \cdot b^a / \Gamma(a)$, $c(b) = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \left(\frac{1}{e} \cdot \frac{a-\alpha}{1-b}\right)^{\alpha-a} \geq \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}$ minimum en $b = \alpha/a$.

De la même façon, l'on peut simuler $\gamma(\alpha, \beta)$ pour $\alpha < 1$ en simulant $\gamma(\alpha, 1) / \beta$ par acceptation rejet de $\gamma(\alpha, 1)$ avec la loi de Weibull de paramètre $(\alpha, 1)$. On pourra prendre $\tilde{f}(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}$, $g(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}$, $c(b) = \frac{e^{-b^{1/\alpha}}}{\alpha} \geq \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}$ minimum en $b = \alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$.

La technique de la décomposition

Lorsque qu'une variable $Y=f(X)$ est fonction d'une seconde X , simuler Y revient à simuler X . La dépendance entre Y et X n'est pas nécessairement déterministe, elle peut être probabiliste au sens ou la probabilité de Y peut être conditionnée par celle de X : $P(Y) = P(Y/X) \cdot P(X)$. Tirer Y revient alors à tirer dans X , puis dans Y sachant X .

La fonction de densité de certaines lois Y peut être naturellement formulée conditionnellement à une loi X aisément simulable. La loi binomiale négative de paramètre $r > 0$ et $0 < p < 1$ peut ainsi être simulée au moyen d'une loi de poisson Λ de paramètre λ conditionnée par une loi gamma γ de paramètre $\alpha=r$ et $\beta=p/(1-p)$ en remarquant que sa fonction de densité vaut pour n entier positif:

$$P(N = n) = \frac{\Gamma(r + n)}{\Gamma(r)} \cdot \frac{p^r \cdot (1-p)^n}{n!} = \frac{p^r (1-p)^n}{\Gamma(r) \cdot n!} \cdot \int_{\mu \in [0, +\infty]} \mu^{n+r-1} e^{-\mu} d\mu = \int_{\lambda \in [0, +\infty]} \underbrace{\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}}_{P(N|\Lambda)} \underbrace{\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \frac{\lambda^{r-1} e^{-\frac{\lambda p}{1-p}}}{\Gamma(r)}}_{P(\Lambda) \approx \gamma(\alpha=r, \beta=p/(1-p))} d\lambda$$

Loi	$P\{X=n\}$	$E(X)$	$VAR(X)$	a	b
Binômiale Négative $\mathcal{BN}(r > 0, 0 < p < 1)$	$\frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r) \cdot n!} p^r (1-p)^n$ avec $\frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)} = \begin{cases} r \cdot \dots \cdot (r+n-1) & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$	$r \cdot \frac{1-p}{p}$	$r \cdot \frac{1-p}{p^2}$	0	$(r+n)(1-p)$

Paramètres de la loi Binômiale négative [Cf. Partrat C., Besson J-L. (2005)]

Les techniques liées aux chaînes de Markov

Les chaînes de Markov X sont définies à partir de leur noyau K , une application de $\Omega_x \times \Omega_y$ dans $[0,1]$ telle que $K(x, \cdot)$ soit une densité sur Ω_y et $K(\cdot, y)$ soit mesurable. Lorsque X est discrète $P(X_n=y | X_{n-1}=x) = T_{x,y}$ terme de la matrice de transition associée à K . Lorsque X est continue $P(X \in A | x) = \int_A K(x,y) \cdot dy$. En vertu du théorème ergodique toute suite de Markov $X_{n \geq 1}$ de distribution stationnaire f se comporte comme une distribution indépendante, identiquement distribuée sur f au sens où la moyenne empirique des premiers termes de $h(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $\int h(x) \cdot f(x) \cdot dx$. Les algorithmes de Metropolis-Hastings, Gibbs et leurs dérivés s'appuient sur ce résultat pour fournir d'autres techniques de tirages.

L'algorithme de Metropolis-Hastings

Toute variable aléatoire X de densité f peut en particulier être simulée par l'algorithme de Metropolis(1953)-Hastings(1970) au moyen d'une densité conditionnelle $g(y|x)$ telle que $g(\cdot|x)$ est aisément simulable ou symétrique à la condition que $f(y)/g(y,x)$ soit connu à une constante indépendante de x près.

```
Input :  $x_t$ 
Output :  $x_{t+1}$ 
 $y_t \approx g(\cdot | x_t)$ ;  $u_t \approx U(0,1)$ ;
 $\rho(x_t | y_t) \leftarrow \min(1, f(y_t) \cdot g(x_t | y_t) / f(x_t) \cdot g(y_t, x_t))$ 
If  $u_t \leq \rho(x_t | y_t)$  return  $y_t$ 
Else return  $x_t$ 
```

Algorithme de Metropolis(1953)-Hastings(1970) [Cf. Robert C, P. and G. Casella (2005)]

```
Input :  $x_t$ 
Output :  $x_{t+1}$ 
 $y_t \approx g$ ;  $u_t \approx U(0,1)$ ;
 $\rho(x_t | y_t) \leftarrow \min(1, f(y_t) \cdot g(x_t) / f(x_t) \cdot g(y_t))$ 
If  $u_t \leq \rho(x_t | y_t)$  return  $y_t$ 
Else return  $x_t$ 
```

Algorithme de Metropolis-Hastings garantissant l'indépendance [Cf. Robert C, P. and G. Casella (2005)]

$\rho(x|y)$ comme définie dans l'algorithme est appelée probabilité d'acceptation de Metropolis Hastings. Si les tirages précédemment obtenus n'étaient pas indépendants, la version de droite de l'algorithme de Metropolis Hasting garantit l'indépendance des tirages sous réserve qu'il existe une fonction de densité g et une constante M telle que $f(x) \leq M \cdot g(x)$ pour tout x .

L'algorithme de Gibbs

Une variable aléatoire $X=(X_1,\dots,X_S)$ de densité $f(x_1,\dots,x_S)$ de lois marginales conditionnelles de $X_i | x_j$ avec $j \neq i$ de densité $f_i(x_i | x_j$ avec $j \neq i)$ peut être simulée par l'algorithme de Gibbs défini en 1984 par les frères Stuart et Donald Geman.

```

Input :  $X_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,S})$ 
Output :  $X_{t+1} = (x_{t+1,1}, \dots, x_{t+1,S})$ 

 $x_{t+1,1} \approx f_1(x_1 | x_{t,2}, \dots, x_{t,S})$ 
 $x_{t+1,2} \approx f_2(x_2 | x_{t+1,1}, x_{t,3}, \dots, x_{t,S})$ 
.....
 $x_{t+1,S-1} \approx f_{S-1}(x_{S-1} | x_{t+1,1}, \dots, x_{t+1,S-2}, x_{t,S})$ 
 $x_{t+1,S} \approx f_S(x_S | x_{t+1,1}, \dots, x_{t,S-1})$ 

return  $X_{t+1}$ 

```

Algorithme de Gibbs [Cf. Geman, S. Geman, D. (1984).]

```

Input :  $Y_t = (y_{t,1}, \dots, y_{t,S})$ 
Output :  $Y_{t+1} = (y_{t+1,1}, \dots, y_{t+1,S})$ 

 $y_{t+1,1} \approx g_1(y_1 | y_{t,2}, \dots, y_{t,S})$ 
 $y_{t+1,2} \approx g_2(y_2 | y_{t+1,1}, y_{t,3}, \dots, y_{t,S})$ 
.....
 $y_{t+1,S-1} \approx g_{S-1}(y_{S-1} | y_{t+1,1}, \dots, y_{t+1,S-2}, y_{t,S})$ 
 $y_{t+1,S} \approx g_S(y_S | y_{t+1,1}, \dots, y_{t,S-1})$ 

return  $Y_{t+1}$ 

```

Completion Gibbs Sampler [Cf. Robert C. P. and G. Casella (2005)]

En pratique l'on recourt souvent à une densité g aisément simulable telle que $f(x) = \int g(x,z) \cdot dz$, on note $y=(x,z)$ et simule X avec l'algorithme completion Gibbs sampler.

Mais pour assurer l'«indépendance des tirages» il faut utiliser un algorithme comme le suivant :

```

Input :  $Y_t = (y_{t,1}, \dots, y_{t,S})$ 
Output :  $Y_{t+1} = (y_{t+1,1}, \dots, y_{t+1,S})$ 

 $(\pi_1, \dots, \pi_S)$  random permutation on  $\{1 \dots S\}$ 

 $y_{t+1,1} \approx g_{\pi_1}(y_{\pi_1} | y_{t,j} \text{ with } j \neq \pi_1) \dots y_{t+1,S} \approx g_{\pi_S}(y_{\pi_S} | y_{t+1,j} \text{ with } j \neq \pi_S)$ 

return  $Y_{t+1}$ 

```

Sweep Gibbs Sampler [Cf. Robert C. P. and G. Casella (2005)]

Algorithmes de simulation des permutations

Pour tirer uniformément des permutations sur $1..n$, il suffit de tirer $u_i \approx U(0,1)$ pour $i=1..n-1$ et de suivre l'algorithme de shuffle suivant :

```

Input :  $u_1 \approx U(0,1), \dots, u_{n-1} \approx U(0,1)$ ,  $n$  positive integer
Output :  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  random permutation on  $\{1..n\}$ 

  For  $i=1$  to  $n$  do  $\pi_i \leftarrow i$ ;

  For  $i=n$  to  $2$  do  $j \leftarrow \lceil i \cdot u_i \rceil$ ;  $\pi \leftarrow \pi_n$ ;  $\pi_n \leftarrow \pi_j$ ;  $\pi_j \leftarrow \pi$ ;

Return  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ;

```

Algorithme de shuffle [Cf. Moses, Oakford (1963); Durstenfeld (1964) and (Knuth, 1981, Sec. 3.4.2)].

Moses proposa dès 1963 l'algorithme ci-après nécessitant un unique tirage dans la loi uniforme.

```

Input :  $u \approx U(0,1)$ ,  $n$  positive integer
Output :  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  random permutation on  $\{1..n\}$ 

   $N = \lceil n \cdot u \rceil$ 

  For  $i=1$  to  $n$  do  $\pi_i \leftarrow i$ ;

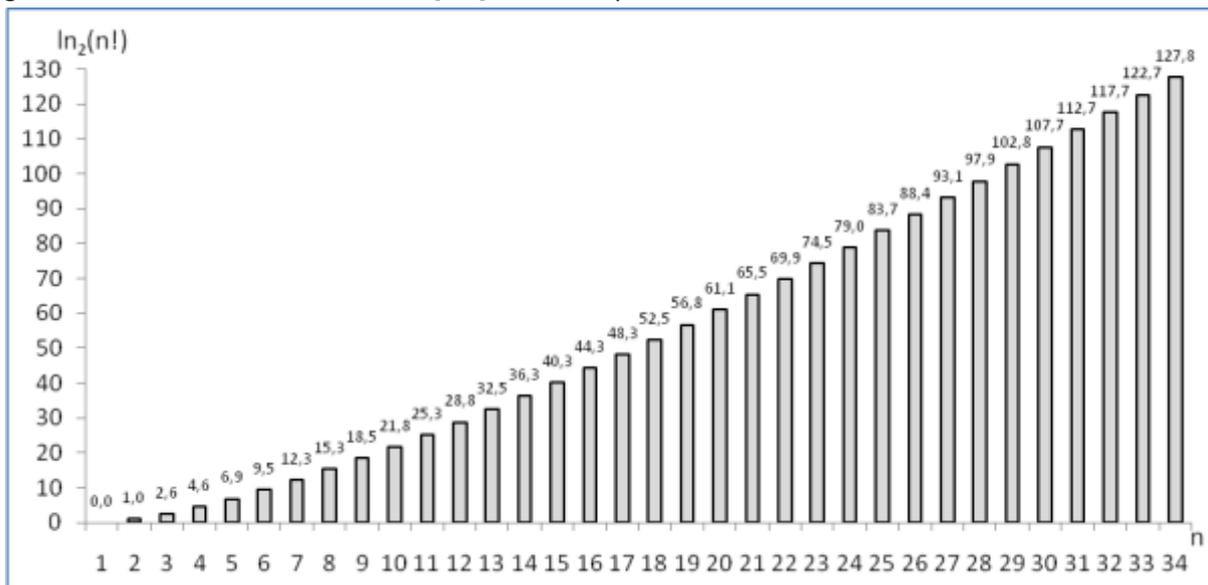
  For  $i=2$  to  $n$  do  $a \leftarrow i - N \bmod i$ ;  $N \leftarrow N \div i$ ;  $\pi \leftarrow \pi_a$ ;  $\pi_a \leftarrow \pi_i$ ;  $\pi_i \leftarrow \pi$ ;

Return  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ;

```

Algorithme 21 proposé par Moses en 1963 générant une permutation sur $\{1..n\}$ à partir d'une unique loi uniforme sur $[0,1]$.

Le graphique ci-dessous montre que cet algorithme permet de générer des permutations jusqu'à $n=12, 20$ et 33 pour N codé sur respectivement 32, 64 et 128 bits sous réserve de disposer d'un générateur dans la loi uniforme sur $[0,1]$ de même précision.



5. Convergence de la méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo consiste à estimer $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle X à partir de $\sum_{i=1}^n \hat{X}_i / n$ la moyenne de n valeurs \hat{X}_i tirées dans cette même loi, sous réserve que $|E(X)| < +\infty$ et $V(X) = \sigma < +\infty$. Car sous ces conditions, la loi faible des grands nombres dit que toute suite de variable aléatoire réelle $(X_i)_{i \geq 1}$ de loi X vérifie $P\{|E - \sum_{i=1}^n X_i / n| \leq \varepsilon\} \leq \sigma / n\varepsilon^2$. Et comme pour un niveau de probabilité donné multiplier la taille de l'échantillon n par 4 divise l'écart ε par 2, cette méthode converge donc en $O(n^{-1/2})$. La convergence des Monte Carlo basées sur des nombres pseudo aléatoires est donc en $O(n^{-1/2})$.

Tirer les \hat{X}_i à partir d'une séquence suivant la loi uniforme sur $I = [0,1]^s$, $U = (u_i)_{i \geq 1}$ revient à calculer $\sum_{i=1}^n \hat{X}_i / n = \sum_{i=1}^n f(u_i) / n$ c'est-à-dire estimer l'intégrale sur I $\int f(u) \cdot du = E(f) = E$. L'inégalité de Hardy-Krause est alors vérifiée $|E - \sum_{i=1}^n f(u_i) / n| \leq V_f D_n^*(U)$ où $D_n^*(U)$ désigne la discrépance étoile de U et $V_f = \sum_{k=1}^s \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq s} V_{f, i_1 \dots i_k}^{(k)}$ où $V_{f, i_1 \dots i_k}^{(k)} = \sup_{\emptyset \text{ Partitions de } I} \left| \sum_{(a,b) \subset \emptyset} \Delta f(a,b) \right|$ avec $\Delta f(a,b)$ somme alternée des valeurs de f aux sommets du pavé $[a,b]$. Lorsque toutes les dérivées partielles de f sont définies continues on a en particulier $V_f^{(s)} = \int |\partial^s f / \partial u_1 \dots \partial u_s|$. Il s'ensuit donc que sous ces hypothèses lorsque U est de discrépance faible c'est à dire $D_n^*(U) = O(\ln(n)^s / n)$, la méthode converge en $O(\ln(n)^s / n)$. Cette inégalité est particulièrement fine puisque pour tout $\varepsilon > 0$ il est possible de construire une fonction telle que $|E - \sum_{i=1}^n f(u_i) / n| > V_f D_n^*(U) - \varepsilon$!. Une inégalité semblable a été établi par Koksma-Hlawka pour la discrépance étoile en norme L_2 . [Cf. Niederreiter, H. (1992)].

L'utilisation des séquences de discrépance faible à mi-chemin entre les nombres pseudo aléatoires et les grilles régulières qui ne converge qu'en $O(n^{-1/s})$ permet donc de bénéficier du meilleur des deux mondes.

6. Introduction des dépendances entre les lois

Les copules

Le concept de copule introduit par Abe Sklar en 1959 est devenu très en vogue dans les années 1980 suite à l'article de Christian Genest et R.J. Mac Ka, « The joy of copulas : Bivariates distributions with uniform marginals ». The American Statistician, vol 40, 280-283.

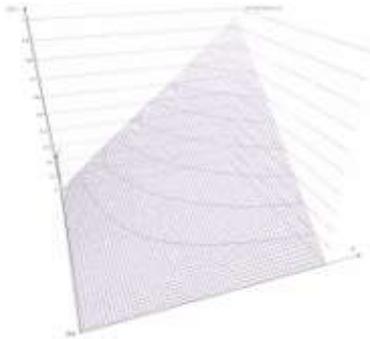
Une copule de dimension S est une application C de $[0,1]^S$ dans $[0,1]$ telle que

- $C_i[u]=C[1,\dots,1,u,1,\dots,1]=u$ pour tout $i \in \{1..S\}$
- $\Delta C[a,b] \geq 0$ pour tout (a,b) vérifiant $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1..S\}$ où $\Delta C(a,b)$ désigne le C-volume du pavé $[a,b]$ c'est à dire la somme alternée des valeurs de C en ces sommets. Cette propriété est dite de super modularité.

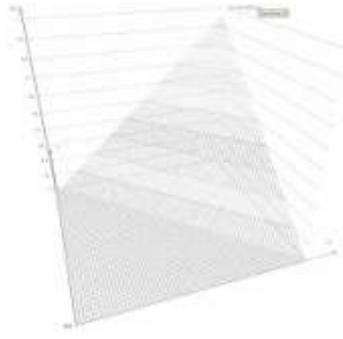
C'est par construction la fonction de répartition du vecteur aléatoire réel X_1, \dots, X_S dont les lois marginales F_i sont uniformes sur $[0,1]$ et $F(X_1, \dots, X_S) = C[F_1(X_1), \dots, F_S(X_S)]$. Dès lors que les lois marginales sont continues le théorème de Sklar dit la décomposition unique, dans le cas contraire faute d'être unique la copule peut toujours être prise égale à $C(u_1, \dots, u_S) = F[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_S^{-1}(u_S)]$ avec $F_i^{-1}(u) = \inf \{x_i : F_i(x_i) \geq u\}$. Il est intéressant de noter que $f(X_1), \dots, f(X_S)$ possède la même copule que X_1, \dots, X_S si f_1, \dots, f sont croissantes La copule de lois indépendantes dite copule d'indépendance vaut $C^\perp[u_1, \dots, u_S] = \prod_{i=1}^S u_i$. Par ailleurs Fréchet a donné l'encadrement $\max(\sum_{i=1}^S u_i + 1 - n, 0) = C^-[u_1, \dots, u_S] \leq C[u_1, \dots, u_S] \leq C^+[u_1, \dots, u_S] = \min(u_1, \dots, u_S)$.

Borne supérieure de Fréchet C^+ Copule comonotone	$C^+[u_1, \dots, u_S] = \min(u_1, \dots, u_S)$
Borne inférieure de Fréchet C^- Copule pour $s=2$ seulement !	$C^-[u_1, \dots, u_S] = \max(\sum_{i=1}^S u_i - n + 1, 0)$
Copule d'indépendance	$C^\perp[u_1, \dots, u_S] = \prod_{i=1}^S u_i$
Copule de Franck $a \neq 0$	$C_a[u_1, \dots, u_S] = -\frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^S (e^{-a u_i} - 1)}{(e^{-a} - 1)^{S-1}} \right)$
Copule de Clayton $a > 0$	$C_a[u_1, \dots, u_S] = \left[\sum_{i=1}^S u_i^{-a} - s + 1 \right]^{-\frac{1}{a}}$
Copule de Gumbel $a \geq 1$	$C_a[u_1, \dots, u_S] = \exp \left(-\sqrt[a]{\sum_{i=1}^S (-\ln u_i)^a} \right)$
Copule de Hali-Mikai-Haq $-1 \leq a \leq 1$	$C_a[u_1, u_2] = \frac{u_1 \cdot u_2}{1 - a \cdot (1 - u_1)(1 - u_2)}$
Copule de Heavy Right Tail $a > 0$	$C_a[u_1, u_2] = u_1 + u_2 - 1 + [(1 - u_1)^{-1/a} + (1 - u_2)^{-1/a} - 1]^{-a}$
Copule de Farlie-Morgenstern-Gumbel $-1 \leq a \leq 1$	$C_a[u_1, u_2] = u_1 \cdot u_2 [1 + a(1 - u_1)(1 - u_2)]$

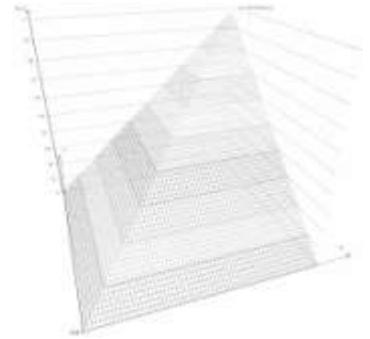
Copules de référence non elliptiques [Cf. G. Krauth.(2007)]



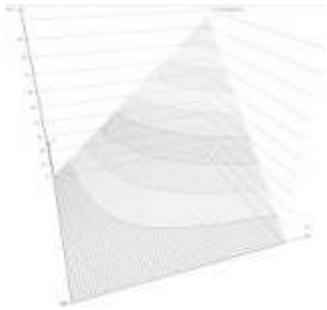
Copule d'indépendance, $C^-[x,y]=x \cdot y$



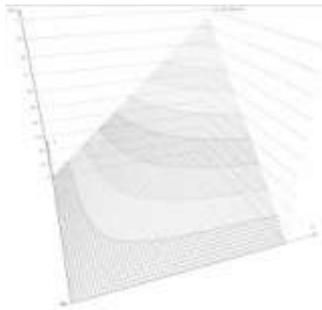
Copule, $C[x,y]=\max(0,x+y-1)$



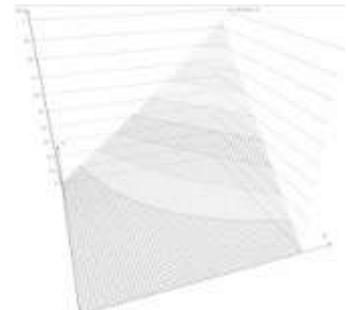
Copule comonotone, $C^+[x,y]=\min(x,y)$



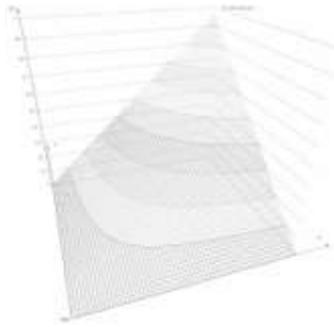
Copule de Frank, $C_a[x,y]$ a=0.7



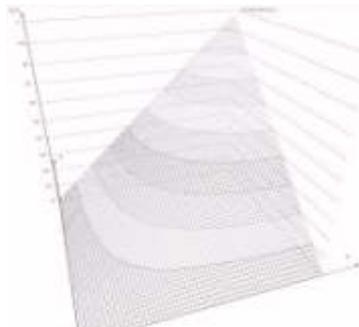
Copule de Clayton, $C_2[x,y]$ a=0.7



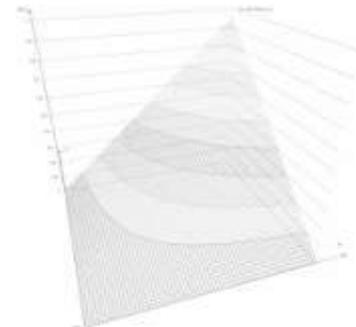
Copule de Gumbel, $C_3[x,y]$ a=0.7



Copule de Hali-Mikai-Haq, $C_2[x,y]$ - a=0.7

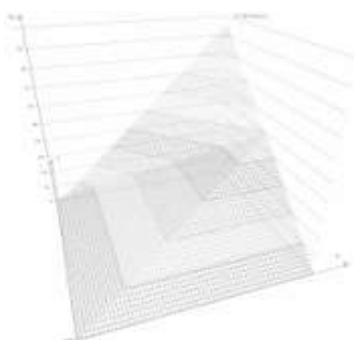


Copule Heavy Right Tail, $C_2[x,y]$ a=0.7



Copule de Farlie-Morgenstern-Gumbel, $C_2[x,y]$ - a=0.2

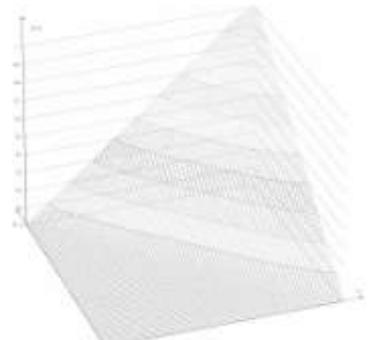
Copules de références non elliptiques



Copule $C[x,y]=\max(x+y-1, \min(x,y))$



Copule de Gauss, $C_\rho[x,y]$ rho= + 0.97



Copule de Student, $C_{\rho,\nu}[x,y]$ rho= - 0.97, nu=1

Copules de références elliptiques

Copule de Gauss Σ matrice $s \times s$ de corrélation des u_i	$C_{\Sigma} [u_1, \dots, u_s] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_s)} \exp\left(-\frac{\bar{u}^t \Sigma^{-1} \bar{u}}{2}\right) du_1 \dots du_s$
Copule de Student à v degrés de liberté, Σ matrice $s \times s$ de corrélation des u_i	$C_{\Sigma, v} [u_1, \dots, u_s] = \frac{\Gamma((v+s)/2)}{\Gamma(v/2)(v \cdot s)^{\frac{s}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{-\infty}^{\Gamma_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Gamma_v^{-1}(u_s)} \left(1 + \frac{\bar{u}^t \Sigma^{-1} \bar{u}}{v}\right)^{-\frac{v+s}{2}} du_1 \dots du_s$

Copules de références elliptiques [E. Aubron. (2009)]

En 1979, Deheuvels a défini la copule empirique C_N de $(X_{n,1}, \dots, X_{n,s})_{1 \leq n \leq N} \in [0,1]^s$ comme la fonction répartition de la loi de densité de $\{0, 1/N, 2/N, \dots, 1\}^s$ dans $\{0, 1/N, 2/N, \dots, 1\}^s$ C_N où

$$c_N \left[\frac{k_1}{N}, \dots, \frac{k_s}{N} \right] = \begin{cases} 1/N & \text{si } (X_{k_1,1}, \dots, X_{k_s,s}) \in (X_{n,1}, \dots, X_{n,s})_{1 \leq n \leq N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et donc}$$

$$C_N \left[\frac{k_1}{N}, \dots, \frac{k_s}{N} \right] = \sum_{i_1=1}^{k_1} \dots \sum_{i_s=1}^{k_s} c_N \left[\frac{k_1}{N}, \dots, \frac{k_s}{N} \right] = \frac{\text{Card} \left\{ (X_{n,1}, \dots, X_{n,s}) : \text{rang}(X_{n,i}) \leq k_i \text{ pour } i = 1 \dots s \right\}}{N}$$
 Cette

construction définit bien une copule qui à un jeu de transformation croissante près sur les lois marginales est la copule de $(X_{n,1}, \dots, X_{n,s})_{1 \leq n \leq N}$.

Les mesures de dépendance et mesures de concordance

Une mesure de dépendance comme le coefficient de Pearson quantifie une relation en l'occurrence linéaire entre deux variables. Mais une telle mesure, ζ n'est une mesure de concordance que si elle satisfait :

- $\zeta(X,Y) = \zeta(Y,X)$ « ζ est symétrique »
- $-1 \leq \zeta(X,Y) \leq 1$ « ζ est normée »
- $\zeta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X$ et Y sont comonotonnes
- $\zeta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow X$ et Y sont antimonotonnes
- Pour f strictement croissante $\zeta(f(X), Y) = \zeta(X, Y)$
- Pour f strictement décroissante $\zeta(f(X), Y) = -\zeta(X, Y)$

Par définition les lois X et Y sont dites comonotonnes lorsqu'il existe une loi Z et deux fonctions croissante f_x et f_y telles que $(X, Y) = \text{loi}(f_x(U), f_y(U))$. Elles sont dites antimonotonnes lorsqu'il existe une loi Z et deux fonctions f_x croissante et f_y décroissante telles que $(X, Y) = \text{loi}(f_x(U), f_y(U))$.

Le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson

Le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson encore appelé coefficient de corrélation linéaire est défini pour deux variables aléatoires X, Y par $r(X, Y) = \text{Cov}[X, Y] / \sigma_X \sigma_Y \in [-1, 1]$ et même $r_{\min} \leq r(X, Y) \leq r_{\max}$ où $r_{\min} = \text{Cov}[F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1-U)] / \sigma_X \sigma_Y$ et $r_{\max} = \text{Cov}[F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)] / \sigma_X \sigma_Y$. Comme $r(X, Y) = r_{\min} \Leftrightarrow X$ et Y sont comonotonnes et $r(X, Y) = r_{\max} \Leftrightarrow X$ et Y sont antimonotonnes, il ne s'agit pas d'une mesure de concordance. La copule $C[u, v] = \max(u+v-1, \min(u, v))$ de densité nulle sur $\{(u, v) \in [0, 1]^2 : |2v-1| \leq 1-u\}$ fournit par ailleurs un exemple de deux lois non corrélées linéairement fortement dépendantes puisque par construction $|2v-1| > 1-u$.

L'indice de Gini

L'indice de Gini évalue la dispersion d'une variable aléatoire Y est généralement définie comme l'aire comprise entre la première diagonale du carré unité et la fonction de répartition de Y c'est à dire $G = E[|X_1 - X_2|] / E[X] \in [0, 1]$ où X_1, X_2 et X sont indépendantes et de même loi. Pour un échantillon $(X_n, Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ on a en particuliers $G = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} (X_{n+1} - X_n)(Y_{n+1} - Y_n)$. En l'espèce c'est l'indice de concordance des rangs proposé par Corrado Gini en 1914 qui nous intéresse :

$$\gamma(X, Y) = \frac{1}{[N^2/2]} \sum_{i=1}^N |\text{rang}(X_i) + \text{rang}(Y_i) - N - 1| - |\text{rang}(X_i) - \text{rang}(Y_i)| \quad [\text{Cf. Nelsen, R. B. (1998)}]$$

Le coefficient de corrélation du rang de M.G. Kendall

Le coefficient de corrélation du rang de M.G. Kendall ou tau de Kendall du couple de variables aléatoires (X, Y) repose sur les notions de concordance et discordance définies ci-après des couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) suivant indépendamment (X, Y) .

- (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont dit concordant lorsque $X_1 < X_2 \Rightarrow Y_1 < Y_2$
- (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont dit discordant lorsque $X_1 < X_2 \Rightarrow Y_1 > Y_2$

Il est défini comme la différence des probabilités de concordance et de discordance des couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) c'est à dire $\tau(X, Y) = P[(X_1, Y_1)(X_2, Y_2) > 0] - P[(X_1, Y_1)(X_2, Y_2) < 0]$ soit encore $\tau(X, Y) = 4E[F_{X,Y}(X, Y)] - 1$ où $F_{X,Y}$ est fonction de répartition du couple (X, Y) . C'est une mesure de concordance telle que pour f et g croissantes $\tau(X, Y) = \tau(f(X), g(Y))$.

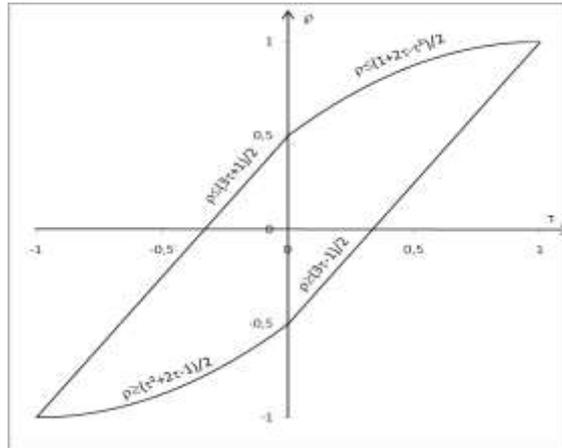
Pour un échantillon $(X_n, Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ il suffit de réordonner les indices pour que X_n soit croissante et prendre $\hat{\tau} = \frac{4}{N \cdot (N-1)} \sum_{n=1}^N \text{Card} \{Y_m > Y_n \text{ pour } m > n\} - 1$. Pour savoir si la valeur est significative l'on peut utiliser

l'excellente approximation pour $N \geq 8$: $\tau \approx N \left(0, \sqrt{\frac{2N(2N+5)}{9N(N-1)}} \right)$ [Cf. G. Saporta(2006)]

Le coefficient de corrélation du rang de Spearman

Le coefficient de corrélation de Spearman ou rho de Spearman du couple de variables aléatoires (X, Y) vaut $\rho(X, Y) = 3P[(X - X^\perp)(Y - Y^\perp) > 0] - 3P[(X - X^\perp)(Y - Y^\perp) < 0]$ où le couple (X^\perp, Y^\perp) indépendant de (X, Y) possède les mêmes marginales mais X et Y sont indépendantes. C'est une mesure de concordance telle que pour f et g croissantes $\rho(X, Y) = \rho(f(X), g(Y))$. Lorsque les fonctions de répartition respective de X et Y , F_X et F_Y sont continues ont a $\rho(X, Y) = r(F_X(X), F_Y(Y))$.

Pour un échantillon $(X_n, Y_n)_{1 \leq n \leq N}$, $\hat{\rho} = 1 - \frac{6}{N \cdot (N^2 - 1)} \sum_{n=1}^N [\text{Rang}(X_i) - \text{Rang}(Y_i)]^2$ [Cf. G. Saporta(2006)]



Encadrement du rho de Spearman en fonction du Theta de Kendal du à Durbin et Stuart en 1951

$$\frac{(\tau^2+2\tau-1)}{2} \leq \rho \leq \frac{(3\tau+1)}{2} \text{ pour } \tau \leq 0 \text{ et } \frac{(3\tau-1)}{2} \leq \rho \leq \frac{(1+2\tau-\tau^2)}{2} \text{ pour } \tau \geq 0$$

Expression copule des coefficients de concordances

Lorsque la densité de la copule C existe elle vaut $\frac{\partial^s C[u_1, \dots, u_s]}{\partial u_1 \dots \partial u_s} \cdot F'_1 \dots F'_s$ et ces coefficients s'écrivent :

Coefficient de concordance	Expression copule
Tau de kendall	$\tau(X, Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(x, y) dC(x, y) - 1$
Rho de Spearman	$\rho(X, Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} x \cdot y \cdot dC(x, y) - 3$
Indice de Gini	$\gamma(X, Y) = 2 \iint_{[0,1]^2} (x + y - 1 - x - y) \cdot dC(x, y)$

Expression des principales mesures de dépendance à partir de leurs copules

[Cf. Planchet F, Thérond, P., Jacquemin, J. (2005) Modèles]

Copule gaussienne Σ matrice 2x2 de corrélation des u_i	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$ avec $r \approx \sin(\pi \cdot \tau(X, Y) / 2)$
Copule de student à v degrés de liberté Σ matrice 2x2 de corrélation des u_i ,	$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$ avec $r \approx \sin(\pi \cdot \tau(X, Y) / 2)$

Approximations en dimensions 2 suggérées par Lindskog en 2000 et Lindskog et Al. en 2003 [E. Aubron. (2009)].

Les copules archimédiens

Les copules archimédiens possèdent un générateur φ fonction de $[0,1]$ dans \mathbb{R} telle que $\varphi(C_\varphi[u_1, \dots, u_s]) = \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_s)$ avec φ nulle en 1 et C^2 convexe décroissante sur $]0,1[$, c'est à-dire φ'' continue avec $\varphi(1)=0, \varphi' \leq 0$ et $\varphi'' > 0$ sur $]0,1[$. La propriété implique :

$$\frac{\partial^2 C_\varphi(u, v)}{\partial u \partial v} = - \frac{\varphi''(C_\varphi[u, v]) \cdot \varphi'(u) \cdot \varphi'(v)}{\varphi'(C_\varphi[u, v])^3} \text{ et } \tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

En 1996 Barde et Al. ont montrés que si (U_1, \dots, U_s) est un vecteur aléatoire de copule archimédienne C_φ

alors : $K_s(u) = P(C[U_1, \dots, U_s] < u) = u + \sum_{i=1}^s \frac{\varphi^i(u)}{i!} \frac{\partial^i \varphi|_{x=\varphi(u)}}{\partial x^i}$ à partir de quoi il est possible de comparer l'adéquation d'un copule archimédien à un copule empirique.

Copule d'indépendance	$\varphi^{\perp}(u) = -\ln(u)$
Copule de Franck $a \neq 0$	$\varphi_a(u) = -\ln([e^{-a \cdot u} - 1] / [e^{-a} - 1])$ $\tau = 1 - \frac{4}{a} [1 - D_1(a)] \quad \rho = 1 - \frac{12}{a} [D_1(a) - D_2(a)]$
Copule de Clayton $a > 0$	$\varphi_a(u) = a (u^{-1/a} - 1)$ $\tau = \frac{a}{a + 2}$
Copule de Gumbel $a \geq 1$	$\varphi_a(u) = [-\ln(u)]^a$ $\tau = 1 - \frac{1}{a}$
Copule de Hali-Mikai-Haq $-1 \leq a \leq 1$	$\varphi_a(u) = \ln([1 - a(u-1)]/u)$ $\tau = \frac{3a - 2}{3a} - \frac{2(1-a)^2}{3a^2} \ln(1-a)$ $\rho = \frac{12(1+a) \operatorname{di} \log(1-a) - 24(1-a) \ln(1-a)}{a^2} - \frac{3(a+12)}{a}$
Copule de Heavy Right Tail $a > 0$	$\tau = \frac{1}{1 + 2a}$
Copule de Farlie-Morgenstern-Gumbel $a > 0$	$\tau = \frac{2a}{9}, \rho = \frac{a}{3}$

Copules archimédiens de référence [Cf. G. Krauth(2007)].

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres peut être réalisée par la méthode des moments en prenant les paramètres de la copule qui égalent le τ ou le ρ observé ou par maximisation de la log-vraisemblance

de l'échantillon $(X_{n,1}, \dots, X_{n,s})_{1 \leq n \leq N}$: $l_\theta = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^s F_i(X_{n,i}; \theta) + \sum_{n=1}^N \frac{\partial^s C[F_s(X_{n,1}; \theta), \dots, F_s(X_{n,s}; \theta)]}{\partial u_1 \dots \partial u_s}$ en maximisant le

premier terme des «lois marginales » puis le second terme de «la copule » selon la méthode IFM proposé par Louis et Shih en 1995 ou d'autres comme l'omnibus proposé par Genest et Al en 1995...

Techniques de simulation des copules sur deux dimensions

La probabilité conditionnelle d'une copule bidimensionnelle vaut $C_{\bar{u}|V=v}[u, v] = \partial C[u, v] / \partial v$ car

$$C_{\bar{u}|V=v}[u, v] = P\{U \leq u | V = v\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{U \leq u | v \leq V \leq v + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C[u, v + \varepsilon] - C[u, v]}{\varepsilon} = \frac{\partial C[u, v]}{\partial v} \text{ puisque}$$

$$P\{U \leq u | v \leq V \leq v + \varepsilon\} = \frac{P\{U \leq u | V \leq v + \varepsilon\} - P\{U \leq u | v \leq V\}}{P\{V \leq v + \varepsilon\} - P\{V \leq v\}} = \frac{C[u, v + \varepsilon] - C[u, v]}{C[1, v + \varepsilon] - C[1, v]} = \frac{C[u, v + \varepsilon] - C[u, v]}{\varepsilon}.$$

Aussi pour peu que $C_v : v \rightarrow u$ avec $P(U \leq u | V = v) = C_{\bar{u}|V=v}[u, v] = \partial C[u, v] / \partial v$ soit inversible (au sens où l'on sait associer à tout u de $[0,1]$, v tel que $P(U \leq u | V = v)$), l'on peut tirer (u, v) dans la loi de distribution de la copule en tirant u' et v indépendamment dans la loi uniforme sur $[0,1]$ et en prenant $(u = C_v^{-1}(u'), v)$. Pour les copules archimédiennes $C_v^{-1}(u') = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi'^{-1}(\varphi'(u'/v))) - \varphi'(u'))$ [Cf. F. Planchet, P. Thérond, J. Jacquemin(2005)]

Pour la copule de Franck on a en particulier $C_v^{-1}(u') = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{1 + v \cdot (e^{-a} - e^{-a \cdot u'})}{1 + v \cdot (1 - e^{-a \cdot u'})} \right)$

Certaines copules possèdent des méthodes ad hoc comme la copule de Clayton pour laquelle Devroye a proposé en 1986 de procéder comme suit : tirer indépendamment x, y dans la loi exponentielle de paramètre 1 et z dans la loi $\Gamma(1, a)$ et retenir $\left(u = \left[1 + \frac{x}{z} \right]^{-a}, v = \left[1 + \frac{y}{z} \right]^{-a} \right)$

Dépendances au sein d'un vecteur aléatoire gaussien

Pour simuler un vecteur aléatoire gaussien $X=(X_1, \dots, X_s) \approx N(\mu, \sigma^2)$ où μ désigne le vecteur de la moyenne de X et σ^2 la matrice de variance-covariance de X , il suffit de savoir simuler le vecteur gaussien centré réduit $Z \approx N(0,1)$ et de construire une matrice A tel que $\sigma^2 = AA^T$ car alors $\mu + A \cdot Z \approx N(\mu, \sigma^2)$. $\sigma_{ij}^2 = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$, où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre X_i et X_j , σ_i et σ_j sont les écarts types respectifs de X_i et X_j . Sous réserve que σ^2 soit inversible, c'est-à-dire qu'aucun un des X_i soit une combinaison linéaire des $X_{j \neq i}$. La factorisation de Cholesky donne une construction d'une telle matrice A triangulaire inférieure minimisant les calculs de génération puisque alors $X_1 = \mu_1 + A_{11} \cdot Z_1$, $X_2 = \mu_2 + A_{21} \cdot Z_1 + A_{22} \cdot Z_2$, $X_3 = \mu_3 + A_{31} \cdot Z_1 + A_{32} \cdot Z_2 + A_{33} \cdot Z_3 \dots$ Par identification termes à terme des $A_{i,j}$ on trouve les formules $A_{i,j} = \left(\sigma_{i,j}^2 - \sum_{k=1}^{j-1} A_{i,k} \cdot A_{j,k} \right) / A_{j,j}$ pour $j < i$ et $A_{i,i} = \sqrt{\sigma_{i,i}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} A_{i,k}^2}$ d'où l'on tire l'algorithme de Cholesky ci-après :

```

Input :  $\sigma^2$  symmetric positive definite matrix  $s \times s$ 
Output : A lower triangular with  $AA^T = \sigma^2$ 

  For i=1 to s do
    For j=1 to i-1 do
       $s \leftarrow \sigma_{i,j}^2$ 
      For k=1 to j-1 do
         $s \leftarrow s - A_{j,k} \cdot A_{i,k}$ 
       $A_{i,j} \leftarrow s / A_{j,j}$ 
     $s \leftarrow \sigma_{i,i}^2$ 
    For k=1 to i-1 do  $s \leftarrow s - A_{i,k} \cdot A_{i,k}$ 
    if  $s \leq 0$  then Trow Error " $\sigma^2$  is not symmetric positive definite matrix!"
     $A_{i,i} \leftarrow \sqrt{s}$ 

Return A

```

Factorisation de Cholesky pour les matrices symétriques définies positives
 [Cf. Gene H. Golub and Charles F. van Loan(1989)]

Cette technique permet de recalibrer un tirage $(\hat{z}_i)_{i=1..n}$ dans $N(0,1)$ de moyenne empirique $\hat{\mu}$ et de matrice de variance covariance $\hat{\sigma}^2$ en prenant $z_i \leftarrow \mu_i + B z_i$ avec B matrice de Cholesky de inverse de $\hat{\sigma}^2$ c'est à dire la matrice triangulaire inférieure inverse de A .

```

Input : A lower triangular
Output : B lower triangular  $B=A^{-1}$ 

   $B \leftarrow A$ 
  For i=1 to s do
     $d \leftarrow 1/B_{ii}$ 
    For j=1 to i do  $B_{i,j} \leftarrow B_{i,j} \times d$ 
  For k=i+1 to s do
    For j=1 to i do
       $B_{k,j} \leftarrow B_{k,j} - B_{k,i} \times B_{i,j}$ 

Return B

```

Algorithme d'inversion d'une matrice triangulaire inférieure inversible [Cf. Gene H. Golub and Charles F. van Loan(1989)]

La technique du bootstrap

Le terme bootstrap non traduit en français dans la littérature provient de l'expression anglaise « to pull oneself up by one's bootstrap » en référence aux aventures du baron de Münchhausen, qui parvient uniquement en tirant sur ses bottes à s'extraire d'un marécage où il s'est embourbé. La technique consiste à partir d'un échantillon x de n observations : x_1, x_2, \dots, x_n et à tirer aléatoirement avec remise B échantillons de n observations notés $x_1^*, x_2^*, \dots, x_B^*$. Les tirages étant réalisés avec remise le nombre de tirage de l'élément i , P_i^* n'est pas nécessairement égale à un. Pour θ un paramètre de la population, $\hat{\theta} = f(x)$ est l'estimation du paramètre sur l'échantillon initial et $\hat{\theta}_k^* = f(x_k^*)$ pour $k=1..B$ sont les estimations du paramètre du $k^{\text{ième}}$ échantillon. Ainsi le paramètre $\hat{\theta}$ s'écrit pour la moyenne, la médiane et la variance respectivement :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n, \quad \tilde{x} = (x_{n/2} + x_{1+n/2}) / 2 \text{ si } n \text{ paire} \quad \text{sinon } x_{n/2}, \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1) \text{ et de même } \hat{\theta}_k^*$$

$$\bar{x}_k^* = \sum_{i=1}^n x_{k,i} / n, \quad \tilde{x}_k^* = (x_{k,n/2} + x_{k,1+n/2}) / 2 \text{ si } n \text{ paire} \quad \text{sinon } x_{k,n/2}, \quad \hat{\sigma}_k^{*2} = \sum_{i=1}^n (x_{k,i} - \bar{x}_k^*)^2 / (n-1).$$

A partir de quoi sont définis les moyennes de $\hat{\theta}_k^*$: $\hat{\theta}^* = \sum_{k=1}^B \hat{\theta}_k^* / B$ et les écarts types $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}^*} = \sqrt{\sum_{k=1}^B (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}^*)^2 / (B-1)}$,

qui donnent une estimation de l'erreur standard du paramètre θ . Lorsque l'erreur standard du paramètre est définie $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}^*} \xrightarrow{B \rightarrow \infty} \hat{\sigma} / \sqrt{n}$ avec $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n}$, $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}^*}$ tend donc vers une valeur

fixe fonction de la taille de l'échantillon initial et non de B . Selon Elfron et Tibshirani il est rarement nécessaire de prendre $B \geq 200$, car 50 donne généralement une bonne estimation de l'erreur-standard. Le biais du paramètre peut être estimé par $\text{biais}_B(\hat{\theta}_k^*) = \hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}$. Rudy Palm considère qu'en

pratique si le biais rapporté à l'erreur standard est important la statistique utilisée est peut-être inappropriée et qu'en présence d'un rapport inférieur à 0.25 il est préférable de ne pas soustraire le biais. C'est notamment le cas des estimations de la moyenne, la médiane et la variance proposées dont Dagnelie a démontré en 1998 qu'elles n'étaient pas biaisées. [Cf. Dagnelie P. (1998)]. Une autre technique permettant d'estimer l'erreur-standard et le biais d'un paramètre est la technique du Jackknife. Elle consiste à estimer n fois la valeur du paramètre en retirant tour à tour une des observations de l'échantillon initial. Lorsque $\hat{\theta}_{-k}^*$ désigne l'estimation après soustraction de la $k^{\text{ième}}$

observation Elfron et Tibshirani ont montré en 1993 que $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_{-k}^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{-i} - \bar{x}_{\text{Jackknife}})^2 (n-1) / n}$ avec

$$\hat{\theta}_{\text{Jackknife}}^* = \sum_{k=1}^n \hat{\theta}_{-k}^* / n \quad \text{et} \quad \text{biais}_{\text{Jackknife}}(\hat{\theta}_k^*) = (n-1) \cdot (\hat{\theta}_{\text{Jackknife}}^* - \hat{\theta}).$$

Auparavant Quenouille avait montré en 1949 que l'estimateur Jackknife $\hat{\theta}_{\text{Jackknife}}^*$ réduisait le biais de l'estimation initiale $\hat{\theta}$.

Dans son article de 2002 intitulé Utilisation du bootstrap pour les problèmes statistiques liés à l'estimation des paramètres Rudy Palm décrit cinq techniques de construction d'intervalles de confiance de niveau $1-\alpha$.

La première de l'erreur standard consiste à supposer que l'estimateur du paramètre est non biaisé et sa distribution approximativement normale puis retenir $[\hat{\theta} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\theta}^*} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2)]$. La seconde des pourcentiles simples consiste à prendre l'intervalle donné par les pourcentiles de la distribution empirique des $\hat{\theta}_k^*$: $[\hat{\theta}_{[\alpha/2]}^*, \hat{\theta}_{[1-\alpha/2]}^*]$. En pratique on construit un intervalle de confiance de niveau 95%

en prenant $B=1000$ et pour bornes de l'intervalle la 50^{ème} et la 951^{ème} valeur des $\hat{\theta}_k^*$ ordonnés dans l'ordre croissant ou décroissant. La troisième des pourcentiles corrigés du biais est basée sur p la proportion de $\hat{\theta}_k^*$ inférieurs à $\hat{\theta}_k^*$. Elle consiste à prendre l'intervalle donné par les pourcentiles $\alpha_1=\Phi[2.u_p+u_{\alpha/2}]$ et $\alpha_2=\Phi[2.u_p+u_{1-\alpha/2}]$ de la distribution de $\hat{\theta}_k^*$ où $u_p=\Phi^{-1}[p]$, $u_{\alpha/2}=\Phi^{-1}[\alpha/2]$, $u_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}[1-\alpha/2]$. [Cf. Michael R. Chernick(1999)]. La quatrième des pourcentiles corrigés du biais et de l'accélération généralisant la précédente consiste à prendre l'intervalle donné par les pourcentiles $\alpha_1=\Phi[u_p+(u_p+u_{\alpha/2})/(1-a(u_p+u_{\alpha/2}))]$, $\alpha_2=\Phi[u_p+(u_p+u_{1-\alpha/2})/(1-a(u_p+u_{1-\alpha/2}))]$ de la distribution de $\hat{\theta}_k^*$ avec toujours $u_p=\Phi^{-1}[p]$, $u_{\alpha/2}=\Phi^{-1}[\alpha/2]$, $u_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}[1-\alpha/2]$. L'accélération a peut être obtenue par Jackknife en prenant $a = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{Jackknife} - \hat{\theta}_{-i})^3}{6 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{Jackknife} - \hat{\theta}_{-i})^2 \right]^{3/2}}$ [Cf. Efron B. and Tibhirani R.J.(1993)].

La cinquième du bootstrap-t utilise la distribution d'une statistique centrée réduite comme $T = (\hat{\theta} - \theta) / \sigma_{\hat{\theta}}$ approchable par $t_k^* = (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}) / \hat{\sigma}(\hat{\theta}_k^*)$ où $\hat{\sigma}(\hat{\theta}_k^*)$ est l'erreur standard de l'échantillon k . Celle-ci peut si toujours être obtenu par Bootstrap ou Jackknife avec $\hat{\sigma}(\hat{\theta}_k^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{-i}^* - \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{-i}^* / n)^2 \cdot (n-1) / n}$, au terme de quoi l'on prendra l'intervalle $[\hat{\theta} - t_{[1-\alpha/2]}^* \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^* , \hat{\theta} - t_{[\alpha/2]}^* \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^*]$. Ces deux dernières méthodes convergent théoriquement plus vite que les précédentes vérifiant $P[\theta < \theta_{[\alpha]}] \approx \alpha + O(n^{-1})$ au lieu $O(n^{-1/2})$. La préférence de Efron et Tibshirani va finalement à la méthode des pourcentiles corrigés du biais et de l'accélération nécessitant un unique bootstrap. [Cf. Efron B. and Tibhirani R.J.(1993)].

7. Simulation des mesures de risque

En 2004, Denuit et Charpentier ont formalisé la notion de mesure de risque en prenant pour définition une application ρ à image dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Selon cette définition l'espérance de gains (en principe positive) et la variance utilisées dans la théorie de gestion de portefeuille du MEDAF sont des mesures de risques. Mais elles ne possèdent pas nécessairement les propriétés requises pour être cohérente au regard des critères retenus par Artzner et al. en 1999 :

- Monotonie $X \leq_{ps} Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- Sous-additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- Invariance par translation : $\rho(c+X) = c + \rho(X)$ pour tout $c \in \mathbb{R}^+$
- Homogénéité positive : $\rho(c \cdot X) = c \cdot \rho(X)$ pour tout $c \in \mathbb{R}^+$

La Value at Risk de la variable aléatoire X pour un niveau de confiance de probabilité p notée $\text{VaR}_p(X)$ est la plus petite valeur x ayant une probabilité supérieure à p d'être supérieure à X . Lorsque la fonction de répartition F de X est inversible c'est $F^{-1}(p)$ et sinon $\inf\{x : F(x) \geq p\}$ encore notée $F^{-1}(p)$ par abus de notation. Cette mesure de risque n'est pas cohérente, faute de n'être pas sous additive. En effet pour X et Y deux variables aléatoires dépendant d'une troisième U de loi uniforme sur $[0,1]$ comme ci-après vérifient : $\text{VaR}_{99\%}(X) + \text{VaR}_{99\%}(Y) = 2 < \text{VaR}_{99\%}(X+Y) = 11!$

u	[0,0.09[[0.09,0.91]]0.91,1]
X_u	10	1	1
Y_u	1	1	10
$(X+Y)_u$	11	2	11

Tableau définissant les valeurs de X et Y en fonction de $u \approx U[0,1]$

Dhaene et al. ont montré que la Conditionnal-Tail-Expectation définie par $\text{CVaR}_p = E[X > \text{VaR}_p]$ n'est pas comonotone additive c'est-à-dire telle que $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$, contrairement à la Tail-Value-At-Risk qui est de plus cohérente. Cette dernière est définie par $\text{TVaR}_p(X) = \int_p^1 F_X^{-1}(u) \cdot du / (1-p) = \text{VaR}_p(X) + E[(X - \text{VaR}_p(X))^+] / (1-p)$ où le deuxième terme n'est autre que la moyenne des X au-delà de $\text{VaR}_p(X)$. La relation $\text{CVaR}_p = \text{TVaR}_{F_X(\text{VaR}_p(X))}(X)$ induit en particulier l'égalité lorsque X est continue.

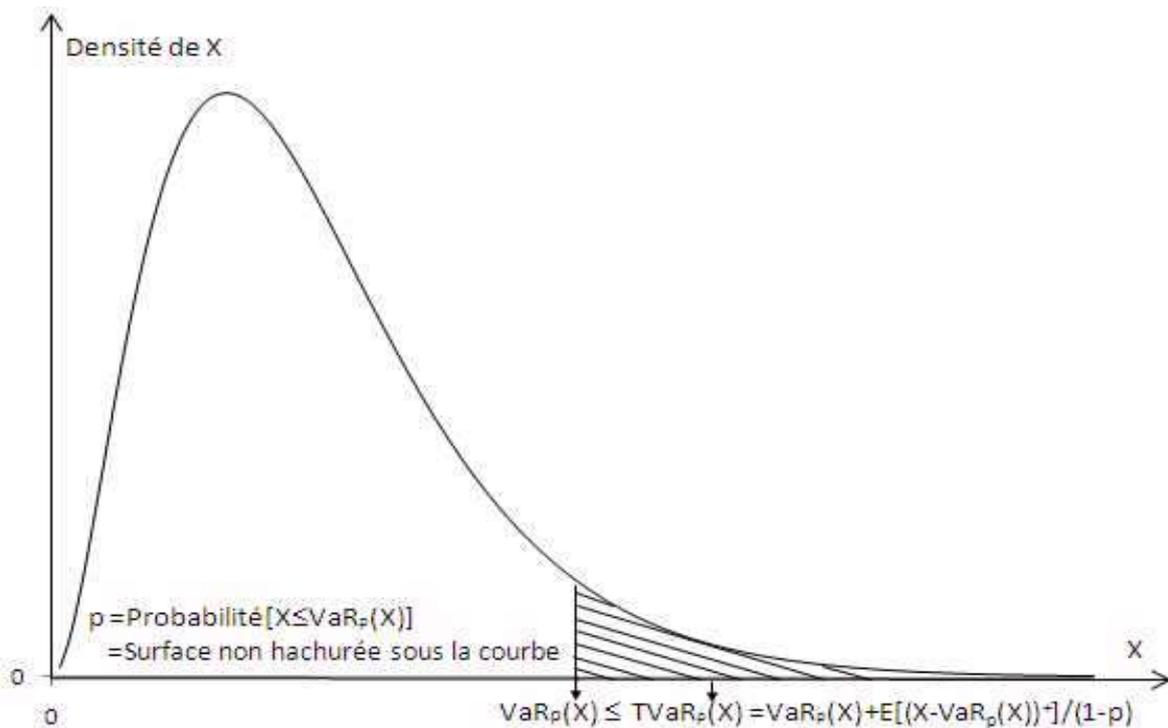


Schéma illustrant les notions de VaR_p et de $TVaR_p$ de la loi de X pour une probabilité p

Shaun S. Wang a défini en 2002 une famille de mesures cohérentes généralisant la Tail-Var s'écrivant sous la forme $\rho(X) = \int 1 - g(F(x)) \cdot dx$ ou g est un opérateur de distorsion, c'est-à-dire une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $g(0)=0$ et $g(1)=1$. Comme $\rho(X) = \int 1 - g(F(x)) \cdot dx + [-x(1 - g(F(x)))]_0^1 = E[X \cdot g'(F(X))] = E^*(X)$, $\rho(X)$ n'est autre que l'espérance de X sous la probabilité $F^*=g \circ F$. Elle est donc est cohérente dès lors que g est continue. C'est pourquoi la CVaR de fonction de distorsion $g(u)=u \cdot p/(1-p)$ pour $u \geq p$ et 0 sinon est cohérente, alors que la VaR de distorsion est $I_{[p,1]}$ ne l'est pas. Il recommande d'utiliser $g(u)=\Phi(\Phi^{-1}(u)-p)$ pour construire des mesures captant mieux l'information en queue de distribution que la VaR et la CVaR.

En pratique la facilité d'estimation des VaR et Tail-VaR à partir d'un échantillon de N valeurs explique grandement leur succès. En effet une fois échantillon trié par exemple dans l'ordre croissant, il suffit d'interpoler les $\lfloor N \cdot p \rfloor$ et $\lceil N \cdot p \rceil$ ième valeur pour obtenir la $VaR_p(X)$ puis d'estimer la Tail-Var comme une moyenne pondérée de la $VaR_p(X)$ et des $\lfloor N \cdot (1-p) \rfloor$ valeurs supérieures à la VaR. Le procédé permet de calculer aussi bien une Var/Tail VaR Historique, que simulée par tirage dans l'historique par bootstrap ou par simulation paramétrique.

Lorsque X suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$ la formule $X_0[\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p)]$ donne une estimation paramétrique de la VaR qui a été étendue par Cornish et Fisher aux skewnew $\gamma(\neq 0)$ et kurtosis $\kappa(\neq 3)$:

$$X_0 \cdot \left[\mu + \sigma \cdot \left(\Phi^{-1}(p) + \gamma \cdot \frac{[\Phi^{-1}(p)]^2 - 1}{6} + (\kappa - 3) \cdot \frac{[\Phi^{-1}(p)]^3 - 3[\Phi^{-1}(p)]}{24} - \gamma^2 \cdot \frac{2[\Phi^{-1}(p)]^5 - 5[\Phi^{-1}(p)]^3}{36} \right) \right]$$

8. Mise en œuvre pratique des tris

Le calcul de la VaR et de la CVaR de niveau de confiance p ne nécessite pas nécessairement le tri des N valeurs de l'échantillon de X , puisqu'il suffit d'en connaître les $\lfloor N \cdot (1-p) \rfloor$ valeurs les plus élevées. La modification du tri fusion ci-après permet de construire un algorithme plus efficace pour $p > 3/4$.

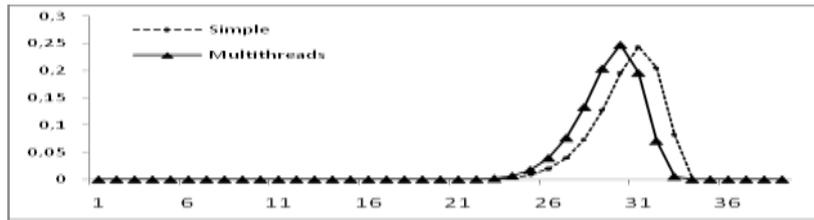
```

Step 0 Create  $n/2$  sorted lists of 2 elements such that ( $x_i < x_{i+1}$ ) plus one if  $n$  is odd :  $l_0, \dots, l_e$ 
Step 1  $s=1$ 
Step 1 While ( $2s \leq e+1$ )
    {  $i=0$ ;  $i'=s$ ;
      while ( $i' \leq e$ )
          {  $l \leftarrow l_i$ ;  $l' \leftarrow l_{i'}$ ;
            if  $h(l) \leq h(l')$  Then
                 $l_i \leftarrow l_i + \{h(l)\}$ ;  $l' \leftarrow l' - \{h(l)\}$ ;
                if  $l = \emptyset$  Then  $l_i \leftarrow l_i + l'$ ;  $i \leftarrow i + 2s$ ;  $i' \leftarrow i' + 2s$ 
                else goto if  $h(l) < h(l')$ 
            else
                 $l_i \leftarrow l_i + \{h(l')\}$ ;  $l' \leftarrow l' - \{h(l')\}$ ;
                if  $l' = \emptyset$  Then  $l_i \leftarrow l_i + l'$ ;  $i \leftarrow i + 2s$ ;  $i' \leftarrow i' + 2s$ 
                else goto if  $h(l) < h(l')$ 
          }
       $s \leftarrow 2s$ 
    }
Step 3 return  $l_0$ 

```

Algorithme de tri fusion de listes chaînées où $h(l)$ désigne le plus petit élément placé en tête de la liste l , $l - \{h(l)\}$ tronquée de $h(l)$, $l + \{x\}$ et $l + y$: la liste l à laquelle sont ajoutés en queue respectivement l'élément x , la liste y

Step 0 nécessite exactement $n/2$ comparaisons et chacun des $(\lceil \log_2(n) \rceil - 1)$ passages dans la boucle principale au pire moins de $(n-1)$ comparaisons et au mieux moins de $(n-1)/2$ comparaisons, l'algorithme nécessite donc pour trier une liste de n éléments au pire moins de $n/2 + (\lceil \log_2(n) \rceil - 1) \cdot (n-1)$ comparaisons et au mieux moins de $n/2 + (\lceil \log_2(n) \rceil - 1) \cdot (n-1)/2$ comparaisons. Il est intéressant de noter que pour $n=2^p$ points distincts avec $p \geq 3$, le nombre moyen de comparaisons est toujours strictement inférieure à $(p-1)2^p$. En effet la moyenne des comparaisons nécessaires pour $n=2^3$ points distincts est $15.73 \dots \leq (3-1) \cdot 2^3$ et la propriété se conserve par récurrence. Car en moyenne pour trier 2^{p+1} points il faut au plus $(p-1)2^p$ comparaisons pour chacune des listes plus en moyenne $2^{p+1}/2$ comparaisons pour les fusionner soit un total de $(p-0.5) 2^{(p+1)} < [(p+1)-1] 2^{(p+1)}$. L'algorithme pénalisé par les listes alternées en ordre inverse peut être jumelé à son algorithme triant en parallèle la même liste lue dans l'ordre alterné inverse. Ainsi l'algorithme parallèle, qui s'arrête lorsque le tri le plus rapide à terminé a une probabilité moindre de rencontrer des cas défavorables comme l'illustre la graphique ci-après représentant la distribution des nombres de comparaisons respectives de ces méthodes pour $n=12$. En pratique le coût de lancement du thread concurrent s'avère si prohibitif que c'est la version monothread de l'algorithme qui s'avère plus rapide avec des performances comparables à celle de la STL C++. Cette dernière n'implémente plus le quicksort proposé par C. A. R. Hoare en 1962 de complexité moyenne $n \cdot \log(n)$ mais n^2 dans le pire des cas mais l'*introsort* de Musser en 1997 en $n \cdot \log(n)$.



Distribution des comparaisons nécessaires au tri de 12 nombres distincts pour l'algorithme simple et multithreads

En présence de nombre important de valeurs multiples un algorithme chaînant séparément les valeurs égales sera préférable. Il requière pour trier n valeurs distinctes au plus 2 fois le nombre de comparaisons de la version initiale alors que le surcoût global observé est de l'ordre de 25%. En chaînant à l'étape 0 les valeurs égales temps qu'aucune valeur distincte n'est rencontrée on a au plus $2(n-1)$ comparaisons. Pour $n=2^p$ et un nombre de valeurs distinctes au plus égale à 2^q , au cours des $q-1$ premières étapes de fusions au plus $2 \sum_{i=2..q} 2^{p-i} (2^i - 1)$ comparaisons plus au plus $2 \sum_{i=q+1..p} 2^{p-i} (2^q - 1)$ comparaisons pour les fusions suivantes. Soit au total moins de $(q+1) 2^{p+1}$, le dernier algorithme est donc toujours plus efficace que le précédent lorsque $(q+1)2^{p+1} \leq (p-1)2^p$ c'est-à-dire lorsque $2q+3 \leq p$. Comme en pratique les valeurs à trier pour calculer une VaR ou une CVaR sont rarement égales, il n'est pas utile d'optimiser leur gestion. En revanche pour une probabilité p proche de 1, l'on peut se contenter d'extraire les sous suites décroissantes d'au plus $m = \lfloor N \cdot (1-p) \rfloor$ éléments avec l'algorithme ci-après.

Step 0 Create $n/2$ sorted list of 2 elements such that $(x_i \geq x_{i+1})$ plus one of one if n is odd : l_0, \dots, l_e

Step 1 $s=1$

Step 1 While $(2s \leq e+1)$

```

{
  i=0; i'=s;
  while (i' ≤ e)
    { l ← li; li ← ∅; l' ← li';
      if h(l) ≥ h(l') Then { li ← li + {h(l)}; l ← l - {h(l)};
        if (length(li)=m) Then i ← i+2s; i' ← i'+2s
        else if l=∅ Then li ← li + l'; i ← i+2s; i' ← i'+2s
        else goto if h(l) ≥ h(l')
      }
    else { li ← li + {h(l')}; l' ← l' - {h(l')};
      if (length(li)=m) Then i ← i+2s; i' ← i'+2s
      else if l'=∅ Then li ← li + l'; i ← i+2s; i' ← i'+2s
      else goto if h(l) ≥ h(l')
    }
  }
  s ← 2s
}

```

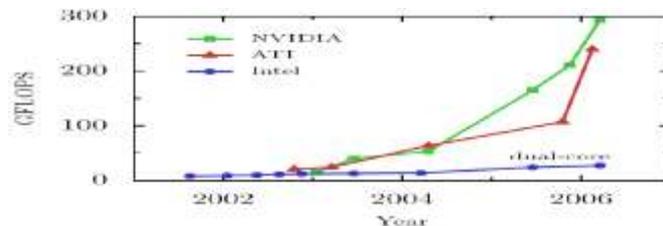
Step 3 return l_0

Algorithme de tri fusion de listes chaînées où $h(l)$ désigne le plus grand élément placé en tête de la liste l , $l - \{h(l)\}$ tronquée de $h(l)$, $l + \{x\}$ et $l + y$: la liste l à laquelle sont ajoutés en queue respectivement l'élément x , la liste y

Cet algorithme nécessitera au plus $(\lceil \log_2(m) \rceil + 1)2^p$ comparaisons pour obtenir les m plus grands éléments d'une liste de 2^p éléments. Si les algorithmes monothreads précédents sont aussi efficaces que ceux de la bibliothèque STL du C++, le coût d'introduction d'autre thread ne permet pas de tirer parti de cette possibilité.

9. La rupture technologique GPU de 2004

En 1965 Gordon Moore co-fondateur d'Intel formula la loi prédisant le doublement tout les deux ans du nombre de transistors sur un même circuit intégré. Sur le forum des développeurs d'Intel de septembre 1997, il déclara que les limites physiques de miniaturisation des circuits serait atteinte horizon 2017. Comme la multiplication du nombre de transistors s'est traduite par la multiplication du nombre de cœurs des CPU et GPU exécutant respectivement les instructions des ordinateurs et de leurs cartes graphiques leur nombre de cœurs devrait encore plus que centupler. Depuis 2004 les fondeurs confrontés aux problèmes de consommation et de dissipation de chaleur ont cessé d'augmenter la fréquence de leurs processeurs restée en deçà des 4GHz [Herb Sutter(2005)]. Les architectures SIMD / MIMD des GPU dotés d'accès mémoire et de possibilités de traitement plus limitées que les CPU ont dès lors pris l'ascendant en termes de puissance de calcul sur ces derniers. [Cf. A. Chariot, (2008)]. Le graphique ci-dessous donnant l'évolution sur la période 2002-2006 du nombre de Giga Flops ou milliard d'opérations réalisables sur des réels témoigne de la rupture technologique opérée entre les GPU de ATI(AMD) et NVIDIA vis-à-vis des CPU d'Intel.



Evolution sur la période 2002-2006 du nombre de Giga Flops disponibles pour des calculs sur des réels 32 bits
[John D. Owens, David Luebke, Naga Govindaraju, Mark Harris, Jens Krüger, Aaron E. Lefohn, and Tim Purcell(2007)]

Le 8 décembre 2008, cinq mois à peine après sa formation, le Khronos Compute Working Group constitué de représentants des éditeurs de logiciels et des constructeurs de matériel : Apple, AMD ,Intel, NVidia... publia le premier standard ouvert de programmation en environnement hétérogène(CPU,GPU,FPGA...). Depuis, ils implémentent cette norme baptisée OpenCL pour Open Computing Langage comprenant une librairie et un langage de programmation dérivé du C. Auparavant ATI et NVidia proposaient uniquement leurs environnements développement propriétaires respectifs SDK ATI Stream et Cuda, ainsi que les drivers DirectX de Microsoft. En effet les version 9.0 et suivantes de DirectX permettent l'exploitation des GPU à d'autres fin que le graphisme. La version 11.0 uniquement disponible sur Windows Vista SP2 et Seven peut manipuler sous réserve que le GPU le permette des réels en double précisions c'est-à-dire codé sur 64bits au lieu de 32bits. En ce 1^{er} mars 2010, les ATI HD5xxx mises sur le marché AMD en 2009 implémentent toute DirectX 11 mais seule la 5970 offre cette option présente sur le GPU Fermi de NVidia avec la manipulation des entiers 32bits au lieu des 24bits en standard actuellement. Si les possibilités de calcul des GPU se rapprochent peu à peu de celle des CPU, ceux-ci offrent une souplesse de programmation inégalée grâce à des réels et des entiers plus toujours plus longs, aux pointeurs, la gestion de la récursivité... mais surtout leur programmation objet avec les langages de 4^{ème} génération. C#, Java pour ne citer que les plus connus intègrent nativement la programmation multi-cœurs rajoutée par les normes aux plus anciens comme le C++. Par ailleurs les accès mémoires aléatoires des CPU permettent une programmation moins contrainte que sur les GPU optimisés pour la réalisation de traitements massivement parallèles en pipeline. Leur monopole d'accès aux Tera Octets des disques durs dont les débits ont été porté à 6Gbits/s par la norme Sata 3.0 leur confère un rôle d'autant plus centrale que les possibilités de calcul des GPU sont bridées par leur faible mémoire de quelques Giga Octets alors que la bande passante va être portée à plus de 60Giga Bits par la norme PCI Express 3.0 attendue en Juin 2010. Le gisement de Tera Flops de demain que constitue les GPU va conduire à porter de nombreux d'algorithmes écrits pour les CPU vers les GPU. L'émergence de ses nouvelles capacités de calculs bon marché a relancé la recherche dans le domaine des

algorithmes destinés au GPU. Une véritable communauté s’est d’ailleurs formée autour de CUDA qui diffuse le résultat de ses travaux sur le site du fondateur <http://developer.nvidia.com> et <http://gpgpu.org/developer>. Parmi les algorithmes directement impactés par cette mutation figurent en premières lignes : le tri, les Monte Carlo, les générateurs de nombres aléatoires, les calculs matricielles... en un mot les briques de base des calculs intensifs requis par les simulations financières.

L’algorithme ABISort proposé en 2006 par A. Greß et G.Zachmann de complexité optimal en $O(N \cdot \log(N)/p)$ où p désigne le nombre de cœur du GPU a revisité le tri bitonic introduit par K. E. Batcher en 1968. Ces très bonnes performances reprises dans le tableau ci-dessous ont été obtenues en adaptant le tri bitonic à la mémoire du GPU et en optimisant les dernières phases de fusion de ce dernier.

N	CPU Sort C++ STL D. R. Musser	GPU Bitonic Sort Govindaraju et al.	GPU ABISort A. Greß et G.Zachmann
32768	9 - 11 ms	4 ms	6 ms
65536	19 – 24 ms	8 ms	9 ms
131072	46 – 52 ms	18 ms	18 ms
262144	98 – 109 ms	38 ms	37 ms
524288	203 – 226 ms	80 ms	76 ms
1048576	418 – 477 ms	173 ms	165 ms

Comparaison des temps de tri des algorithmes CPU/quicksort, GPU/bitonic, GPU/abisort
CPU=AMD Athlon-64 4200+ CPU and an NVIDIA vs GPU=GeForce 7800 GTX GPU 256 MB

Dans le chapitre 45 de leur ouvrage « Gpu gems 2: programming techniques for high-performance graphics and general-purpose computation, First edition » disponible en ligne par NVidia à l’occasion de la Game Developers Conference de 2005, M. Pharr et R.Fernando décrivent comment réaliser sur CUDA des simulations Monte Carlo avec les modèles Black-Scholès et Cox-Ross-Rubinstein. En l’absence de gestion native des entiers 32bits sur les GPU ils préconisent de réaliser la génération des nombres quasi aléatoires sur le CPU et leur transfert au GPU.

Trois ans plus tard V. Podlozhnyuk proposait dans le livre blanc Parallel Mersenne Twister l’implémentation parallèle de plusieurs Mersenne Twister de graine différente selon les préconisations de M. Matsumoto et T.Nishimura publiée dans leur article de 1998 : Dynamic Generation of Pseudo Randomnumber Generators. Le 17 novembre 2009, ces derniers ont mis en ligne sur la page : <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/MTGP/index.htm> le code CUDA du Mersenne Twister for Graphic Processors de période au plus $2^{4497}-1$ pour la version 32bits et $2^{110503}-1$ pour la version 64bits.

CUDA est aujourd’hui utilisée par certains logiciels mathématiques et statistiques dont MATLAB, Mathematica, LabView, R sous linux et unix . Le 18 Août la société EM Photonics a annoncé avoir porté sur CUDA la célèbre librairie d’algèbre linéaire Lapack rebaptisée CULA... Pour plus d’information le lecteur pourra consulter la page http://www.nvidia.fr/object/tesla_software_fr.html du site de NVidia

10. Conclusion

Depuis les premières simulations stochastiques réalisées pour mettre au point de la première bombe atomique la croissance exponentielle des capacités de calcul des ordinateurs n'a pas cessé d'augmenter. L'arrêt de la croissance des fréquences des processeurs constaté en 2004 à paradoxalement relancé la compétition chez les fondeurs qui doublent depuis tous les deux ans le nombre de cœurs disponibles sur les circuits imprimés. L'impossibilité de continuer à graver plus finement annoncée pour 2017 devrait à nouveau bousculer la donne au profit peut être des réseaux dont les débits peuvent encore être multipliés. Ces mutations technologiques obligent à une redéfinition des architectures, des paradigmes de programmation... d'autant freinée dans leur mise en œuvre que l'on ne forme pas les hommes comme l'on change d'ordinateur. Mais la chute vertigineuse du coût d'accès à la puissance de calcul à vite raison de ses freins et contribue à la démocratisation des techniques les plus chronophages comme les calculs Monte Carlo.

En parallèle les travaux mathématiques sur les générateurs aléatoires, les algorithmes fondamentaux, l'expérience accumulé sur les premiers modèles... a permis d'accroître la précision et la vitesse des calculs réalisés. Cependant force est de constater que si les modèles mono variés sont bien connus pour avoir été très largement étudiés, il n'en est pas de même des modèles multi variés.

Une réglementation assurantielle en mutation toujours plus friande de modèles

Les sociétés d'assurance sont soumises à une réglementation dérogatoire du droit générale des affaires par son caractère protecteur des assurés. Le coût réel des sinistres couverts n'étant connu qu'au terme des contrats et non à leur signature, les assureurs sont contraints par le législateur de disposer à tout moment de provisions règlementées couvrant leurs engagements (art R331-1 et suivants et A331-1 et suivants du code des assurances). En plus de ces provisions, le législateur exige un niveau de fonds propres désigné par marge de solvabilité couvrant les aléas susceptibles d'affecter l'actif ou le passif de la société d'assurance (Art. R334-1 et suivants du code des assurances).

L'autorité de Contrôle Prudentiel veille au respect des textes par les acteurs français et les succursales extracommunautaires. En droit d'exiger toute information qu'elle juge utile à l'exercice de sa mission, ses commissaires contrôleurs réalisent des contrôles sur pièce et sur place. L'autorité sanctionne les infractions à la législation, notamment en matière de communication à son égard, celui du public ou en matière de blanchiment d'argent. A ce titre elle peut infliger des blâmes, des amendes, organiser des transferts de portefeuille, des retraits d'agrément... et même requérir des peines de prison.

	Code des assurances	Code de la mutualité	Code de la sécurité sociale
Interdiction ou incompatibilité	Liste art.L322-2; Emprisonnement 1an; Amende 375K€ art.L.328-1	Liste art.L114-21&L114-28; Emprisonnement 6mois; Amende 7 500€ art.L.114-47	Liste art.L931-9; Emprisonnement 3ans; Amende75 000€ art.L.931-25
Gratuité de la fonction d'administrateur	Mandataire mutualiste art.L322-55-1; Pas de disposition pénale	Liste art.L114-26; Emprisonnement 6mois; Amende 7 500€ art.L.114-47	Art.R.931-3-23 ; Pas de disposition pénale
Commissionnement	Mandataire mutualiste art.L322-55; Pas de disposition pénale	Liste art.L114-31 & L114-28; Emprisonnement 6mois; Amende 7 500€ art.L.114-47	Art.R.931-3-22 ; Pas de disposition pénale
Etablissement des comptes annuels	Amende 9 000€ art.L.328-3	Emprisonnement 6mois; Amende 7 500€ art.L.114-49	Amende 9 000€ art.L.931-27
Présentation fidèle des comptes annuels	Emprisonnement 5ans; Amende 375K€ art.L.328-3	Emprisonnement 5ans; Amende 375K€ art.L.114-48	Emprisonnement 5ans; Amende 375K€ art.L.931-27
Nomination des commissaires aux comptes	Emprisonnement 2ans; Amende 30K€ art.L.820-4.C. Com	Emprisonnement 2ans; Amende 30K€ art.L.114-51	Emprisonnement 2ans; Amende 30K€ art.L.820-4 C. Com
Déclarations mensongères ou dissimulations dans tout document produit au ministre de tutelle ou porté à la connaissance du public	Emprisonnement 2ans; Amende 300K€ art.L.310-28	Emprisonnement 2ans; Amende 30K€ art.L.510-12	Emprisonnement 2ans; Amende 300K€ art.L.951-11
Entrave au contrôle de l'ACP	Emprisonnement 2ans; Amende 300K€ art.L.310-28	Emprisonnement 2ans; Amende 30K€ art.L.510-13	Emprisonnement 2ans; Amende 300K€ art.L.951-11

Principales sanctions pénales à l'encontre des dirigeants d'un organisme assureur. Les infractions pénales constatées lors d'un contrôle font l'objet d'une transmission au procureur de la république. Cette dernière peut avoir lieu avant l'établissement du rapport contradictoire lié au contrôle sur place (Source : les cahiers pratiques de argus de l'assurance du 10 juillet 2009)

1. Provisions règlementées en couvertures des risques assurés

Provisions règlementées par branche

Les provisions obligatoires ont pour objet la couverture intégrale des engagements présents et futurs contractés par l'assureur auprès des assurés et des bénéficiaires.

Les provisions obligatoires en assurance sur la vie, nuptialité-natalité et capitalisation sont données par l'Article R331-3 du code des assurances :

- 1° Provision mathématique
- 2° Provision pour participation aux bénéficiaires
- 3° Réserve de capitalisation
- 4° Provision de gestion
- 5° Provision pour aléas financiers
- 6° Provision pour risque d'exigibilité
- 7° Provision pour frais d'acquisition
- 8° Provision pour égalisation
- 9° Provision de diversification

Les provisions obligatoires pour les autres opérations d'assurance sont données par l'article R331-6 du code des assurances :

- 1° Provision mathématique de rentes
- 2° Provision pour primes non acquises
- 2° bis Provision pour risques en cours
- 3° Réserve de capitalisation
- 4° Provision pour sinistres à payer
- 5° Provision pour risques croissants
- 6° Provision pour égalisation
- 7° Provision pour risque d'exigibilité

Les provisions obligatoires relatives aux opérations de réassurance sont données par l'article Article R331-36 du code des assurances :

- 1° Provision mathématique
- 2° Provision mathématique des rentes
- 3° Provision pour frais d'acquisition reportés
- 4° Provision pour primes non acquises
- 5° Provision pour sinistres à payer
- 6° Provision pour risques croissants
- 7° Provision pour participation aux bénéficiaires :
- 8° Réserve de capitalisation
- 9° Provision de gestion
- 10° Provision pour risque d'exigibilité
- 11° Provision pour risques en cours
- 12° Provision pour égalisation
- 13° Provisions justifiées par les spécificités des contrats émis hors de l'union

Le code des assurances en donne les définitions dans les articles R331 et suivants ainsi que les modalités de calcul, complétées par les règlements d'application et notamment les décrets du ministre de l'économie.

Définition des provisions règlementées

Provision mathématique : différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés, à l'exception des contrats d'assurance groupe définis par l'article L141-1.

Provision pour participation aux bénéficiaires : montant des participations aux bénéficiaires attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéficiaires ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits ;

Réserve de capitalisation : réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu ;

Provision de gestion : destinée à couvrir les charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs ;

Provision pour aléas financiers : destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif ;

Provision pour risque d'exigibilité : provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs non obligataires.

Provision pour frais d'acquisition reportés : provision destinée à couvrir les charges résultant du report des frais d'acquisition constatés.

Provision pour égalisation : provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurance de groupe contre le risque décès ;

Provision de diversification : vise les contrats d'assurance groupe définis par l'article L141-1 comme « souscrits par une personne morale ou un chef d'entreprise en vue de l'adhésion d'un ensemble de personnes pour la couverture des risques dépendant de la durée de la vie humaine, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité, des risques d'incapacité de travail ou d'invalidité ou du risque de chômage »..

Cette provision est destinée à absorber les fluctuations des actifs du contrat et sur laquelle chaque adhérent détient un droit individualisé sous forme de parts. Cette provision est abondée par tout ou partie des cotisations versées par les adhérents et par la part des résultats du contrat qui n'est pas affectée sous forme de provision mathématique. Elle se réduit par imputation des pertes, par imputation de frais, par prélèvements au titre des prestations servies et par conversion des parts des adhérents en provision mathématique.

Provision pour primes non acquises : provision, calculée selon les méthodes fixées par arrêté du ministre de l'économie, destinée à constater, pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date de l'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut, du terme du contrat ;

Provision pour risques en cours : provision, calculée selon les méthodes fixées par arrêté du ministre de l'économie, destinée à couvrir, pour l'ensemble des contrats en cours, la charge des sinistres et des frais afférents aux contrats, pour la période s'écoulant entre la date de l'inventaire et la date de la première échéance de prime pouvant donner lieu à révision de la prime par l'assureur ou, à défaut, entre la date de l'inventaire et le terme du contrat, pour la part de ce coût qui n'est pas couverte par la provision pour primes non acquises ;

Provision pour sinistres à payer : valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise ;

Provision pour risques croissants : provision pouvant être exigée, dans les conditions fixées par le décret prévu à l'avant-dernier alinéa de l'article R. 331-1, pour les opérations d'assurance contre les risques de maladie et d'invalidité et égale à la différence des valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés ;

Provision pour égalisation :

a) Provision destinée à faire face aux charges exceptionnelles afférentes aux opérations garantissant les risques dus à des éléments naturels, le risque atomique, les risques de responsabilité civile dus à la pollution, les risques spatiaux, les risques liés au transport aérien, et les risques liés aux attentats et au terrorisme, et calculée dans les conditions fixées par l'article 2 de la loi n° 74-1114 du 27 décembre 1974, par le décret n° 75-768 du 13 août 1975, le décret n° 86-741 du 14 mai 1986 et l'article 39 quinquies G du code général des impôts. Toutefois, pour la détermination du bénéfice technique annuel pris en compte pour le calcul de la dotation annuelle de la provision pour les risques liés aux attentats et au terrorisme prévue à l'article 39 quinquies G du code général des impôts et pour la détermination de la limite du montant global de cette provision prévue à cet article, les primes pour attentat et terrorisme pour chacun des deux exercices 2001 et 2002 ne pourront excéder 3,75 % des primes émises au titre des dommages aux biens correspondant aux branches 8 et 9 de l'article R. 321-1 et agrégées dans les conditions définies à l'article A. 341-1 ;

b) Provision destinée à compenser en assurance-crédit la perte technique éventuelle apparaissant à la fin de l'exercice, et calculée dans les conditions fixées à l'article R. 331-33 ;

c) Provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurance de groupe contre les risques de dommages corporels ;

Actifs en représentation des provisions règlementées

L'article R332-2 du code des assurances, R931-10-21 du code de la sécurité sociale et l'article R212-31 de la mutualité définissent les actifs admis en représentation des engagements règlementés. Ces actifs obéissent aux règles de limitation, dispersion par émetteur et congruence.

La règle de limitation fixe les plafonds en pourcentage de la base de dispersion, différence entre les engagements règlementés et certains actifs dont les actifs en représentation des contrats en unité de compte, les primes restant à émettre/encaisser, les créances sur les réassureurs.

Actifs	Obligations de états de l'OCDE	Actions, Sicav, FCP	Immobilier	Prêts	Instruments à terme
Plafond	Aucune	65%	40%	10%	0.5%

Plafonds en pourcentage de la base de dispersion

La règle de dispersion plafonne le risque de contrepartie sur chaque émetteur à 5% de la base de dispersion et 10% si le total des émetteurs au-delà du premier seuil reste en deçà de 40% de la base de dispersion.

La règle de congruence limite le risque de change de l'assureur, en l'obligeant à placer en représentation de ces engagements des actifs réalisables dans leur monnaie. Par dérogation ils peuvent ne pas couvrir par des actifs congruents à concurrence de 20% de leurs engagements.

2. La marge de solvabilité

En complément de la couverture des engagements règlementés par des actifs liquides, surs et rentables, l'assureur doit disposer d'un matelas de fonds propres capable d'encaisser les aléas qui peuvent affecter son bilan. Ce niveau de fond propre, appelé marge minimum de solvabilité est fixé dans le décret n° 2003-1236 transposant les directives Solvabilité I (2002/12/CEE et 73/239/CEE).

L'exigence de marge de solvabilité

En vie, ils représentent 4% et 1% des provisions mathématiques des contrats selon que l'assureur assume ou non le risque de placement, auxquels s'ajoutent entre 0.1 et 0,3 % des capitaux sous risques correspondant au risque de décès après déduction de la provision mathématique afférente (Article R334-13 du code des assurances).

En non-vie c'est en simplifiant le maximum entre d'une part d'un pourcentage de l'ordre de 16 à 18 % des primes annuelles émises et d'autre part de montant de l'ordre de 23 à 26% de la charge moyenne de sinistre calculée sur trois à sept ans selon les branches. (Article R334-5 du code des assurances)

Les actifs en représentation de la marge de solvabilité

Les actifs en représentation de la marge de solvabilité sont définis par l'Article R334-3, après déduction des pertes, de la part des frais d'acquisition non admise en représentation des engagements règlementés et des autres éléments incorporels par :

1. le capital social versé
2. les réserves de toute dénomination, réglementaires ou libres hors engagements y compris la réserve de capitalisation
3. le report bénéficiaire, déduction faite des dividendes à verser
4. le ou les emprunts pour fonds social complémentaire, dont le montant retenu est réduit linéairement dès qu'il atteint la moitié de sa durée ;
5. les fonds effectivement encaissés provenant de l'émission de titres ou emprunts subordonnés, ainsi que d'actions de préférence ; sous certaines limites
6. la réserve pour fonds de garantie prévue à l'article R. 423-16, à hauteur de la part de cotisation versée par l'entreprise et non utilisée par le fonds ;

Sur demande et justification avec l'accord de l'ACP peuvent venir s'ajouter:

7. la moitié de la fraction non versée du capital social ou de la part restant à rembourser de l'emprunt pour le fonds d'établissement, dès que la partie versée atteint 25 % de ce capital ou de ce fonds
8. les rappels de cotisations que les sociétés d'assurance mutuelle à cotisations variables peuvent exiger de leurs sociétaires au titre de l'exercice
9. les plus values

Cette marge de solvabilité disponible doit être encore diminuée des actions détenues en propre, des participations dans des établissements de crédit et entreprises d'investissements ainsi que de ses créances subordonnées sur ces dernières...

3. En dernier ressort le fonds de garantie

L'assureur dans l'incapacité de respecter la marge de solvabilité est passible des mesures de sauvegardes ou d'un retrait d'agrément par l'ACP. Lorsque le seuil réglementaire n'est plus atteint l'autorité exige la présentation d'un plan de redressement voir de financement à court terme si les fonds portés à la marge de solvabilité ne couvrent plus le fonds de garantie. Dès lors que l'intérêt des assurés et des bénéficiaires de contrats est compromis ou susceptible de l'être, l'autorité peut prendre des mesures d'urgences notamment de renforcement de la marge de solvabilité. Ces mesures peuvent visées la réduction des engagements par la réassurance ou le transfert de portefeuille ou le renforcement des fonds propres. Enfin si à l'examen des données financières, de la gouvernance, du contrôle interne, des polices contractées, des statuts l'autorité estime que la société est dans l'incapacité de faire face à ces engagements envers les assurés et les bénéficiaires, elle saisit le fonds de garantie lié à l'agrément, de l'assureur et l'en avise.

En assurance de personnes elle avise de plus les assurés et les bénéficiaires, puis organise le transfert du portefeuille. Si le transfert aboutit à une réduction des engagements, un différentiel est versé par le fonds. Sinon en vie les assurés sont directement indemnisés par le fonds à concurrence de 70 000 € de provision techniques, porté à 90 000€ pour les rentes de prévoyance servies dans des contrats d'assurances décès ou d'incapacité-invalidité.

En non vie ne sont couverts par le fonds de garantie que les sinistres garantis par le contrat dont le fait dommageable intervient au plus tard à midi le quarantième jour suivant la publication au Journal officiel de la décision de retrait de l'agrément de l'assureur et qui donnent lieu à déclaration de la part de l'assuré ou à une première réclamation de la part d'un tiers victime moins de cinq ans après cette date.

S'il existe un fonds de garanties des assurances de personnes et un fonds de garantie des assurances obligatoires de dommages, le fonds de garantie des mutuelles attend encore sept ans après sa création légale, le décret fixant ses modalités de fonctionnement (prévues par l'article L. 431-8 du Code de la mutualité). Néanmoins, la mutualité française a mis en place un « système fédéral de garantie » pour ses adhérents agréés pour les branches 1 et 2. Ces derniers sont tenus verser au fonds un dépôt correspondant à 0,6% de leurs prestations garanties

Mixte	1. Accidents (y compris les accidents de travail et les maladies professionnelles)	
	2. Maladie	
Assurance non vie	3. Corps de véhicules terrestres (autres que ferroviaires)	
	4. Corps de véhicules ferroviaires	
	5. Corps de véhicules aériens	
	6. Corps de véhicules maritimes, lacustres et fluviaux	
	7. Marchandises transportées (y compris les marchandises, bagages et tous autres biens)	
	8. Incendie et éléments naturels	
	9. Autres dommages aux biens	
	10. Responsabilité civile véhicules terrestres automoteurs	
	11. Responsabilité civile véhicules aériens	
	12. Responsabilité civile véhicules maritimes, lacustres et fluviaux	
	13. Responsabilité civile générale	
	14. Crédit	
	15. Caution	
	16. Pertes pécuniaires diverses	
	17. Protection juridique.	
	18. Assistance	
	Assurance Vie	20. Vie-Décès
		21. Nuptialité-Natalité
22. Assurances liées à des fonds d'investissement		
23. Opérations tontinières		
24. Capitalisation		
25. Gestion de fonds collectives		
26. Toute opération à caractère collectif définie à la section I du chapitre Ier du titre IV du livre IV		

Branches définies dans l'article R321-1 du code des assurances. Les mutuelles du code de la mutualité peuvent pratiquer uniquement les activités des branches 1,2, 15 à 18, 20 à 22, 24 à 26 (Art. R. 221 C. Mut.). De même les institutions de prévoyance ne peuvent pratiquer que les activités des branches 1,2, 16, 20 à 22, 24 à 26 (Art. R. 931-2-1 CSS).

4. Un reporting annuel et trimestriel permanent

L'assureur en sus d'être tenu à une comptabilité ad hoc protectrice des assurés est soumis à un reporting permanent auprès de l'autorité de contrôle, sur la base duquel elle définit sa politique de contrôle annuel. Ce reporting trimestriel et annuel comprend :

- Des informations générales de toute nature sur l'organisme concerné (management...)
- Des états comptables
 - o Comptes arrêtés par le CA (compte de résultat, bilan, tableau des engagements et annexe)
 - o Comptes annuels après approbation par l'AG, rapport de gestion du CA, rapport des commissaires aux comptes et le cas échéant le bilan social
- Des Etats réglementaires d'aide à l'analyse des comptes

18 états annuels

 - o C1 : résultats techniques par catégories d'opérations (vie, non vie, dommages corporels)
 - o C2 : engagements et résultats techniques par pays
 - o C3 : acceptations et cessions en réassurance, affaires directes prises et opérations données en substitution
 - o C4 : cotisations par catégories de contrats et garanties (vie, non vie)
 - o C5 : représentation des engagements réglementés
 - o C6 : marge de solvabilité (vie, non vie)
 - o C6 bis : marge de solvabilité (test d'exigibilité)

- C7 : provisionnement des rentes en service
- C8 : description du plan de réassurance
- C9 : dispersion des réassureurs et simulations d'événements
- C10 : cotisations et résultats par année de survenance des sinistres
- C11 : prestations par année de survenance
- C12 : sinistres et résultats par année de souscription
- C13 : part des réassureurs dans les Sinistres
- C20 : mouvements des bulletins d'adhésion aux règlements ou des contrats des capitaux et rentes
- C21 : état détaillé des provisions et engagements techniques
- C30 : cotisations, sinistres et commissions des opérations non-vie dans l'espace économique européen
- C31 : cotisations des opérations vie dans l'espace économique européen (hors la France)

2 états prévisionnels

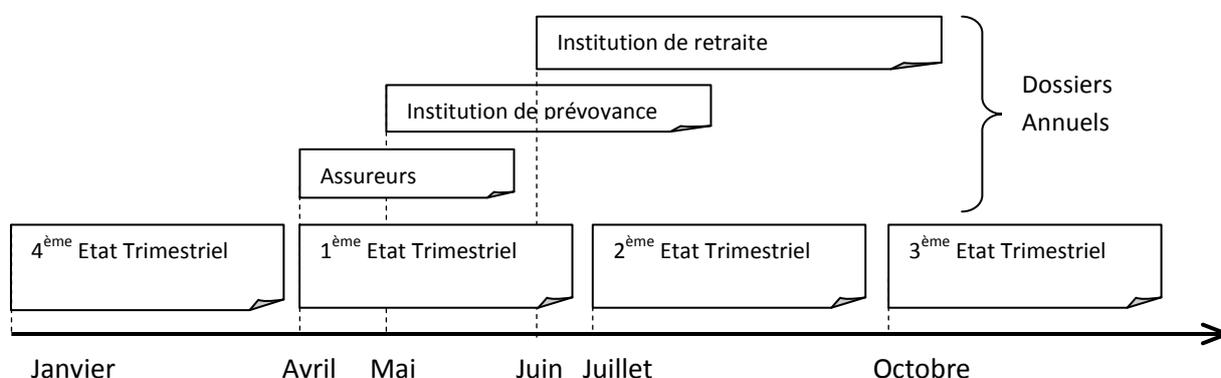
- C6 bis : marge de solvabilité (test d'exigibilité)
- C8 : description du plan de réassurance

3 états trimestriels

- T1 : flux trimestriels relatifs aux opérations en France
- T2 : encours trimestriel des placements
- T3 : Simulations actif-passif

- Des Etats statistiques collectés pour le compte le compte des services statistiques ministériels ou européens permettant de dégager une vision globale de la profession

Ce contrôle sur pièce permanent peut être complété par un contrôle sur place limité dans sa durée (art.L.310-14 et s C. Ass ; art. L.510-5 et s C. Mut ; art.L951-4 et s. CSS). Il vise à apprécier le niveau de provisionnement, la qualité de la gestion, les règles de gouvernance, les outils et procédures, la réassurance, la connaissance et la maîtrise des risque de l'entité. Ce contrôle peut être motivé par les réclamations des assurés, la réglementation anti-blanchiment ou simplement l'ancienneté du dernier contrôle.



Calendrier de réception des états prudentiels destinée à l'ACP (Source : ACP)

5. Solvabilité 2

Les premières exigences de marges de solvabilité remontent aux directives de 1973 en assurance non-vie et 1979 en assurance vie. Le rapport Müller de 1997 préconise une révision des règles de solvabilité. Il conduit à la mise en œuvre du projet Solvabilité 1 entré en vigueur en 2002, qui augmente le capital minimal exigé et renforce les pouvoirs d'intervention des autorités de surveillance. Bien que ce dispositif conduise à une meilleure adéquation de l'exigence de fonds propres réglementaires des capitaux propres aux risques portés, les assureurs ne manquent pas de

remarquer l'absence d'harmonisation des méthodes : de calculs des provisions, de comptabilisation des actifs (coût historique versus coût de marché), l'absence de prise en compte de la réassurance...

En 1999, avant même la fin du projet Solvabilité 1, le projet Solvabilité 2 est lancé par l'union européenne, dont les objectifs principaux sont :

- protéger les preneurs d'assurance
- assurer la comparabilité, la transparence et la cohérence, de manière à assurer
- des conditions de concurrence équitables; fixer une marge de solvabilité mieux adaptée aux risques réellement encourus ;
- définir niveau de solvabilité à même de révéler les problèmes à un stade suffisamment avancé plutôt que fournir une garantie infaillible à la faillite ;
- prendre en compte les évolutions du marché ;
- fixer des principes tout en veillant à ne pas être prescriptif ;
- fonder le système sur des approches comptables communes ;
- éviter que les coûts en fonds propres ne soient inutilement élevés, au risque de menacer la compétitivité globale de l'assurance européenne.

Ces objectifs sont maintes fois amendés pour notamment :

- harmoniser les standards de contrôle à l'échelle européenne
- assurer une convergence avec les normes comptables internationales IAIS et IASB quant à
 - o Approche prospective des risques
 - o Evaluation des passifs en valeur de marché
 - o Communication financière
- prendre en compte les groupes d'assurances ;
- présenter des coûts de mise en œuvre adaptés aux petites structures ;
- adopter la structure à trois piliers de la norme bancaire internationale Bâle 2..

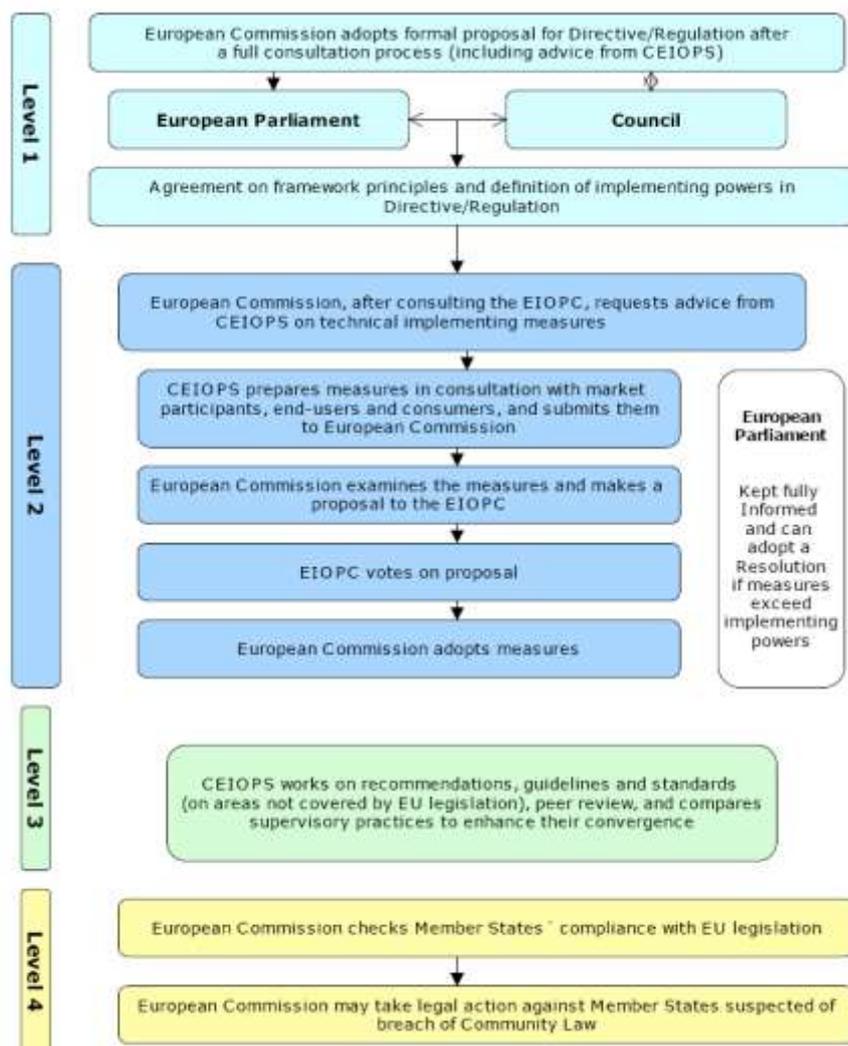
La directive Solvabilité 2 adoptée le 22 avril 2009 par le parlement européen reprend les trois piliers des accords de Bâle II.

- Son premier pilier quantitatif, définit les règles d'évaluation des actifs, des passifs et deux marges de solvabilité : le Minimum Capital Requirement et le Solvency Capital Requirement. Le premier fixe le niveau de fond propre en deçà duquel l'autorité de contrôle peut reprendre le contrôle de la compagnie. Le second est le niveau de fond propre cible correspondant à un taux de défaillance annuel de 0,5%.
- Son second pilier qualitatif, impose la mise en place d'un système de gouvernance des risques, assurant la traçabilité des processus de contrôles internes et répondant aux exigences de conformité, reporting , alertes... Il renforce l'harmonisation des standards et méthodes de contrôle et encourage le partage des meilleures pratiques entre organismes de contrôle. Il permet à ceux-ci de définir des exigences de capital sur mesure pour les entreprises présentant des profils de risques atypiques.
- Son troisième pilier fixe les exigences de communication financières à destination des autorités de contrôle, des marchés et du public.

Un chantier ouvert jusqu'en 2012

Cette nouvelle réglementation s'inscrit dans le cadre du processus Lamfalussy, qui distingue les textes de niveau 1, 2, 3 et 4. Les textes de niveau 1 sont les directives adoptées par conseil et le parlement européen, les textes de niveau 2 sont leurs règlements d'application adoptés par la commission européenne sous le contrôle du conseil et du parlement européen. Ils ont un caractère obligatoire, contrairement aux textes de niveau 3, qui sont des recommandations. Enfin, le niveau 4 concerne le contrôle la bonne transposition des textes dans les droits nationaux.

Le Comité européen des contrôleurs des assurances et des pensions professionnelles (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) est le comité de niveau 3 de la procédure. La commission européenne l'a chargé à sa création en 2003 de la préparation des textes. Il conseille la commission sur les aspects techniques contenus dans les textes de niveau 1 et 2, et élabore les recommandations de niveaux 3. Ce dispositif «assure» un dialogue permanent et transparent entre les acteurs par le recours notamment des appels à consultation (Calls for Advice) et des études d'impact (Quantitative Impact Study en anglais).



Lamfalussy – Model from the Perspective of CEIOPS(Source CEIOPS)

La première étude, qui portait sur l'évaluation des provisions techniques a mis en évidence la sur provision du marché français.

La seconde étude «méthodologique» a fourni un canevas d'évaluation de l'exigence en capital et une première prise en compte de la diversification du risque.

La troisième étude, qui pointait la calibration des formules standards MCR/SCR a introduit la problématique des groupes.

La quatrième étude visait à vérifier que le bilan spécifié répondait aux finalités de la directive, à collecter les options incorporées aux contrats et préparer les acteurs à l'élaboration de procédures de collecte de données.

La cinquième étude planifiée pour juin 2010 sera la répétition générale avant la transposition en droit national et l'entrée en application prévue pour le 31 octobre 2012.

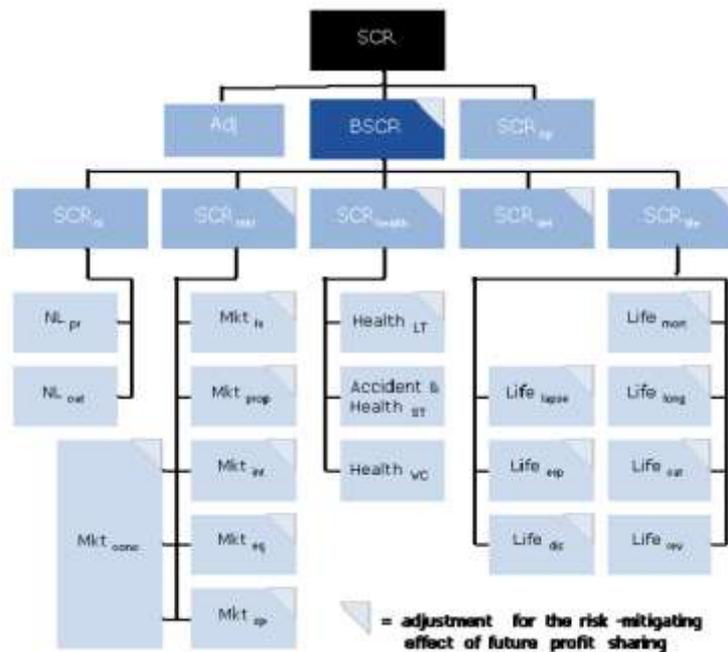
1	Consultation Practices
2	Guidelines for Coordination Committees
3	Implications of IAS/IFRS Introduction for Prudential Supervision
4	Answers to the first wave of Calls for Advice Solvency II
5	Occupational Pensions Protocol
6	Recommendation on Possible Need for Amendments Insurance Groups Directive
7	Answers to the second wave of Calls for Advice Solvency II
8	Insurance Mediation Protocol
9	Answers to the third wave of Calls for Advice Solvency II
10	Developing CEIOPS' Medium-Term Work Programme
11	Recommendation on Independence and Accountability
12	Treatment of "Deeply Subordinated Debt"
13	Advice on insurance undertakings' Internal risk and capital requirements, supervisors' evaluation procedures and harmonised supervisors' powers and tools
14	Draft Advice on sub-group supervision, diversification effects, cooperation with third countries and issues related to the MCR and the SCR in a group context
15	Draft Advice to the European Commission on Supervisory Reporting and Public Disclosure in the Framework of the Solvency II project
16	Draft Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II project on Pillar II issues relevant for reinsurance
17	Draft Advice to the EC in the Framework of the Solvency II project on Pillar II capital add-ons for solo and group undertakings
18	Draft Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II project on Supervisory powers – further advice
19	Draft Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II Project on Safety Measures (Limits on Assets)
20	Draft Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II Project on Pillar I Issues Further Advice
21	Establishment of a Mediation Mechanism between Insurance and Pensions Supervisors
22	General Protocol relating to the Collaboration of the Insurance Supervisory Authorities of the Member States of the European Union
24	Draft Advice on the Principle of Proportionality in the Solvency II Framework Directive Proposal
25	Draft Advice on Aspects on the Framework Directive Proposal related to Insurance Groups
26	Draft Level 2 Advice on Technical Provisions Methods and statistical techniques for calculating the best estimate
27	Draft Level 2 Advice on Technical Provisions Segmentation
28	Draft Level 2 Advice on SCR Standard Formula Counterparty default risk
29	Draft Level 2 Advice on Own Funds Criteria for supervisory approval of ancillary own funds
30	Draft Level 2 Advice on Technical Provisions Treatment of Future Premiums
31	Draft Level 2 Advice on SCR Standard Formula Allowance of financial mitigation techniques
32	Draft Level 2 Advice on Technical Provisions Assumptions about future management actions
33	Draft Level 2 Advice on System of Governance
34	Draft Level 2 Advice on Transparency and Accountability
35	Draft Level 2 Advice on Valuation of Assets and "other Liabilities"
36	Draft Level 2 Advice on Special Purpose Vehicles
37	Draft Level 2 Advice on the Procedure to be followed for the approval of an Internal Model

Papiers de consultations clos

6. Focus sur le QIS 4

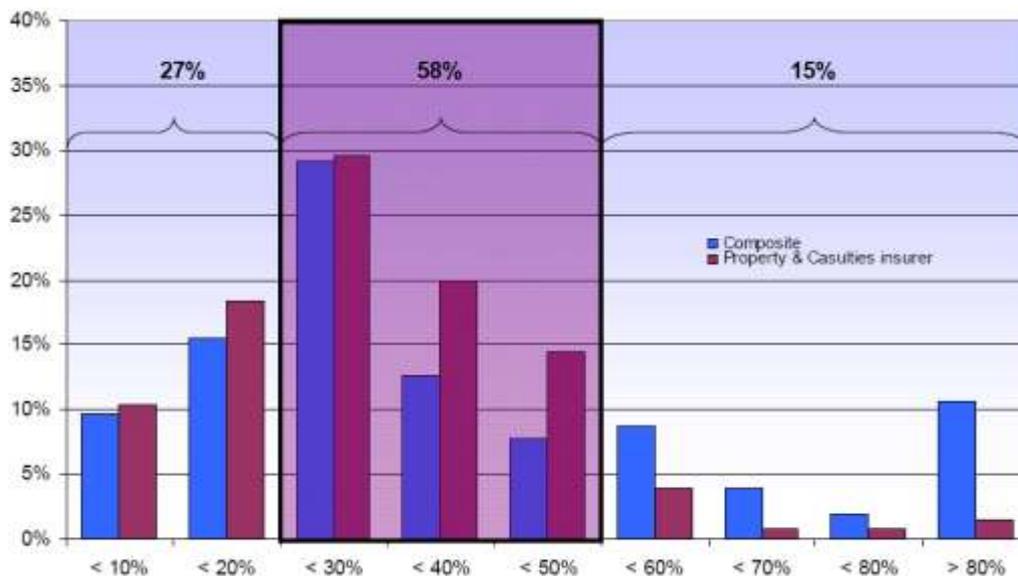
A l'occasion du QIS 4, l'ACP a reçu 238 réponses individuelles et 28 réponses groupes représentant 93% des provisions techniques en assurance vie et 75% en assurance non-vie. Au niveau européen 1412 entités juridiques ont répondu soit près de 60% du marché.

La SCR est calculé à partir d'une VAR à 1 an à 99.5%, calculée à partir des modules ci-dessous :



Modules composant le SRC du QIS 4

Le MCR est aujourd'hui placé dans un corridor 20%-50%



58% des organismes d'assurance (vie-mixte et non-vie) ont un SRC compris entre 20 et 50% du SRC, 27% sont en deçà et 15% en dessus.

7. Une réglementation comptable en mutation

A l'instar des entreprises commerciales et industrielles, les sociétés d'assurances sont tenues de publier leurs comptes afin d'informer les tiers et plus particulièrement leurs actionnaires. Pour des motifs prudentiels les assureurs ont disposé dès 1939 d'un plan comptable normalisé, avant même la rationalisation du plan comptable général survenue après guerre. Cette rationalisation s'est poursuivie par l'adoption de la directive 91/674 du 19 décembre 1991 instituant le plan comptable des sociétés d'assurance en Europe. D'inspiration prudentielle, son article 60-Ig interdit notamment l'escompte des provisions pour sinistres à payer des entreprises d'assurance non vie pour les risques d'une durée de liquidation inférieure à quatre ans.

En parallèle des normes comptables européennes ont été adoptées pour les comptes consolidés en vue d'améliorer la qualité de l'information financière diffusée aux actionnaires. La VII directive Européenne, transposée dans notre droit national par la loi du 3 janvier 1985 et le décret du 17 février 1986 ont débouchés sur l'intégration au plan comptable général de la méthodologie pour les comptes consolidés de l'arrêté du 9 décembre 1988. Vinrent ensuite le règlement 99-02 du CRC relatif à la méthodologie de consolidation puis la directive 98/78 du 27 octobre 1998 instituant une surveillance complémentaire au niveau des groupes et des comptes consolidés et enfin le règlement n°1606/2002 du 11 septembre 2002 entérinant l'adoption par l'Europe du référentiel IFRS.

Ces normes axées sur une mesure financière de la performance économique des entreprises, prennent plus largement en compte les obligations des groupes vis-à-vis de leurs parties prenantes en comptabilisant notamment leurs passifs sociaux... mais n'intègrent que partiellement leurs obligations présentes et futures vis-à-vis des assurés.

Les IFRS obligent à prendre en compte immédiatement les bénéfices probables. Alors que ceux-ci sont différés dans les comptes sociaux au motif que les provisions pour sinistre à payer doivent être évaluées prudemment en vertu des articles 60 et 30 de la directive 91/673 du 21 décembre 1991, les articles 25[a] et 26 de l'IFRS 4 exigent que la provision pour sinistres à payer ne soit pas trop prudente. L'article 14[a] de l'IFRS rend par ailleurs caduque la provision d'égalisation.

L'IFRS 4 oblige par ailleurs les assureurs à évaluer les contrats d'assurance dans leur ensemble en prenant en compte les options cachées qu'ils incorporent, comme les options de rachat des contrats d'assurance vie. L'article 15 de l'IFRS 4 impose aussi la réalisation de test de suffisance de passif. L'article 142 de l'IAS 39 impose encore des tests de pertes sur l'actif, qui s'ajoutent aux multiples tests d'adossement actif/passif des articles R 332-I-2 et R 344-4 du code des assurances.

Si les dispositions de l'IFRS 4 n'impactent aujourd'hui que les comptes consolidés des sociétés cotés et ne présentent pas de caractère impératif à court terme ; les IFRS cherchent à établir une comptabilité d'engagement en situation de continuité d'exploitation basée sur une démarche prospective et non plus rétro prospective. Elles définissent un jeu complet d'états financiers : un bilan, un compte de résultat, un tableau des flux de trésorerie, un état indiquant soit les variations du capital, un résumé des principales méthodes comptables utilisées et des notes explicatives, établis selon des critères d'intelligibilité, pertinence (fraicheur, à un coût procurant un avantage, qualitativement équilibrée), fiabilité (Image fidèle, Prééminence de la substance sur la forme, Neutralité, Exhaustivité) et comparabilité.

8. La mise en place des normes IFRS

L'International Accounting Standards Committee a été fondé en 1973 par des représentants de la profession comptable de 9 neuf pays, dans l'optique de formuler, publier et promouvoir des états comptables harmonisés au plan international. Jusqu'en 1998, la fondation élaborait des normes par consensus selon le principe du plus petit dénominateur commun. Son rapprochement en 1989 avec l'association mondiale des régulateurs des marchés de valeurs mobilières, l'International Organisation of Securities Commission, l'a conduit à abandonner progressivement cette approche pour développer à horizon 2000 un standard pour les sociétés cotées.

Le règlement n°1606/2002, publié le 11 septembre 2002 au journal officiel de la Communauté européenne impose l'adoption des normes IFRS aux sociétés consolidées cotées pour l'exercice commencé le 1^{er} janvier 2005 avec le choix pour les états membres d'autoriser ou d'imposer les IFRS aux autres sociétés. Dans le cadre de ses travaux engagés avec le législateur Européen, la fondation a modifiée sa constitution. L'IASB son organe exécutif est à présent composé de 14 membres, dont 7 membres de «liaison» avec les régulateurs nationaux. Le Standards Advisory Council tient un rôle consultatif sur l'agenda des travaux et les projets en cours. L'International Financial Reporting Issues Committee est en charge de l'interprétation des normes existantes. Ces interprétations sont soumises au Board pour approbation. Ses normes établies après le 1^{er} avril 2001 sont estampillées IFRS par distinction aux précédentes estampillées International Accounting Standards.

Le règlement n°1606/2002 fixe de plus le mécanisme communautaire à deux niveaux d'adoption des normes IFRS. Le premier niveau politique est assuré par le comité de réglementation comptable européen (Accounting Regulation Committee) présidé par la commission. Il rend des avis sur l'adoption des normes et leur entrée en vigueur. Ses avis prononcés pour l'adoption des normes IAS existantes au 14 septembre 2002 à l'exception des normes IAS 32 et 39, pour l'adoption de la première norme d'application IFRS1... ont été suivis de règlements européens. Le deuxième niveau est assuré par le comité technique comptable (European Financial Reporting Advisory Group) réunissant des experts issus de la profession comptable, des organismes de normalisation comptable, des utilisateurs, des préparateurs ainsi que des organismes de surveillance et de régulation des marchés. Il contribue au nom de l'Europe à tous les stades d'élaboration des normes IFRS et l'assiste dans la compréhension des textes.

Dans le cadre du plan d'action européen sur les services financiers deux comités de surveillance ont été créés en juillet 2001. Le comité Européen des valeurs mobilières (European Security Committee) intervenant au niveau politique est composé de représentant des états membres. Il conseille la Commission Européenne sur la réglementation des valeurs mobilières. Le CESAR ou CESR(Committee of European Securities Regulators) intervenant au niveau technique est composé de représentants des autorités de régulation nationales. Il assure la cohérence réglementaire au niveau des états et à ce titre conseille la Commission Européenne.

Constatant l'impossibilité d'aboutir à un consensus pour l'échéance du 1^{er} janvier 2005, concernant l'épineuse question de la comptabilisation des contrats d'assurance, l'IASB a suggéré dans son projet d'exposé n°5 (Exposure Draft 5) une prise en compte en deux phases. La première renforce l'exigence d'information portée en annexe sur les contrats d'assurance et dispense de leur comptabilisation en IFRS, reportée en phase deux. L'essentiel du projet d'exposé n°5 a été repris

dans la norme IFRS4 publiée le 31 mars 2004 et homologuée par le règlement CE n° 2236/04 du 29 décembre 2004. Le règlement CE n° 1126/2008 du 15 octobre 2008 a consolidé les normes IFRS et leurs amendements adoptés à cette date. Il comprend aussi les amendements "Reclassement d'actifs financiers" apportés à l'IFRS 7 "Instruments financiers : informations à fournir" et à IAS 39 "Instruments financiers : comptabilisation et évaluation". Sa version en langue française est téléchargeable sur la page : «http://www.focusifrs.com/content/download/4738/24950/version/1/file/IFRS4_Regl+1126-2008.pdf».

9. Conclusion

La réglementation européenne à laquelle sont soumis les assureurs de l'union évolue très rapidement. Lorsqu'ils sont soumis aux normes comptables internationales IAS-IFRS, ils sont tenus par l'IAS39 (en passe d'être remplacée par l'IFRS9) de valoriser leurs instruments au bilan en mark to mark ou mark to modèle, c'est-à-dire au moyen de modèles internes. Depuis le 1^{er} janvier 2008 dans le cadre de Bâle II, les banquiers peuvent définir par modèles internes les probabilités de défaut, les taux de recouvrement nécessaires au calcul de leur exigence de fonds propres. A leur suite dans le cadre de solvabilité II les assureurs vont pouvoir calculer par modèle interne leur marge de solvabilité cible correspondant à une probabilité de ruine de 0.5%. De fait les modèles internes et les techniques de simulation associées sont devenu un élément à part entière de la science actuarielle.

Quelques techniques d'estimation de la VaR du portefeuille de négociation bancaire

1. L'exigence de fond propre du portefeuille de négociations bancaire

L'arrêté du 20 février 2007 publié au J.O n° 51 du 1 mars 2007 décline en droit français l'exigence de fonds propre des établissements de crédit et les entreprises d'investissement adopté dans le cadre des accords de Bâle de 1988, 1996 et 2004. Le premier accord de 1988 imposait que leur portefeuille bancaire comprenant les titres détenus en vue de transaction à moyen et long terme respecte le ratio de Cooke à savoir que le rapport, des fonds propres sur les créances pondérées selon la catégorie du débiteur n'excède pas 8%. Son amendement de 1996 ajouta une exigence de fonds propres pour le risque de marché pesant sur leur portefeuille de négociation, constitué de leurs positions détenues en vue d'être cédées à court terme ou de bénéficier d'une évolution favorable des prix à court terme ou encore de figer des bénéfices d'arbitrages, ainsi que des positions qu'elles détiennent en vue de couvrir ce dernier. Le deuxième accord de 2004 ajouta au risque de crédit et de marché la prise en compte du risque opérationnel. Il adressa les trois piliers : le pilier quantitatif définissant l'exigence de fond propre, le pilier qualitatif définissant les modalités de contrôle et le pilier sur la transparence visant la communication aux tiers.

Depuis l'amendement à l'accord de Bâle de 1996, les établissements de crédit et les entreprises d'investissement ont la possibilité de calculer l'exigence de fonds propres relative à leur portefeuille de négociation selon un modèle interne basé sur une Value At Risk de ce portefeuille avec un intervalle de confiance de 99%. L'exigence de fonds propre retenue est le maximum de cette VaR quotidienne et de sa moyenne sur les soixante derniers jours ouvrés multipliée d'un facteur compris entre trois et quatre. Ce facteur est fixé par l'autorité de contrôle en regard des dépassements observés ex-post. L'exigence ainsi définie correspond approximativement à la VaR 100 jours du portefeuille pour un intervalle de confiance de 99%. L'incapacité de cette VaR intégrant pourtant les risques de taux d'intérêt, de titre de propriété (ou action), de change et de contrepartie, à capter les risques d'événements rares comme la défaillance soudaine d'un émetteur a conduit dans un premier temps les autorités de contrôle à adopter le facteur quatre. En réponse le comité de Bâle et l'IOSCO de juillet 2005 ont recommandé l'ajout d'une charge additionnelle pour risque de défaut. Force de quoi, l'arrêté en vigueur aujourd'hui prend en compte les risques de taux d'intérêt, de titre de propriété (ou action), de change et de contrepartie, optionnels sur le change et sur les produits de base les dépassements des limites sur les grands risques de crédits et le risque de défaut visé précédemment. La crise de liquidité sur le marché interbancaire de 2007-2008 a mis en évidence que le moindre coût de fonds propre requis par la VaR à 99% sur le portefeuille de négociation vis-à-vis de celle à 99.9% sur le portefeuille bancaire conduisait à une sous-estimation des risques qui a tendu le marché et fragilisé les banques. Pour enrayer ce phénomène, la Banque des règlements internationaux a proposé en 2009 une nouvelle mouture des accords de Bâle, introduisant un accroissement de l'exigence de capital définie à partir de la VaR à 99.9% des titres en portefeuille de négociation détenu sur un horizon de un an dans les conditions de marché de 2007-2009, c'est à dire intégrant notamment l'impact des migrations des notations de crédit sur les prix et prenant en compte les horizons de détention de observés pendant cette période.

Par ailleurs la circulaire CSSF 07/290, impose aux organismes de mettre en place et maintenir un système en mesure de produire des estimations prudentes et fiables, soit «mark to market» à partir du prix du marché fixé quotidiennement par une source indépendante et reconnue, soit en « mark to model » calculée de toute autre manière par référence à un modèle à partir de valeurs de marché. Les données prises en compte pour l'établissement des prix doivent portées sur une période d'observation d'au moins un an et vérifiées au moins mensuellement par une unité indépendante.

2. Back-testing

La validation quantitative par le contrôle des VaR repose sur le back testing ex-post sur une fenêtre T de 250 jours des estimations produites ex-ante. Elle repose sur l'analyse du nombre N de violations de la VaR observées, c'est-à-dire de cas où la prévision est dépassée. En 1995, Kupiec proposa de vérifier que le pourcentage de violations observé convergeait vers 1-p pour une VaR estimée avec l'intervalle de confiance p en testant que le nombre de violations observées suivait une loi binomiale de paramètre 1-p avec le rapport de vraisemblance $LR = 2 \cdot \left[\ln(p^{T-N}(1-p)^N) - \ln(p^{T-N}(1-p)^N) \right] \approx \chi_1^2$ où $p = 1 - N/T$. Si ce test accepte l'estimation avec au plus $\alpha=5\%$ d'erreur pour N=6 soit plus de deux fois la moyenne attendue, l'amendement de 1996 s'est montré plus prudent en appliquant une pénalisation dès N=5.

Violations sur 250 jours	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Facteur multiplicateur	3	3	3	3	3	3.4	3.5	3.65	3.75	3.85	4

Facteurs multiplicateurs ou scaling-factors prévus dans le cadre de l'amendement de 1996

En 1998 Christoffersen montra que valider la VaR pouvait se ramener à valider que le taux de violations observé convergeait vers 1-p et que les violations étaient temporellement indépendantes. Pour valider conjointement les deux hypothèses elle proposa de combiner le test de Kupiec avec un test validant que les violations se comportent au premier ordre comme une chaîne de Markov sur $\{0,1\}$ où 0 et 1 correspondent respectivement aux événements absence et survenance d'une violation. Si l'on désigne par N_{ij} le nombre de fois où l'événement i est immédiatement suivi de l'événement j et $\pi_0 = N_{00}/(N_{00}+N_{10})$, $\pi_1 = N_{10}/(N_{10}+N_{11})$, $\pi = (N_{00}+N_{10})/(N_{00}+N_{01}+N_{10}+N_{11})$ les fréquences d'absence de violations observées respectivement en partant de l'état 0, de l'état 1 et de 0 ou 1 elle propose de tester le rapport de vraisemblance $LR = LR_{Kupiec} + LR_{Indep} \approx \chi^2(2)$ où LR_{Indep} est la fonction de vraisemblance d'indépendance d'ordre 1 : $2 \cdot \left[\ln(\pi_0^{N_{00}} \pi_1^{N_{10}} (1-\pi_0)^{N_{01}} (1-\pi_1)^{N_{11}}) - \ln(\pi^{N_{00}+N_{10}} (1-\pi)^{N_{01}+N_{11}}) \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi_1^2(2)$.

En 2004 Engle et Manganelli proposèrent de tester l'indépendance au-delà du premier ordre et vis-à-vis d'autres variables à partir de la régression linéaire de $Hit_n - (1-p)$, où Hit_n désigne le nombre de violations en n sachant les violations et éventuellement une autre grandeur z_n les k jours précédents : $\delta + \sum_{k=1..K} \beta_k \cdot Hit_{n-k} + \sum_{k=1..K} \gamma_k \cdot g(Hit_{n-1}, \dots, Hit_{n-k}, z_{n-1}, \dots, z_{n-k})$ avec g une fonction de ses variables. Il consiste à tester le respect de la moyenne c'est-à-dire $\delta=0$ et l'absence de dépendance c'est-à-dire $\beta_k = \gamma_k = 0$ pour tout k entre 1 et K, au moyen d'un rapport de vraisemblance ou d'une statistique de Wald : $DQ_{cc} = \Psi' \cdot Z' \cdot Z \cdot \Psi / (p - p^2) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(2K+1)$ où $\Psi = (\delta, \beta_1, \dots, \beta_K, \gamma_1, \dots, \gamma_K)$ et Z est la matrice des variables explicatives du modèle. Ce test peut être décomposé en un test validant la moyenne des violations observées et deux tests validant les indépendances vis-à-vis des Hit et z passés.

La même année Cristoffersen et Pelletier proposèrent un nouveau test d'indépendance basé sur D_n la durée séparant les violations n et n-1, qui teste si D_n suit la loi une loi exponentielle de paramètre $\alpha=1-p$ attendue en cas d'indépendance plutôt qu'une loi de Weibull de paramètre d'échelle α' et de

centrage $1/\beta'$. Lorsqu'il y a indépendance $\beta'=1$ et la loi de Weibull se confond avec la loi exponentielle de paramètre α' . Le test consiste donc à tester le rapport de vraisemblance : $LR_{cc}^{durée} = 2(\ln_{nc} - \ln_c) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(2)$ où \ln_c et \ln_{nc} désignent respectivement les log-vraisemblances respectives de loi de Weibull et exponentielle.

Lors du test statistique d'une hypothèse sont distinguées les erreurs de première espèce consistant à refuser l'hypothèse à tort et celles de deuxième espèce consistant à accepter l'hypothèse à tort. Les probabilités de réalisation des risques de première et de seconde espèce évoluant en sens inverse, Neyman et Pearson ont dressé pour principe de fixer un seuil maximum α à la probabilité du risque de première espèce pris en général égal à 5%. La probabilité de rejeter à raison l'hypothèse appelée puissance du test vaut $1 - \beta$ où β est la probabilité d'erreur de type II dépend alors du seuil α .

Hypothèse \ Décision	« Acceptation »	« Rejet »
Vraie	Exacte (Probabilité minimum= $1-\alpha$)	Erreur de 1 ^{ère} espèce (Probabilité maximum= α)
Fausse	Erreur de 2 ^{ème} espèce (Probabilité= β)	Exacte (Probabilité= $1-\beta$)

Typologie des erreurs associées aux tests statistiques

Violations \leq Seuil \ Décision	« Acceptation »	« Rejet »
Vraie	Sur provisionnement (Probabilité minimum=95%)	Sur provisionnement (Probabilité maximum=5%)
Fausse	Sous provisionnement (Probabilité= β)	Sous provisionnement (Probabilité= $1-\beta$)

Le Back Testing d'une VaR consiste à tester que le nombre de violations observées est statistiquement en deçà du seuil α légèrement inférieur à 5%.

Les travaux de Campbell(2007), Bertowitz, Hurlin et Tokpavi (2007), Cristoffersen et Pelletier (2004) ... montrent que ces tests possèdent une puissance relativement faible du fait la petite taille de l'échantillon observé. Concernant le test de convergence vers 1-p du pourcentage de violations, Hurlin et Tokpavi considèrent qu'une méthode de calcul invalide de la VaR sera rejetée dans au plus deux cas sur trois pour les tests les plus puissants. En conséquence de quoi ces techniques de backtesting s'avèrent incapables de rejeter parmi les nombreuses techniques actuelles celles qui sont invalides.

3. Comparaison de quelques techniques de calcul de la VaR 10 jours

Dans cette partie nous allons comparer les VaR 99% à 10 jours au soir du 21/10/2005 d'un portefeuille composé pour de 1M€ d'actions BNP-Paribas, de 1M€ d'euros d'actions Michelin et de 1M€ d'actions Danone au moyen des méthodes paramétriques et des bootstraps avec et sans remise sur la fonction de répartition historique. Cette étude s'inscrit comme une extension de l'exercice proposé sur ce sujet par Gregory Taillard dans le cadre de son cours de Gestion d'actifs et des risques dispensée au CNAM l'année 2006-2007 dont sont reprises les données.

	BNP-Paribas	Michelin	Danone	Portefeuille
Cornish-Fisher(*)	66 803 €	92 822 €	88 723 €	164 661 €
Log normale(*)	65 825 €	88 335 €	91 989 €	168 221 €
Log normale	65 554 €	88 445 €	93 108 €	169 815 €
Normale(*)	68 057 €	92 056 €	97 446 €	173 611 €
Normale	67 313 €	91 602 €	97 728 €	173 971 €
Bootstrap sans remise	60 158 €	89 361 €	92 571 €	163 768 €
Bootstrap avec remise	60 758 €	91 338 €	94 047€	167 499 €

VaR 10 jours à 99% des positions figées

(*Paramètres obtenus par ré échantillonnage sur 16392 tirages)

	BNP-Paribas	Michelin	Danone	Portefeuille
Cornish-Fisher(*)	0	1	1	2
Log normale(*)	0	1	1	2
Log normale	0	1	1	2
Normale(*)	0	1	1	2
Normale	0	1	1	2
Bootstrap sans remise	2	1	1	2
Bootstrap avec remise	2	1	1	2

Violations de la VaR 10 jours à 99% des positions figées vis-à-vis de la VaR historique

(*Paramètres obtenu par ré échantillonnage sur 16392 tirages)

Ces tableaux montrent la variété des estimations obtenues pointée par la littérature. [C. Hurlin, S. Tokpavi (2007)]. Ils montrent que les VaR Bootstrap considérées généralement comme plus prudentes que les VaR paramétriques par cette même littérature ne l'est pas nécessairement. Il montre que si la VaR Sans remise s'avère moins prudente que celle avec remise leur nombre de violations est plus en accord avec l'attendu que celles des VaR paramétriques étudiées. Les diagrammes de convergence portés en annexe décrivant l'évolution de la VaR en fonction de la taille des tirages appuient l'image d'Elfron selon laquelle les sous-échantillons s'emboîtent comme des poupées Russes. [Cf. A. C. Davison & D. V. Hinkley(1997)] Ils illustrent que la Valeur de la VaR croît sensiblement avec la taille de l'échantillon sans dépasser la plus grande VaR des échantillons qui la compose. Ils confirment que si la VaR 99% à dix jours par tirage dans une fonction de répartition empirique peut-être finement calculée avec la technique du Monte Carlo c'est au prix d'un nombre de tirages au minima de l'ordre d'un million du fait de l'accroissement de la précision du calcul en $O(N^{-1/2})$. Au prix de quoi l'on sait construire des VaR Bootstrap avec ou sans remise considérées comme plus prudentes et conformes à l'historique que les VaR Paramétriques et ce sans recours à un modèle.

Conclusion générale

C'est au début des années 90 à la demande express de Dennis Weatherstone PDG de J.P. Morgan, non content de ne pas disposer d'une information synthétique journalière sur la santé financière de sa banque que fut produit le premier rapport de VaR quotidien pour un horizon de 24h.

Le développement des capacités de traitement informatique aidant ce calcul complexe s'est répandu dans le milieu bancaire, qui rapidement pointa du doigt l'obsolescence des formules standards définissant leur exigence de fonds propres exigée par le premier accord de Bâle de 1988.

Ce vent de modernité fini par atteindre le comité de Bâle qui a introduit puis élargit dans ces préconisations le champ d'utilisation des modèles internes adressant initialement le portefeuille bancaire « moyen /long terme » au portefeuille de négociation « court terme » et prenant en compte consécutivement aux crises rencontrées après le risque de crédit, les risques de marché, opérationnels, de liquidité...

Le régulateur européen engagé dans le processus d'intégration des marchés financiers en quête des meilleures pratiques a embrassé simultanément la construction du cadre prudentiel et comptable construit autour des normes IAS/IFRS. Ces normes visent une plus juste représentation des comptes rompant notamment avec la pratique jugée trop prudente de valorisation historique au profit d'une valorisation en juste valeur soumise à la volatilité des prix et au problème d'illiquidité des biens.

Ces vagues de réformes touchent à présent le monde très hétérogène de l'assurance réunissant des compagnies réalisant des activités aussi différentes que l'assurance des personnes et l'assurance des biens sous des structures de société de personnes ou de capitales. Ces compagnies sont soumises à une réglementation protectrice des assurés, qui permet le transfert des portefeuilles des sociétés jugées incapables par l'autorité de contrôle de tenir ces engagements.

Ce dispositif de sanction par lequel la société n'est en définitive jamais propriétaire de son portefeuille de contrat protège au final les tiers. En effet une couverture comme la responsabilité civile garantit le dédommagement non de l'assuré responsable du dommage mais de la victime. La vocation de l'autorité du contrôle bancaire est sensiblement la même en matière de crédit, son objet étant de garantir au tiers un accès au crédit indépendamment des crédits de son portefeuille.

La dernière crise financière de liquidité de 2008-2009 a pointé du doigt l'interdépendance des marchés financiers et l'insuffisance de capacité de grandes banques à tenir leur engagements pris sur des produits financiers dérivés notamment dont la valorisation par la théorie financière intègre nullement le coût de portage du risque. Puisqu'elle suppose que les parties en risque contraire vis-à-vis de l'évolution d'un cours organisent son transfert à un prix acceptable pour chacune d'entre elles.

S'il est indéniable que l'augmentation des capacités de calcul et l'amélioration des techniques de simulation a permis une plus juste appréciation des risques, on est en droit de s'interroger sur le caractère dissuasif des sanctions prononcées par le contrôle bancaire quand l'on apprend que la société générale a affiché 118 jours de perte, 29 dépassement de la VaR sur son portefeuille de trading en 2008. [Risk & Capital management News letter n°4 du 20/03/2009].

Suite à la crise de liquidité de 2008-2009, les régulateurs cherchent à présent à renforcer l'exigence de fonds propres des banques en introduisant des innovations sur la VaR associée au portefeuille de négociation comme l'utilisation de VaR 99.9%. Ces innovations tendant à renforcer le caractère procyclique de la VaR du portefeuille de négociation bancaire, s'accordent mal avec le besoin d'une exigence de fonds propre contra-cyclique pour l'assurance.

L'exigence de capitaux propres faites aux assureurs dans le cadre solvency II, vise à porter à 0.5% leur probabilité de ruine à un an, soit une faillite tout les deux siècles. Frédéric Planchet et Guillaume Leroy font remarquer dans leur article de mai 2010 paru sur la tribune de l'assurance que les fonds propres tels que définis dans le dernier QIS5, vont au-delà le ceux du QIS 4. Ils estiment que le dernier calibrage va bien au-delà d'une probabilité de ruine individuelle de 0.5% et prend largement en compte le risque systémique, c'est-à-dire de contagion, il augmente aussi l'exigence de fonds propres des sociétés en difficulté. Sa calibration pro cyclique est selon ces auteurs contre productive économiquement, obligeant à répercuter immédiatement sur le surcoût des garanties au moindre vacillement de l'économie, et ce faisant à limiter l'accès à l'assurance aux agents économiques qui en ont le plus besoin... Ils pensent que solvency II doit être calibré en veillant à ne pas opérer une surprotection capitalistique amplifiant les effets du cycle économique au détriment des acteurs économiques.

Notations

Ensembles

Card(A)	Cardinal de l'ensemble A : nombre d'éléments de A
\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{R}^+	Ensemble des réels positifs
\mathbb{N}^+	Ensemble des entiers positifs ou nuls

Fonctions usuelles

$ x = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$	Norme Euclidienne de x
$\lceil x \rceil$	Plus petit entier supérieur à x
min(x,y)	minimum de x et de y
max(x,y)	maximum de x et de y
x^+	maximum de x et de 0
$C_n^p = \binom{n}{p}$	Coefficient binomiaux
$I_A(x)$	Fonction indicatrice, vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon
$\Gamma(x)$	Fonction Gamma de paramètre $x > 0$
$\Phi(x)$	Fonction de répartition de la loi gaussienne standard
$T_\nu(x)$	Fonction de répartition de la loi de student à ν degrés de liberté Pour son calcul se référer à [G. Saporta(2006) Probabilités Analyse des données et statistique 2ème édition révisée et augmentée Ed Technip]

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt \quad \text{Fonction de Debye}$$

$$di \log(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt \quad \text{Fonction dilogarithme}$$

$$\sum_{i=0..n} i = n(n+1)/2, \quad \sum_{i=0..n} i^2 = n(n+1/2)(n+1)/3$$

$$\sum_{i=0..n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad \sum_{i=0..n} i \cdot x^i = \frac{(n \cdot x - (n+1)) \cdot x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

Fonctions propre à un échantillon

Rang(X_k)	Rang de X_k : nombre de X_n tels que $X_n \leq X_k$
---------------	---

Variable aléatoires

IID	Indépendantes et Identiquement distribuées
$X \Theta$	loi de X conditionnée par le paramètre de valeur Θ
$f(X \Theta)$	densité de X conditionnée par le paramètre de valeur Θ
$\bar{X}=E(X)$	Moyenne de la variable aléatoire X
σ_x	Ecart type de la variable aléatoire X
$\text{Var}(X)$	Variance de la variable aléatoire X
$\text{Cov}[X,Y]$	Covariance des variables aléatoires X et Y
$\sigma_{(X_1, \dots, X_s)}^2$	Matrice de Variance-Covariance du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_s)
Lois de probabilité	
$\chi^2(n)$	Loi du chi-2 à n degrés de libertés

Bibliographie

Abramowitz M. & Stegun I.A. (1964) Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington D.C, reprinted by Dover, New York.

Alfonso Sánchez-Bruno & Concepción San Luis-Costas(1995), "A statistical analysis of seven multipliers for linear congruential random number generators with modulus $2^{31}-1$, Quality and Quantity " Volume 29, Number 3 / août 1995 p. 331-337.

Antonov I. & Saleev V.(1979), An economic method of computing LPT -sequences, USSR Comput. Math. Math. Phys. 19, no. 1, p. 252-256.

Ahrens J. H., & Dieter U. (1974), Computer methods for sampling from gamma, beta, Poisson, and binomial distributions, Computing 12, p.223–246.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., & Heath D. (1999a), Coherent RiskMeasures, Mathematical Finance 9, p. 203-228.

Atanassov E. I. & Durchova M. K.(2003) Generating & Testing the Modified Halton Sequences, Numerical Methods & Applications, Springer-Verlag, LNCS 2542, p. 91-98.

Atanassov E. I.(2004), On the discrepancy of the Halton sequences, Mathematica Balkanica, Vol. 18, Fasc. 1-2 , p. 15-32.

Atkinson A. C. (1979) A family of switching algorithms for the computer generation of beta Random variates Biometrika 66, p. 141–5.

Aubron, E.(2009) Etude de l'impact des dépendances sur le Capital Economique, Mémoire présenté à l'institut des actuaires.

Barbe P., Genest C., Ghoudi, K. & Rémillard B. (1996), On Kendall's process, J. Multivariate Anal. 58.

Batcher K. E. (1968) Sorting networks & their applications In Proceedings of the 1968 Spring Joint Computer Conference (SJCC), volume 32, p. 307–314.

Bays C. & Durham S. D. (1976), Improving a poor Random number generator, ACM Transactions on Mathematical Software 2, p. 59-64.

Berkowitz J. (2001), Testing Density Forecasts With Applications to Risk Management., Journal of Business and Economic Statistics 19, p. 465-474.

Berlekamp E. R.(1968) "Algebraic coding theory" McHill New York.

- Best D. J. (1983), A note on gamma variate generators with shape parameter less than unity, *Computing* 30, p. 185–188.
- Braaten E. & Weller W. (1979), An improved low-discrepancy sequence for multidimensional Quasi-Monte Carlo integration. *J. Comput. Phys.* 33, p. 249-258.
- Bratley P., Fox B. L. (1988) ALGORITHM 659: implementing Sobol's quasiRandom sequence generator, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, v.14 n.1, p. 88-100, March 1988
- Bratley P., Fox B.L. & Schrage E.L.(1983), *A guide to simulation*. Springer-Verlag, New York, p. 180-213.
- Bratley P., Fox B.L. & Schrage. E.L. (1987), *A guide to simulation (2nd ed.)*, Springer-Verlag, New York, Inc., New York, NY.
- Brent R. P., Larvala S. & Zimmermann P.(2000), A fast algorithm for testing irreducibility of trinomials mod 2 (preliminary report), Report PRG TR-13-00, 30 December 2000. Available from <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/richard.brent/pub/pub199.html>.
- Brent R. P., Larvala S. & Zimmermann P. (2003), A fast algorithm for testing reducibility of trinomials mod 2 & some new primitive trinomials of degree 3021377, *Math. Comp.* 72, p. 1443–1452. http://wwwmaths.anu.edu.au/_brent/pub/pub199.html
- Campbell S. D. (2007), "A Review of Backtesting and Backtesting Procedures", *Journal of Risk*, Vol 9, Number 2, p. 1-19.
- Chariot A. (2008) *Quelques Applications de la Programmation des Processeurs Graphiques à la Simulation Neuronale et à la Vision par Ordinateur*, Thèse de Doctorat de l'Ecole des Ponts, spécialité "Mathématiques et Informatique" .
- Chen H. C. & Asau Y. (1974), On generating Random variates from an empirical distribution, *AIIE Transactions* 6, p. 163–166.
- Cheng J. & Druzdzel M. J. (2000), Computational investigation of low-discrepancy sequences in simulation algorithms for Bayesian networks. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Robert C, P. & G. Casella (2005), Monte Carlo Statistical Methods, Second Edition, Springer* 2.55.
- Cheng R. C. H. & Feast G. M. (1979), Some simple gamma variate generators, *Applied Statistics* 28, p. 290–295.
- Cheng R. C. H. & Feast G. M. (1980), Gamma variate generators with increased shape parameter range, *Communications of the ACM* 23, p. 389–393.
- Chernick. M. R. (1999), *Bootstrap methods: a practitioner's guide*. New York: Wiley, 264p
- Christoffersen P. F.(1998), "Evaluating interval forecasts", *International Economic Review* 39, p. 841-862.

Christoffersen P. F. & D. Pelletier (2004), "Backtesting Value-at-Risk : A Duration-Based Approach", *Journal of Financial Econometrics* 2, 1, p.81-108.

Chung K.L.(1949), An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution. *Transactions of the American Mathematical Society*, 67, p.36-50.

Cornish E. A. & Fisher R. A.(1937) "Moments and Cumulants in the Specification of Distributions." Extrait de la *Revue de l'Institut International de Statistique* 4, p.1-14, 1937. Reprinted in Fisher, R. A. *Contributions to Mathematical Statistics*. New York: Wiley, 1950.

Couture R. & L'Ecuyer P. (2000), Lattice computations for Random numbers. *Mathematics of Computation* 69, 230, p.757–765.

Dagnelie P. (1998), *Statistique théorique et appliquée. Tome 1 : Statistique descriptive et bases de l'inférence statistique*. Bruxelles : De Boeck et Larcier, 508p.

Davison A. C. & Hinkley D. V.(1997), *Bootstrap Methods and Their Application*, Cambridge University Press, 28 octobre 1997

Deheuvels P. (1979), La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. *Bulletin de la Classe des Sciences, V. Série, Académie Royale de Belgique* 65, p.274–292.

Denuit M. & Charpentier A. (2004), *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie, Tome I : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque*. Economica.

Devroye L. (1986), *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag. New York.

Dhaene J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D.(2002) The concept of comonotonicity in actuarial science & finance: Theory. *Insurance: Mathematics & Economics* 2002a, 31 (1), p.3–33.

Dick J.(2008), Harald Niederreiter: On the exact t-value of Niederreiter and Sobol' sequences. *J. Complexity* 24(5-6) p.572-581.

Dodge Y. (2004) *Statistique, Dictionnaire encyclopédique* Springer.

Durbin J. & A. S. Stuart (1951), "Inversions and rank correlations". *Journal of Royal Statistical Society Series B* 2, p.303-309.

Durstenfeld R., (1964), Algorithm 235: Random permutation. *Commun. ACM* , 420.

Elfron B. & Tibshirani R.J. (1993), *An introduction to the bootstrap*, Chapman & Hall.

Engle R. F. & Manganelli S. (2004), "CAViaR Conditional autoregressive Value-at-Risk by regression quantiles", *Journal of Business and Economic Statistics* 22, p. 367-381.

- Erdmann E. D. (1992), Empirical tests of binary keystreams. M.S. thesis, Department of Mathematics, Royal Holloway & Bedford New College, University of London.
- Fang K.T., Shui, W.C. et Pan, JX. (1999) Uniform designs based on latin squares. *Statistica Sinica* 9(1999), p.905-912.
- Faure H. (1978) Discrépance de suites associées à un système de numération [Discrepancy of sequences associated with a number system], *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 286, no. 6, A293-A296, 1978
- Faure H. (1982), Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension s), *Acta Arith.* 41, p.337-351.
- Faure H., Lemieux C. (2008) Generalized Halton sequences in 2008: a comparative study. A paraître en 2009 in *ACM Journal* October 2008, p.1-30.
- Fisman G.S., & Moore L.R. (1986) An exhaustive analysis of multiplicative congruential multiplicative generators with modulus 231 -1 *SIAM Journal on Scientific & Statistical Computing* 7, p.24-47.
- Fredricsson S. A. (1975) Pseudo-Randomness properties of binary shift register sequences. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-21, p. 115–120.
- Fushimi M. & Tezuka S.(1983), The k-distribution of the generalized feedback shift register pseudo random numbers. *Communications of the ACM* 26, p. 516-523.
- Geman S. & Geman D. (1984), "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, & the Bayesian Restoration of Images". *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence* 6 (6), p.721–741.
- Genest C. & Mac Ka R.J.(1986), "The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals". *The American Statistician*, vol 40, p.280-283.
- Genest C. & Werker B.J. M. (1995) Conditions for the asymptotic semi parametric efficiency of an omnibus estimator of dependence parameters in copula models. *Biometrika* 82, p.543–552
- Gentle J. E. (2003), *Random Number Generation & Monte Carlo Methods*, 2nd edition , Springer.
- Golomb S. W.(1982), *Shift Register Sequences*, Revised Edition, Aegean Park Press, CA.
- Golub G. H. & Van Loan C.F.(1989) *Matrix Computations*, 2nd edn., The John Hopkins University Press.
- Greenberger M. (1961), "An A Priori Determination of Serial Correlation in Computer Generated Random Numbers", in : *Mathematics of Computation* (American Mathematical Society), Vol. 15, No. 76, p.383-389.
- Greß A. & Zachmann G.(2006) GPU-ABISort: Optimal Parallel Sorting on Stream Architectures. In *Proceedings of the 20th IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium (IPDPS)*,

Rhodes Isl&, Greece, 25–29 April 2006.

Greß A. & Zachmann G.(2006) GPU-ABiSort: Optimal parallel sorting on stream architectures. Technical Report IfI-06-11, TU Clausthal, Computer Science Department, Clausthal-Zellerfeld, Germany, oct 2006.

Halton J. H. (1960), On the efficiency of certain quasi-Random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numer. Math. 2, p.84-90.

Hastings C., Jr.(1955) Approximation for Digital Computers, princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Hastings W. K. (1970), Monte Carlo sampling methods using Markov chains & their applications. Biometrika 57, 97–109. (Reprinted in Samuel Kotz & Norman L. Johnson (Editors) (1997), Breakthroughs in Statistics, Volume III, Springer-Verlag, New York, p.240–256.)

Hoare C.A.R. (1962), "Quicksort", Computer Journal, Vol. 5, p. 10-15.

Hong H. S. & Hickernell F. J.(2003), Algorithm 823: Implementing scrambled digital sequences, ACM Trans. Math. Software, 29, p. 95-109.

Hong H. S., Hickernell F. J., & Wei, G. (2003), The distribution of the discrepancy of scrambled digital (t, m, s)-nets. Math. Comput. Simul. 62, 3-6 (Mar. 2003), p. 335-345.

Hurlin C. & Tokpavi, S. (2007), .Bactesting Value-at-Risk Accuracy: A Simple New Test., Journal of Risk, Vol 9, 2, p. 19-37.

Hurlin C. & Tokpavi S. (2008), Une Evaluation des Procédures de Backtesting "Tout va pour le Mieux dans le Meilleur des Mondes". Finance, vol 29(1), p. 53-80.

Jackel P.(2002) Monte Carlo methods in finance. JohnWiley & Sons, February 2002.

Joe S. & Kuo F. Y.(2003), *Remark on Algorithm 659: Implementing Sobol's quasi random sequence generator*, ACM Trans. Math. Softw. **29**, p. 49-57.

Joe S. & Kuo F. Y.(2008), Constructing Sobol sequences with better two-dimensional projections, SIAM J. Sci. Comput. 30, p.2635-2654.

Jöhnk M. D. (1964), Erzeugung von Betaverteilter und Gammaverteilter Zufallszahlen, Metrika 8, p.5–15.

Jordan H. F. & Wood D. C. M.(1973) On the distribution of sums of successive bits of shift-register sequences. IEEE Trans. Computers C-22,p. 400–408.

Kemp A. W. (1981), Efficient generation of logarithmically distributed pseudo Random variables, Applied Statistics 30, p.249-253.

- Kendall M. (1938), «A New Measure of Rank Correlation». *Biometrika* 30 (1-2), p. 81–89
- Kiefer J. (1961), On large deviations of the empirical D.F. of vector chance variables and a law of the iterated logarithm, *Pacific J. Math.* 11, p. 649–660.
- Kirkpatrick S. & Stoll E. (1981); A Very Fast Shift-Register Sequence Random Number Generator, *Journal of Computational Physics*, V. 40. p. 517-526.
- Knuth D.E. (1981), *The Art of Computer Programming: Volume.2(2nd ed.)*, Semi numerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Knuth D.E. (1997) *The art of Computer Programming: Volume 2 (3rd ed.)*, Semi numerical Algorithms, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA.
- Kocis L. & W.J. Whiten (1997) Computational investigation of low-discrepancy sequences, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23, p.266-294.
- Krauth G.(2007) « Provisionnement et corrélation entre branches » Mémoire présenté à l’institut des actuaires français.
- Kritzer P. (2006), Improved upper bounds on the star discrepancy of (t,m, s) -nets & (t, s) -sequences. *Journal of Complexity* 22, p.336–347.
- Kumada T., Leeb H., Kurita Y. & Matsumoto M.(2000), New primitive t -nomials ($t = 3; 5$) over $GF(2)$ whose degree is a Mersenne exponent, *Math. Comp.* 69 (2000), no. 230, p.811-814.
- Kupiec P. (1995) “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”, *Journal of Derivatives* 3 (winter), 73-84, 1996, in *Risk Measurement and Systemic Risk*.
- L’Ecuyer P. (1988) Efficient & portable combined Random number generators, *Communications of the ACM* 31:742-749, 774. *Correspondence* 32 , p.1019-1024.
- L’Ecuyer P. (1990) Random Numbers For Simulation, *Communication of the ACM/October 1990/Vol. 33, No 10*
- L’Ecuyer P. (1996a) Combined multiple recursive Random number generators, *Operations Research* 44, p.816-822.
- L’Ecuyer P. (1996b) Maximally equidistributed combined Tausworthe generators. *Mathematics of Computation*, 65(213), p.203–213.
- L’Ecuyer P. (1999a), Good parameters & implementations for combined multiple recursive Random number generators, *Operations Research* 47, p.159-164.
- L’Ecuyer P. & Simard R, (1999) “Beware of Linear Congruential Generators with Multipliers of the form $a = +/- 2^q +/- 2^r$ ”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 25, 3, p.367-374.

L'Ecuyer P. & Touzin R.(2000), «Fast Combined Multiple Recursive Generators with Multipliers of the form $a = +/- 2^d +/- 2^e$ », Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, Dec. 2000, p.683-689.

L'Ecuyer P. & Simard R.(2007) TestU01: A C Library for Empirical Testing of Random Number Generators, May 2006, Revised November 2006, ACM Transactions on Mathematical Software, 33, 4, Article 22, August 2007.

Lehmer D. H. (1951), "Mathematical Methods in Large-scale Computing Units", in: Proceedings of the Second Symposium on Large Scale Digital Computing Machinery, Harvard University Press: Cambridge, p. 141-146.

Lemieux C. & L'Ecuyer P.(2001), "On Selection Criteria for Lattice Rules & Other Quasi-Monte Carlo Point Sets", Mathematics & Computers in Simulation (selected papers from the 1999 IMACS Seminar on Monte Carlo Methods), 55, 1-3 (2001), p.139-148.

Lewis T. G. & Payne W. H. (1973) Generalized feedback shift register pseudo random number algorithm. Journal of the ACM, 20(3), p.456-468.

Lidl R. & Niederreiter H. (1986) Introduction to Finite Fields & Their Applications. Cambridge University Press, Cambridge.

Lindholm J. H. (1968) An analysis of the pseudo-randomness properties of subsequences of long m-sequences. IEEE Trans. Inform. Theory IT-14, p.569-576.

Marsaglia G.(1963) Generating discrete random variables in a computer. Commun. ACM 6(1): p.37-38

Marsaglia G. (1968), "Random Numbers Fall Mainly in the Planes" Proceedings of National Academy of Sciences USA, 61, p.25-28.

Marsaglia G. (1985), Note on a Proposed Test for Random Number Generators. IEEE Transactions on Computers. c-34(8), p.756-758.

Marsaglia G.(1996), Diehard: A battery of tests of Randomness. Available on the internet at http://stat.fsu.edu/_geo/diehard.html.

Marsaglia G. (1999), "Random Numbers for C: End, at last?" Posting to sci.stat.math. URL <http://groups.google.com/groups?selm=36A5BB98.F2561DFF%40stat.fsu.edu>.

Marsaglia G. & Zaman A.(1991), "A new class of Random number generators", The Annals of Applied Probability 1, p.462-480.

Marsaglia G & Zaman A. (1993) The KISS generator. Technical report, Dept. Of Statistics, Univ. of Florida.

Marsaglia G., Zaman A. & Marsaglia J.C.W. (1994) Rapid evaluation of the inverse of the normal distribution function, *Statistics & Probability Letters* 19, p.259-266.

Matousek J.(1998a). *Geometric Discrepancy : An Illustrated Guide*. Springer-Verlag, Heidelberg.

Matousek J. (1998b). On the L_2 discrepancy for anchored boxes. *Journal of Complexity* 14, p.527-556.

Matsumoto M. & Kurita Y.(1992), Twisted GFSR Generators, *ACM Transactions on Modeling & Computer Simulations*, Vol. 2, No. 3, July 1992, p. 179-194.

Matsumoto M., Kurita Y.(1994): Twisted GFSR Generators II. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.* 4(3), p.254-266

Matsumoto M. & Kurita Y. (1996) Strong deviations from Randomness in m-sequences based on trinomials. *ACM Trans. on Modeling & Computer Simulation* 6, p.99–106.

Matsumoto M. & Nishimura T. (1998a) Mersenne Twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-Random number generator. *ACM Trans. on Modeling & Computer Simulation* 8, p.3–30.

Matsumoto M. & Nishimura T.(1998b), "Dynamic Creation of Pseudorandom Number Generators", *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1998*, Springer, 2000, p.56-69.

Matsumoto M. & Nishimura T. (2000), A nonempirical test on the weight of pseudoRandom number generators. In *Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo methods 2000*, p.381–395. Springer-Verlag, 2002.

Matsumoto M. & Nishimura T.(2003) "Sumdiscrepancy test on pseudoRandom number generators" *Mathematics & Computers in Simulation*, Vol. 62, p. 431-442.

Matsumoto M., Saito M., Haramoto H., Nishimura T.(2006), PseudoRandom Number Generation : Impossibility & compromise. *Journal of Universal Computer Science*, vol. 12, no. 6(2006), p.672-690.

Matsumoto M., Wada I., Kuramoto A. & Ashihara H.(2007) "Common defects in initialization of pseudoRandom number generators", *ACM Transactions on Modeling & Computer Simulation* Vol. 17 , Issue 4 (September 2007) Article No.: 15

McCullough B.D. (2008) Microsoft Excel's «Not The Wichmann–Hill» Random number generators, *Computational Statistics & Data Analysis*.

Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H. & Teller E. (1953), Equations of state calculation by fast computing machines, *Journal of Chemical Physics* 21, 1087–1092. (Reprinted in Samuel Kotz & Norman L. Johnson (Editors) (1997), *Breakthroughs in Statistics*, Volume III, Springer-Verlag, New York, p. 127–139.).

Mitchell G. J. & Moore D. P., Unpublished(1958) Cited in [Knuth, D.E. (1981), *The Art of Computer Programming: Volume.2(2nd ed.)*], 26).

Monfort A., (2007) Note de cours d'économétrie de la finance (STA202) CNAM, Paris.

Moore G. E. (1965), Cramping more components onto integrated circuits. *Electronics*, 38(8), p.114-117.

Moro B. (1995) The full monte, *Risk* 8(Feb), p.57-58.

Morokoff W. J. & Caflisch R.E.(1994), Quasi-Random sequences & their discrepancies, *SIAM J. Sci. Comput.* 15, no. 6, p.1251-1279

Moses L. E. & Oakford R. V. (1963), *Tables of Random Permutations*. Stanford University Press.

Musser D. R.(1997), "Introspective Sorting & Selection Algorithms", *Software Practice & Experience* 27(8), p.983.

Nelsen R. B. (1998), Concordance & Gini's measure of association. *Nonparametric Statistics* 9,p.227–238.

Neyman J. & Pearson E.(1933), "On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 231: p.289–337.

Niederreiter H. (1987) Point sets & sequences with small discrepancy, *Monatsh. Math.* 104, p.273-337.

Niederreiter H. (1988), Low discrepancy & low dispersion sequences, *J. Number Theory* 30-1 p.51-70.

Niederreiter H. (1992), *Random Number Generation & Quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 63. SIAM, Philadelphia.

Norman J. E. & Cannon L. E. (1972), A computer program for the generation of Random variables from any discrete distribution, *Journal of Statistical Computation & Simulation* 1, p.331–348.

Oh J. & Moon B-R. (2007), On the L2-discrepancy, *Discrete Applied Mathematics*, Volume 155, Issue 15, 15 September 2007, Pages 2039-2042.

Owen A. B. (1995), Randomly permuted (t,m, s)-nets & (t, s)-sequences. In *Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing*, H. Niederreiter & P. J.-S. Shiue, Eds. Number 106 in *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, p.299–317.

Owen A. B. (1998), Scrambling sobol» & niederreiter-xing points. *J. Complex.* 14, 4 (Dec. 1998), p.466-489.

Owens J. D., Luebke D., Govindaraju N. , Harris M., Krüger J. , Lefohn A. E. & Purcell T.. «A Survey of General-Purpose Computation on Graphics Hardware». *Computer Graphics Forum*, volume 26, number 1, 2007, p. 80-113.

Palm R.(2002), Utilisation du bootstrap pour les problèmes statistiques liés à l'estimation des paramètres. *Biotechnol. Agron. Soc. Environ.* 2002 6(3), p.143-153.

Panneton F., L'Ecuyer P., & M. Matsumoto(2006), "Improved Long-Period Generators Based on Linear Recurrences Modulo 2", *ACM Transactions on Mathematical Software*, 32, 1, p.1-16.

Papageorgiou A. & Traub J.(1996), Beating Monte Carlo, *Risk* 9, p.63-65.

Park S.K., Miller K.W.(1988), "Random Number Generators: Good Ones Are Hard To Find" *Communications of the ACM*, v.31 n.10, p.1192-1201, Oct. 1988

Partrat C., Besson J-L(2005), Assurance non-vie : Modélisation, simulation, 2005 *Economica*.

Paskov S. & Traub J.F. (1995) "Faster Evaluation of Financial Derivatives", *The Journal of Portfolio Management*, 22(1), p. 113-120.

Pharr M. & Fernando R. (2005) *Gpu gems 2: programming techniques for high-performance graphics & general-purpose computation*, First edition. Addison-Wesley Professional, Chapter 45. Options Pricing on the GPU.

Pirsic G.(2000), "A Software Implementation of Niederreiter-Xing Sequences", a revised/corrected version appeared in the Proceedings of MCQMC 2000.

Planchet F, Leroy G.(2010) "Que signifie la ruine dans solvabilité II? " *La tribune de l'assurance*, n°147 – mai 2010, p. 55-56.

Planchet F., Thérond P.E. (2004a) "Simulation de trajectoires de processus continus", *Belgian Actuarial Bulletin* 5, p.1-13.

Planchet F, Thérond,P., Jacquemin, J.(2005) *Modèles financiers en assurance, Analyse de risque dynamiques*. *Economica*.

Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.(1992), *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Second Edition (New York: Cambridge University Press, 1992).

Quenouille M. H.(1956), "Notes on bias in estimation" *Biometrika*, vol.43, p. 353-360.

Ripley B. D. (1987), *Stochastic Simulation*: New York: Wiley.

Risk & Capital management News letter n°4 du 20/03/2009.

Robert C. P. & Casella G. (2005), *Monte Carlo Statistical Methods*, Second Edition, Springer.

Roth K. F. (1954) "On Irregularities of Distribution", *Mathematika* 1, p.73-79.

Saito M. & Matsumoto M. (2006), SIMD-oriented fast Mersenne twister : a 128-bit pseudoRandom number generator. In Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods 2006, LNCS, p. 607–622. Springer, 2008.

Saito M. & Matsumoto, M. (2008), A PRNG Specialized in Double Precision Floating Point Numbers Using an Affine Transition. In Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods 2008, LNCS, p. 589-602. Springer, 2010.

Saito M. & Matsumoto M. (2008), A uniform real Random number generator obeying the IEEE 754 format using an affine transition, July 6-11, MCQMC'08.

Saporta G. (2006), Probabilités Analyse des données et statistique 2ème édition révisée et augmentée Ed Technip.

Sarkar T. K. (1996), A composition-alias method for generating gamma variates with shape parameter greater than 1, ACM Transactions on Mathematical Software 22, p.484–492.

Schmidt W. M. (1972), Irregularities of distribution. vii. Acta Arithmetica, 21, p.45–50.

Shih J. H. & Louis T. A. (1995), "Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data". Biometrics 51, p.1384-1399.

Sklar A. (1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publications Statistiques Université de Paris, 8, p.229-231.

Sobol I. M. (1967), On the distribution of points in a cube & the approximate evaluation of integrals, Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. 7 (1967), no. 4, p.784-802.

Sobol I. M. (1976) Uniformly Distributed Sequences with an Additional Uniform Properties. USSR Computational Mathematics & Mathematical Physics, 16(5), p.236–242.

Spearman C. (1904) "General Intelligence, Objectively determined and measured" First published in American Journal of Psychology 15, p.201-293.

Sutter, H. 2005. "The free lunch is over: A fundamental turn toward concurrency in software," Dr. Dobbs's Journal, 30(3).

Taillard G.(2006) Note de cours de Gestion d'actifs et des risques. CNAM, Paris.

Tausworthe R.C.(1965), "Random Numbers Generated by Linear Recurrence Modulo Two," Mathematics of Computation, Vol. 19, p.201-209.

Tezuka S. (1993), Polynomial arithmetic analogue of Halton sequences. ACM Transactions on Modeling & Computer Simulation 3, p.99–107.

Tezuka S. (1994), A Generalization of Faure Sequences & its Efficient Implementation, Research Report IBM RT0105, p.1-10.

Tezuka S. (1995), Uniform Random numbers: theory & practice. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Tezuka S., L'Ecuyer P.(1992), Analysis of add-with-carry & subtract-with-borrow generators, Proceedings of the 24th conference on Winter simulation, p.443-447, December 13-16, 1992, Arlington, Virginia, United States .

Tezuka S., L'Ecuyer P., Couture R.(1993), "On the lattice structure of the add-with-carry & subtract-with-borrow Random number generators" ACM Transactions on Modeling & Computer Simulation (TOMACS) Volume 3 , Issue 4 (October 1993), p.315-331.

Tezuka S. & Tokuyama T.(1994), A Note on Polynomial Arithmetic Analogue of Halton Sequences, ACM Tomacs 4, p.279-284.

Tuffin B.(1997), A new Permutation Choice in Halton Sequences. Second International Conference on Monte Carlo & quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, volume 127, Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New-York.

Van Der Corput J. G. (1935a), Verteilungsfunktionen I. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 38, p.813–820.

Van Der Corput J. G. (1935b), Verteilungsfunktionen II. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 38, p.1058–1066.

Wang S., S., (2002)A risk measure that goes beyond coherence, Proceedings of 12th AFIR Colloquium

Warnock T. (1972), Computational investigations of low discrepancy point sets. In Application de la théorie des nombres à l'analyse numérique, S. Zaremba, Ed. Academic Press, New York, p.319-343.

Wichmann B.A, & Hill, I.D. (1982) An efficient & portable pseudoRandom number generator, Applied Statistics 31 :188-190(correction 33 :123(1984)).

Xing C. & Niederreiter H. (1995) A construction of low-discrepancy sequences using global function fields. Acta Arith. 73,p.87-102.

Zeisel H. (1986) a remark on Algorithm AS183: An efficient & portable pseudo-Random number generator, Applied Statistics 35, p.89.

Zierler N., Brillhart J.(1968), «On primitive trinomials (Mod 2), II,» Information Control, 13, p.541-554.

Zierler N. & J. Brillhart (1969), «On primitive trinomials (Mod 2), II,» Information Control, 14, 566-569.

Annexes

Cours du 29/10/04 au 21/10/05 des titres : BNP-Paribas(FR0000131104), Michelin(FR0000121261) et Danone(FR0000120644)

Clôture	BNP-Paribas	Michelin	Danone
29/10/04	53.35	42.65	65.6
01/11/04	53.85	42.85	66.35
02/11/04	54.15	42.98	66.95
03/11/04	54.55	43	67.55
04/11/04	54.15	42.74	67.1
05/11/04	54.15	43.61	67.15
08/11/04	54.05	43.77	67.25
09/11/04	53.6	43.83	67.3
10/11/04	53.9	44.44	67.2
11/11/04	54.45	45.08	68
12/11/04	54	45.06	67.85
15/11/04	54	44.72	68.1
16/11/04	53.4	43.72	67.7
17/11/04	54.15	43.99	68.75
18/11/04	54	44.44	68.5
19/11/04	53.1	44.1	67.85
22/11/04	52.65	43.95	67.1
23/11/04	52.6	43.82	67.1
24/11/04	52.3	43.64	66.95
25/11/04	52.95	43.67	67.75
26/11/04	52.75	43.59	67.75
29/11/04	52.45	43.75	68.2
30/11/04	52.3	43.48	67.05
01/12/04	53.15	43.74	67.8
02/12/04	53.6	44.23	68.5
03/12/04	53.1	44.13	67.65
06/12/04	52.75	43.58	67.1
07/12/04	52.9	43.59	66.55
08/12/04	52.65	43.6	66.8
09/12/04	52.45	43.81	66.6
10/12/04	53.15	43.8	67.15
13/12/04	53.75	44	68
14/12/04	54	45.46	67.95
15/12/04	53.4	45.97	67.3
16/12/04	53.6	47.08	66.55
17/12/04	52.6	46.77	65.25
20/12/04	53	46.34	65.8
21/12/04	52.75	46.2	65.85
22/12/04	53.2	46.8	67
23/12/04	53.5	46.85	67.3
24/12/04	53.4	46.99	67.55
27/12/04	53.45	47.12	67.35
28/12/04	53.6	47.21	67.6
29/12/04	53.65	47.32	67.75
30/12/04	53.4	47.45	67.85
31/12/04	53.3	47.19	67.95
03/01/05	53.7	48.04	69
04/01/05	54.05	48.29	69.4
05/01/05	53.75	46.85	68.9
06/01/05	54.55	47.74	69.25
07/01/05	55.2	47.01	69.85
10/01/05	55.3	46.65	70.05
11/01/05	55.1	46.46	70.2
12/01/05	54.3	46.05	70.15
13/01/05	54.5	46.56	69.85
14/01/05	55	47.24	69.75
17/01/05	55.65	47.56	70.5
18/01/05	55.75	47.8	69.5
19/01/05	55.75	48.76	68.9
20/01/05	55.2	48.56	68.65
21/01/05	55.5	48.3	68.6
24/01/05	55.15	48.05	68.8
25/01/05	55.6	48.99	69.85
26/01/05	55	49.73	69.35

Clôture	BNP-Paribas	Michelin	Danone
27/01/05	55.1	49.75	69.25
28/01/05	54.5	49.4	70.1
31/01/05	55.35	49.63	71.5
01/02/05	55.65	49.71	71.9
02/02/05	55.95	49.85	71.65
03/02/05	55.25	51	71.95
04/02/05	54.8	52	72.05
07/02/05	54.9	52.95	71.7
08/02/05	54.65	53.15	70.65
09/02/05	54.7	52.95	70.8
10/02/05	55	52.15	70.55
11/02/05	56.05	53.3	72.45
14/02/05	56.1	52.5	72.15
15/02/05	56.3	52.45	72.5
16/02/05	55.7	52.55	72.6
17/02/05	55.35	53.65	72.55
18/02/05	55.4	54.45	74
21/02/05	54.55	54	74.2
22/02/05	54.8	53.4	74.1
23/02/05	54.55	52.15	73.55
24/02/05	54.6	52.8	74.2
25/02/05	55.05	54.2	75
28/02/05	54.8	53.9	75.25
01/03/05	55.05	54	76.1
02/03/05	55.25	53.45	76.3
03/03/05	55.15	53.35	76.15
04/03/05	55.45	54.9	75.85
07/03/05	55.4	55.5	76.5
08/03/05	55.7	55.5	76.9
09/03/05	55.25	55.25	76
10/03/05	55.1	55.6	75.5
11/03/05	55.3	55.05	74.95
14/03/05	55.4	54.35	75.4
15/03/05	55.7	51.55	75.5
16/03/05	54.45	50.95	74.9
17/03/05	54.75	51	75.3
18/03/05	55.1	50.9	75.65
21/03/05	54.85	50.8	75.15
22/03/05	54.95	50.2	74.75
23/03/05	54.45	51.15	75.1
24/03/05	55.55	52.2	75.7
29/03/05	55.4	51.65	75.75
30/03/05	55	50.5	75.95
31/03/05	54.65	50.7	76.75
01/04/05	54.8	51.5	76.35
04/04/05	54.25	51	75.75
05/04/05	54.85	51.5	75.05
06/04/05	54.8	52.35	75.1
07/04/05	55	52	74.85
08/04/05	55.1	52.55	75.15
11/04/05	55.35	51.7	75.25
12/04/05	54.95	50.95	74.95
13/04/05	55.3	50.6	75
14/04/05	55	50.5	76.25
15/04/05	53.8	48.78	75.25
18/04/05	52.45	47.95	73.8
19/04/05	52.85	48.2	73.6
20/04/05	52.2	47.81	73.5
21/04/05	51.8	48.05	72.95
22/04/05	52.7	48.14	73.45
25/04/05	52.65	48.23	72.7
26/04/05	52.75	48	72.8
27/04/05	51.9	46.95	71.7
28/04/05	51.45	47.64	71.7

Clôture	BNP-Paribas	Michelin	Danone
29/04/05	50.9	46.85	72.4
02/05/05	51.65	47.12	73.15
03/05/05	52.15	47.03	73.2
04/05/05	52.4	46.75	74.45
05/05/05	52.95	47.35	74.4
06/05/05	53.1	47.25	74.95
09/05/05	52.75	47.07	74.5
10/05/05	52.2	46.85	74.45
11/05/05	52	47	74.35
12/05/05	53.95	47.77	74.4
13/05/05	53.85	49.45	75.05
16/05/05	53.85	48.67	75.75
17/05/05	53.9	49.02	74.4
18/05/05	55.5	50.45	74.55
19/05/05	55.1	50.8	74.65
20/05/05	54.8	51	74.2
23/05/05	55.15	51.95	74.65
24/05/05	55.5	49.75	74.8
25/05/05	55.35	49.98	74.75
26/05/05	55.85	50.25	75.4
27/05/05	56.9	49.81	75.1
30/05/05	54.55	50.45	75.35
31/05/05	54.65	51.35	74.75
01/06/05	55.75	51	75.45
02/06/05	56.3	51.35	74.8
03/06/05	56.05	51.8	74.9
06/06/05	55.35	51.85	74.55
07/06/05	55.85	52.8	75.55
08/06/05	55.65	52.25	74.9
09/06/05	55.75	51.55	74.6
10/06/05	56.45	51.85	74.6
13/06/05	56.25	52.45	74.7
14/06/05	55.7	51.7	74.5
15/06/05	56.4	51.7	74.3
16/06/05	56.6	51.8	74.25
17/06/05	56.85	51.5	74.2
20/06/05	56.05	50.95	73.25
21/06/05	56.5	51.25	73.6
22/06/05	56.75	52.2	73.6
23/06/05	56.95	51.8	73.15
24/06/05	56.45	50.7	72.4
27/06/05	55.6	50.15	72.25
28/06/05	56	50.65	72.95
29/06/05	56.5	51.05	73
30/06/05	56.7	50.35	72.7
01/07/05	57.1	50.95	72.75
04/07/05	56.85	50.7	72.55
05/07/05	56.8	48.5	72.45
06/07/05	56.95	48.33	72.85
07/07/05	56.1	47.43	75.7
08/07/05	57.05	47.67	81.25
11/07/05	57.85	48.31	79
12/07/05	57.8	48.24	78.65
13/07/05	58.4	48.8	78
14/07/05	59.35	49.4	78.3
15/07/05	59.7	49	79.5
18/07/05	59.8	48.59	79.5
19/07/05	60.35	49.2	87.6
20/07/05	60.15	48.48	92.65
21/07/05	61.1	50.4	87.85
22/07/05	60.7	50.3	88.45
25/07/05	60.2	50.45	81.8
26/07/05	60.5	49.9	84.45
27/07/05	60.35	50.55	83.15

Clôture	BNP-Paribas	Michelin	Danone
28/07/05	60.5	51.25	83
29/07/05	59.65	50.85	81.6
01/08/05	59.4	51.25	82.05
02/08/05	60.4	52.45	83
03/08/05	60	52.3	82.5
04/08/05	60	52	83.1
05/08/05	60.3	53	83.55
08/08/05	59.9	53	83.2
09/08/05	60.3	52.85	84
10/08/05	61.05	52.55	84.7
11/08/05	61.1	52.4	84.75
12/08/05	60.6	51.85	84.75
15/08/05	60.8	51.4	84.65
16/08/05	60	51.15	84.1
17/08/05	59.95	51	84.15
18/08/05	59.75	50.7	86.95
19/08/05	60.45	50.95	88
22/08/05	60.5	51.1	86.85
23/08/05	59.95	50.25	85.65
24/08/05	59.85	50.25	85
25/08/05	58.6	49.8	85.25
26/08/05	58.25	49.49	84.85
29/08/05	58.25	49.54	84.5
30/08/05	58.05	49.09	83.4
31/08/05	58.95	49.28	85.1
01/09/05	58.8	49.5	87.2
02/09/05	58.7	48.63	87.45
05/09/05	59.15	49.05	91.45
06/09/05	60.25	49.54	91
07/09/05	60.65	50.15	91
08/09/05	60.85	49.9	90.6
09/09/05	61.35	50.75	92.75
12/09/05	61.05	51.25	91.75
13/09/05	60.2	50.45	90.15
14/09/05	60.15	50.3	91
15/09/05	59.85	50.75	90.55
16/09/05	60.3	51.2	92.6
19/09/05	59.9	50.4	91.65
20/09/05	60.5	50.7	93.95
21/09/05	59.5	50	90.95
22/09/05	59.4	49.1	91.65
23/09/05	59.9	49.51	92.35
26/09/05	61.45	49.87	93.8
27/09/05	61.1	49.45	93.05
28/09/05	62.6	49.07	93
29/09/05	62.6	49.05	91.1
30/09/05	63.25	48.88	89.65
03/10/05	64.3	49.06	89.9
04/10/05	64.65	50.95	91
05/10/05	64	49.91	90.3
06/10/05	63.15	48.7	88.2
07/10/05	63.1	49.32	87.7
10/10/05	63.25	48.74	87.3
11/10/05	63.65	47.55	87.9
12/10/05	63.35	48.06	86.95
13/10/05	62.8	48.11	86.8
14/10/05	64.1	48.65	86.5
17/10/05	63.9	48.86	87.4
18/10/05	63.4	49.96	86.25
19/10/05	61.75	49.06	84.2
20/10/05	62.5	49.01	83.75
21/10/05	62.2	49.15	83.45

Fonctions de répartition empirique des rendements 10 jours des titres : BNP-Paribas, Michelin et Danone du sur la période 29/10/04-21/10/05

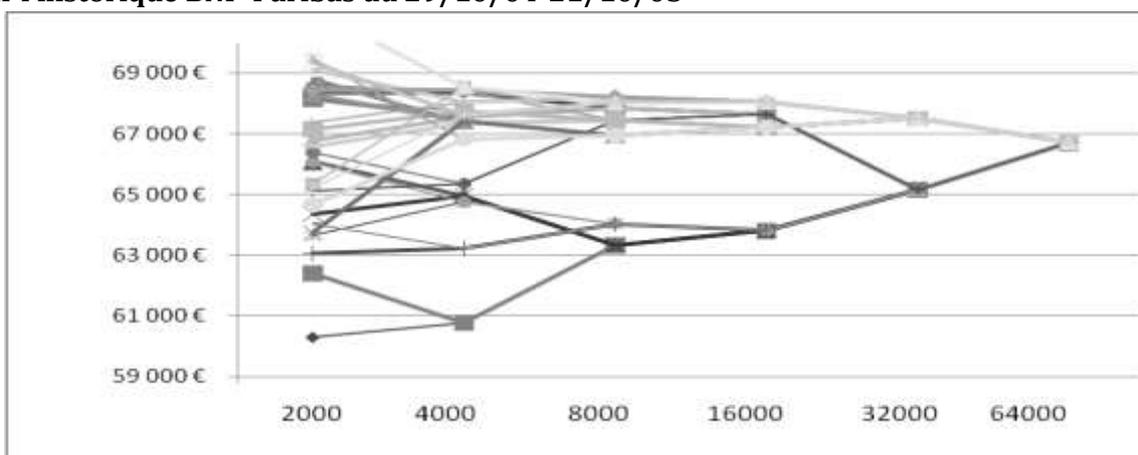
BNP-Paribas	Michelin	Danone	Portefeuille
-6.45%	-9.55%	-10.96%	-6.03%
-6.15%	-8.67%	-6.93%	-5.92%
-5.82%	-8.47%	-6.76%	-5.32%
-5.39%	-8.44%	-6.51%	-5.18%
-4.88%	-8.39%	-5.97%	-5.00%
-4.74%	-7.60%	-5.54%	-4.99%
-4.36%	-7.42%	-5.53%	-4.38%
-4.19%	-7.41%	-5.41%	-4.22%
-4.09%	-7.29%	-5.25%	-4.14%
-4.00%	-7.21%	-5.22%	-4.00%
-3.88%	-7.08%	-5.05%	-3.99%
-3.65%	-6.71%	-5.04%	-3.96%
-3.52%	-6.41%	-4.85%	-3.74%
-3.32%	-6.18%	-4.72%	-3.35%
-3.25%	-6.12%	-4.40%	-3.03%
-2.97%	-5.98%	-3.79%	-2.94%
-2.89%	-5.98%	-3.76%	-2.85%
-2.87%	-5.79%	-3.55%	-2.82%
-2.75%	-5.66%	-3.51%	-2.77%
-2.59%	-5.37%	-3.39%	-2.73%
-2.38%	-5.28%	-3.28%	-2.70%
-2.36%	-4.96%	-3.19%	-2.69%
-2.32%	-4.92%	-3.14%	-2.69%
-2.31%	-4.76%	-2.95%	-2.66%
-2.23%	-4.68%	-2.87%	-2.65%
-2.22%	-4.55%	-2.85%	-2.46%
-2.06%	-4.55%	-2.78%	-2.36%
-1.97%	-4.54%	-2.58%	-2.21%
-1.94%	-4.53%	-2.57%	-2.15%
-1.93%	-4.41%	-2.54%	-2.13%
-1.90%	-4.40%	-2.26%	-2.11%
-1.89%	-4.39%	-2.13%	-2.09%
-1.87%	-4.38%	-2.09%	-2.08%
-1.85%	-4.16%	-2.08%	-2.08%
-1.82%	-4.03%	-1.95%	-2.00%
-1.80%	-4.01%	-1.94%	-1.91%
-1.78%	-3.96%	-1.94%	-1.81%
-1.71%	-3.87%	-1.93%	-1.75%
-1.67%	-3.84%	-1.91%	-1.73%
-1.59%	-3.83%	-1.83%	-1.72%
-1.53%	-3.67%	-1.79%	-1.71%
-1.49%	-3.62%	-1.78%	-1.68%
-1.45%	-3.58%	-1.76%	-1.64%
-1.45%	-3.37%	-1.75%	-1.63%
-1.43%	-3.35%	-1.74%	-1.57%
-1.39%	-3.26%	-1.74%	-1.45%
-1.35%	-3.13%	-1.70%	-1.43%
-1.32%	-2.94%	-1.56%	-1.38%
-1.26%	-2.80%	-1.52%	-1.38%
-1.16%	-2.69%	-1.52%	-1.34%
-1.04%	-2.68%	-1.44%	-1.30%
-1.03%	-2.66%	-1.38%	-1.27%
-0.99%	-2.50%	-1.25%	-1.27%
-0.94%	-2.49%	-1.18%	-1.22%
-0.94%	-2.48%	-1.14%	-1.19%
-0.91%	-2.45%	-1.12%	-1.19%
-0.91%	-2.44%	-1.06%	-1.18%
-0.81%	-2.43%	-1.06%	-1.11%
-0.81%	-2.41%	-1.05%	-1.07%
-0.79%	-2.40%	-1.02%	-0.94%
-0.74%	-2.37%	-1.00%	-0.94%

BNP-Paribas	Michelin	Danone	Portefeuille
-0.74%	-2.27%	-0.96%	-0.94%
-0.73%	-2.22%	-0.96%	-0.88%
-0.73%	-2.22%	-0.96%	-0.86%
-0.73%	-2.17%	-0.93%	-0.80%
-0.72%	-2.06%	-0.89%	-0.77%
-0.67%	-2.03%	-0.88%	-0.75%
-0.66%	-1.98%	-0.87%	-0.74%
-0.66%	-1.94%	-0.86%	-0.73%
-0.64%	-1.92%	-0.86%	-0.64%
-0.63%	-1.89%	-0.83%	-0.63%
-0.62%	-1.88%	-0.82%	-0.61%
-0.58%	-1.85%	-0.79%	-0.40%
-0.56%	-1.80%	-0.79%	-0.39%
-0.55%	-1.74%	-0.74%	-0.32%
-0.54%	-1.73%	-0.74%	-0.28%
-0.50%	-1.70%	-0.71%	-0.26%
-0.45%	-1.65%	-0.67%	-0.22%
-0.45%	-1.60%	-0.65%	-0.19%
-0.45%	-1.59%	-0.62%	-0.18%
-0.42%	-1.51%	-0.59%	-0.17%
-0.37%	-1.46%	-0.54%	-0.14%
-0.36%	-1.41%	-0.53%	-0.11%
-0.36%	-1.36%	-0.53%	-0.08%
-0.33%	-1.26%	-0.52%	-0.03%
-0.28%	-1.07%	-0.50%	-0.03%
-0.28%	-1.01%	-0.43%	-0.02%
-0.27%	-1.00%	-0.37%	-0.01%
-0.27%	-1.00%	-0.37%	0.01%
-0.25%	-0.96%	-0.33%	0.05%
-0.18%	-0.84%	-0.30%	0.07%
-0.18%	-0.81%	-0.29%	0.08%
-0.18%	-0.58%	-0.29%	0.09%
-0.09%	-0.57%	-0.26%	0.12%
-0.08%	-0.56%	-0.22%	0.12%
-0.08%	-0.55%	-0.22%	0.22%
0.00%	-0.52%	-0.18%	0.23%
0.00%	-0.49%	-0.15%	0.32%
0.00%	-0.47%	-0.13%	0.32%
0.08%	-0.47%	-0.07%	0.34%
0.09%	-0.41%	-0.07%	0.45%
0.09%	-0.39%	-0.05%	0.48%
0.09%	-0.38%	0.00%	0.49%
0.18%	-0.34%	0.00%	0.50%
0.18%	-0.30%	0.00%	0.50%
0.18%	-0.20%	0.07%	0.57%
0.18%	-0.19%	0.07%	0.57%
0.19%	-0.18%	0.12%	0.58%
0.19%	-0.10%	0.13%	0.60%
0.19%	-0.09%	0.13%	0.62%
0.25%	-0.02%	0.14%	0.65%
0.27%	0.00%	0.15%	0.68%
0.28%	0.04%	0.20%	0.69%
0.32%	0.07%	0.20%	0.70%
0.35%	0.11%	0.20%	0.71%
0.36%	0.11%	0.20%	0.76%
0.36%	0.11%	0.22%	0.76%
0.38%	0.20%	0.26%	0.79%
0.41%	0.20%	0.29%	0.86%
0.44%	0.27%	0.30%	0.88%
0.45%	0.29%	0.34%	0.91%
0.45%	0.31%	0.35%	0.92%

BNP-Paribas	Michelin	Danone	Portefeuille
0.47%	0.32%	0.47%	0.92%
0.47%	0.41%	0.47%	0.92%
0.47%	0.47%	0.50%	0.93%
0.47%	0.48%	0.54%	0.96%
0.50%	0.48%	0.59%	1.04%
0.53%	0.49%	0.60%	1.12%
0.53%	0.57%	0.60%	1.14%
0.54%	0.64%	0.61%	1.14%
0.54%	0.68%	0.67%	1.15%
0.54%	0.73%	0.73%	1.20%
0.55%	0.79%	0.83%	1.22%
0.57%	0.83%	0.83%	1.27%
0.63%	0.83%	0.91%	1.28%
0.64%	0.88%	0.94%	1.33%
0.64%	0.90%	1.00%	1.33%
0.66%	1.08%	1.04%	1.33%
0.67%	1.08%	1.05%	1.35%
0.76%	1.09%	1.07%	1.36%
0.76%	1.12%	1.12%	1.39%
0.82%	1.18%	1.13%	1.40%
0.91%	1.25%	1.15%	1.41%
0.92%	1.37%	1.16%	1.48%
0.99%	1.44%	1.21%	1.55%
1.00%	1.57%	1.29%	1.55%
1.03%	1.57%	1.33%	1.60%
1.04%	1.69%	1.33%	1.60%
1.06%	1.71%	1.34%	1.61%
1.09%	1.72%	1.34%	1.61%
1.09%	1.72%	1.42%	1.62%
1.10%	1.90%	1.64%	1.68%
1.16%	1.97%	1.66%	1.69%
1.16%	1.98%	1.71%	1.74%
1.17%	2.07%	1.75%	1.76%
1.17%	2.24%	1.78%	1.78%
1.18%	2.24%	1.86%	1.78%
1.19%	2.30%	1.88%	1.86%
1.19%	2.34%	1.94%	1.88%
1.20%	2.53%	1.95%	1.90%
1.21%	2.55%	1.96%	1.90%
1.22%	2.59%	1.99%	1.93%
1.26%	2.67%	2.00%	1.93%
1.27%	2.74%	2.04%	1.94%
1.28%	2.74%	2.09%	1.95%
1.29%	2.75%	2.09%	1.98%
1.30%	2.77%	2.11%	2.00%
1.32%	2.78%	2.17%	2.00%
1.33%	2.94%	2.20%	2.07%
1.34%	2.96%	2.23%	2.07%
1.34%	3.00%	2.27%	2.09%
1.36%	3.05%	2.43%	2.09%
1.39%	3.17%	2.48%	2.10%
1.43%	3.29%	2.50%	2.11%
1.43%	3.44%	2.64%	2.12%
1.50%	3.45%	2.64%	2.15%
1.56%	3.59%	2.65%	2.16%
1.59%	3.59%	2.71%	2.17%
1.64%	3.66%	2.84%	2.20%
1.79%	3.67%	2.90%	2.21%
1.92%	3.74%	2.95%	2.22%
1.94%	3.78%	3.10%	2.25%
1.96%	3.85%	3.17%	2.27%

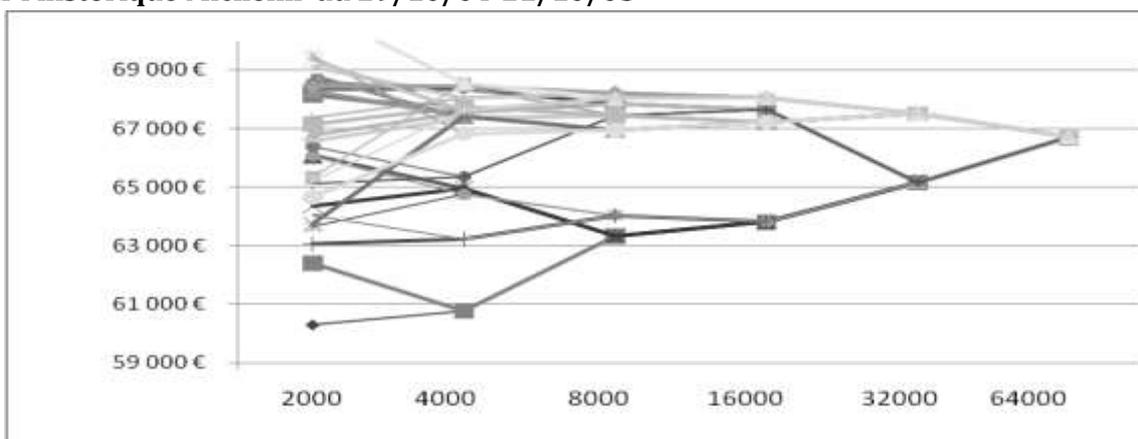
BNP-Paribas	Michelin	Danone	Portefeuille
1.98%	3.93%	3.21%	2.33%
2.00%	3.96%	3.22%	2.36%
2.04%	3.96%	3.24%	2.42%
2.06%	3.98%	3.33%	2.43%
2.15%	4.00%	3.35%	2.44%
2.18%	4.08%	3.40%	2.47%
2.22%	4.10%	3.43%	2.48%
2.28%	4.23%	3.45%	2.50%
2.36%	4.35%	3.49%	2.59%
2.46%	4.36%	3.49%	2.60%
2.48%	4.43%	3.52%	2.64%
2.73%	4.52%	3.54%	2.66%
2.80%	4.54%	3.54%	2.67%
2.84%	4.55%	3.55%	2.67%
2.93%	4.57%	3.66%	2.67%
3.12%	4.71%	3.70%	2.68%
3.15%	4.75%	3.77%	2.71%
3.19%	4.82%	3.84%	2.72%
3.20%	5.02%	3.85%	2.73%
3.21%	5.05%	3.86%	2.78%
3.25%	5.10%	3.88%	2.84%
3.34%	5.19%	3.99%	2.89%
3.36%	5.20%	4.01%	2.97%
3.36%	5.28%	4.14%	3.05%
3.37%	5.30%	4.22%	3.08%
3.46%	5.37%	4.30%	3.24%
3.52%	5.42%	4.39%	3.28%
3.63%	5.45%	4.63%	3.31%
3.70%	5.47%	4.81%	3.33%
3.72%	5.51%	4.86%	3.33%
3.84%	5.52%	4.88%	3.35%
4.05%	5.55%	4.96%	3.38%
4.06%	5.65%	4.97%	3.43%
4.06%	5.78%	5.03%	3.44%
4.07%	5.91%	5.10%	3.50%
4.17%	5.94%	5.17%	3.52%
4.26%	5.98%	5.30%	3.54%
4.55%	5.99%	5.33%	3.68%
4.55%	6.13%	5.39%	3.70%
4.59%	6.19%	5.89%	3.81%
4.67%	6.26%	6.00%	3.89%
4.67%	6.33%	6.25%	3.90%
4.81%	6.34%	6.28%	4.01%
4.86%	6.44%	6.60%	4.13%
4.89%	6.47%	6.85%	4.33%
5.19%	6.61%	6.93%	4.44%
5.32%	6.85%	7.06%	4.51%
5.34%	6.94%	7.37%	4.63%
5.62%	7.09%	7.70%	4.65%
5.66%	7.28%	7.81%	4.65%
5.80%	7.29%	8.09%	4.70%
5.92%	7.34%	8.58%	4.86%
6.25%	7.66%	8.86%	5.00%
6.31%	7.88%	9.28%	5.04%
6.32%	7.89%	9.31%	5.16%
6.40%	7.91%	9.34%	5.61%
6.44%	7.94%	9.58%	5.73%
6.86%	7.99%	12.22%	6.93%
7.35%	8.49%	16.05%	9.53%
7.56%	10.20%	20.91%	10.41%
8.91%	10.37%	27.18%	11.04%

Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique BNP-Paribas du 29/10/04-21/10/05



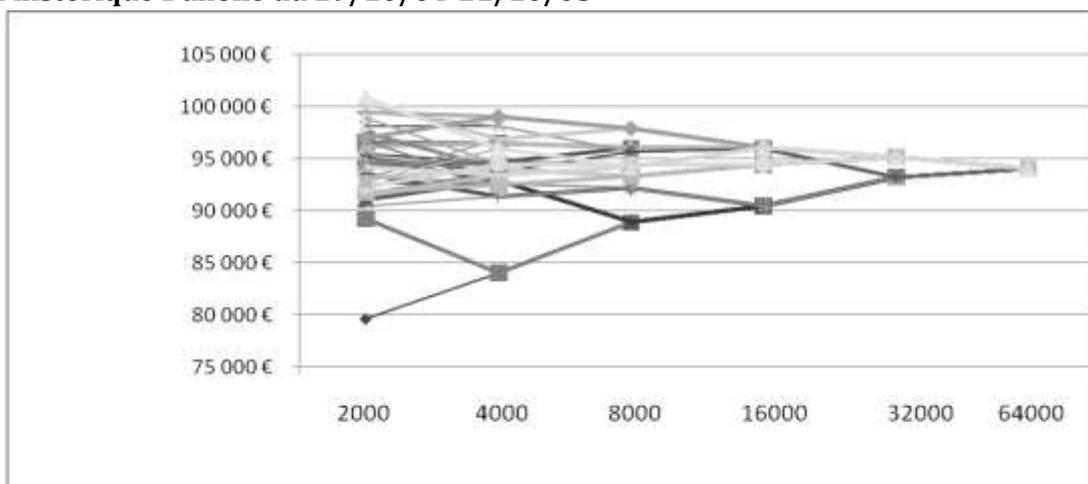
Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	60 306 €	60 758 €	63 329 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
2001	4000	62 391 €	60 758 €	63 329 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
4001	6000	66 069 €	64 967 €	63 329 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
6001	8000	64 350 €	64 967 €	63 329 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
8001	10000	63 644 €	64 759 €	64 032 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
10001	12000	66 062 €	64 759 €	64 032 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
12001	14000	63 066 €	63 231 €	64 032 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
14001	16000	64 032 €	63 231 €	64 032 €	63 810 €	65 164 €	66 704 €
16001	18000	68 350 €	68 350 €	67 835 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
18001	20000	68 595 €	68 350 €	67 835 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
20001	22000	68 143 €	67 540 €	67 835 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
22001	24000	66 766 €	67 540 €	67 835 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
24001	26000	68 417 €	68 417 €	67 454 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
26001	28000	68 550 €	68 417 €	67 454 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
28001	30000	66 380 €	65 350 €	67 454 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
30001	32000	65 121 €	65 350 €	67 454 €	67 642 €	65 164 €	66 704 €
32001	34000	68 810 €	67 333 €	67 430 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
34001	36000	66 579 €	67 333 €	67 430 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
36001	38000	68 102 €	67 747 €	67 430 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
38001	40000	67 140 €	67 747 €	67 430 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
40001	42000	68 276 €	67 403 €	66 948 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
42001	44000	63 742 €	67 403 €	66 948 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
44001	46000	69 483 €	66 825 €	66 948 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
46001	48000	64 646 €	66 825 €	66 948 €	67 203 €	67 501 €	66 704 €
48001	50000	67 379 €	68 030 €	68 206 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
50001	52000	69 118 €	68 030 €	68 206 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
52001	54000	68 482 €	68 436 €	68 206 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
54001	56000	68 436 €	68 436 €	68 206 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
56001	58000	65 356 €	68 539 €	68 027 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
58001	60000	71 107 €	68 539 €	68 027 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
60001	62000	69 324 €	67 618 €	68 027 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €
62001	64000	65 222 €	67 618 €	68 027 €	68 030 €	67 501 €	66 704 €

Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique Michelin du 29/10/04-21/10/05



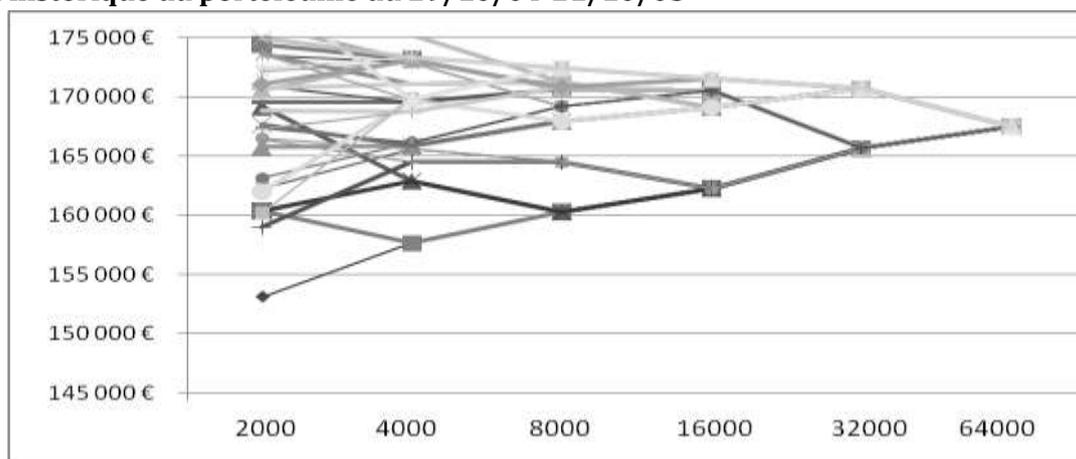
Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	80 485 €	82 916 €	86 311 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
2001	4000	85 241 €	82 916 €	86 311 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
4001	6000	92 399 €	91 018 €	86 311 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
6001	8000	88 009 €	91 018 €	86 311 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
8001	10000	88 864 €	89 458 €	89 458 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
10001	12000	90 768 €	89 458 €	89 458 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
12001	14000	88 639 €	89 650 €	89 458 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
14001	16000	92 152 €	89 650 €	89 458 €	88 597 €	90 155 €	91 338 €
16001	18000	91 482 €	92 961 €	92 605 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
18001	20000	94 112 €	92 961 €	92 605 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
20001	22000	93 954 €	92 605 €	92 605 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
22001	24000	92 170 €	92 605 €	92 605 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
24001	26000	93 052 €	93 307 €	91 674 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
26001	28000	94 527 €	93 307 €	91 674 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
28001	30000	89 137 €	89 137 €	91 674 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
30001	32000	90 371 €	89 137 €	91 674 €	92 449 €	90 155 €	91 338 €
32001	34000	93 018 €	91 812 €	91 885 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
34001	36000	89 747 €	91 812 €	91 885 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
36001	38000	95 206 €	93 772 €	91 885 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
38001	40000	91 794 €	93 772 €	91 885 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
40001	42000	91 395 €	92 669 €	92 598 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
42001	44000	94 231 €	92 669 €	92 598 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
44001	46000	95 913 €	92 598 €	92 598 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
46001	48000	87 490 €	92 598 €	92 598 €	92 029 €	92 309 €	91 338 €
48001	50000	89 944 €	91 586 €	92 863 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
50001	52000	93 286 €	91 586 €	92 863 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
52001	54000	93 129 €	93 129 €	92 863 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
54001	56000	93 530 €	93 129 €	92 863 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
56001	58000	90 679 €	91 913 €	93 270 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
58001	60000	96 778 €	91 913 €	93 270 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
60001	62000	94 309 €	93 856 €	93 270 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €
62001	64000	93 081 €	93 856 €	93 270 €	92 874 €	92 309 €	91 338 €

Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique Danone du 29/10/04-21/10/05



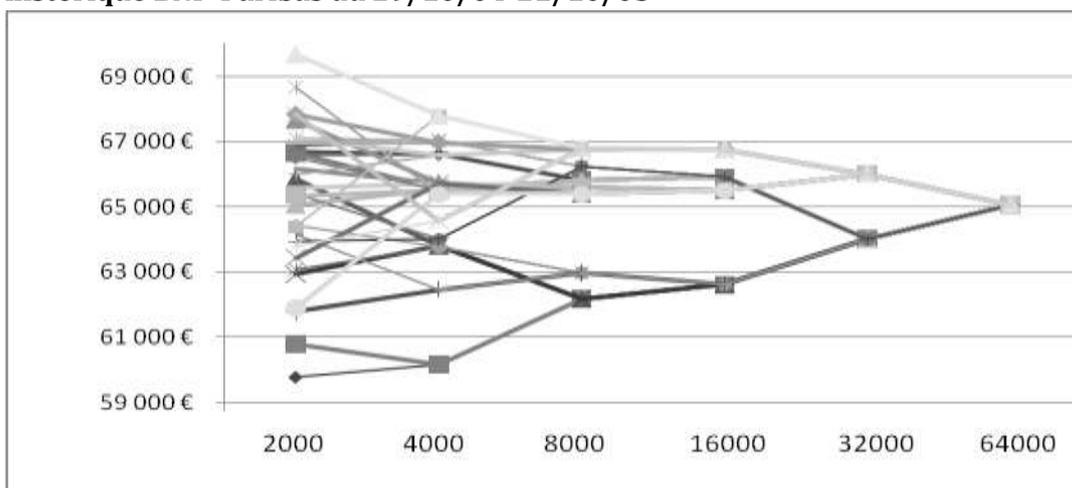
Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	79 627 €	84 040 €	88 913 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
2001	4000	89 240 €	84 040 €	88 913 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
4001	6000	91 079 €	92 951 €	88 913 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
6001	8000	95 003 €	92 951 €	88 913 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
8001	10000	92 609 €	92 609 €	92 218 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
10001	12000	93 388 €	92 609 €	92 218 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
12001	14000	93 572 €	91 437 €	92 218 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
14001	16000	90 473 €	91 437 €	92 218 €	90 473 €	93 235 €	94 047 €
16001	18000	94 640 €	94 640 €	96 058 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
18001	20000	95 523 €	94 640 €	96 058 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
20001	22000	96 595 €	96 474 €	96 058 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
22001	24000	96 212 €	96 474 €	96 058 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
24001	26000	98 174 €	98 174 €	95 697 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
26001	28000	99 541 €	98 174 €	95 697 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
28001	30000	91 753 €	93 784 €	95 697 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
30001	32000	95 179 €	93 784 €	95 697 €	96 039 €	93 235 €	94 047 €
32001	34000	97 508 €	94 093 €	93 293 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
34001	36000	93 184 €	94 093 €	93 293 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
36001	38000	96 708 €	92 475 €	93 293 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
38001	40000	91 786 €	92 475 €	93 293 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
40001	42000	94 733 €	94 539 €	94 501 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
42001	44000	94 471 €	94 539 €	94 501 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
44001	46000	98 926 €	94 501 €	94 501 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
46001	48000	92 293 €	94 501 €	94 501 €	94 431 €	95 184 €	94 047 €
48001	50000	93 148 €	96 939 €	97 928 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
50001	52000	100 226 €	96 939 €	97 928 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
52001	54000	99 496 €	99 079 €	97 928 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
54001	56000	96 994 €	99 079 €	97 928 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
56001	58000	92 830 €	95 968 €	94 235 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
58001	60000	100 875 €	95 968 €	94 235 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
60001	62000	91 518 €	93 429 €	94 235 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €
62001	64000	94 235 €	93 429 €	94 235 €	96 090 €	95 184 €	94 047 €

Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap avec remise (Joe&Kuo) sur l'historique du portefeuille du 29/10/04-21/10/05



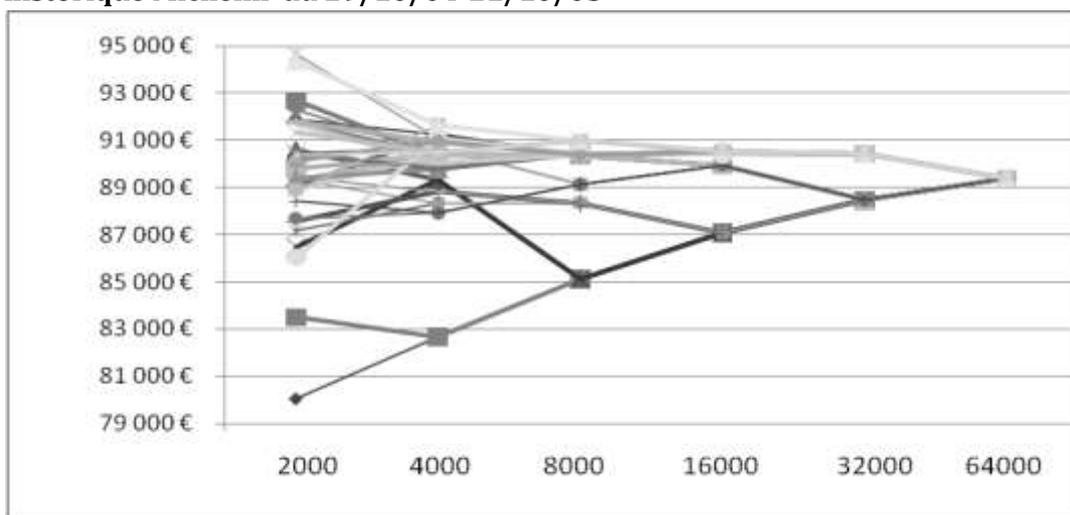
Plage de		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	153 108 €	157 629 €	160 252 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
2001	4000	160 371 €	157 629 €	160 252 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
4001	6000	169 173 €	162 873 €	160 252 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
6001	8000	160 392 €	162 873 €	160 252 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
8001	10000	162 258 €	165 569 €	164 483 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
10001	12000	166 504 €	165 569 €	164 483 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
12001	14000	158 978 €	164 483 €	164 483 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
14001	16000	166 378 €	164 483 €	164 483 €	162 258 €	165 646 €	167 499 €
16001	18000	169 557 €	169 557 €	170 665 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
18001	20000	170 920 €	169 557 €	170 665 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
20001	22000	174 453 €	173 155 €	170 665 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
22001	24000	170 574 €	173 155 €	170 665 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
24001	26000	173 566 €	172 883 €	169 209 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
26001	28000	172 142 €	172 883 €	169 209 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
28001	30000	163 134 €	166 150 €	169 209 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
30001	32000	167 409 €	166 150 €	169 209 €	170 574 €	165 646 €	167 499 €
32001	34000	173 638 €	171 066 €	171 291 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
34001	36000	170 702 €	171 066 €	171 291 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
36001	38000	176 273 €	175 220 €	171 291 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
38001	40000	175 220 €	175 220 €	171 291 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
40001	42000	165 762 €	165 889 €	167 957 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
42001	44000	167 677 €	165 889 €	167 957 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
44001	46000	173 633 €	169 736 €	167 957 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
46001	48000	161 972 €	169 736 €	167 957 €	169 139 €	170 694 €	167 499 €
48001	50000	167 267 €	168 734 €	170 846 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
50001	52000	168 830 €	168 734 €	170 846 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
52001	54000	176 033 €	173 093 €	170 846 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
54001	56000	171 094 €	173 093 €	170 846 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
56001	58000	160 169 €	169 863 €	172 444 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
58001	60000	179 029 €	169 863 €	172 444 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
60001	62000	174 961 €	173 344 €	172 444 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €
62001	64000	172 444 €	173 344 €	172 444 €	171 503 €	170 694 €	167 499 €

**Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo)
sur l'historique BNP-Paribas du 29/10/04-21/10/05**



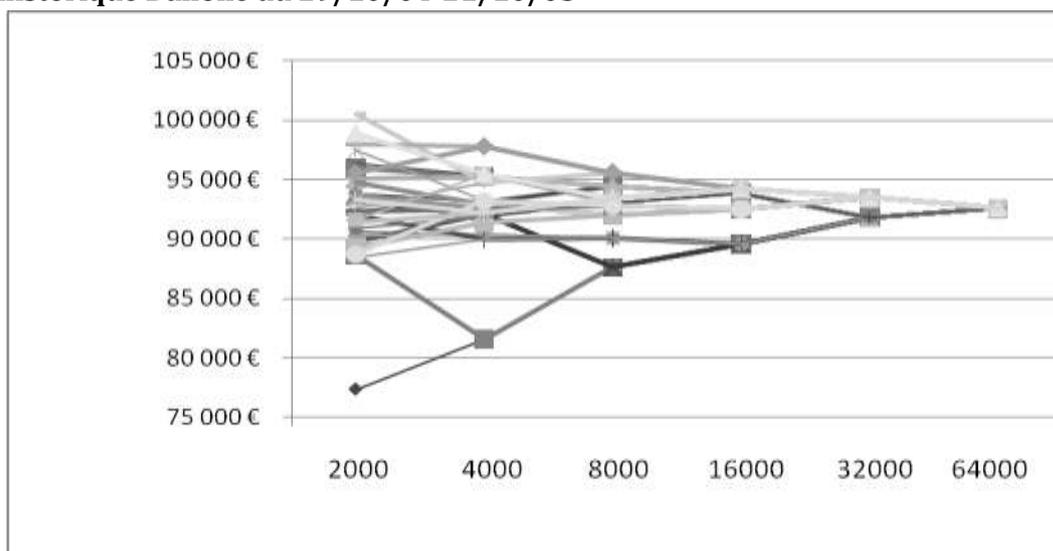
Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	59 789 €	60 158 €	62 178 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
2001	4000	60 784 €	60 158 €	62 178 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
4001	6000	65 856 €	63 804 €	62 178 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
6001	8000	62 930 €	63 804 €	62 178 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
8001	10000	63 087 €	63 761 €	62 977 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
10001	12000	64 426 €	63 761 €	62 977 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
12001	14000	61 794 €	62 467 €	62 977 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
14001	16000	64 144 €	62 467 €	62 977 €	62 619 €	64 011 €	65 073 €
16001	18000	66 620 €	66 620 €	65 825 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
18001	20000	66 744 €	66 620 €	65 825 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
20001	22000	66 665 €	65 546 €	65 825 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
22001	24000	65 073 €	65 546 €	65 825 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
24001	26000	66 882 €	67 035 €	66 259 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
26001	28000	67 107 €	67 035 €	66 259 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
28001	30000	65 412 €	64 011 €	66 259 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
30001	32000	63 944 €	64 011 €	66 259 €	65 913 €	64 011 €	65 073 €
32001	34000	66 156 €	65 707 €	65 631 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
34001	36000	65 589 €	65 707 €	65 631 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
36001	38000	66 503 €	65 516 €	65 631 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
38001	40000	65 351 €	65 516 €	65 631 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
40001	42000	67 666 €	65 732 €	65 394 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
42001	44000	63 446 €	65 732 €	65 394 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
44001	46000	68 669 €	65 394 €	65 394 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
46001	48000	61 908 €	65 394 €	65 394 €	65 499 €	66 014 €	65 073 €
48001	50000	66 007 €	66 596 €	66 767 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
50001	52000	67 113 €	66 596 €	66 767 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
52001	54000	66 984 €	66 984 €	66 767 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
54001	56000	67 856 €	66 984 €	66 767 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
56001	58000	64 390 €	67 795 €	66 797 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
58001	60000	69 685 €	67 795 €	66 797 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
60001	62000	67 854 €	64 585 €	66 797 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €
62001	64000	63 822 €	64 585 €	66 797 €	66 767 €	66 014 €	65 073 €

Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo) sur l'historique Michelin du 29/10/04-21/10/05



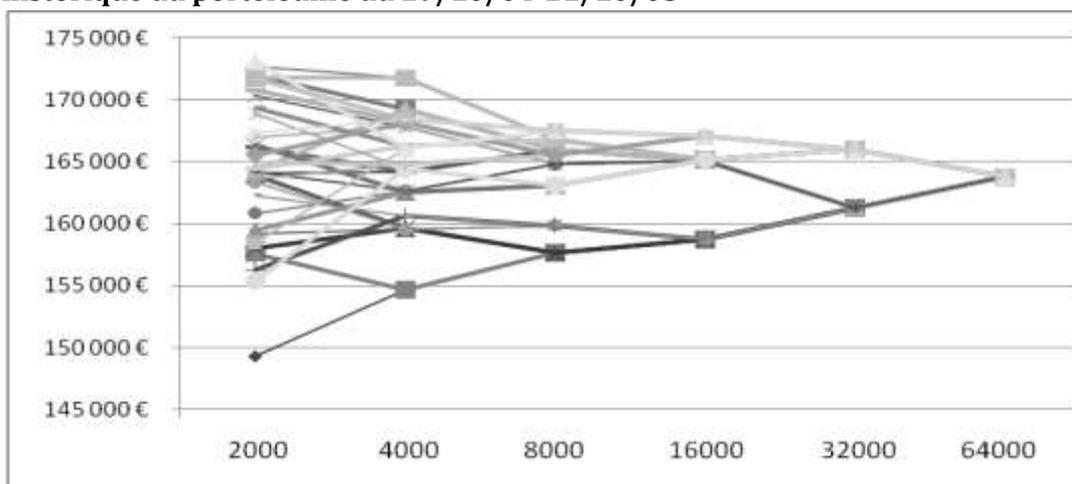
Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	80 036 €	82 674 €	85 124 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
2001	4000	83 493 €	82 674 €	85 124 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
4001	6000	90 605 €	89 344 €	85 124 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
6001	8000	86 491 €	89 344 €	85 124 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
8001	10000	87 163 €	88 329 €	88 341 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
10001	12000	89 310 €	88 329 €	88 341 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
12001	14000	87 553 €	88 826 €	88 341 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
14001	16000	89 432 €	88 826 €	88 341 €	87 080 €	88 461 €	89 361 €
16001	18000	89 019 €	91 221 €	90 356 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
18001	20000	91 910 €	91 221 €	90 356 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
20001	22000	92 675 €	90 355 €	90 356 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
22001	24000	89 320 €	90 355 €	90 356 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
24001	26000	90 415 €	90 710 €	89 130 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
26001	28000	91 910 €	90 710 €	89 130 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
28001	30000	87 701 €	87 910 €	89 130 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
30001	32000	88 419 €	87 910 €	89 130 €	89 954 €	88 461 €	89 361 €
32001	34000	91 725 €	90 369 €	90 369 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
34001	36000	88 924 €	90 369 €	90 369 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
36001	38000	92 296 €	90 420 €	90 369 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
38001	40000	89 782 €	90 420 €	90 369 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
40001	42000	89 361 €	89 767 €	90 422 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
42001	44000	90 422 €	89 767 €	90 422 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
44001	46000	94 651 €	91 068 €	90 422 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
46001	48000	86 046 €	91 068 €	90 422 €	90 369 €	90 420 €	89 361 €
48001	50000	89 901 €	90 032 €	90 379 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
50001	52000	91 694 €	90 032 €	90 379 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
52001	54000	91 793 €	90 936 €	90 379 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
54001	56000	90 113 €	90 936 €	90 379 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
56001	58000	88 898 €	91 649 €	90 976 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
58001	60000	94 352 €	91 649 €	90 976 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
60001	62000	91 346 €	90 480 €	90 976 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €
62001	64000	90 384 €	90 480 €	90 976 €	90 538 €	90 420 €	89 361 €

**Diagramme de convergence des VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo)
sur l'historique Danone du 29/10/04-21/10/05**



Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	77 328 €	81 586 €	87 617 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
2001	4000	88 661 €	81 586 €	87 617 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
4001	6000	89 798 €	92 111 €	87 617 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
6001	8000	93 747 €	92 111 €	87 617 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
8001	10000	90 572 €	90 393 €	90 073 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
10001	12000	90 249 €	90 393 €	90 073 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
12001	14000	91 990 €	90 001 €	90 073 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
14001	16000	88 487 €	90 001 €	90 073 €	89 559 €	91 827 €	92 571 €
16001	18000	92 290 €	93 115 €	94 423 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
18001	20000	93 809 €	93 115 €	94 423 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
20001	22000	95 936 €	95 236 €	94 423 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
22001	24000	95 023 €	95 236 €	94 423 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
24001	26000	96 347 €	95 319 €	92 971 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
26001	28000	95 102 €	95 319 €	92 971 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
28001	30000	90 932 €	91 870 €	92 971 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
30001	32000	93 018 €	91 870 €	92 971 €	93 818 €	91 827 €	92 571 €
32001	34000	94 729 €	92 897 €	92 033 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
34001	36000	92 884 €	92 897 €	92 033 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
36001	38000	93 901 €	91 407 €	92 033 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
38001	40000	89 257 €	91 407 €	92 033 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
40001	42000	93 747 €	92 535 €	92 834 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
42001	44000	92 268 €	92 535 €	92 834 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
44001	46000	97 456 €	93 189 €	92 834 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
46001	48000	88 728 €	93 189 €	92 834 €	92 535 €	93 495 €	92 571 €
48001	50000	92 569 €	94 778 €	95 591 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
50001	52000	100 571 €	94 778 €	95 591 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
52001	54000	97 947 €	97 772 €	95 591 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
54001	56000	95 555 €	97 772 €	95 591 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
56001	58000	91 592 €	95 464 €	93 409 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
58001	60000	98 907 €	95 464 €	93 409 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
60001	62000	91 398 €	92 161 €	93 409 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €
62001	64000	93 293 €	92 161 €	93 409 €	94 241 €	93 495 €	92 571 €

Diagramme de convergence de la VaR 99% à 10 jours Bootstrap sans remise (Joe&Kuo) sur l'historique du portefeuille du 29/10/04-21/10/05



Plage de points		2000	4000	8000	16000	32000	64000
1	2000	149 310 €	154 659 €	157 672 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
2001	4000	157 596 €	154 659 €	157 672 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
4001	6000	163 903 €	159 627 €	157 672 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
6001	8000	157 986 €	159 627 €	157 672 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
8001	10000	159 160 €	159 569 €	159 852 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
10001	12000	163 361 €	159 569 €	159 852 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
12001	14000	156 274 €	160 598 €	159 852 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
14001	16000	162 308 €	160 598 €	159 852 €	158 734 €	161 305 €	163 768 €
16001	18000	166 182 €	164 181 €	166 022 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
18001	20000	164 056 €	164 181 €	166 022 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
20001	22000	171 932 €	169 239 €	166 022 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
22001	24000	164 227 €	169 239 €	166 022 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
24001	26000	170 324 €	167 761 €	164 809 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
26001	28000	166 938 €	167 761 €	164 809 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
28001	30000	160 859 €	162 653 €	164 809 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
30001	32000	164 160 €	162 653 €	164 809 €	165 113 €	161 305 €	163 768 €
32001	34000	169 337 €	166 284 €	166 804 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
34001	36000	164 485 €	166 284 €	166 804 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
36001	38000	172 715 €	171 752 €	166 804 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
38001	40000	171 752 €	171 752 €	166 804 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
40001	42000	159 422 €	162 522 €	163 076 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
42001	44000	166 311 €	162 522 €	163 076 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
44001	46000	168 899 €	164 407 €	163 076 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
46001	48000	155 370 €	164 407 €	163 076 €	165 159 €	165 992 €	163 768 €
48001	50000	163 585 €	164 808 €	165 529 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
50001	52000	164 892 €	164 808 €	165 529 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
52001	54000	170 801 €	168 185 €	165 529 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
54001	56000	165 529 €	168 185 €	165 529 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
56001	58000	158 482 €	166 031 €	167 513 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
58001	60000	173 106 €	166 031 €	167 513 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
60001	62000	171 663 €	168 426 €	167 513 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €
62001	64000	167 363 €	168 426 €	167 513 €	167 025 €	165 992 €	163 768 €