



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour
l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le _____

Par : Marjorie GIROUX

Titre: Mortalité prospective et couverture du risque de longévité

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuares

Entreprise :

WINTER & Associés

Membres du jury I.S.F.A.

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Jean Claude AUGROS

Frédéric Planchet

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Invité :

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

RÉSUMÉ

MOTS-CLES : Risque de longévité, ajustements, projections, modèle exogène (Brass), modèle endogène (Bongaarts), risque d'estimation, Solvabilité 2

Dans le cadre de Solvabilité 2, les assureurs sont tenus d'évaluer leurs provisions et les risques associés à leurs engagements de la manière la plus réaliste possible. En assurance vie, il est donc nécessaire de développer des méthodes fiables de construction de tables d'expérience qui reflètent au mieux la mortalité des assurés.

Ce mémoire comporte trois parties. La première effectue un tour d'horizon de l'évolution de la mortalité au cours du XX^{ième} siècle et met en avant la nécessité de développer des modèles prenant en compte l'augmentation de la durée de vie humaine. Il est également souligné dans cette partie que, quelle que soit la méthode utilisée, il est essentiel de tenir compte du phénomène d'anti-sélection, ainsi que des risques systématiques liés à la modélisation.

Dans la continuité, la deuxième partie détaille la construction de tables de mortalité prospectives à partir de données d'expérience restreintes et selon deux approches différentes (Brass et Bongaarts). Les ajustements réalisés sont ensuite analysés afin d'apprécier leur bonne adéquation aux observations. La comparaison des nombres de décès et des espérances de vie générationnelles obtenues permet également de constater de manière satisfaisante que l'écart relatif de ces éléments entre les deux approches est faible.

Enfin, la valorisation des provisions *best estimate* d'un portefeuille de rentes viagères à partir des tables de mortalité construites précédemment est présentée dans la dernière partie de cette étude. La mesure du risque systématique d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage permet, par ailleurs, d'apprécier le degré de confiance accordé aux projections de mortalité selon les deux méthodes.

ABSTRACT

KEY-WORDS : Longevity risk, adjustments, projections, exogenous model (Brass), endogenous model (Bongaarts), estimation risk, Solvency 2

Under Solvency 2, insurers' obligations and underlying risks have to be assessed as realistically as possible. In life insurance, it seems necessary to develop reliable methods of experience tables construction which best reflect insured's mortality.

This report shall include three parts. The first one makes an overview of mortality trends during the last century ; it insists on the development of models which take into account improvements in longevity. Whatever the method chosen, it is important to consider the issue of adverse selection too, as well as the issue of modelling systematic risks.

In continuation, the second part details construction of prospective mortality tables according to Bongaarts and Brass's models, with limited data. Then, it is checked that adjusted death rates fit to crude mortality rates. It is found that the relative difference between some indicators from the two methods (like generational life expectancy) is low too.

Finally, the last part of this report deals with the best estimate of an annuities portfolio, assessed with mortality tables constructed previously. In addition, a measure of estimation risk is realized to assess the level of confidence in mortality projections by the two models.

AVANT-PROPOS

LE présent mémoire d'actuaire a été effectué durant l'année universitaire 2011-2012 dans le cadre de la quatrième année de formation d'actuaire délivrée par l'ISFA, sous la tutelle de S. Loisel, professeur des universités à l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1).

Ce sujet sur le risque de longévité a retenu mon attention car il s'agit d'une problématique au coeur de l'actualité, particulièrement pour les régimes de retraites ou pour certains produits d'assurance-vie. A la veille de l'application de la nouvelle directive européenne Solvabilité 2 qui conduit à l'utilisation de tables d'expérience prospectives, il m'a paru intéressant d'en étudier le concept, l'intérêt et les modèles relatifs à leur construction.

Je tiens à remercier vivement les personnes suivantes sans lesquelles ce travail n'aurait pas été aussi instructif et complet :

Je remercie tout d'abord mes référents d'école et d'entreprise, S. Loisel et F. Planchet, qui ont accepté de me superviser sur ce sujet pendant ces derniers mois, pour leur disponibilité et leurs explications.

Je remercie aussi mes collègues du cabinet WINTER & Associés, en particulier W. Youssef, G. Franquet et G. Didier, pour leur aide lors de certaines analyses de mon étude.

Je dois également un grand merci à R. Perigord et V. Lelieur pour leur soutien, leur expérience et leurs conseils avisés.

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS	vii
SOMMAIRE	ix
INTRODUCTION	1
1 MORTALITÉ ET RISQUE DE LONGÉVITÉ	3
1.1 CONSTATS SUR L'ALLONGEMENT DE LA VIE	4
1.1.1 État de la mortalité au XX ^{ième} siècle	4
1.1.2 Les inégalités face à la mortalité	5
1.2 CONTEXTE ET DÉFIS POUR LES ASSUREURS	6
1.2.1 Conjoncture économique et sociale	6
1.2.2 Règlements	7
1.3 LE RISQUE DE LONGÉVITÉ SUR LES MARCHÉS FINANCIERS	7
1.3.1 La réassurance	7
1.3.2 La titrisation	8
1.3.3 Les swaps de longévité	9
1.4 MODÉLISATION ET PRÉVISION DE LA MORTALITÉ	9
1.4.1 Modèles sous-jacent de mortalité	10
1.4.2 Méthodes de projections	11
1.4.2.1 Projection par cause	11
1.4.2.2 Projection par avis d'expert	11
1.4.2.3 Projection par extrapolation	12
1.4.2.4 Problématique du choix de la méthode	13
1.4.3 Estimation de l'incertitude	13
1.4.4 Anti-sélection	14
2 LES TABLES DE MORTALITÉ PROSPECTIVES	17
2.1 NÉCESSITÉ DES TABLES PROSPECTIVES	17
2.1.1 Les tables transversales (tables du moment)	17
2.1.2 Les tables longitudinales (tables prospectives)	18
2.1.3 Le point sur les tables françaises	18
2.2 ESTIMATION DES TAUX BRUTS DE MORTALITÉ	20
2.2.1 Hypothèse de répartition des décès dans l'année	20
2.2.2 Estimateur de Hoem	20
2.2.3 Application : présentation des données et analyse	21
2.3 AJUSTEMENT DES TAUX DE MORTALITÉ	23
2.3.1 Rappel sur le modèle de Lee-Carter et ses limites	23
2.3.2 Modèle de Brass (régression logistique)	24
2.3.2.1 Présentation	24
2.3.2.2 Ajustement	26

2.3.2.3	Application aux données	26
2.3.3	Modèle de Bongaarts	32
2.3.3.1	Présentation	32
2.3.3.2	Ajustement	34
2.3.3.3	Application aux données	35
2.3.4	Comparaison des deux méthodes	42
2.3.4.1	Comparaison du nombre de décès modélisé . .	42
2.3.4.2	Ecarts des espérances de vie générationnelles .	44
2.4	COMPLÉTION DES TABLES	45
3	APPLICATION À LA COUVERTURE D'UN PORTEFEUILLE DE RENTES VIAGÈRES	47
3.1	MODÉLISATION D'UN PORTEFEUILLE DE RENTES VIAGÈRES	47
3.1.1	Présentation du portefeuille de rentes viagères	47
3.1.2	Provisionnement dans le cadre de Solvabilité 2	48
3.1.2.1	Best Estimate	49
3.1.2.2	Marge pour risque	50
3.1.3	Comparaison des résultats par table	51
3.2	RISQUE D'ESTIMATION ET INTERVALLE DE CONFIANCE SUR LES PROVISIONS	55
3.2.1	Rappel sur les risques associés à une modélisation	55
3.2.2	Méthode d'échantillonnage	56
3.2.3	Mesure du risque d'estimation sur les provisions	57
3.2.4	Résultats comparatifs	57
	CONCLUSION	61
	BIBLIOGRAPHIE	63

INTRODUCTION

DEPUIS le siècle dernier, le phénomène du vieillissement de la population est une réalité à laquelle tous les pays industrialisés doivent faire face. L'évolution de la démographie française reflète bien la tendance mondiale caractérisée par un allongement continu et généralisé de la durée de vie humaine. Outre les bouleversements sociaux et familiaux qu'elle engendre, cette amélioration de l'espérance de vie a des conséquences économiques importantes pour les organismes d'assurance-vie et de retraites.

Pour un assureur, le risque de longévité est le risque que la durée de vie de sa population assurée soit plus longue que prévue. Que ce soit pour tarifier la prime unique d'une rente viagère ou pour établir le montant des cotisations à la caisse de retraite, la solvabilité d'une compagnie repose en partie sur sa capacité à pouvoir estimer la mortalité future avec précision. Une sur-estimation de celle-ci implique des provisions insuffisantes pour couvrir les futurs versements d'arrérages.

Traditionnellement, les assureurs fondent leurs calculs de tarification et de provisionnement sur des tables de mortalité transversales, encore appelées tables du moment. Cependant, de telles tables sont établies à partir d'observations d'une période donnée et reviennent implicitement à considérer que la mortalité est figée dans le temps, ce qui s'avère préjudiciable pour les garanties en cas de vie et en particulier pour les rentes viagères. Il semble dorénavant nécessaire pour les assureurs de baser leurs calculs sur des tables générationnelles prenant en compte l'évolution probable de la mortalité et fournissant une approche plus réaliste pour les produits où le risque viager est fort important. De telles tables ont pour entrée l'âge et l'année de naissance de l'assuré et sont dressées à partir de données d'expérience, selon différents modèles d'estimation et de projection des taux de mortalité.

Par ailleurs, avec les référentiels Solvabilité 2 et IFRS, les assureurs sont appelés à évaluer leurs engagements d'assurance de manière réaliste (démarche *best estimate*). Aussi, il ne s'agit plus d'utiliser des tables prudentes comme préconisées dans Solvabilité 1 (telles que les tables réglementaires TGH05 et TGF05 par exemple) mais de construire des tables d'expérience prospectives spécifiques qui reflètent au mieux la mortalité du portefeuille d'assurés, ainsi que son évolution attendue. Il apparaît donc indispensable pour les assureurs de développer des méthodes fiables de construction de telles tables.

Dans ce contexte, ce mémoire a pour objectif de détailler la construction de tables de mortalité prospectives à partir de données d'expérience restreintes. Il est organisé en trois parties :

1. La première partie relate l'évolution de la mortalité au cours du siècle dernier ainsi que les différentes méthodes envisagées afin de couvrir les compagnies d'assurance contre le risque de longévité. Cette revue justifie l'élaboration de tables de mortalité prospectives qui prennent en compte l'amélioration probable de l'espérance de vie future.
2. La deuxième partie détaille la construction de tables de mortalité prospectives avec un panel restreint de données d'expérience. Cette contrainte impose en effet d'avoir recours à des modèles bien spécifiques d'estimation et de projection des taux de mortalité. Nous avons à ce stade choisi d'implémenter le modèle exogène de Brass ainsi que le modèle endogène de Bongaarts. Les ajustements réalisés selon chacune de ces deux méthodes sont ensuite analysés afin d'apprécier leur adéquation aux observations. Une comparaison de la mortalité projetée selon les deux modèles est également effectuée au terme de cette partie.
3. La troisième partie s'attarde sur l'incertitude des tables de mortalité construites précédemment et utilisées pour le provisionnement d'un portefeuille de rentes viagères. Cette analyse permet de mesurer le risque d'estimation et de constater son impact sur les provisions *best estimate* de notre portefeuille d'assurance.

MORTALITÉ ET RISQUE DE LONGÉVITÉ



POUR les assureurs proposant des contrats d'assurance-vie ou de retraite, le risque de longévité est d'autant plus important que le rythme d'allongement de la durée de vie humaine est élevé. Techniquement, le risque de longévité fait partie des risques de modèle : il trouve son origine dans l'inadéquation possible entre la table de mortalité utilisée et la survie réelle des rentiers. Ce type de risque se retrouve bien entendu dans tous les produits d'assurance : si les bases techniques utilisées par l'assureur ne reflètent pas la sinistralité réelle qu'il s'est engagé à couvrir, l'assureur est confronté à des pertes techniques qui peuvent être conséquentes, et auxquelles il répondra généralement par une adaptation de la prime et/ou une diminution de la garantie. Mais l'architecture même du contrat d'épargne et des rentes viagères exacerbe le risque de modèle.

En effet, de tels contrats prévoient une phase de constitution (prime unique ou cotisation régulière) et une phase de restitution, ce qui rend impossible une correction de la tarification après le passage à la liquidation. Par ailleurs, les montants de prestations de rentes sont fixés lors de la conclusion du contrat d'assurance et ne sont plus adaptables non plus au cours du contrat. Il est clair que modifier ces caractéristiques afin de reporter le risque de longévité sur les assurés reviendrait à vider les rentes de leur intérêt social. Enfin, il faut noter que la durée de l'engagement de l'assureur pour ce type de contrat est considérable, augmentant l'incertitude liée aux taux de mortalité utilisés pour la tarification et le provisionnement.

Pour les assureurs, il est ainsi primordial aujourd'hui de tenir compte aussi précisément que possible du risque de longévité. Dans cette première partie, nous efforçons de retracer l'évolution de la mortalité depuis le siècle dernier et la prise de conscience des conséquences de cette évolution dans le monde de l'assurance. Nous évoquons également les solutions et méthodes standard envisagées pour couvrir le risque de longévité *via* les marchés financiers ou *via* la modélisation des taux de mortalité des assurés.

1.1 CONSTATS SUR L'ALLONGEMENT DE LA VIE

En 2008, l'espérance de vie à la naissance était en France de 81,5 ans, c'est-à-dire quatre ans de plus que ce que J. Bourgeois-Pichat [1] estimait en 1952 être la limite biologique infranchissable de cet indicateur. Des progrès considérables ont ainsi été réalisés au cours des dernières décennies. Comment sommes-nous parvenus à ce niveau élevé? Que dire des inégalités face à la mort? Voici quelques questions auxquelles nous nous attachons à répondre dans cette section.

1.1.1 État de la mortalité au XX^{ième} siècle

L'espérance de vie à la naissance des hommes en 2008 était de 77,6 ans et celle des femmes de 84,4 ans (INED¹). L'espérance de vie s'est considérablement améliorée au fil du temps grâce à l'amélioration des conditions de vie, aux progrès médicaux et aux programmes de santé publique.

Au XX^{ième} siècle, c'est tout d'abord la mortalité infantile qui a fortement diminué, passant sous la barre des 50 ‰ en 1950 grâce aux progrès de l'hygiène, de la révolution pastorienne, ainsi que de la mise en place des premières politiques de protection de la petite enfance. Puis la diffusion des antibiotiques, la généralisation des vaccinations permettant de juguler les maladies infectieuses, les programmes de périnatalogie et la maîtrise de la mort subite du nourrisson ont également impliqué un recul de la mortalité infantile. Celle-ci atteint aujourd'hui un niveau extrêmement bas de 3,6 ‰ et ne pèse quasiment plus sur l'espérance de vie.



FIGURE 1.1 – Taux de mortalité infantile en France métropolitaine (Source INED)

1. <http://www.ined.fr>, Institut National d'Études Démographiques

En seconde cause, l'espérance de vie progresse grâce aux succès rencontrés dans la lutte contre la mortalité adulte, en particulier aux âges élevés. L'espérance de vie à 65 ans a commencé à augmenter chez les femmes au début du XX^{ième} siècle, mais seulement après la deuxième guerre mondiale chez les hommes, du fait du recul des maladies infectieuses puis des maladies cardio-vasculaires. Par la suite, il faut également noter une évolution favorable de la plupart des autres causes et notamment des cancers qui actuellement pèsent autant que les maladies cardio-vasculaires dans la mortalité. De plus, la mortalité due aux maladies de société et aux accidents est aussi depuis plusieurs décennies orientée à la baisse, ce qui contribue à l'accroissement régulier de l'espérance de vie. Aujourd'hui, l'espérance de vie à 65 ans en France est l'une des plus élevées du monde, tant pour les hommes (16,9 ans) que pour les femmes (21,4 ans).

L'élévation générale du niveau d'instruction, ainsi que l'amélioration de la prise en charge médicale de certaines maladies et accidents pourraient favoriser la poursuite des progrès de l'espérance de vie. D'un autre côté, différents facteurs comme la montée de l'obésité, l'accroissement de certaines pratiques à risque, la dégradation de la situation économique et ses conséquences sur les conditions de vie pourraient freiner à l'avenir les tendances positives du siècle dernier.

Ainsi, et comme le soulignait Rogers (2002) [2], la mortalité future s'avère difficile à appréhender car elle est influencée par des facteurs socio-économiques, politiques, biologiques, médicaux et environnementaux.

1.1.2 Les inégalités face à la mortalité

On observera toujours un certain niveau d'hétérogénéité de mortalité quelle que soit la population considérée. Cette hétérogénéité découle souvent de plusieurs facteurs observables incluant l'âge, le sexe, l'activité socio-professionnelle, *etc.*

Ainsi, les femmes vivent généralement plus longtemps que les hommes. Globalement, en terme d'espérance de vie à la naissance, l'écart en France est d'environ 7 ans (77,6 ans chez les hommes contre 84,4 chez les femmes en 2008). Cela s'explique par l'approche différente que les femmes ont de la santé, qui leur a permis de tirer plus tôt profit des progrès accomplis dans le domaine des maladies cardio-vasculaires et des cancers. Quant à la réduction récente de l'écart entre hommes et femmes, elle est essentiellement due à la baisse de la mortalité masculine causée par la consommation de tabac.

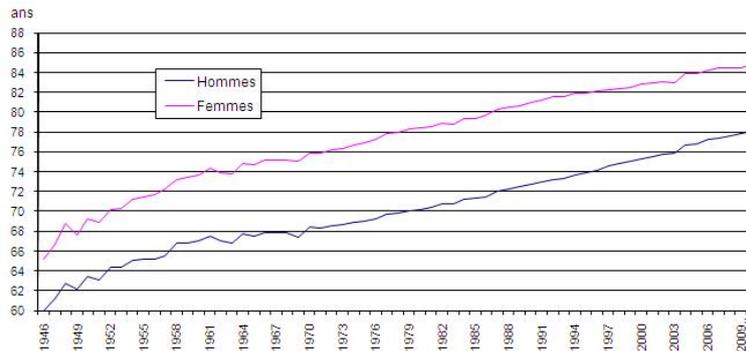


FIGURE 1.2 – *Espérance de vie à la naissance en France (source INED)*

Par ailleurs, les assurés qui ont un statut socio-économique élevé ont tendance à avoir des niveaux inférieurs de mortalité. En France, au début des années 2000, les écarts d'espérance de vie entre cadres et ouvriers étaient encore très importants : une récente estimation indique qu'à 35 ans, les hommes et les femmes cadres supérieurs peuvent espérer vivre encore respectivement 46,5 et 51 ans et les ouvriers 41 et 48,5 ans. Selon Cambois, Laborde et al. (2008) [3], il y a entre le bas et le haut de l'échelle sociale une différence fondamentale de rapport au corps, de recours aux soins et d'adaptation des comportements. A cela s'ajoute une inégalité dans les expositions aux risques de maladies ou d'accidents, sur le lieu de travail ou de résidence.

Notons enfin que certaines hétérogénéités sont induites par différentes caractéristiques du milieu de vie telles que le climat, la pollution, les normes d'hygiène, l'alimentation et la densité de population.

1.2 CONTEXTE ET DÉFIS POUR LES ASSUREURS

L'évolution de la longévité décrite précédemment est une réalité à laquelle tous les pays industrialisés doivent faire face. Ce phénomène provoque un nombre considérable de nouveaux enjeux et défis à divers niveaux de la société.

1.2.1 Conjoncture économique et sociale

Avant les années 2000, les produits financiers élevés engendrés par les investissements des compagnies d'assurance "masquaient" quelque peu les dangers de l'allongement de la durée de vie. De ce fait, les assureurs proposant des garanties en cas de vie ont pris conscience tardivement de l'importance du risque de longévité, en dehors du risque financier.

Le secteur des retraites est notamment fortement impacté par le risque de longévité. Dans certains pays développés, des entreprises ont dû fermer les plans de retraites à prestations définies qu'ils proposaient précédemment à leurs employés. En outre, un certain nombre de gouvernements sont appelés à augmenter les âges légaux de départ à la retraite pour être

en mesure de prendre en compte dynamiquement l'amélioration de la mortalité et les effets du vieillissement de la population sur le financement des retraites.

Le secteur de l'assurance-vie est également confronté à un certain nombre de défis spécifiques liés au risque de longévité. En pratique, les assureurs ont la nécessité de constituer davantage de capital pour équilibrer les risques à long terme. Cette exigence est par ailleurs renforcée par les effets de la crise financière et par la nouvelle réglementation européenne.

1.2.2 Règlements

Le secteur de l'assurance en Europe sera bientôt tenu de se conformer à la nouvelle directive Solvabilité 2. Les normes réglementaires de la directive mettent l'accent sur la manière avec laquelle les compagnies d'assurance doivent gérer les risques qu'ils endossent afin de pouvoir résister à des situations de crise économique et démographique.

Les assureurs sont ainsi tenus d'évaluer leurs engagements d'assurance à partir d'hypothèses réalistes et fines. Pour les contrats de rentes viagères, il s'agit de construire des tables de mortalité d'expérience prenant en compte le niveau actuel de la mortalité des assurés ainsi que son évolution attendue.

La réglementation devrait entrer en vigueur d'ici 2014 et renforcera également le développement de solutions alternatives de transfert des risques d'assurance, en particulier du risque de longévité.

1.3 LE RISQUE DE LONGÉVITÉ SUR LES MARCHÉS FINANCIERS

Parmi les moyens appropriés et efficaces de couverture, les compagnies d'assurance ont la possibilité de transférer une partie du risque de longévité aux réassureurs et aux marchés financiers. Plusieurs solutions ont déjà été envisagées.

1.3.1 La réassurance

Les réassureurs, de par leur expérience en matière de risques conséquents et leur connaissance du marché, peuvent aider les compagnies d'assurance à mieux appréhender leur risque de longévité. Cependant, ce risque de modèle est peu diversifiable et ne peut pas être mutualisé géographiquement : la majorité des rentes sont vendues dans les pays industrialisés et l'évolution de la mortalité dans l'ensemble de ces régions est fortement corrélée. Ainsi, les réassureurs ne peuvent exercer pleinement leur capacité à diversifier les risques et à faire jouer le phénomène de mutualisation.

Nous allons néanmoins présenter brièvement l'un de ces possibles contrats de réassurance permettant de couvrir le risque de longévité. Un *Excess of Loss* en durée est une couverture où la cédante se décharge auprès

du réassureur de la part des sinistres survenus après une certaine période fixée isolément pour chaque police du portefeuille. Dans notre contexte, dès lors que l'assuré dépasse un certain âge, le réassureur se substitue à l'assureur pour le paiement de la rente. Du point de vue de la cédante, ce type de traité s'adapte bien à des portefeuilles composés de têtes très âgées. De plus, contrairement au traité *Excess of Loss* classique dont la mise au point et la tarification peuvent être délicats pour le réassureur, la cotation de ce type d'*Excess of Loss* en durée n'est pas trop difficile.

Terrier (2000) [4] détaille deux options de partage du risque lorsque la priorité de l'*Excess of Loss* en durée est franchie. La première consiste pour le réassureur à payer les arrérages à la place de l'assureur jusqu'au décès de l'assuré. Dans ce cas le réassureur assume seul le risque de dérive ultérieur de la mortalité. Avec la seconde option, le réassureur choisit de verser à l'assureur la provision mathématique de la rente évaluée à cette date. Ils se partagent alors le risque de dérive de la mortalité dans le temps. Cette deuxième option, plus intéressante pour le réassureur, reste cependant difficile à mettre en oeuvre pour des raisons juridiques à propos de la définition contractuelle du calcul des provisions mathématiques à effectuer.

1.3.2 La titrisation

Une autre solution consiste à transférer le risque de longévité aux marchés financiers en utilisant la titrisation et un principe similaire aux Cat-Bonds. Une SPC (*Special Purpose Company*) créée par un réassureur émet de la dette sur les marchés financiers par le biais d'obligations indexées sur la durée de vie humaine. En cas d'allongement excessif de la durée de vie humaine, les flux de coupons et/ou le principal qui auraient du être remboursés aux détenteurs des obligations sont suspendus ou réduits. Ces flux sont alors reversés à l'assureur qui les utilise pour régler les rentes.

L'avantage pour les investisseurs est de détenir une nouvelle classe d'actifs dont les rendements sont peu corrélés aux autres produits traditionnels et d'obtenir ainsi un bénéfice de diversification.

La première expérience de titrisation en matière de durée de vie humaine fut tentée par Swiss Re en 2003 qui émit une obligation de type "*mortality bond*", *Vita I*, basée sur un indice de mortalité. Si l'indice excédait 130 % (respectivement 150 %) du niveau de 2002, le principal était réduit (respectivement annulé), la maturité étant fixée à 3 ans. Ce produit rencontra un grand succès auprès des investisseurs et fut suivi par d'autres obligations du même type : *Vita II* et *Vita III* de Swiss Re (2005, 2007), *Osiris* d'Axa (2006), *Tartan* de Scottish Re (2006). Remarquons cependant que le raisonnement de ce type de produit consiste à se protéger contre une hausse de mortalité et non contre une amélioration de la longévité. Mais par symétrie, on peut en déduire un produit de couverture de l'allongement de la durée de vie. C'est ainsi qu'une véritable obligation de longévité ("*survivor bond*") fut émise par BNP Paribas en 2004, sur une

période de 25 ans. La structure de l'obligation était assez complexe et l'opération ne rencontra pas un grand succès, notamment car le risque couvert était trop grand et que le capital nécessaire était trop important pour la protection offerte. Elle fut abandonnée l'année suivante (voir Blake et al., 2006 [5]).

1.3.3 Les swaps de longévité

Les "swaps de longévité" sont l'une des formules envisagées pour traiter le risque d'allongement de la durée de vie : l'assureur paie à la partie contractante du swap un flux de ressources convenu et reçoit un revenu qui augmente si la longévité est supérieure aux estimations. L'assureur peut ainsi annuler son risque de longévité en payant un montant prévu par un contrat. En comparaison avec les obligations de longévité, cette solution permet d'éviter un intermédiaire (le réassureur *via* la SPC). En revanche, l'absence de collatéral (tel que le principal de l'obligation) induit un risque supplémentaire de défaut de la contrepartie.

Babcock International est la première entreprise anglaise à avoir signé un tel contrat, structuré par le Crédit Suisse, pour un nominal d'environ 500 millions de livres. En 2010, la filiale anglaise de BMW a signé un swap de longévité pour 3 milliards de livres (60 000 membres) avec Abbey Life, filiale de la Deutsche Bank, qui va rétrocéder ses risques à un consortium de réassureurs. Ce marché se développe cependant lentement, car les tarifs offerts correspondent aux estimations hautes de prévision d'amélioration de la mortalité.

Par ailleurs, le marché français reste frileux eu égard au système de retraite en place et aux considérations d'ordre plutôt culturel. Dans les pays en développement, ce mécanisme a également très peu de chance de s'y développer. Des questions éthiques interviennent notamment dès l'instant où la "rémunération" du vendeur de swap est corrélée à la mort prématurée des retraités (spéculation sur la mort). Par ailleurs, l'efficacité d'un tel mécanisme n'est garantie que par la convergence entre "acheteurs" et "vendeurs" vers un prix d'équilibre fiable, ce qui est loin d'être le cas aujourd'hui.

Finalement, nous avons passé en revue rapidement quelques produits financiers permettant de couvrir le risque de longévité. Mais l'objet principal de ce mémoire n'étant pas de transférer aux marchés financiers ou aux réassureurs ce risque, nous nous concentrons maintenant sur la modélisation et la prévision de la mortalité future afin d'adapter la tarification des produits de rente en fonction de cette évolution.

1.4 MODÉLISATION ET PRÉVISION DE LA MORTALITÉ

La modélisation de la mortalité a une très longue histoire. De nombreux modèles ont été proposés depuis la loi de mortalité de Gompertz

en 1825 [6]. Il y a quelques décennies, les méthodes utilisées étaient relativement simples et impliquaient un certain degré de jugement subjectif (voir Pollard, 1987 [7]). Cela fait seulement une quinzaine d'années que des méthodes plus sophistiquées ont été développées et appliquées.

1.4.1 Modèles sous-jacent de mortalité

La projection de la mortalité implique généralement la spécification d'un modèle sous-jacent aux données et un modèle de projection. Ces modèles peuvent être distincts ou intégrés dans un cadre unique. Les facteurs tels que l'âge, le temps et la cohorte permettent de classer le modèle sous-jacent en tant que modèle à n facteurs (Tabeau et al., 2001 [8]). Les modèles à zéro facteur sont tout simplement une mesure globale ou un simple taux spécifique à l'âge (avec chaque âge traité indépendamment); dans ce cas, il n'y a pas de modèle sous-jacent spécifié. Un modèle à un facteur considère les taux de mortalité (sur une période ou pour une cohorte) en fonction de l'âge, avec l'avantage de prendre en compte leur régularité selon l'âge et la stabilité de la structure des âges au fil du temps, ce qui s'avère utile dans un objectif de prévision. Des modèles à deux facteurs posent généralement l'âge et la période en variables, alternativement l'âge et la cohorte. Quant aux modèles à trois facteurs (ou APC), ils expriment les taux en fonction de l'âge, du temps et de la cohorte.

Le choix des modèles dépend bien sûr de l'objectif de l'étude et de la disponibilité des données. Un autre critère important concerne l'interprétabilité des paramètres. Il est généralement avantageux que les paramètres du modèle sous-jacent aient des interprétations facilement compréhensibles, telles que l'âge moyen au décès ou la vitesse à laquelle les taux de mortalité changent.

Dans l'objectif d'effectuer des projections, des transformations peuvent également être effectuées, par exemple en utilisant le logarithme des taux de mortalité. Brass (1971) [9] a utilisé la transformation logistique :

$$\text{logit}(1 - s_x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - s_x}{s_x}\right)$$

où s_x est la probabilité de survivre de la naissance à l'âge exact x . L'utilisation de cette transformation sera précisée dans la partie 2 de ce mémoire lors de la construction de nos tables d'expériences.

Heligman & Pollard (1980) [10] ont également expérimenté divers modèles et Wilmoth (1990) [11] utilise une transformation basée sur les probabilités de décès q_x spécifiques aux âges qui se rapproche du log des taux de hasard instantanés :

$$f_x = \ln\left(\frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x}\right) \approx \ln(\mu_{x+\frac{1}{2}})$$

D'autres transformations ou fonctions de lien sont considérées par Renshaw & Haberman (2000) [12]. Dans une approche novatrice, De Jong

& Marshall (2007) [13] adoptent la transformée de Wang $z_x = \phi^{-1}(s_x)$ où ϕ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (Wang, 2000 [14]).

1.4.2 Méthodes de projections

Une fois le modèle d'ajustement sélectionné, il s'agit de déterminer la démarche ainsi que les méthodes pertinentes de projection. On peut baser ces dernières sous trois grandes approches : les méthodes de projection par cause (*explanation*), par avis d'expert (*expectation*) et par extrapolation.

1.4.2.1 Projection par cause de mortalité

L'approche explicative fait appel à des modèles structurels ou des modèles épidémiologiques de mortalité par causes de décès où les variables clés exogènes sont connues et peuvent être mesurées. En effet, la prise en compte des facteurs d'hétérogénéité au sein de la population assurée apparaît raisonnable dans le cadre d'une projection de mortalité afin de disposer d'une loi d'expérience robuste (voir Kamega & Planchet, 2011 [15]). L'exemple classique est l'effet du tabagisme sur les décès provoqués par le cancer du poumon. Toutefois, cette approche est limitée à certaines causes de décès qu'on sait déterminantes et peut poser des problèmes associés au risque d'estimation, au manque d'indépendance entre les causes et les données elles-mêmes et au choix de segmentation optimale (voir Alho, 2007 [16] et Planchet & Leroy, 2009 [17]). Ainsi, les analyses par cause sont souhaitables pour les projections de court ou moyen terme mais s'avèrent particulièrement risquées pour les projections de long terme que nous souhaitons réaliser dans ce travail (voir Tabeau & al., 2001 [8]).

1.4.2.2 Projection par avis d'expert

L'approche par avis d'expert fonde les modèles de mortalité sur les opinions subjectives des experts impliquant divers degrés de formalité. Elle permet d'intégrer quantitativement ou qualitativement des facteurs épidémiologiques, démographiques ou d'autres connaissances pertinentes dans les projections et peut s'avérer très utile dans le cas de petits échantillons.

En pratique, cette méthode consiste à se référer à une hypothèse dite "d'expert" pour calibrer le modèle de mortalité. Par exemple, il peut s'agir de poser une contrainte sur le niveau de l'espérance de vie à une date future (Pollard, 1987 [7]). La plupart des organismes statistiques internationaux ont donné la priorité à cette approche (Waldron, 2005 [18]), même si certains adoptent maintenant l'approche par extrapolation. Entre autres, le "Continuous Mortality Investigation Bureau" (CMIB) de l'Institut britannique des Actuaire a établi les séries de tables de mortalité anglaises "80" et "92" en utilisant l'avis d'expert pour fixer deux

des paramètres de leur modèle de projection. Wong-Fupuy & Haberman (2004) [19] fournissent des détails supplémentaires sur les applications de ces méthodes dans les domaines de l'assurance-vie et des retraites aux États-Unis et au Royaume-Uni.

Toutefois, Booth & Tickle (2008) [20] rappellent que le conservatisme et les divergences dans les avis d'expert limitent les possibilités de projections à long terme avec cette méthode. En outre, cette approche sous-estimerait l'amélioration de la mortalité. En effet, les experts sont généralement réticents à envisager la poursuite à long terme des tendances d'amélioration de la mortalité, se basant sur des croyances quant aux limites de l'espérance de vie. Ainsi, aux États-Unis comme au Royaume-Uni et en Australie, les projections incluant l'avis d'experts ont systématiquement sous-estimé les améliorations de la mortalité (Alho & Spencer, 1990 [21]; Waldron, 2005 [18]).

Dans le cadre de notre étude, nous envisagerons tout de même cette approche en complément de la méthode d'extrapolation décrite ci-après.

1.4.2.3 Projection par extrapolation

La plupart des développements ont été réalisés dans la prévision par extrapolation et utilisent des méthodes statistiques, supplantant les modèles reflétant simplement l'augmentation de la mortalité avec l'âge. Les méthodes extrapolatives supposent que les tendances à venir seront essentiellement une continuation du passé, ce qui semble une hypothèse raisonnable pour la mortalité en raison des régularités historiques observées. Toutefois, des exceptions se produisent : les augmentations temporaires de la mortalité des jeunes adultes en raison des décès dus au sida, les fluctuations de la mortalité russe et la période de stagnation de la mortalité en Australie dans les années 1960.

Parmi les méthodes les plus simples on trouve le prolongement de la tendance linéaire de l'espérance de vie, dont White (2002) [22] a démontré la bonne précision. Les méthodes utilisant des modèles à deux facteurs ont été couronnées de succès en termes d'exactitude, tandis que les progrès récents ont permis d'améliorer l'estimation de l'incertitude des prévisions. Le modèle à deux facteurs le plus connu est celui de Lee-Carter (1992) [23], dont nous rappellerons brièvement l'idée dans la section 2.3.1. Des méthodes à trois facteurs ont aussi été proposées récemment. Les méthodes basées sur la régression linéaire ont eu moins de succès en raison de la non-linéarité de la mortalité dans le temps. Évoquons également Denton, Feaver & Spencer (2005) qui utilisent l'extrapolation log-linéaire et Golulapati, De Ravin & Trickett (1984) [24] qui prédisent la mortalité d'une cohorte australienne par extrapolation linéaire des transformées logit de Brass (voir aussi Pollard, 1987 [7]). Nous testerons cette dernière méthode dans notre étude car elle sied aux populations disposant de faibles données. Enfin l'introduction de méthodes stochastiques a eu le grand avantage de produire des distributions probabilistes prévisionnelles

de la mortalité plutôt que des prévisions ponctuelles déterministes.

Précisons aussi que les méthodes de séries chronologiques (Box et al., 1994 [25]) sont couramment utilisées dans la prévision par extrapolation. Les modèles de séries chronologiques ont l'avantage d'être stochastiques, permettant le calcul de l'intervalle de prévision probabiliste de la valeur prédite. Dans le cas d'un modèle sous-jacent à zéro facteur, la série elle-même est modélisée et prédite. Pour les modèles à un et à deux facteurs, les séries chronologiques sont les paramètres ajustés du modèle sous-jacent, par exemple, les huit paramètres du modèle d'Heligman-Pollard ou l'unique paramètre temporel du modèle de Lee-Carter. Afin de prédire la mortalité, la modélisation ARIMA univariée ou multivariée a souvent été utilisée. Bien que développées pour les prévisions à court terme, les méthodes de séries chronologiques sont de plus en plus utilisées pour la prévision de la mortalité à long terme. Alho & Spencer (2005) [26] recommandent des séries de données toujours plus longues que l'horizon de prévision (deux à trois fois). Dans le modèle à deux facteurs de Lee-Carter (1992) [23], les paramètres estimés fonction de l'âge sont supposés fixes et les méthodes de séries chronologiques sont utilisées pour extrapoler les paramètres variant dans le temps. Dans une approche similaire, le modèle de données de panel de Babel, Bomsdorf & Schmidt (2008) [27] exprime le logarithme du facteur de réduction de la mortalité comme la somme des effets de l'âge et du temps stochastiquement indépendants ; les méthodes de séries chronologiques sont utilisées pour modéliser l'effet du temps tandis que l'effet de l'âge est supposé fixe.

1.4.2.4 Problématique du choix de la méthode

Le choix de la méthode de projection peut dépendre de plusieurs critères, incluant notamment les données disponibles, l'objectif et l'horizon de prévision. Pour des prévisions à long terme, des méthodes de séries chronologiques extrapolatives sont généralement utilisées, nécessitant de longues séries de données. L'exactitude des projections d'une méthode fait également l'objet d'importantes considérations, ainsi que la problématique de l'adoption des méthodes par les utilisateurs. Les statisticiens soulèvent souvent le fait que les utilisateurs ne sont pas aptes à comprendre des sorties de méthodes complexes, notamment celles produisant des intervalles de prédiction probabilistes. Cela peut expliquer en partie la réticence des organismes statistiques officiels à choisir des méthodes statistiques au delà des scénarios basés sur les avis d'expert pour la prévision de la mortalité à des fins de projection de la population.

1.4.3 Estimation de l'incertitude

Les experts s'accordent généralement sur la tendance croissante de l'espérance de vie, mais des déviations à la hausse ou à la baisse sont possibles. Comme le rappellent Planchet & Juillard (2007) [28], plusieurs sources d'incertitude viennent perturber la détermination exacte de la tendance future : choix de la période d'observation, fluctuations stochastique

des taux de mortalité, événements exceptionnels, *etc.* Cette incertitude fait peser sur les assureurs de rentes viagères et les régimes de retraite un risque systématique dont l'impact financier peut être très important.

Trois risques systématiques peuvent être à l'origine de cette incertitude :

- le risque de modèle ;
- le risque d'estimation ;
- le risque d'avis d'expert.

La définition de ces risques sera précisée dans la partie 3 de ce mémoire. Nous nous intéresserons plus particulièrement au risque d'estimation afin d'en mesurer l'impact sur les provisions *best estimate* d'un portefeuille de rentes viagères.

1.4.4 Anti-sélection

L'anti-sélection souvent importante dans le cas d'un portefeuille de rentes viagères mérite également une attention particulière.

Par définition, un phénomène d'anti-sélection apparaît lorsque les conditions d'assurance conduisent à rendre la souscription plus attractive pour les clients présentant un risque aggravé, et moins attractive pour les clients présentant un risque plus faible. Autrement dit, l'anti-sélection survient quand l'assuré a une meilleure connaissance du risque que l'assureur auquel ce risque est soumis, c'est un effet d'asymétrie de l'information.

Ainsi, lors de l'ajustement des taux de mortalité pour un portefeuille de rentes viagères, il faut avoir conscience que la mortalité des rentiers est probablement différente de celle de la population générale. En effet, la plupart des personnes qui souscrivent à ce type de contrats estiment être en très bonne santé, et on peut donc s'attendre à une sous-mortalité de la part des rentiers par rapport à la population globale. Les assureurs qui ne prendraient pas en compte ce phénomène subirait alors de lourdes pertes techniques, d'où la nécessité d'adapter les grandeurs établies sur la base de la mortalité relative à la population générale à la mortalité spécifique aux rentiers.

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Au terme de cette première partie, nous avons pris conscience du caractère mouvant de la mortalité et de la nécessité de développer des méthodes intégrant l'évolution de la durée de vie humaine. Dans ce mémoire, notre objectif est de décrire une telle méthode de projection des taux de mortalité, simple et efficace, pour pouvoir être utilisée à des fins de provisionnement. De plus, nous disposons de données d'expérience restreintes ce qui pose une contrainte supplémentaire quant au choix du

modèle. Dans la deuxième partie, nous exposons et argumentons le choix de deux méthodes d'ajustement et de projection des taux de mortalité qui répondent à notre problématique.

LES TABLES DE MORTALITÉ PROSPECTIVES

2

COMME nous venons de le voir, la mortalité est en perpétuelle évolution et le calcul des primes relatives aux rentes viagères nécessite l'utilisation de tables prospectives. Nous allons étayer ce constat dans cette deuxième partie.

2.1 NÉCESSITÉ DES TABLES PROSPECTIVES

Une table de mortalité est un modèle qui permet de retracer la mortalité vécue par un ensemble d'individus de la même génération, depuis leur naissance jusqu'à l'extinction complète du groupe. Cet ensemble d'individu est de plus supposé fermé à toute migration.

De fait, une table de mortalité donne à chaque âge le nombre moyen de décès et de survivants, ainsi que les probabilités de décès et de survie pour une génération fictive comptant généralement 100 000 individus à la naissance.

Du point de vue de l'assureur, on distingue les tables réglementaires imposées par l'autorité de tutelle et les tables d'expérience, établies par les entreprises d'assurance et basées sur la sinistralité observée au sein de leur propre portefeuille. L'inconvénient fréquent de ces dernières est la restriction du groupe de référence ce qui peut induire des fluctuations observées de mortalité importantes.

Du point de vue technique, on va distinguer les tables de mortalité transversales dressées à partir d'observations relatives à une période déterminée et les tables de mortalité longitudinales qui tiendront également compte de la génération de la personne assurée pour déterminer sa probabilité de décès. Les paragraphes suivants détaillent les différences fondamentales entre ces deux types de tables.

2.1.1 Les tables transversales (tables du moment)

L'approche transversale est certainement la plus connue. On utilise pour cela un ensemble d'individus observés pendant une période variant généralement de un à cinq ans afin d'estimer des quotients de mortalité qui seront utilisés pour générer le tarif d'expérience.

Cette manière de procéder présente l'avantage de ne requérir que l'observation du groupe d'individus pendant une durée relativement courte. En revanche, la table de mortalité obtenue mélange de nombreuses générations et lorsque la mortalité évolue, les indicateurs démographiques qui en découlent (tels que l'espérance de vie) n'ont aucun sens concret car ils ne correspondent à aucune génération d'individus.

Ainsi, baser une tarification sur une table transversale revient implicitement à considérer que la mortalité est figée, ce qui est peu probable. En effet, comme nous l'avons décrit dans la première partie de ce rapport l'espérance de vie est en constante progression. D'où, les assureurs doivent désormais recourir à des tables de mortalité longitudinales ou dynamiques, anticipant l'évolution probable de la mortalité des individus.

2.1.2 Les tables longitudinales (tables prospectives)

Également appelées tables "de génération", elles sont bidimensionnelles : deux variables expliquent le décès, à la fois l'âge de l'assuré mais aussi le temps. Les probabilités de survenance du risque de mortalité intègrent les évolutions potentielles de la mortalité avec le temps (recul de la mortalité, phénomène de longévité).

On tente avec ces tables de se calquer sur les différentes générations, ce qui impose bien sûr de prédire la mortalité future des cohortes d'individus non éteintes. Pour les produits où le risque de longévité est fort important du fait de l'évolution significative de la mortalité, comme les rentes viagères, il s'agit de la seule approche procurant une tarification réaliste.

Nous détaillerons par la suite dans ce rapport la démarche de construction d'une table prospective. Celle-ci comporte toujours une étape d'estimation des taux bruts de mortalité par âge et génération, puis une étape d'ajustement de ces taux à un modèle, ce qui permet de lisser les fluctuations d'échantillonnage et enfin une étape de projection des taux dans le futur.

2.1.3 Le point sur les tables françaises

En France, jusqu'au 1^{er} juillet 1993, les entreprises d'assurance avaient l'obligation d'utiliser les tables de mortalité établies par l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques (INSEE ¹) et homologuées par arrêté du ministre de l'économie et des finances.

En principe, ces tables devaient être mises à jour tous les cinq ans afin de prendre en compte les évolutions démographiques. Mais en pratique, cette révision n'était pas systématique alors que sa fréquence aurait même dû être augmentée face au rythme d'accroissement de l'espérance de vie.

1. <http://www.insee.fr>

Ce système amenait les compagnies d'assurance à devoir utiliser des tables de plus en plus dépassées. Par exemple, de janvier 1985 à juillet 1993, leurs tarifications étaient établies sur la base des tables TD 73/77 ou TV 73/77, c'est à dire à partir d'observations faites sur la population entre 1973 et 1977. Compte tenu de l'évolution de l'espérance de vie que nous avons déjà évoquée, les résultats obtenus ne s'avéraient pas assez réalistes, les provisions étant souvent sur-estimées dans le cas des garanties en cas de décès et sous-estimées dans le cas des rentes viagères.

La réforme technique du 27 avril 1993 a permis de moderniser le système. Désormais, les assureurs ont le choix entre les tables réglementaires basées sur les données de l'INSEE ou bien les tables d'expérience. Quatre arrêtés ont récemment modifié les codes des Assurances, de la Sécurité Sociale et de la Mutualité à propos des tables de mortalité à utiliser. Il s'agit de :

- l'arrêté du 20 décembre 2005² (entrant en vigueur à compter du 1^{er} janvier 2006) qui précise que les tables de mortalité prévues pour les contrats autres que de rente viagère sont la table TH00-02 pour les assurés de sexe masculins et la table TF00-02 pour les assurés de sexe féminin, ce sont des tables transversales avec des décalages d'âge à appliquer selon la génération concernée ;
- l'arrêté du 1^{er} août 2006³ (entrant en vigueur à compter du 1^{er} janvier 2007) modifiant certaines dispositions du code des assurances en matière d'assurance sur la vie et de capitalisation et portant homologation des tables de mortalité prospectives pour les rentes viagères : table TGH05 pour les assurés de sexe masculin et table TGF05 pour les assurés de sexe féminin ;
- l'arrêté du 8 décembre 2006⁴ (resp. du 21 décembre 2006⁵) relatif aux tables de mortalité applicables aux mutuelles (resp. aux institutions de prévoyance) qui stipule que, selon le type de contrats, les tables à utiliser sont les mêmes que celles des deux arrêtés précédemment cités.

Les nouvelles tables distinguent les hommes et les femmes, ce qui s'avère cohérent avec l'observation des inégalités d'espérance de vie entre sexe, mentionnées dans la partie 1 de ce rapport. Toutefois, il reste possible pour les assureurs d'appliquer une table unique à condition de retenir la plus prudente :

- pour le risque décès : la TH00-02,
- pour le risque vie : la TF00-02,
- pour les rentes : la TGF05.

2. <http://admi.net/jo/20051229/ECOT0591210A.html>

3. <http://admi.net/jo/20060826/ECOT0691259A.html>

4. <http://admi.net/jo/20061230/SANS0624984A.html>

5. <http://admi.net/jo/20070111/SANS0625193A.html>

En ce qui concerne l'utilisation des tables d'expérience à des fins de provisionnement dans les entreprises d'assurance, elles doivent être certifiées par un actuaire indépendant agréé par l'Institut des Actuaires. La validité de la table est alors de 2 ans ou 5 ans en cas de suivi annuel.

2.2 ESTIMATION DES TAUX BRUTS DE MORTALITÉ

2.2.1 Hypothèse de répartition des décès dans l'année

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons travailler avec l'hypothèse de constance par morceaux des taux instantanés de mortalité sur chaque carré du diagramme de Lexis. Pour $u, s \in [0, 1]$ et $x, t \in \mathbb{N}$, on suppose :

$$\mu_{x+u}(t+s) = \mu_x(t)$$

2.2.2 Estimateur de Hoem

Nous avons choisi d'estimer les taux bruts de mortalité de notre population à l'aide de l'estimateur des moments de Hoem, estimateur paramétrique qui permet de prendre en compte les censures et troncatures (cf. Planchet & Therond, 2006, [29]).

Le principe de cet estimateur est de considérer que chaque individu vivant i n'est exposé au risque de mortalité dans la classe d'âge $[x, x+1]$ qu'entre les dates α_i (date du début d'observation de l'assuré d'âge x) et β_i (date de fin d'observation de l'assuré d'âge x , par décès, par censure ou par changement d'âge). Ainsi, seules les périodes où il y avait effectivement un risque pour l'assureur de cet individu i sont prises en compte.

De cette manière, la variable aléatoire X_i représentant l'état de l'individu i (sinistré ou non) suit une loi de Bernoulli de paramètre $\beta_i - \alpha_i q_{x+\alpha_i}$. On suppose de plus que la probabilité pour un individu d'âge x de décéder avant $x+t$ ($t \in [0, 1]$) est une fonction linéaire du temps : ${}_tq_x = tq_x$ et ${}_{s-t}q_{x+t} \approx {}_tp_x - {}_sp_x$. Par conséquent, la probabilité de décéder dans l'intervalle $[\alpha_i, \beta_i] \subset [x, x+1]$ est égale à ${}_{\beta_i - \alpha_i}q_{x+\alpha_i} \approx (\beta_i - \alpha_i)q_x$. On obtient également $\mathbb{E}[X_i] \approx (\beta_i - \alpha_i)q_x$.

Les X_i pour $i=1, \dots, n$ étant supposées indépendantes, la variable aléatoire $D_x = \sum_{i=1}^{n_x} X_i$ comptabilisant le nombre de décès observés sur la classe d'âge $[x, x+1[$ suit une loi binomiale de paramètres $(n_x, \beta_i - \alpha_i q_{x+\alpha_i})$.

Finalement, en posant $Z_i = \frac{X_i}{\beta_i - \alpha_i}$, on obtient :

$$\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}\left[\frac{X_i}{\beta_i - \alpha_i}\right] \approx q_x$$

D'où, on en déduit un estimateur de q_x :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{\sum_i (\beta_i - \alpha_i)}$$

Notons que l'estimateur des moments de Hoem est sans biais. Il s'avère que cet estimateur est particulièrement bien adapté si les hypothèses paramétriques adoptées sont proches de la loi de mortalité.

2.2.3 Application : présentation des données et analyse

La base utilisée compte 36 110 observations sur la période du 01/01/1996 au 31/12/2007. 58,8 % des individus sont des femmes et 41,2 % des hommes. Au total, on a dénombré durant cette période 6 012 sinistres (3 519 femmes et 2 493 hommes décédés).

La population inclut des reversataires mais dans notre étude nous avons choisi de ne pas distinguer les individus première tête et deuxième tête. En effet, lors des projections de population d'assurés dans un objectif de provisionnement, il est quasi inéluctable d'utiliser une même table de mortalité pour les personnes statutaires et reversataires.

Le graphe de la décomposition de la population exposée au risque en fonction de l'année d'observation est le suivant :

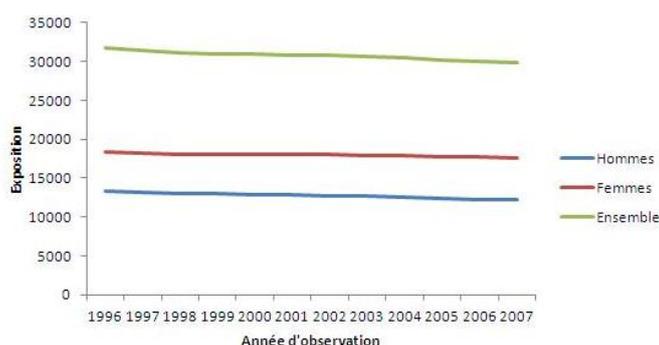


FIGURE 2.1 – Évolution de l'exposition au risque

On note une décroissance régulière de l'exposition au risque, quel que soit l'ensemble de population considéré.

En revanche, les survenances de décès apparaissent plus irrégulières, comme le montre le graphe suivant :

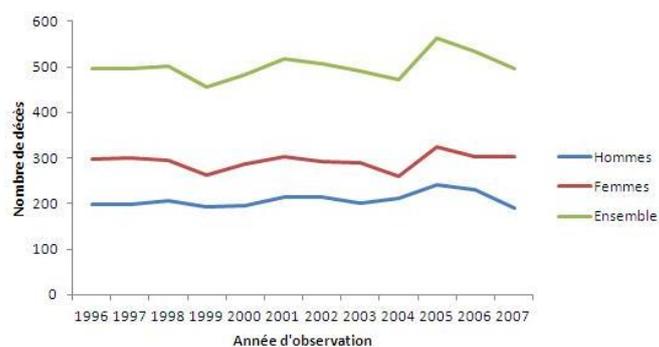


FIGURE 2.2 – Répartition des décès

A partir des décès et de l'exposition au risque, il est possible de calculer les taux de mortalité pour chaque ensemble de population. Ceux-ci sont représentés sur le graphe suivant :

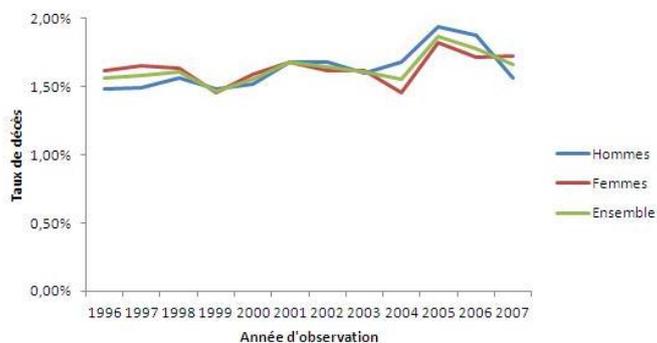


FIGURE 2.3 – Évolution du taux de décès

La légère augmentation du taux de mortalité moyen avec les années s'explique notamment par la dérive à la hausse de l'âge moyen.

Finalement, le dernier graphe de cette section montre l'évolution de l'espérance de vie résiduelle à 60 ans :

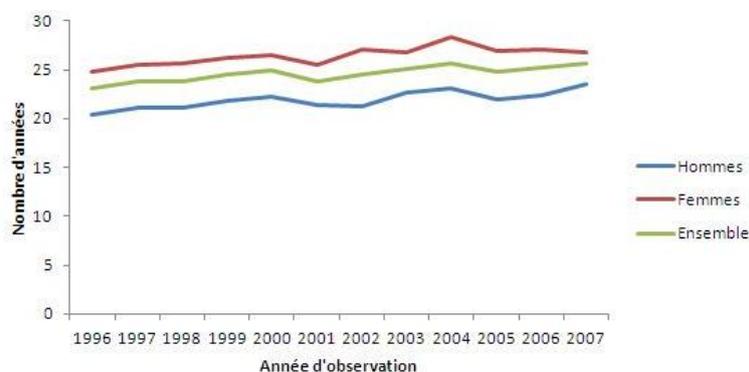


FIGURE 2.4 – Évolution de l'espérance de vie résiduelle à 60 ans

On observe bien une tendance à la hausse de l'espérance de vie résiduelle à 60 ans, que ce soit pour les hommes ou les femmes. Cette légère augmentation est cohérente avec l'amélioration de la longévité au cours du temps observée au sein de la population française.

Cette base de données apparaît relativement restreinte étant donné que l'on dispose de peu d'années d'expérience avec un faible nombre de rentiers. Les méthodes de construction de tables de mortalité doivent donc être adaptées à ces contraintes de volume. En ce sens, nous avons choisi dans la partie suivante d'utiliser d'une part une méthode de positionnement par rapport à des tables de mortalité externes, et d'autre part la méthode de Bongaarts.

2.3 AJUSTEMENT DES TAUX DE MORTALITÉ

De manière générale, plus le périmètre des données d'expérience est restreint (faible historique, faible nombre d'assurés, etc), plus la construction d'une loi d'expérience prospective s'avère difficile et le recours à des informations externes devient alors nécessaire. Dans cette optique, nous pouvons notamment choisir de nous positionner par rapport à des tables de mortalité externes ou bien de calibrer certains paramètres par avis d'expert.

La première approche consiste à modéliser la mortalité de la population assurée en fonction de celle d'une population dont les données sont importantes, sûres, historiquement longues et à fluctuations négligeables. Nous avons choisi de considérer le modèle de Brass (1971) [9] à deux paramètres car une sur-paramétrisation réduirait la capacité prospective de la méthode. Ce modèle a par ailleurs l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre et convient très bien pour un périmètre d'étude de rentiers dont l'âge est supérieur à 62 ans.

Dans la deuxième approche, la solution retenue pour construire des lois d'expérience prospectives à partir de petits échantillons consiste à intégrer des contraintes liées aux avis d'expert dans la modélisation des taux de décès prospectifs. Nous avons choisi d'utiliser le modèle de Bongaarts (2004) [30] qui sera ajusté statistiquement et par avis d'expert.

Dans cette section, nous commencerons par rappeler brièvement le modèle classique de Lee-Carter et ses limites dans le cas de petits échantillons de population. Puis nous détaillerons le modèle de Brass et le modèle de Bongaarts utilisables pour de telles données, selon les deux approches différentes introduites précédemment.

2.3.1 Rappel sur le modèle de Lee-Carter et ses limites

La modélisation proposée pour le taux instantané de mortalité dans Lee-Carter (1992) [23] est la suivante :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{xt},$$

avec $t_m \leq t \leq t_M$ et en supposant les variables aléatoires ϵ_{xt} indépendantes, identiquement distribuées selon une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sur l'échelle logarithmique, α_x décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps, β_x traduit l'écart des taux μ_{xt} par rapport à α_x et κ_t représente l'évolution de la mortalité au cours du temps.

Une fois la surface de mortalité ajustée sur les données d'expérience par une méthode de décomposition aux valeurs singulières, il s'agit de modéliser la série temporelle (κ_t) pour extrapoler les taux futurs. On utilise pour cela des méthodes spécifiques aux séries chronologiques. Une manière très simple basée sur une régression linéaire consiste à poser :

$$\kappa_{t*} = at + b + \eta_t$$

avec (η_t) un bruit blanc gaussien de variance σ_η .

Bien que le modèle de Lee-Carter ait déjà fait ses preuves à maintes reprises (voir par exemple les références citées dans Delwarde & Denuit, 2006 [31]), il présente quelques limites qui justifient notre choix d'utiliser d'autres modèles pour nos données :

- L'estimation par moindres carrés des paramètres du modèle de Lee-Carter nécessite que les erreurs du modèle soient homoscédastiques. Or, lorsque le volume de données est restreint, le taux instantané de mortalité brut peut disposer d'une forte volatilité ; en conséquence, le logarithme de ces taux peut présenter de très fortes variations ce qui ne concorde pas avec l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus.
- La projection du paramètre temporel par l'approche des séries chronologiques nécessite d'avoir un historique d'observation sur une longue période lorsqu'on souhaite effectuer des prévisions à long terme. Ce critère n'est pas vérifié dans notre cas car nos données contiennent des informations sur seulement 12 années.
- L'approche de Lee-Carter présente une faible dimension qualitative car elle ne fait intervenir qu'un seul paramètre temporel. Ainsi, la prise en compte d'un avis d'expert dans l'évolution présumée de la mortalité est limitée.
- Le modèle de Lee-Carter pose l'hypothèse que la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge x , notée β_x , est constante au cours du temps. Autrement dit, pour un âge donné, l'amélioration de la mortalité au fil du temps serait la même, quelle que soit la période considérée. En pratique, cette hypothèse n'est pas vérifiée puisque nous avons rappelé en première partie qu'on observe une diminution de l'amélioration de la mortalité des jeunes au fil du temps, tandis que celle des personnes âgées tend à augmenter.

2.3.2 Modèle de Brass (régression logistique)

2.3.2.1 Présentation

Comme nous l'avons vu brièvement avec le modèle de Lee-Carter, certains modèles standard d'estimation des taux de mortalité présentent des limites lorsqu'on les applique avec de petits échantillons. Dans notre contexte d'étude, il s'agissait de retenir des approches simples à mettre en oeuvre qui ne se heurtent pas à de telles limites. Nous considérons ainsi la méthode de régression logistique dans un premier temps.

Comme évoqué dans la section 1.4.1, Brass (1971) [9] proposa une expression à partir des transformations logits. La fonction logit est définie par :

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

où p est défini sur $]0;1[$.

Le recours à cette transformation permet d'obtenir une quantité sans contrainte (lorsque $q \in [0, 1]$, $\text{logit}(q) \in \mathbb{R}$), ce qui semble particulièrement adapté pour une étude probabiliste.

Le modèle de Brass admet l'existence d'une relation linéaire entre les logits des probabilités de décès de la population étudiée et de la population de référence pour un même âge x et une année fixée t :

$$\text{logit}(q_{x,t}) = a \times \text{logit}(q_{x,t}^{ref}) + b + \varepsilon_{x,t}$$

avec $\varepsilon_{x,t}$ les résidus du modèle supposés iid.

Ce modèle est fondé sur le constat qu'à partir d'un certain âge adulte (25 ans environ) les logits des taux de mortalité ont une tendance linéaire en fonction de l'âge. Dans son mémoire, Viville (2008) [32] observe qu'il est tout à fait envisageable de modéliser le logit des probabilités de décès par une droite fonction de l'âge pour certains pays développés (par exemple la France, le Royaume-Uni et les USA), tandis qu'il est plus difficile d'ajuster ce type de relation pour les pays en voie de développement présentant une plus grande volatilité de mortalité. Par exemple, avec nos données hommes et femmes et les taux de mortalité calculés précédemment, nous obtenons les courbes des logits suivantes pour l'année 2007 :

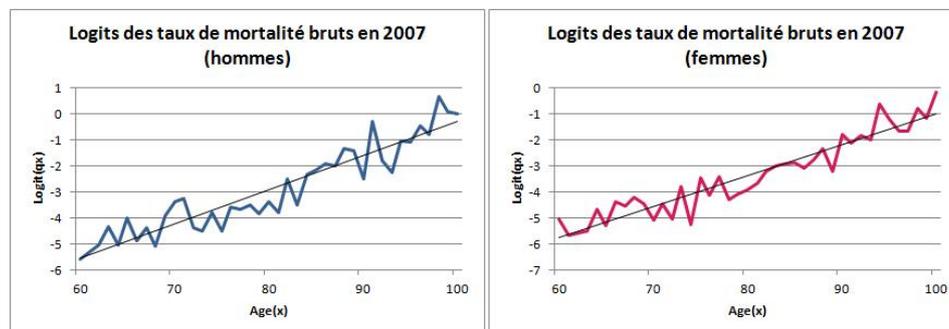


FIGURE 2.5 – Logits des taux de mortalité bruts 2007

Ce modèle à seulement deux paramètres et simple à mettre en oeuvre permet de capter le lien entre les deux populations et ainsi de répercuter la tendance dans le temps de la population de référence sur la population étudiée. Elle est aussi utile pour obtenir des projections. En effet, en fixant les paramètres a et b grâce aux données d'expérience disponibles sur une certaine période, il sera possible d'obtenir les valeurs futures pour la population étudiée à partir des valeurs futures de la population de référence.

D'après ce modèle, nous avons décidé dans notre cas de construire les tables d'expérience H/F en positionnant la mortalité d'expérience par rapport aux tables réglementaires TGH 05 (pour les hommes) et TGF 05 (pour les femmes). Ces références ont été choisies compte tenu de leur rôle dans la réglementation des assurances et du fait qu'elles décrivent la

survie des rentiers de portefeuilles d'assureurs.

L'utilisation de la fonction logistique dans un contexte de rentes conduit à introduire une certaine prudence dans l'ajustement des $q_{x,t}$ qui en résulte. En effet, la fonction logit est concave sur l'intervalle $]0;0,5]$.

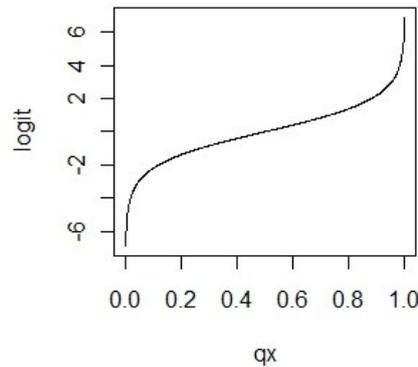


FIGURE 2.6 – Fonction $\text{logit}(q_x)$

De ce fait, l'inégalité de Jensen (cf. Saporta, 2006, [33]) nous donne :

$$\mathbb{E}(\text{logit}(\hat{q}_x)) \leq \text{logit}(\mathbb{E}(\hat{q}_x))$$

Comme les taux de mortalité ont été estimés sans biais, $\mathbb{E}(\hat{q}_x) = q_x$. On déduit donc de l'inégalité ci-dessus que les logits estimés sont biaisés négativement lorsque q_x inférieur à 0,5, ce qui conduit également à biaiser négativement les taux de décès. Par construction, la méthode est ainsi prudente.

2.3.2.2 Ajustement

En pratique on dispose de données utilisables sur la plage d'âges 50-95 ans pour les hommes et sur la plage d'âges 50-100 ans (bornes incluses). Au delà de cette plage, les taux de décès seront fermés exponentiellement en imposant une condition de continuité à 100 ans et un taux de décès de 100 % à l'âge ultime de la table TGF ou TGH 05 associée (l'âge ultime dérive avec le temps de 117 à 120 ans pour les femmes et de 113 à 120 ans pour les hommes). La fermeture des tables est détaillée de manière plus conséquente dans la section 2.4.

2.3.2.3 Application aux données

Comme précisé ci-avant, les ajustements ont été réalisés avec la méthode de régression logistique pour les âges allant de 50 ans à 95 ou 100 ans. Les graphiques que nous présentons correspondent aux mêmes plages d'âges. La distance utilisée est celle des moindres carrés pondérée par l'exposition au risque.

Les ajustements réalisés sur les taux de mortalité d'expérience pour la période allant de 1996 à 2007 ont les allures suivantes :

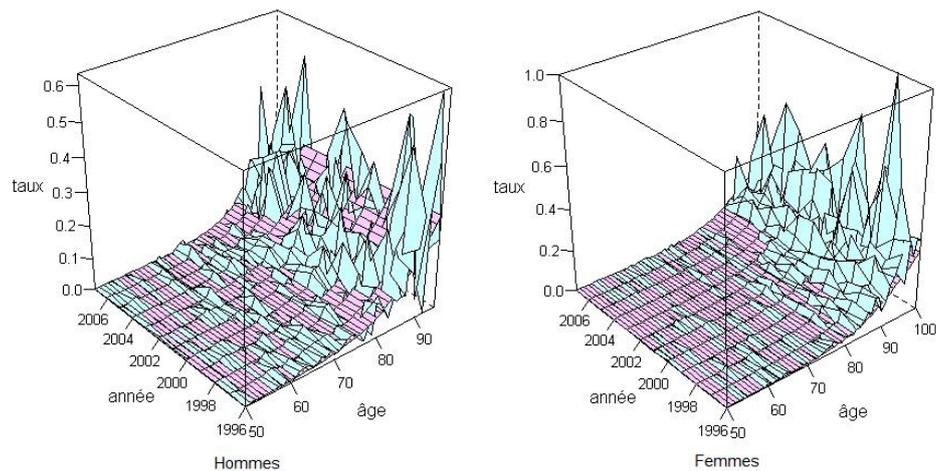


FIGURE 2.7 – Ajustement des taux bruts

Des coupes de ces surfaces pour l'année 2006 sont représentées ci-dessous :

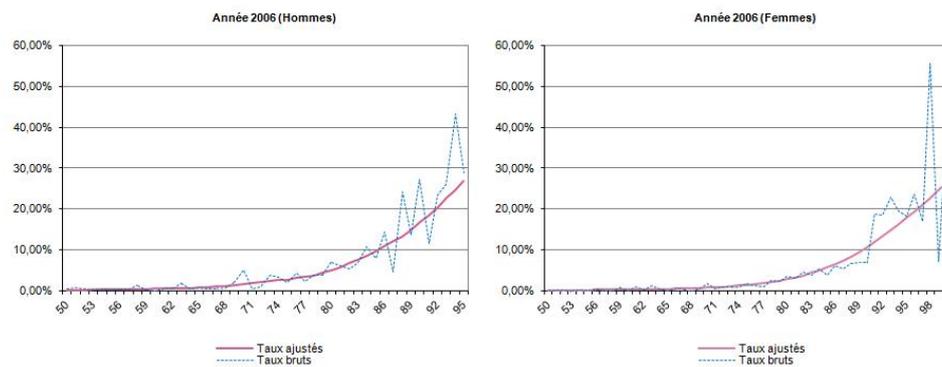


FIGURE 2.8 – Ajustement des taux bruts pour l'année 2006

Il convient ensuite d'analyser un certain nombre d'éléments afin d'apprécier la bonne adéquation des tables proposées aux observations. De plus, les tables souhaitant être utilisées pour un provisionnement de rentes viagères, il s'agit de vérifier leur niveau de prudence dans un tel contexte d'assurance en cas de vie.

Nous avons regardé le nombre de décès modélisés (calculés d'après les taux de mortalité du modèle et l'exposition au risque observée) et le nombre de décès observés. Dans une perspective de prudence, il est préférable que la table d'expérience sous-estime légèrement le nombre de décès par rapport à la réalité observée. On obtient les rapprochements suivants pour les années 1996 à 2007 :

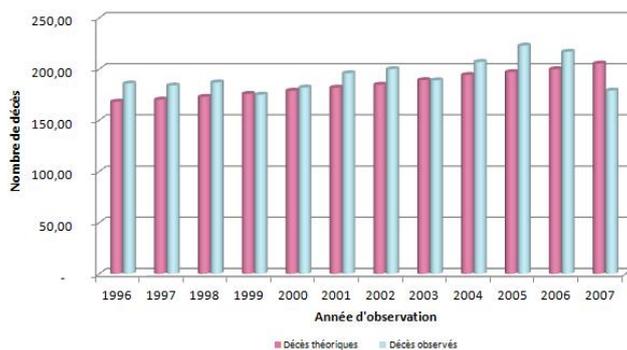


FIGURE 2.9 – Comparaison des décès modélisés et observés entre 50 et 95 ans (hommes)

Pour les individus masculins, l'application des taux ajustés à l'exposition au risque conduit à 4,6 % de décès en moins par rapport aux nombre de décès observés. De plus, pour chaque année d'observation, le nombre de décès modélisé est très proche du nombre de décès observé.

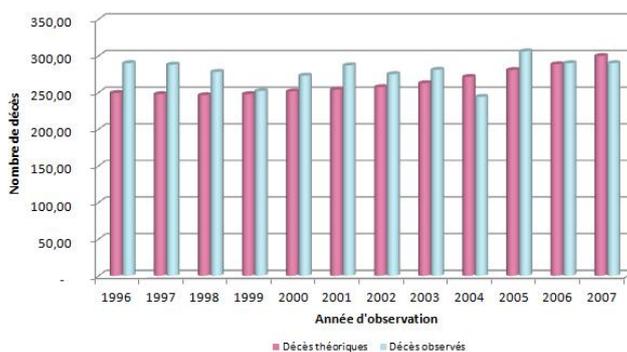


FIGURE 2.10 – Comparaison des décès modélisés et observés entre 50 et 100 ans (femmes)

Pour les individus féminins, l'application des taux ajustés à l'exposition au risque conduit à 5,9 % de décès en moins par rapport aux nombre de décès observés. Pour chaque année d'observation, le nombre de décès modélisé est proche du nombre de décès observé. Nous notons cependant que la table d'expérience féminine semble intégrer un niveau de prudence plus élevé que la table masculine.

Ces premières observations doivent être complétées par une analyse des décès modélisés et observés âge par âge sur l'ensemble de la période d'observation. Nous supposons que le nombre de décès modélisés pour un âge x au cours d'une année t suit une loi binomiale de paramètres $(E_{x,t}, q_{x,t})$. Puis, nous effectuons l'approximation de cette loi binomiale par la loi normale de même espérance et de même écart-type (théorème de De Moivre-Laplace). Nous approchons donc la loi des $\hat{D}_{x,t}$ par la gaussienne $\mathcal{N}(E_{x,t} \times q_{x,t}, E_{x,t} \times q_{x,t}(1 - q_{x,t}))$. En remplaçant la variance théorique par la variance estimée, on en déduit l'intervalle de confiance à 95 % pour les décès ajustés :

$$IC_{95\%} = [\hat{D}_{x,t} - 1,96\sqrt{E_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(1 - \hat{q}_{x,t})}; \hat{D}_{x,t} + 1,96\sqrt{E_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(1 - \hat{q}_{x,t})}]$$

On obtient ainsi les résultats ci-dessous :

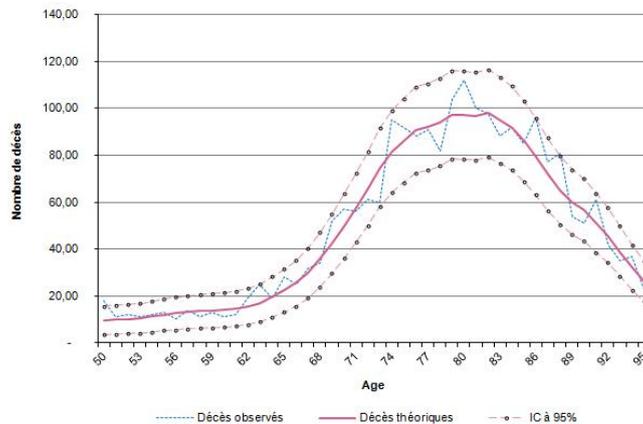


FIGURE 2.11 – Comparaison par âge (50-95 ans) des décès modélisés et observés 1996-2007 (hommes)

Pour la population masculine, on constate que les décès observés se situent à l'intérieur de l'intervalle de confiance théorique sur l'ensemble de la plage d'âge considérée, d'où une représentation correcte de la réalité par la table d'expérience. On note par ailleurs que l'imprécision associée aux fluctuations d'échantillonnage est importante. En effet, en calculant l'erreur relative d'estimation par la demi-longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %, nous constatons que cette erreur est supérieure à 15 % quel que soit l'âge.

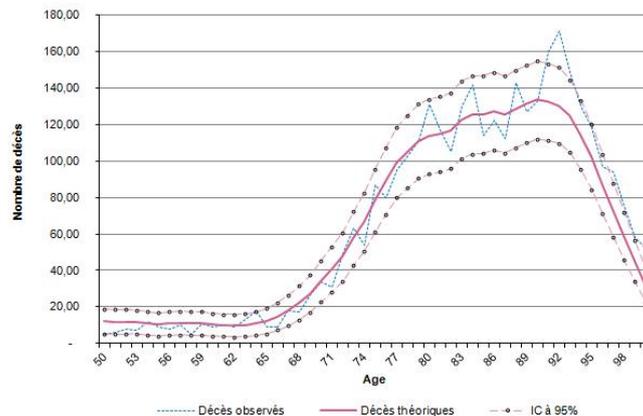


FIGURE 2.12 – Comparaison par âge (50-100 ans) des décès modélisés et observés 1996-2007 (femmes)

Pour la population féminine, on constate de même que les décès observés se situent à l'intérieur de l'intervalle de confiance théorique sur l'ensemble de la plage d'âge considérée, sauf pour les âges 92 ans et les âges supérieurs à 97 ans où les décès observés sont plus élevés. On note également que l'imprécision associée aux fluctuations d'échantillonnage est importante (erreur relative d'estimation supérieure à 13 %).

Projections

Comme nous l'avons déjà précisé, les taux de décès ont été projetés jusqu'à la génération 1962. Les tables proposées fournissent donc des taux de décès à partir de 50 ans pour les générations 1900 à 1962. Graphiquement, on obtient avec la méthode des logits les surfaces de mortalité suivantes :

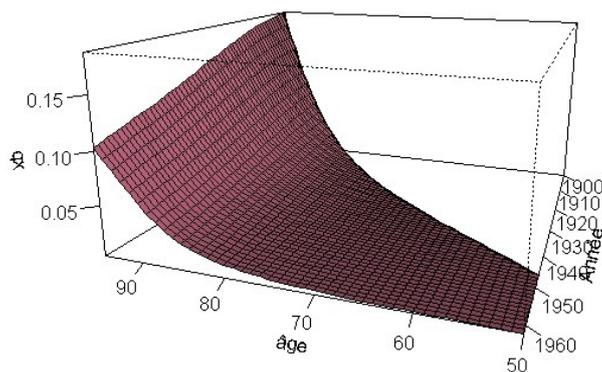


FIGURE 2.13 – Surface de mortalité ajustée (homme)

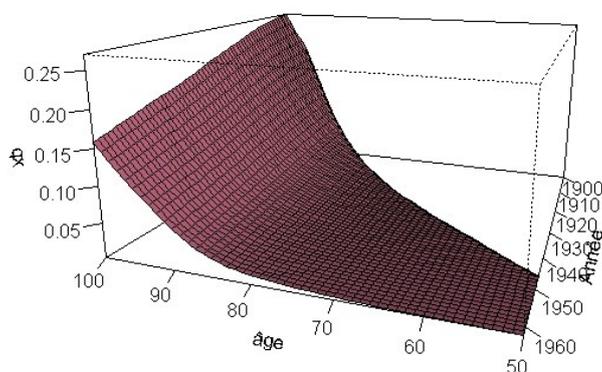


FIGURE 2.14 – Surface de mortalité ajustée (femme)

Nous remarquons bien une diminution de la mortalité à tout âge au fil du temps.

Pour finir, nous avons observé les espérances de vie résiduelles obtenues avec nos tables d'expérience comparativement à celles des tables de références TGH et TGF 05. Les graphes suivants illustrent l'évolution temporelle de l'espérance de vie à 60 ans pour les hommes et pour les femmes :

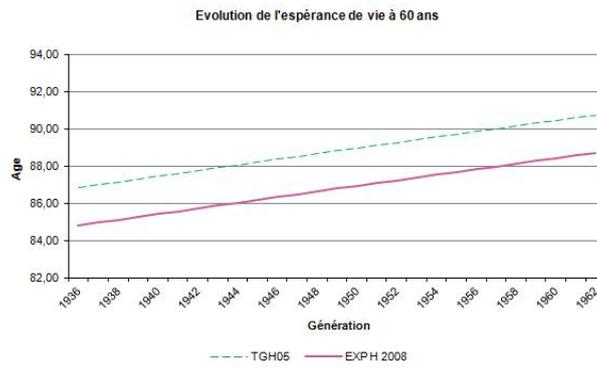


FIGURE 2.15 – Evolution de l'espérance de vie à 60 ans (hommes)

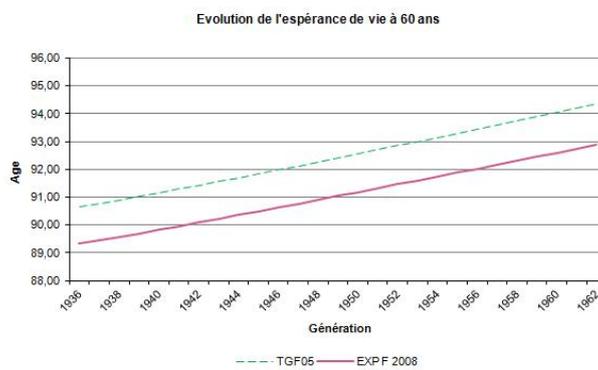


FIGURE 2.16 – Evolution de l'espérance de vie à 60 ans (femmes)

Enfin, les surfaces d'espérances de vie générationnelles prédites pour tous les âges supérieurs à 50 ans sont représentées ci-dessous :

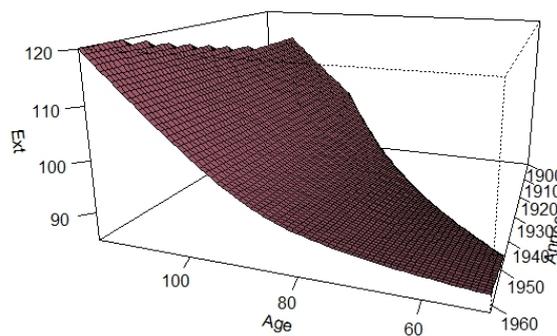


FIGURE 2.17 – Evolution de l'espérance de vie générationnelle (hommes)

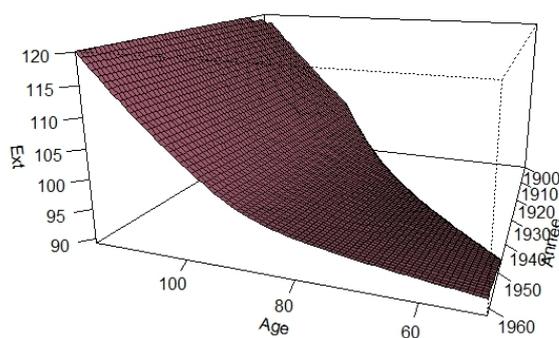


FIGURE 2.18 – Evolution de l'espérance de vie générationnelle (femmes)

Ces espérances de vie sont inférieures à tout âge et quelle que soit la génération aux espérances de vie des tables TGH05 et TGF05.

2.3.3 Modèle de Bongaarts

2.3.3.1 Présentation

Nous nous intéressons maintenant au modèle logistique décalé de Bongaarts (2004) [30] défini par :

$$\mu_{x,t} = \frac{\alpha_t e^{\beta \cdot x}}{1 + \alpha_t e^{\beta \cdot x}} + \gamma_t,$$

où le paramètre β est considéré indépendant du temps.

Dans cette adaptation du modèle de Thatcher (1999) [34], la composante liée au taux instantané de décès environnemental γ_t et la composante liée au vieillissement $\frac{\alpha_t e^{\beta \cdot x}}{1 + \alpha_t e^{\beta \cdot x}}$ dépendent du temps. Le paramètre γ_t représente l'ajustement de la mortalité pour les jeunes adultes, le paramètre α_t le niveau de mortalité et le paramètre e^β l'augmentation du risque de mortalité avec l'âge.

Avec $S_{t_0,t} = \frac{\ln(\alpha_t/\alpha_{t_0})}{\beta}$, Bongaarts démontre que la composante vieillesse de la mortalité a la même valeur à l'âge élevé x pour l'année t qu'à l'âge $x - S_{t_0,t}$ pour l'année t_0 :

$$\frac{\alpha_t e^{\beta \cdot x}}{1 + \alpha_t e^{\beta \cdot x}} = \frac{\alpha_{t_0} e^{\beta(x - S_{t_0,t})}}{1 + \alpha_{t_0} e^{\beta(x - S_{t_0,t})}}$$

Cette propriété permet d'interpréter l'évolution à la hausse ou à la baisse de la mortalité au cours du temps comme un décalage d'âge au cours du temps.

A partir de la formule des taux instantanés, l'expression des taux de

mortalité annuels pour une année t fixée s'obtient par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 q_x &= 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_s ds} \\
 &= 1 - e^{-\int_x^{x+1} \frac{\alpha \cdot e^{\beta \cdot s}}{1 + \alpha \cdot e^{\beta \cdot s}} + \gamma ds} \\
 &= 1 - e^{-\gamma - \frac{1}{\beta} \int_x^{x+1} \frac{\beta \alpha \cdot e^{\beta \cdot s}}{1 + \alpha \cdot e^{\beta \cdot s}} ds} \\
 &= 1 - e^{-\gamma - \frac{1}{\beta} [\ln(1 + \alpha \cdot e^{\beta \cdot s})]_x^{x+1}} \\
 &= 1 - e^{-\gamma - \frac{1}{\beta} \times \ln\left(\frac{1 + \alpha \cdot e^{\beta(x+1)}}{1 + \alpha \cdot e^{\beta x}}\right)} \\
 &= 1 - e^{-\gamma - \ln\left(\frac{1 + \alpha \cdot e^{\beta(x+1)}}{1 + \alpha \cdot e^{\beta x}}\right)^{-\frac{1}{\beta}}} \\
 &= 1 - e^{\gamma} \cdot \left(\frac{1 + \alpha \cdot e^{\beta(x+1)}}{1 + \alpha \cdot e^{\beta x}}\right)^{-\frac{1}{\beta}}
 \end{aligned}$$

La procédure proposée par Bongaarts pour anticiper la mortalité future consiste à ajuster les observations de chaque année d'expérience à l'aide du modèle de Thatcher, puis à modéliser l'évolution au cours du temps des paramètres de ce modèle, à les projeter et à les utiliser pour calculer les taux de mortalité instantanés selon la formule du modèle logistique décalé. Cette démarche est donc composée des quatre étapes suivantes :

1. la calibration statistique des séries de paramètres α_t , β_t et γ_t du modèle de Thatcher pour différentes périodes passées t ;
2. le calcul du paramètre β , moyenne de β_t et nouvelle détermination des séries α_t et γ_t (légère différence avec les séries précédentes) ;
3. l'extrapolation des paramètres α_t et γ_t obtenus sur l'horizon de projection souhaité ;
4. la projection des taux de mortalité d'après le modèle de Bongaarts, à partir du paramètre β et des paramètres extrapolés α_t et γ_t .

Ce processus présente plusieurs atouts en comparaison avec des modèles classiques tels celui de Lee-Carter ou celui de Thatcher. En premier lieu, l'information annuelle est condensée dans un nombre restreint de paramètres. De plus, il y a moins de contraintes au niveau temporel du fait des deux paramètres α_t et γ_t (contre un seul paramètre pour Lee-Carter). Par ailleurs, le modèle de Bongaarts tient compte de l'évolution au fil des années de l'amélioration de la mortalité au cours du temps. Comme nous l'avons déjà évoqué, il accorde une attention particulière à la modélisation de la mortalité aux grands âges. Enfin, cette approche fournit une dimension qualitative à la modélisation du fait de la forme paramétrique du modèle sous-jacent et de la propriété de "décalage" du modèle de Bongaarts.

Concernant notre contexte d'étude et de construction de tables de mortalité prospectives, l'approche de Bongaarts s'avère particulièrement avantageuse car elle semble adaptée à des populations pour lesquelles on dispose d'un panel de données peu conséquent (voir notamment Planchet & Kamega, 2011 [35]).

2.3.3.2 Ajustement

L'ajustement que nous avons choisi d'effectuer repose d'une part sur les données individuelles (ajustement statistique) et d'autre part sur des hypothèses externes (ajustement par avis d'expert).

Dans un premier temps, les taux de mortalité annuels ont été ajustés en utilisant comme "distance" un critère de moindres carrés pondérés par l'exposition au risque. Il s'agit ainsi pour chaque année d'observation t d'obtenir un ensemble de $(q_x)_{x=50,\dots,95}$ qui minimise la quantité :

$$D = \sum_x E_{x,t} (q_{x,t} - \hat{q}_{x,t})^2$$

avec $E_{x,t}$ l'exposition au risque observée pour l'âge x durant l'année t et $(\hat{q}_{x,t})$ les taux de décès bruts estimés d'après la méthode de Hoem (voir section 2.2.4). L'optimisation a été réalisée à l'aide de la formule explicite des q_x du modèle de Thatcher donnée ci-avant.

Une attention particulière a été accordée aux valeurs initiales du programme d'optimisation afin que l'algorithme converge bien vers les bonnes valeurs des paramètres (voir Annexes). Nous avons ensuite tracé le graphe des taux estimés superposés aux taux bruts et effectué un test de significativité globale des paramètres (Khi-deux) afin de vérifier la cohérence de nos résultats.

Nous obtenons ainsi des paramètres α_t , β_t et γ_t pour chaque année d'expérience t . Le paramètre β étant supposé indépendant du temps, la moyenne des β_t a été choisie comme valeur pour β et l'algorithme d'optimisation a ensuite été relancé afin d'obtenir des valeurs légèrement modifiées des paramètres α_t et γ_t .

Dans un second temps, la projection des paramètres α_t et γ_t a été réalisée par avis d'expert :

- Pour le paramètre γ_t représentant la composante de mortalité environnementale, Bongaarts préconise de le poser constant tout au long de la durée de projection. Il aurait également été possible de supposer une très légère décroissance des γ_t au fil des années de projection selon une régression linéaire des γ_t obtenus avec les données d'expérience. Cependant, les décès des jeunes adultes en France étant majoritairement dus à des accidents de la route et à des suicides (environ 63 % en 2008 selon l'INSEE), nous avons choisi dans cette étude de poser γ_t constant au fil du temps.
- Pour le paramètre α_t représentant le niveau de mortalité, nous avons anticipé une évolution exponentielle du niveau de mortalité :

$$\alpha_t = a_\alpha \times e^{b_\alpha \times t}$$

et nous avons utilisé un algorithme d'optimisation afin de déterminer les paramètres a_α et b_α permettant d'approcher au mieux les q_x bruts des années d'observation.

L'avis d'expert s'observe ici à plusieurs stades :

1. pour le choix de l'expression de γ_t , qui dépend des améliorations attendues de la mortalité chez les jeunes adultes. Dans notre cas, ce choix n'est pas très influent puisque notre portefeuille d'assurés est composé de rentiers d'âge plus élevé.
2. pour le choix de l'expression de α_t , qui dépend en pratique de la durée de projection et de la forme prévue, raisonnablement décroissante puisqu'on s'attend à une baisse du niveau de mortalité au fil du temps. Nous avons choisi d'utiliser une forme exponentielle (plutôt que linéaire), ce qui anticipe que la baisse relative (et non pas absolue) du niveau de mortalité sera constante. Ce choix présente l'avantage de rendre impossible l'obtention de niveaux de mortalité négatifs et est ainsi adapté aux horizons de projection importants.

2.3.3.3 Application aux données

Dans une première étape, nous avons donc réalisé l'ajustement des trois paramètres α_t , β_t et γ_t pour les années d'observation 1996 à 2007 à partir de la méthode des moindres carrés pondérés.

Le paramètre β_t est le premier à être déterminé. Nous obtenons tout d'abord les β_t suivants :

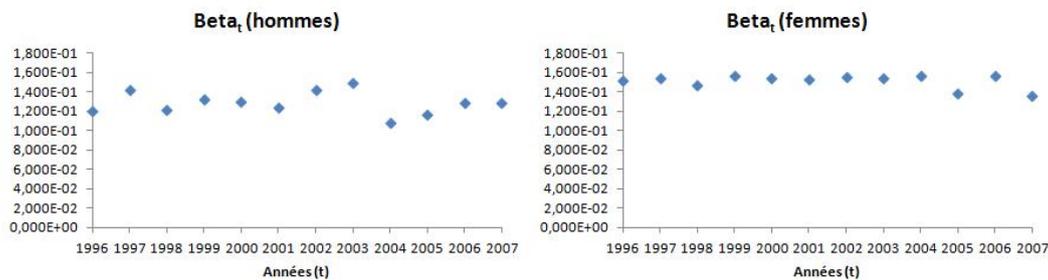


FIGURE 2.19 – Détermination des paramètres beta

Ces β_t obtenus pour chaque année d'observation t nous permettent de déduire le paramètre $\hat{\beta}$ respectivement pour les femmes et pour les hommes en effectuant une simple moyenne arithmétique.

Après relancement des programmes d'optimisation avec les paramètres $\hat{\beta}$ calculés précédemment, nous avons déterminé le paramètre γ en le supposant également constant au cours du temps. Nous obtenons les γ_t suivants :

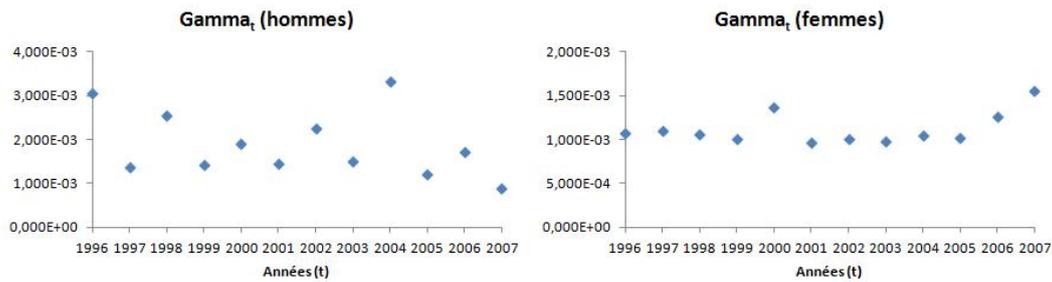


FIGURE 2.20 – Détermination des paramètres gamma

En prenant la moyenne des γ_t obtenu pour chaque année d'observation t , on en déduit les paramètres $\hat{\gamma}$ pour les hommes et les femmes.

Nous avons ensuite posé l'hypothèse (d'expert) relative à la forme exponentielle des α_t . Il s'agit ensuite de relancer un programme d'optimisation sur les douze années d'observation en utilisant le critère des moindres carrés pondérés et la contrainte précédente, puis d'extrapoler les α_t selon l'expression analytique obtenue. Nous obtenons alors les courbes suivantes :

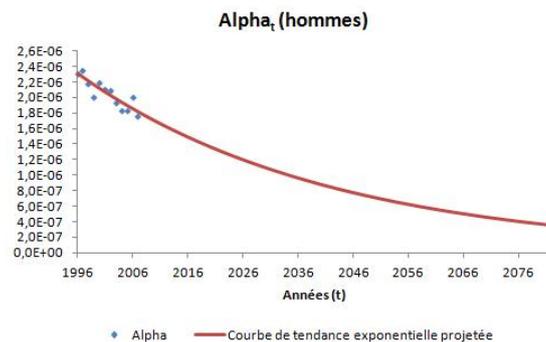


FIGURE 2.21 – Extrapolation des paramètres alpha (hommes)

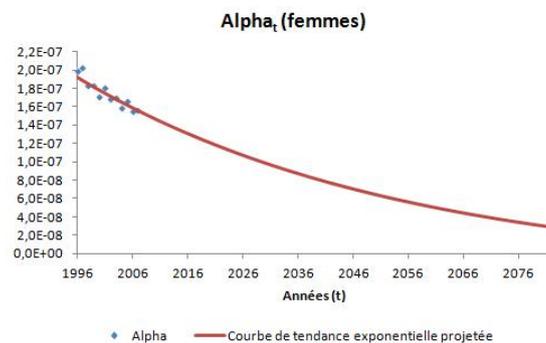


FIGURE 2.22 – Extrapolation des paramètres alpha (femmes)

Afin de vérifier l'ajustement de nos taux de mortalité, nous allons observer les mêmes éléments que pour la méthode de régression logistique.

Les ajustements réalisés sur les taux de mortalité d'expérience pour la plage d'âges 50-95 ans (hommes) ou 50-100 ans sur la période allant de

1996 à 2007 ont les allures suivantes :

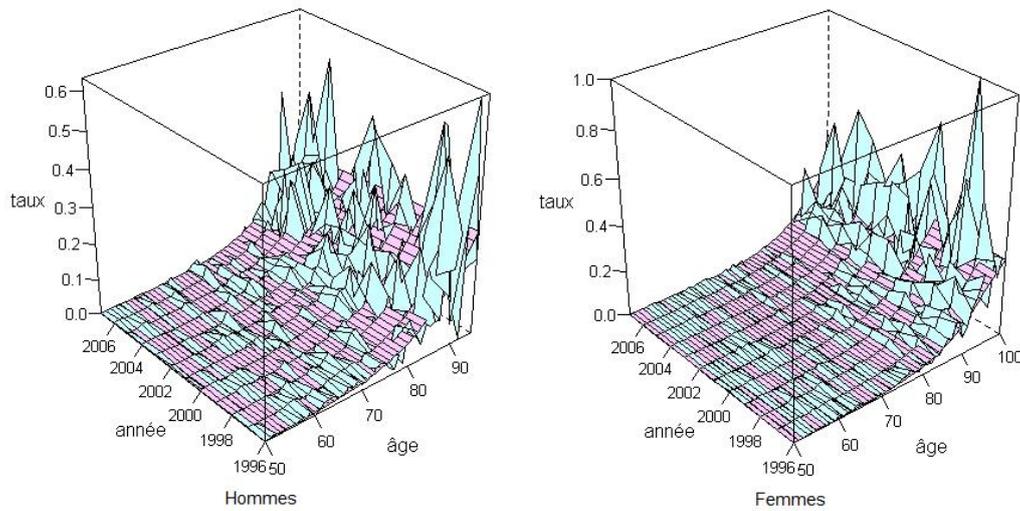


FIGURE 2.23 – Ajustement des taux bruts

Des coupes de ces surfaces pour l'année 2006 sont représentées ci-dessous :

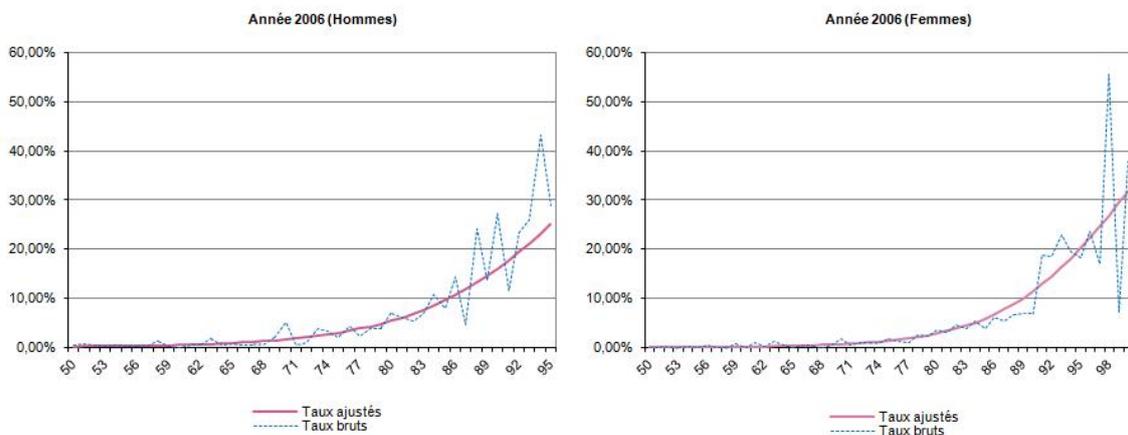


FIGURE 2.24 – Ajustement des taux bruts pour l'année 2006

Ces premiers graphiques montrent des différences de structure de mortalité par rapport aux ajustements réalisés avec la méthode des logits. Pour les hommes, les taux de mortalité obtenus avec la méthode des logits semblent moins élevés que ceux calculés avec la méthode de Bongaarts pour les âges inférieurs à 85 ans, puis on a une inversion du phénomène. Pour les femmes, la mortalité obtenue avec la méthode des logits semble moins élevée que celle de la méthode de Bongaarts pour tous les âges. La comparaison de la mortalité obtenue entre les deux méthodes sera analysée de manière plus précise dans la section 2.3.4.

Concernant le nombre de décès modélisés (calculés d'après les taux de mortalité du modèle et l'exposition au risque observée) par rapport au nombre de décès observés, on obtient les rapprochements suivants pour les années 1996 à 2007 sur les plages d'âge 50-95 ans (hommes) et 50-100 ans (femmes) :

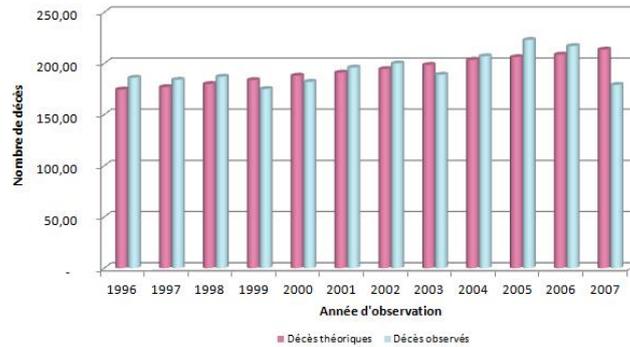


FIGURE 2.25 – Comparaison des décès modélisés et observés (hommes)

Pour les individus masculins, l'application des taux ajustés à l'exposition au risque conduit à 0,3 % de décès en moins par rapport au nombre de décès observés et à 4,5 % de décès en plus par rapport à la méthode des logits. Cela conforte l'idée évoquée précédemment sur l'approximation plus proche de la table masculine calculée avec la méthode des Bongaarts par rapport à celle de l'approche des logits.

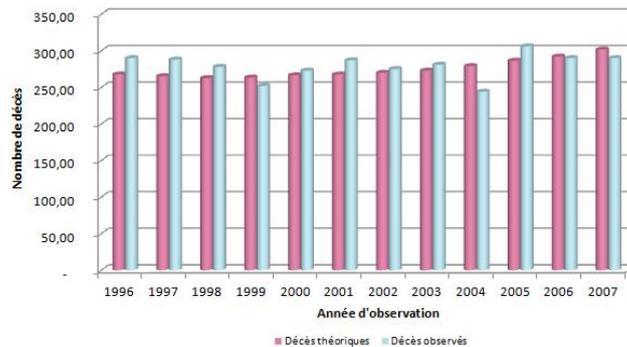


FIGURE 2.26 – Comparaison des décès modélisés et observés (femmes)

Pour les individus féminins, l'application des taux ajustés à l'exposition au risque conduit à 1,8 % de décès en moins par rapport au nombre de décès observés et à 4,4 % de décès en plus par rapport à la méthode des logits. Nous notons que la table d'expérience féminine semble intégrer un niveau de prudence plus élevé que la table masculine.

Ces premières observations doivent être complétées par une analyse des décès modélisés et observés âge par âge sur l'ensemble de la période d'observation. Nous rappelons que le nombre de décès modélisés pour un âge x au cours d'une année t est supposé suivre une loi binomiale

de paramètres $(E_{x,t}, q_{x,t})$. Puis, en effectuant l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale, on obtient les résultats ci-dessous :

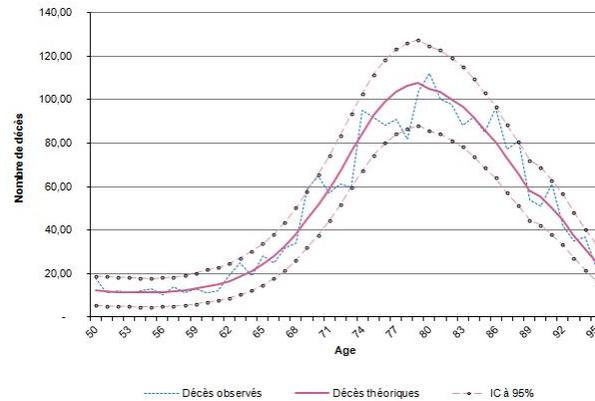


FIGURE 2.27 – Comparaison par âge des décès modélisés et observés 1996-2007 (hommes)

Pour la population masculine, on constate que les décès observés se situent à l'intérieur de l'intervalle de confiance théorique sur l'ensemble de la plage d'âge considérée, d'où une représentation correcte de la réalité du moment par la table d'expérience. On note par ailleurs que l'imprécision associée aux fluctuations d'échantillonnage est importante. En effet, en calculant l'erreur relative d'estimation par la demi-longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %, nous constatons que cette erreur est supérieure à 14 % quel que soit l'âge.

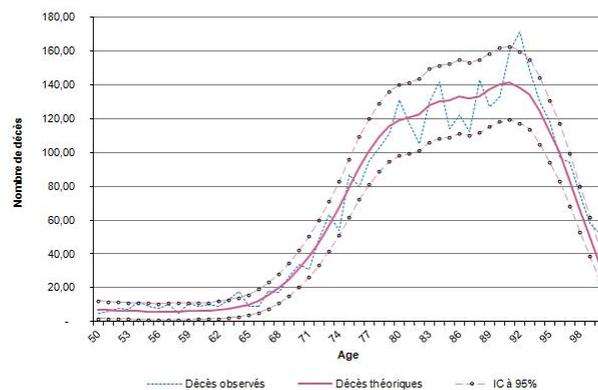


FIGURE 2.28 – Comparaison par âge des décès modélisés et observés 1996-2007 (femmes)

Pour la population féminine, on constate de même que les décès observés se situent à l'intérieur de l'intervalle de confiance théorique sur l'ensemble de la plage d'âge considérée, sauf pour les âges 64, 92 et 100 ans où les décès observés sont plus élevés. On note également que l'imprécision associée aux fluctuations d'échantillonnage est importante (erreur relative d'estimation supérieure à 12 %) bien que légèrement inférieure à celle des logits.

Projections

Nous observons ensuite les surfaces de mortalité ajustées avec la méthode de Bongaarts pour les générations 1900 à 1962 :

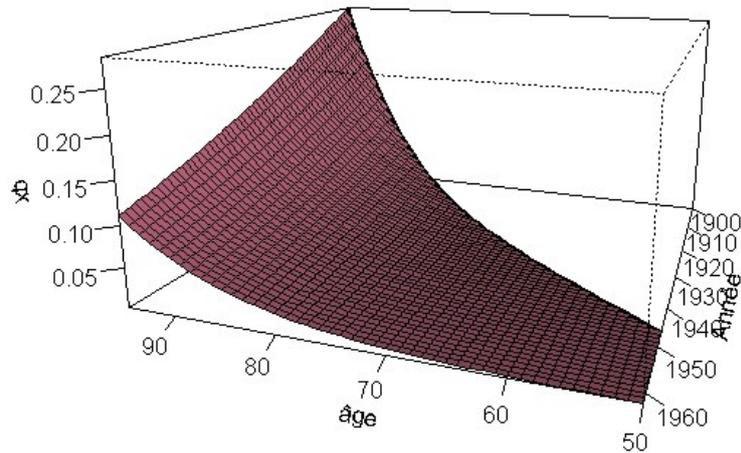


FIGURE 2.29 – Surface de mortalité ajustée (homme)

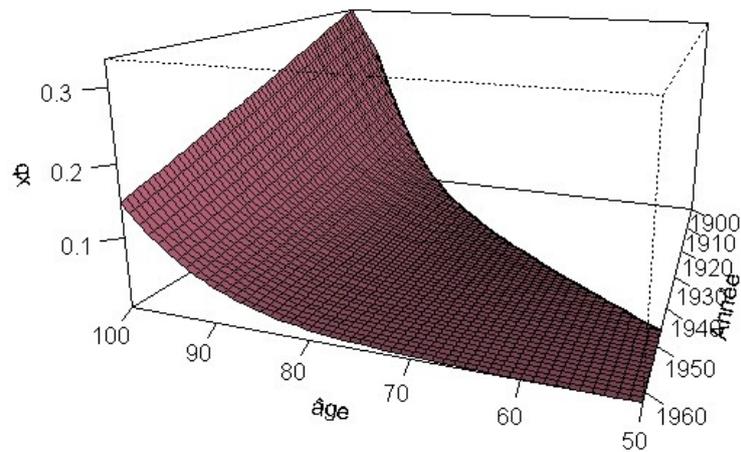


FIGURE 2.30 – Surface de mortalité ajustée (femme)

Les surfaces de mortalité par génération montrent graphiquement que les taux de mortalité obtenus avec la méthode de Bongaarts sont globalement plus élevés que ceux calculés avec la méthode des logits, pour les hommes comme pour les femmes. Ce constat se verra également précisé et confirmé dans la section 2.3.4.

D'après ce constat et dans un contexte de rentes viagères, le niveau de prudence des tables obtenues avec la méthode des logits semble supérieur à celui des tables résultant de l'approche logistique. Toutefois, dans le cadre de Solvabilité 2, le niveau de réalisme des tables obtenues avec la méthode de Bongaarts apparaît plus élevé.

Nous nous sommes également penché sur les espérances de vie résiduelles obtenues avec nos tables d'expérience comparativement à celles des tables de références TGH et TGF 05. Les graphes suivants illustrent l'évolution temporelle de l'espérance de vie à 60 ans pour les hommes et pour les femmes :

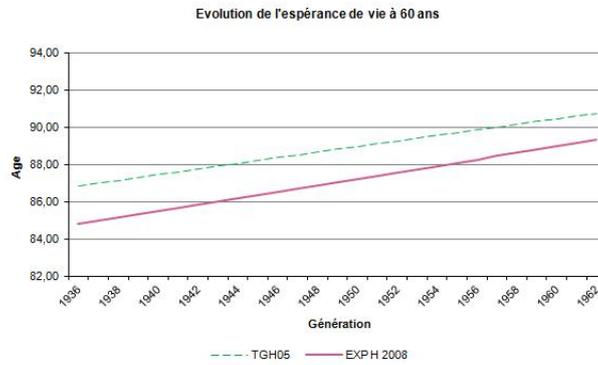


FIGURE 2.31 – Evolution de l'espérance de vie à 60 ans (hommes)

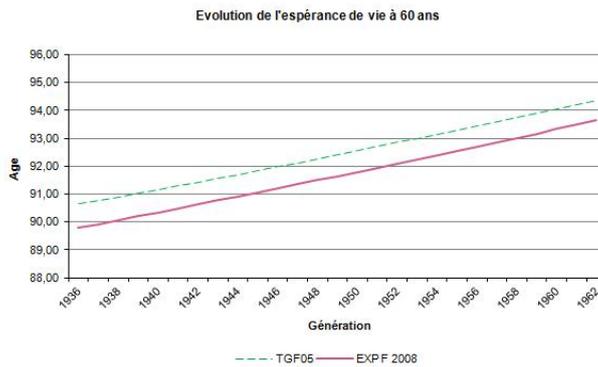


FIGURE 2.32 – Evolution de l'espérance de vie à 60 ans (femmes)

Enfin, les surfaces d'espérances de vie générationnelles prédites pour tous les âges supérieurs à 50 ans sont représentées ci-dessous :

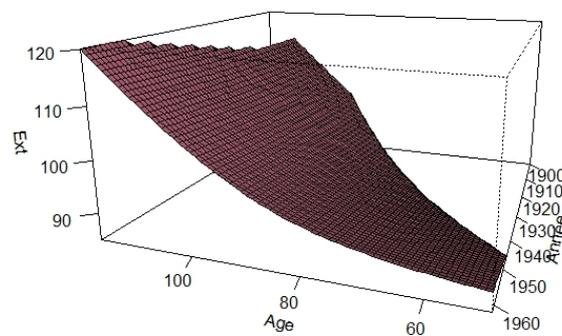


FIGURE 2.33 – Evolution de l'espérance de vie générationnelle (hommes)

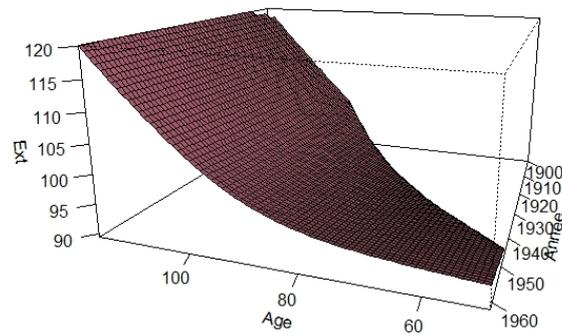


FIGURE 2.34 – Evolution de l'espérance de vie générationnelle (femmes)

2.3.4 Comparaison des deux méthodes

Une fois nos taux de mortalité ajustés à l'aide des deux méthodes, il semble pertinent de comparer les tables obtenues et d'essayer de déterminer quelle table d'expérience serait la plus appropriée à notre portefeuille de rentiers dans un contexte *best estimate*.

2.3.4.1 Comparaison du nombre de décès modélisé

Le ratio de mortalité standardisé (SMR) est un indicateur permettant de quantifier l'augmentation ou la diminution de la mortalité d'un échantillon d'étude par rapport à la population générale. Plus précisément dans notre cas, il correspondra au ratio du nombre de décès estimés sur le nombre de décès observés. Dans une optique de prudence relativement à un portefeuille de rentes viagères, il est préférable de sous-estimer le nombre de décès plutôt que de le sur-estimer. Ainsi, pour qu'une méthode soit acceptable, le SMR doit être légèrement inférieur à 1.

Les SMR globaux sont résumés dans le tableau suivant :

SMR	Méthode de Brass	Méthode de Bongaarts
Hommes	95,4 %	99,7 %
Femmes	94,1 %	98,2 %

Les tables obtenues avec les deux méthodes apparaissent ainsi toutes convenables d'après ces ratios. Toutefois, il convient d'approfondir l'analyse afin d'être sûr que les ratios sont satisfaisants sur la majorité des périodes d'observation et des âges pris en compte. En effet, le SMR global peut par exemple masquer une sur-estimation du nombre de décès sur certaines années ou certains âges si elle est associée à une sous-estimation sur les autres plages. Or, une sur-estimation de la mortalité dans le cas de rentes viagères implique un provisionnement moindre pour l'assureur, d'où des difficultés financières à long terme.

Nous présentons donc par la suite les SMR obtenus pour chaque méthode par année et par âge.

Comparaison des SMR par année d'observation

Dans un premier temps, nous souhaitons observer pour chaque méthode l'évolution des SMR au fil du temps. Nous avons donc représenté les SMR par méthode et par sexe sur notre période d'observation 1996-2007 :

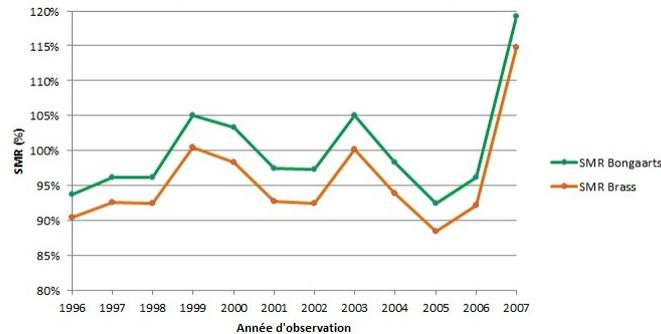


FIGURE 2.35 – SMR hommes par année

Pour l'échantillon masculin, nous remarquons que pour chaque année d'observation le SMR dérivant de la méthode de régression logistique est plus faible que celui obtenu avec la méthode de Bongaarts.

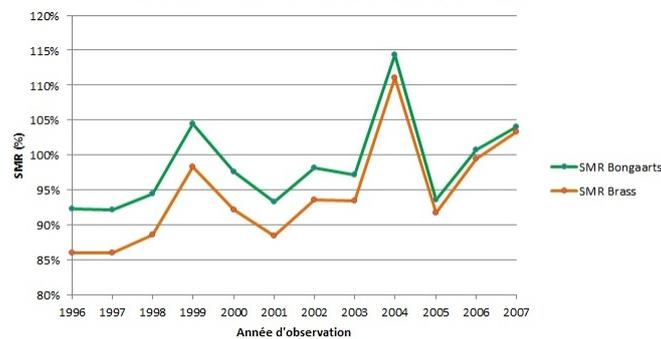


FIGURE 2.36 – SMR femmes par année

Pour l'échantillon féminin, nous remarquons de même que pour chaque année d'observation le SMR dérivant de la méthode de régression logistique est plus faible que celui obtenu avec la méthode de Bongaarts. Toutefois, l'écart entre les SMR des deux méthodes semble diminuer au cours du temps.

Comparaison des SMR par âge

Dans un second temps, nous observons le SMR par âge. Nous avons donc représenté les SMR par méthode et par sexe sur la plage d'âge 50-95 ans pour les hommes et 50-100 ans pour les femmes :

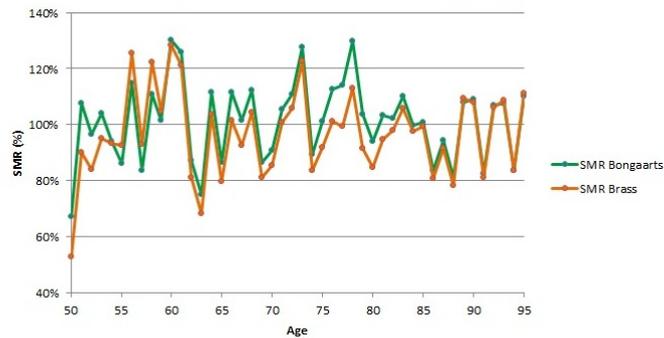


FIGURE 2.37 – SMR hommes par âge

A quelques exceptions près, nous observons que les SMR hommes obtenus avec la méthode de Brass sont plus faibles que ceux de la méthode de Bongaarts. Les conclusions sont en accord avec les SMR présentés par année, à savoir que la méthode de Brass fournit des taux de mortalité plus prudents pour un portefeuille de rente viagère alors que la méthode de Bongaarts génère des taux qui sont plus *best estimate*.

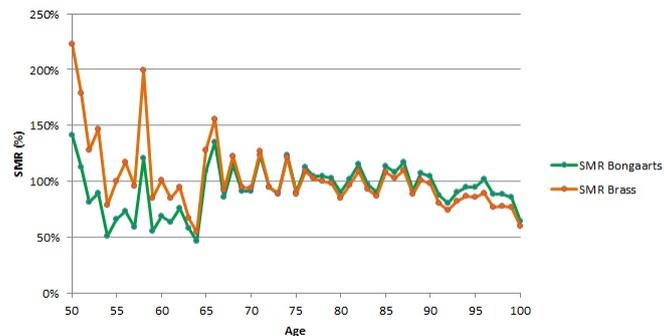


FIGURE 2.38 – SMR femmes par âge

On remarque que les SMR femmes obtenus avec la méthode de Brass sont plus élevés que ceux de la méthode de Bongaarts pour les âges inférieurs à 70 ans. La forte volatilité des SMR sur cette plage s'explique par le faible nombre de décès observés à ces âges. Les ratios sur cette plage d'âge sont relativement peu influents pour un portefeuille de rentes viagères qui concernent généralement des individus plus âgés.

2.3.4.2 Ecarts des espérances de vie générationnelles

Nous avons calculé la différence entre les espérances de vie générationnelles des tables de Bongaarts et les espérances de vie générationnelles des tables des logits. Nous avons préféré garder les écarts absolus plutôt que de présenter les écarts relatifs. Nous obtenons ainsi des surfaces de niveau pour illustrer ces écarts absolus avec le code couleur suivant :

- couleurs qui tendent vers le bleu turquoise lorsque l'espérance de vie prédite par la méthode de Bongaarts est inférieure à celle prédite par la méthode des logits,
- couleurs qui tendent vers le rose lorsque l'espérance de vie prédite

par la méthode de Bongaarts est supérieure à celle prédite par la méthode des logits.

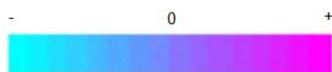


FIGURE 2.39 – Code couleur

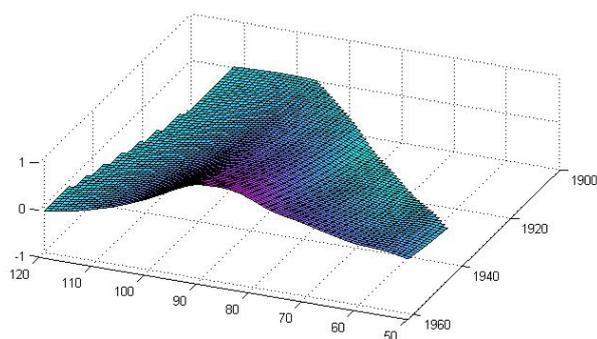


FIGURE 2.40 – Surface de l'écart absolu d'espérance de vie générationnelle entre la table de mortalité obtenue avec la méthode de Bongaarts et celle obtenue avec la méthode des logits (hommes)

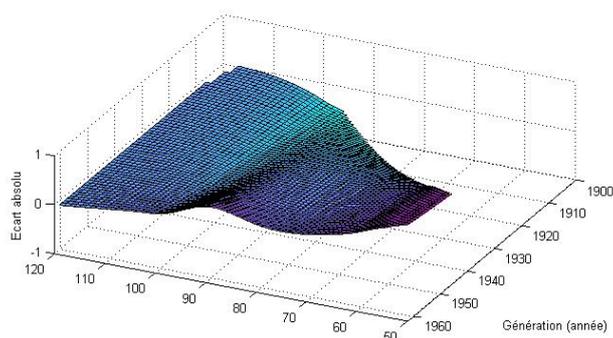


FIGURE 2.41 – Surface de l'écart absolu d'espérance de vie générationnelle entre la table de mortalité obtenue avec la méthode de Bongaarts et celle obtenue avec la méthode des logits (femmes)

2.4 COMPLÉTION DES TABLES

L'ajustement de nos tables a été réalisé sur la plage d'âge 50-95 ans pour les hommes et 50-100 ans pour les femmes. Au-delà, le faible effectif disponible implique des taux bruts de mortalité très instables ce qui ne permet pas une estimation fiable des taux avec les méthodes précédemment retenues. En conséquence, une méthode de fermeture des tables de mortalité a été utilisée.

Plusieurs méthodes ont été présentées par Denuit & Quashie (2005) [36]. Cependant, lorsque l'âge moyen des rentiers du portefeuille d'assurés n'est pas trop élevé, Planchet & Therond (2006) [29] constatent que

le choix de la méthode de fermeture a une importance relativement peu significative.

L'approche retenue dans cette étude est un modèle simple dans lequel les taux de mortalité sont extrapolés selon une expression exponentielle :

$$q_x = a \times e^{(bx)}$$

Les tables ont été fermées une fois la projection des taux effectuée. Ce schéma permet de prendre en compte une évolution de l'âge ultime au fil du temps. Pour les femmes, cet âge ultime augmente progressivement de 117 ans en 1996 à 120 ans à partir de 2027. Pour les hommes, l'âge ultime évolue de 113 ans à 120 ans en 2071. Dans cette étude, il n'a pas semblé essentiel d'étudier la problématique de l'âge humain ultime de manière approfondie. En effet, la méthode des logits étant basée sur les tables de référence TGH05 et TGF05, les âges limites sont identiques à ceux de ces tables. Dans un souci de cohérence, il en est de même pour la fermeture des tables obtenues avec la méthode de Bongaart.

Notons toutefois que le fait de poser un âge x_{lim} tel que $q_{x_{lim}} = 1$ ne signifie pas qu'aucun assuré ne dépassera cet âge ultime. Cet âge représente plutôt une limite au-delà de laquelle les éventuels individus restants et les engagements relatifs seront considérés comme négligeables.

APPLICATION À LA COUVERTURE D'UN PORTEFEUILLE DE RENTES VIAGÈRES

DANS cette partie, on utilise les tables de mortalité construites précédemment pour estimer les provisions techniques d'un portefeuille d'assurance vie.

3.1 MODÉLISATION D'UN PORTEFEUILLE DE RENTES VIAGÈRES

Afin d'observer uniquement l'effet du risque de longévité, nous avons choisi de modéliser un portefeuille de rentes viagères dont le paiement d'une prime unique par l'assuré à l'origine implique par la suite le versement de prestations d'arrérages annuelles par l'assureur.

L'objectif est de projeter les flux de prestations futurs afin de pouvoir valoriser les provisions *best estimate* de notre portefeuille de rentes viagères.

3.1.1 Présentation du portefeuille de rentes viagères

Le portefeuille considéré est constitué de contrats en phase de restitution dont toutes les primes ont déjà été versées au 31/12/2011. Nous supposons que chaque assuré touche une rente annuelle de 10 K€ à la date d'évaluation. Nous posons également l'hypothèse simplifiée d'une revalorisation des rentes de 2 % par an et d'une absence de frais de gestion d'arrérages.

L'âge moyen des rentiers hommes et femmes du portefeuille est présenté dans le tableau suivant :

Hommes	77,4 ans
Femmes	78,5 ans

Les montants d'arrérages versés en 2011 sont répartis par âge comme suit :

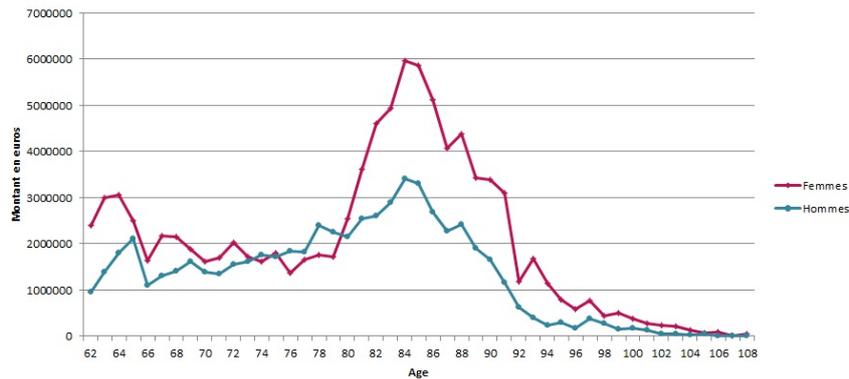


FIGURE 3.1 – Arrérages 2011 par âge

Dans la suite de cette section, nous allons observer l'impact du choix de la table de mortalité sur nos montants de provisions et sur le besoin en capital.

3.1.2 Provisionnement dans le cadre de Solvabilité 2

Solvabilité 2 est un projet de réforme européenne de la réglementation prudentielle s'appliquant au secteur de l'assurance. Son objectif est d'encourager les organismes à mieux connaître et évaluer leurs risques notamment en adaptant les exigences réglementaires aux risques que les entreprises encourent dans leur activité. La mise en oeuvre du projet au sein d'un organisme nécessite une implication transversale de tous les services de l'entreprise.

Dans cette optique, cette nouvelle directive assoit le calcul de l'exigence de marge de solvabilité sur le profil de risque de l'organisme considéré. Plus précisément, Solvabilité 2 est conçu pour garantir la solvabilité à horizon d'un an d'un organisme assureur, à un niveau de probabilité de 99,5 %.

Pour parvenir à ce résultat, l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*), anciennement CEIOPS, a étudié les répercussions quantitatives et qualitatives du nouveau système par le biais d'études quantitatives d'impact (QIS, *Quantitative Impact Studies*) réalisées par les organismes assureurs. Les spécifications techniques de la dernière étude (QIS5) détaillent les éléments à calculer dans le cadre de la formule standard. Dans ce mémoire, nous nous référerons à cette dernière afin de déterminer l'exigence de capital au titre du risque de longévité.

Le bilan comptable d'une compagnie d'assurance avec Solvabilité 2 est schématisé ainsi :

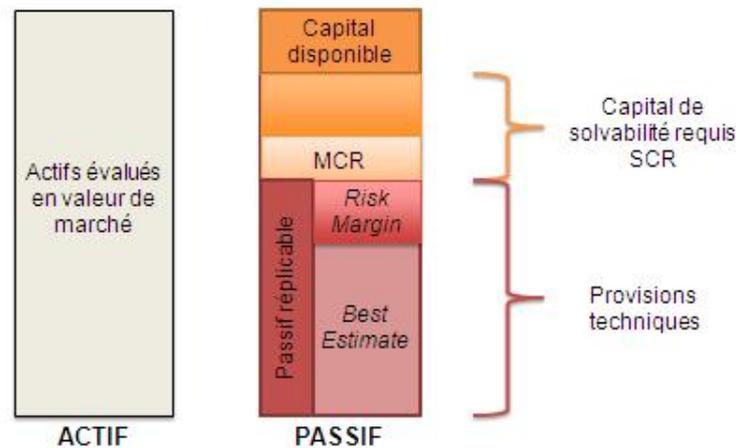


FIGURE 3.2 – Bilan comptable d'une compagnie d'assurance en Solvabilité 2

Le projet Solvabilité 2 impose aux assureurs une évaluation de l'actif et du passif à la valeur de marché, dite "fair value", afin de rester proche de la réalité économique et financière. Au passif, les provisions techniques sont la somme d'un *best estimate* et d'une marge pour risque.

3.1.2.1 *Best estimate*

Le *best estimate* correspond à la valeur actualisée de l'espérance des flux futurs de trésorerie, estimés de la façon la plus réaliste possible. À ce titre, le *best estimate* doit tenir compte de toutes les entrées et sorties de fonds nécessaires pour honorer les engagements d'assurance sur leur durée de vie. En pratique, l'horizon de projection doit être suffisamment long pour prendre en compte tous les flux de trésorerie importants ; il peut néanmoins être raccourci si ceci n'a pas d'effet sensible sur les résultats.

L'âge maximum de nos tables de mortalité est 120 ans, ce qui implique de considérer un horizon de projection de 58 ans pour éteindre entièrement le portefeuille d'assurés. Le *best estimate* de notre portefeuille dont les âges des assurés sont supérieurs à 62 ans se calcule donc d'après la formule suivante :

$$BE = \sum_{t=1}^{58} \frac{\mathbb{E}[F(t)]}{(1 + r_t)^t}$$

où :

- BE désigne le *best estimate* ;
- r_t désigne le taux d'intérêt de maturité t ;
- $\mathbb{E}[F(t)]$ désigne l'espérance des flux de trésorerie en t .

Les flux de trésorerie sont uniquement composés des flux d'arrérages dans notre étude. En t_0 , pour n_x individus d'âge x et une date de projection

t, on a $\mathbb{E}[F_x(t)]$ obtenu par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F_x(t)] &= \sum_{n_x} 10 \times (1 + 2\%)^{t-1} \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_{x+i, t_0-x}) \\ &= n_x \times 10 \times (1 + 2\%)^{t-1} \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_{x+i, t_0-x})\end{aligned}$$

D'où, pour l'ensemble de notre portefeuille dont la date d'évaluation est t_0 et une date de projection t, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(t)] &= \sum_{x=62}^{120} n_x \times 10 \times (1 + 2\%)^{t-1} \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_{x+i, t_0-x}) \\ &= 10 \times (1 + 2\%)^{t-1} \sum_{x=62}^{120} n_x \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_{x+i, t_0-x})\end{aligned}$$

L'actualisation des flux de trésorerie sera effectuée sur la base de la courbe des taux swaps proposée par le Comité de Normalisation Obligataire au 31/12/2011¹. Nous ne considérons pas de prime d'illiquidité dans notre étude.

3.1.2.2 Marge pour risque

La marge pour risque doit, quant à elle, être calculée par la méthode du coût du capital. En effet, les provisions techniques sont évaluées à la valeur de transfert du portefeuille d'assurance, c'est-à-dire au montant qu'un assureur s'attend à recevoir en contrepartie de la reprise du portefeuille d'assurance. A ce titre, la marge pour risque permet de s'assurer que le montant des provisions techniques est suffisant pour qu'un repreneur du portefeuille puisse couvrir les engagements d'assurance jusqu'à leur extinction. Elle se calcule en fonction du SCR d'une entreprise de référence comme suit :

$$RM = CoC. \sum_{t \geq 0} \frac{\mathbb{E}(SCR_{RU}(t))}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

où :

- RM désigne la marge pour risques ;
- r_t désigne le taux d'intérêt de maturité t ;
- $\mathbb{E}(SCR_{RU}(t))$ désigne le capital règlementaire d'une entreprise de référence exposée au risque de souscription vie, au risque de souscription santé (SLT et NSLT), à un risque de marché résiduel, au risque de crédit et au risque opérationnel ;
- CoC désigne le taux de coût du capital, fixé à 6 %.

1. <http://www.cnofrance.org/fr/courbes-des-taux-zero-coupon.cfm?id=6>

La méthode du coût du capital décrite ci-dessus nécessite une évaluation de tous les SCR futurs. Une telle évaluation est en général difficile à mettre en oeuvre. Aussi, il est possible d'utiliser des simplifications tant que ces dernières peuvent être justifiées en fonction de la nature et de la complexité du portefeuille de l'entreprise. De ce fait, nous retiendrons que la marge pour risque de notre portefeuille de rentes se calculera comme suit :

$$RM = CoC \times Dur_{mod}(0) \times \frac{SCR_{RU}(0)}{(1 + r_1)}$$

où :

$Dur_{mod}(0)$ désigne la duration modifiée du passif en $t=0$.

A cette fin, nous considérerons que le portefeuille de référence de notre étude sera uniquement exposé au risque de longévité (pas de risque de rachats, ni de risque de frais, de risque d'illiquidité, de risque de crédit et de risque opérationnel). Par conséquent, $SCR_{RU}(0)$ sera égal au SCR de longévité qui permet de couvrir le risque d'une baisse de la mortalité des assurés, notamment pour les contrats de rentes viagères. Il se calcule comme suit via l'approche de la formule standard du QIS5 :

$$SCR_{long} = BE_{choc} - BE$$

où :

- SCR_{long} désigne l'exigence de capital pour le risque de longévité ;
- BE_{choc} désigne le *best estimate* des provisions techniques du portefeuille calculé avec des taux de mortalité diminué de 20 % ;
- BE désigne le *best estimate* des provisions techniques du portefeuille en scénario central.

3.1.3 Comparaison des résultats par table

Best estimate

Les graphiques suivants présentent les flux d'arrérages non actualisés calculés à partir des tables de mortalité de Brass et de Bongaarts :

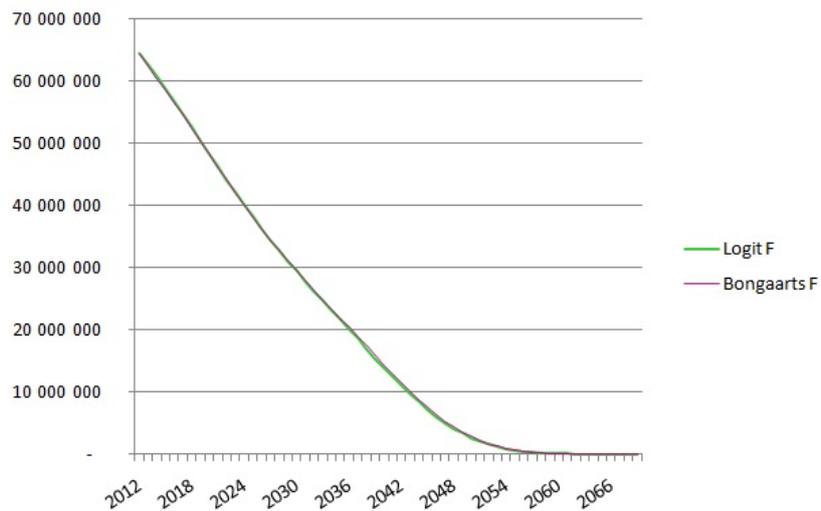


FIGURE 3.3 – Comparaison des arrérages pour les femmes

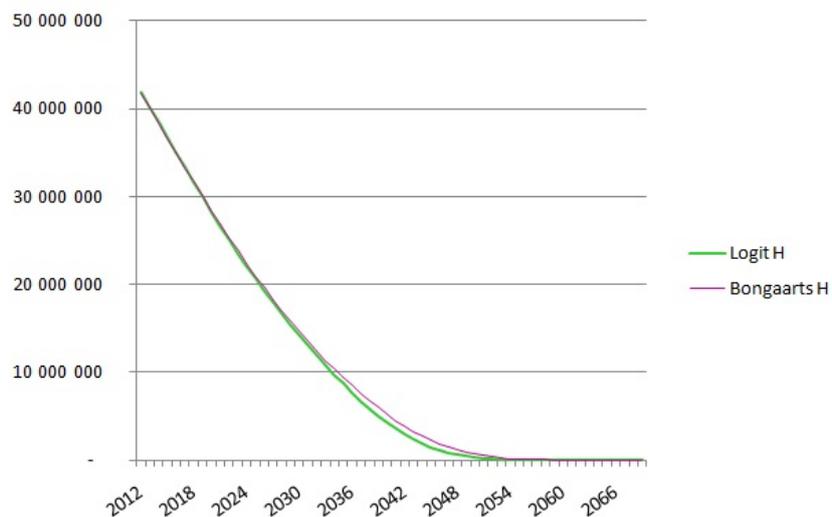


FIGURE 3.4 – Comparaison des arrérages pour les hommes

Des zooms de ces flux sur les 5 premières années de projection sont représentés ci-dessous afin de constater qu'au début les flux obtenus avec les tables de Brass sont légèrement supérieurs aux flux obtenus avec les tables de Bongaarts :

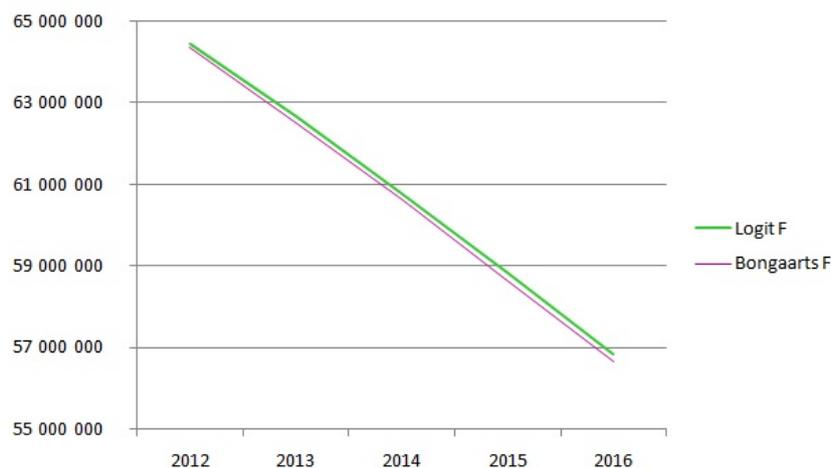


FIGURE 3.5 – Comparaison des arrérages sur les 5 premières années (femmes)

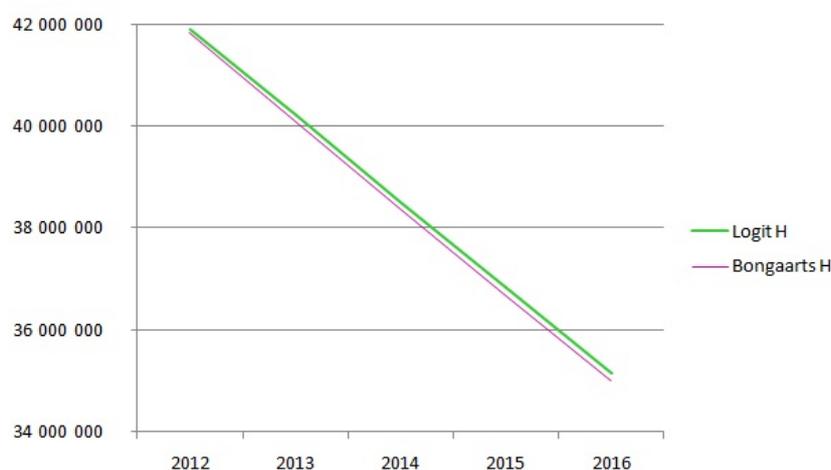


FIGURE 3.6 – Comparaison des arrérages sur les 5 premières années (hommes)

Globalement sur l'horizon de projection, on observe que les flux d'arrérages obtenus avec les tables de Brass sont supérieurs aux flux d'arrérages obtenus avec les tables de Bongaarts en début de projection. Puis le phénomène s'inverse dans le temps. Cette observation semble cohérente avec l'écart des espérances de vie générationnelles constatées dans la section 2.3.4.2 : pour les âges moyens hommes et femmes en début de projection, l'espérance de vie est estimée supérieure avec la méthode des logits, puis ce phénomène s'inverse à partir de la dixième année de projection (lorsque les âges moyens dépassent environ 88 ans). Il n'est donc pas possible à ce stade de définir quelle méthode est globalement la plus prudente pour notre portefeuille de rentiers.

Il est à noter que l'écart relatif entre les flux d'arrérages bruts ne dépassent pas les 0,3 % durant les 20 premières années de projection pour les femmes et 2,5 % pour les hommes. Ce constat permet de se rassurer quant aux résultats obtenus et de valider un ordre de grandeur des arrérages.

Les *best estimate* finalement obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

BEL en M€	Brass	Bongaarts	Ecart
Femmes	868,8	870,7	0,23%
Hommes	480,8	490,3	1,95%
Total	1 349,6	1 361,0	0,85%

Selon ces montants de provisions, il apparaît finalement que la méthode de Bongaarts est plus prudente que la méthode de Brass pour notre portefeuille de rentiers.

SCR *longevity* et marge pour risque

Les *best estimate* choqués au titre du risque de longévité sont présentés dans le tableau ci-dessous :

BEL en M€	Brass	Bongaarts	Ecart
Femmes	956,4	956,2	-0,01%
Hommes	535,2	549,0	2,52%
Total	1 491,5	1 505,2	0,91%

Il est à noter que, pour les femmes, les provisions *best estimate* choquées obtenues avec la méthode de Brass sont supérieures à celles obtenues avec la méthode de Bongaarts, contrairement aux provisions non choquées. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que les taux de mortalité ajustés avec la méthode de Brass sont plus faibles après 95 ans que les taux de mortalité ajustés avec la méthode de Bongaarts (au global quelle que soit la génération). Comme dans le scénario choqué les femmes vivent plus longtemps que dans le scénario central, il y a plus de femmes qui dépassent les 95 ans, et étant donné que les arrérages estimés pour ces femmes sont plus élevés avec la méthode de Brass qu'avec la méthode de Bongaarts, il ne paraît pas incohérent d'observer un *best estimate* plus élevé avec la méthode de Brass.

Les exigences de capital au titre du risque de longévité sont donc les suivantes :

SCR en M€	Brass	Bongaarts	Ecart
Femmes	87,6	85,5	-2,41%
Hommes	54,4	58,6	7,25%
Total	142,0	144,1	1,48%

Nous observons ainsi que le SCR au titre du risque de longévité estimé via la méthode de Brass est inférieur d'environ 2,1 M€ à celui estimé avec la méthode de Bongaarts, soit une économie de 1,5 % de besoin en fonds propres.

Comme nous avons supposé que notre portefeuille de rentiers était uniquement exposé au risque de longévité, il est possible de calculer la marge pour risque d'après la formule indiquée dans la section 3.1.2 . Les

durations modifiées calculées pour notre portefeuille de rentiers sont environ égales à 11 pour les femmes et 9,5 pour les hommes. Les provisions techniques obtenues en sommant le *best estimate* et la marge pour risque sont les suivantes (en M€) :

Provisions S2	Brass			Bongaarts			Ecart PT
	BEL	MR	PT	BEL	MR	PT	
Femmes	868,8	56,5	925,2	870,7	55,5	926,2	0,1%
Hommes	480,8	30,1	510,9	490,3	33,6	523,9	2,5%
Total	1 349,6	86,9	1 436,4	1 361,0	89,7	1 450,8	1,0%

Au total, nous constatons que les estimations des provisions techniques présentent une différence de 14,4 M€ entre les deux méthodes, soit un écart relatif de 1,0 %. Dans une optique de prudence, il semblerait raisonnable de retenir le montant de provisions le plus élevé. Cependant, dans un contexte d'évaluation *best estimate*, la finalité de cette problématique peut s'avérer moins directe. Il aurait pu être envisagé, par exemple, d'approfondir ces résultats en estimant les provisions *best estimate* par une approche stochastique ce qui aurait permis d'obtenir des intervalles de confiance des provisions.

3.2 RISQUE D'ESTIMATION ET INTERVALLE DE CONFIANCE SUR LES PROVISIONS

Dans le cadre de constructions de tables de mortalité prospectives, il semble essentiel d'analyser les risques systématiques découlant des modélisations effectuées. Ces risques sont par définition non mutualisables et sont donc potentiellement plus dangereux pour l'assureur que des risques dont la survenance impacterait différemment les diverses têtes du portefeuille.

3.2.1 Rappel sur les risques associés à une modélisation

Lors de la valorisation d'un portefeuille d'assurance, les risques systématiques associés à la modélisation de la mortalité sont précisés ci-dessous :

- Le risque opérationnel peut survenir lors du traitement initial des données, lors d'une erreur dans le développement d'une formule mathématique, lors de l'implémentation informatique du modèle, etc.
- Le risque de modèle est lié à la pertinence du modèle utilisé, à sa capacité à pourvoir représenter la réalité. Les modèles utilisés dans cette étude n'ayant pas été inventés par nos soins mais repris d'études d'experts précédentes, nous ne nous sommes pas intéressés à la mesure de ce risque.
- Le risque d'estimation est lié à la calibration du modèle retenu. En effet, l'estimation des paramètres du modèle s'effectue via des méthodes statistiques et peut par exemple s'avérer différente selon le

volume d'observations considérées. Dans notre cas, l'échantillon utilisé pour construire nos tables d'expérience est de taille relativement restreinte. Nous allons donc dans cette dernière partie nous intéresser à la **mesure du risque systématique d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage**.

- Le risque d'avis d'expert est encouru lorsqu'une hypothèse dite "d'expert" est utilisée pour projeter les taux de mortalité ajustés dans le temps. Dans notre cas, nous aurions pu par exemple mesurer le risque engendré par la forme retenue des α_t dans le modèle de Bongaarts. Nous avons cependant choisi de focaliser notre étude uniquement sur le risque d'estimation.

3.2.2 Méthode d'échantillonnage

L'approche retenue à cette fin (présentée dans Kamega & Planchet, 2011, [37]) consiste à générer de manière indirecte et aléatoire des taux bruts afin d'en déduire l'impact sur l'estimation des paramètres des modèles de Brass et de Bongaarts, puis l'impact sur les taux respectivement ajustés. La première étape de la méthode comprend la resimulation de résidus afin d'engendrer des taux de décès bruts ré-échantillonnés. Nous allons donc utiliser cette méthode "Bootstrap" sur les résidus de Pearson :

$$r_{x,t} = \frac{\hat{D}_{x,t} - D_{x,t}}{\sqrt{D_{x,t}}}$$

où :

- $\hat{D}_{x,t}$ désigne le nombre de décès observés de 1996 à 2007 ;
- $D_{x,t}$ désigne le nombre de décès théoriques obtenus d'après la méthode de Brass ou de Bongaarts (voir partie 2).

Les résidus sont seulement supposés indépendants et identiquement distribués (car les décès sont supposés i.i.d. également). Cette méthode présente l'avantage de ne pas poser d'autre hypothèse quand à la distribution des résidus ou du nombre de décès.

En notant \bar{r} la moyenne des résidus de Pearson, on considère pour la suite les résidus de Pearson centrés $\tilde{r}_{x,t} = r_{x,t} - \bar{r}$. Une fois ces résidus centrés calculés, il est possible de simuler K_p matrices de dimension $(x_{max} - x_{min} + 1, t_{max} - t_{min} + 1)$ de résidus centrés à l'aide de tirages uniformes avec remise. Dans notre application, les matrices seront de dimension (51, 12) pour les femmes et (46, 12) pour les hommes. Les K_p matrices de résidus permettent ensuite d'obtenir K_p matrices de nombres de décès bruts ré-échantillonnés, puis K_p matrices de taux de mortalité bruts ré-échantillonnés en divisant les nombres de décès par l'exposition au risque.

A partir de ces nouveaux taux de mortalité bruts, il est possible de recalculer des taux de mortalité ajustés en utilisant les modèles (Brass et Bongaart) et les programmes d'optimisation décrits dans la partie 2 de

ce mémoire (on notera $\hat{\theta}^k$ les paramètres optimaux du modèle obtenus avec la matrice de taux $k \in 1, \dots, K_p$). L'extrapolation des taux de mortalité s'effectue également selon des approches identiques.

3.2.3 Mesure du risque d'estimation sur les provisions

Une fois les K_p matrices de taux de mortalité simulées pour les hommes et les femmes avec le modèle de Brass et le modèle de Bongaarts, nous avons estimé avec chaque table le *best estimate* de notre portefeuille de rentiers.

Nous précisons également que les tables simulées ont été fermées de la même manière que précédemment (méthode exponentielle).

Afin de mesurer le risque d'estimation sur le montant des provisions, nous avons posé le coefficient suivant :

$$c(\Psi_t) = \frac{\Psi_t}{\sum_{i=t_0}^t \tilde{F}_{\hat{\theta}}(i)}$$

où :

- $\tilde{F}_{\hat{\theta}}(i)$ désigne le flux d'arrérages actualisé de l'année i obtenu pour notre portefeuille de rentiers avec les paramètres optimaux obtenus d'après les taux de décès bruts originaux (non ré-échantillonnés) ;

- $\Psi_t = \sqrt{\mathbb{E}\left[\sum_{i=t_0}^t (\tilde{F}_{\hat{\theta}^k}(i) - \tilde{F}_{\hat{\theta}}(i))^2\right]}$

Ce coefficient constitue une mesure de dispersion, en pourcentage et au titre du risque d'estimation, des flux d'arrérages actualisés simulés autour du flux d'arrérages obtenu avec les taux de mortalité ajustés.

Nous avons également regardé l'intervalle de confiance à 95 % des provisions simulées par rapport aux provisions obtenues avec les taux de mortalité ajustés.

3.2.4 Résultats comparatifs

Nous avons posé $K_p = 1000$ et obtenu ainsi 1000 jeux de tables de mortalité ré-échantillonnées, un jeu correspondant à quatre tables : une table issue d'un ré-échantillonnage des taux bruts ajustée par la méthode de Brass pour les femmes, une autre pour les hommes, une table issue d'un ré-échantillonnage des taux bruts ajustée par la méthode de Bongaarts pour les femmes et une autre pour les hommes.

Nous avons représenté sur les graphiques ci-dessous les flux d'arrérages non actualisés obtenus avec les taux bruts et l'intervalle de confiance à 95 % simulé avec des taux bruts ré-échantillonnés, pour les 20 premières années de projection.

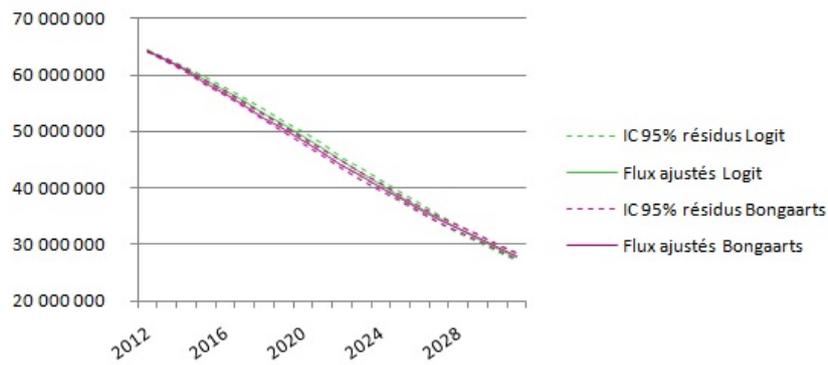


FIGURE 3.7 – Comparaison des arrérages "bootstrappés" pour les femmes

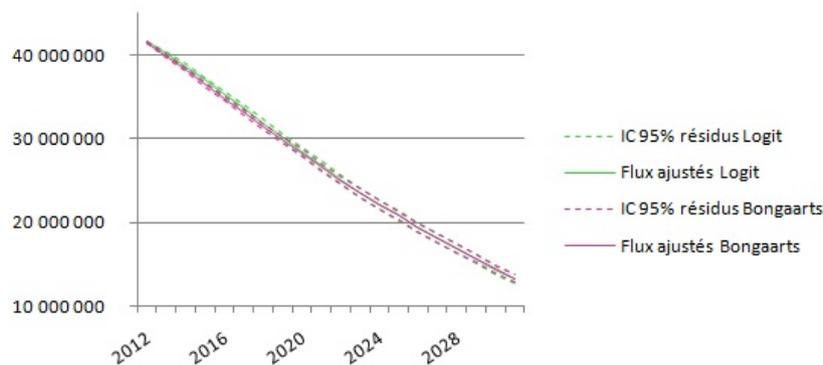


FIGURE 3.8 – Comparaison des arrérages "bootstrappés" pour les hommes

Les intervalles de confiance à 95 % des *best estimate* finalement obtenus avec cette méthode de ré-échantillonnage sont présentés dans le tableau ci-dessous :

IC en M€	Brass	Bongaarts	Intersection des IC
Femmes	[857,5 ; 881,9]	[860,9 ; 883,1]	[860,9 ; 881,9]
Hommes	[473,1 ; 490,3]	[480,5 ; 496,0]	[480,5 ; 490,3]

Pour mémoire, un intervalle de confiance à 95 % correspond à un intervalle de valeurs aléatoires qui contient la vraie valeur de l'estimation avec une probabilité de 95 %. Un intervalle de confiance est donc un ensemble de valeurs raisonnablement compatibles avec le résultat qui serait observé ; il donne ainsi une visualisation de l'incertitude de l'estimation. Plus l'intervalle de confiance est grand, plus l'incertitude est élevée.

Nous observons que les longueurs relatives des intervalles de confiance des femmes (par rapport aux *best estimates* estimés à partir des tables de mortalité ajustées dans la partie 2 de ce mémoire) sont inférieures à celles des hommes. Ce résultat est cohérent avec le fait que le nombre d'observations dont on dispose est plus petit pour les hommes (voir section 2.2.5).

Par ailleurs, pour les femmes comme pour les hommes, les longueurs relatives des intervalles de confiance de Bongaarts sont inférieures à celles de Brass. Ces éléments permettent de donner une première comparaison

de l'incertitude entre les deux méthodes. Aussi, l'incertitude des tables de mortalité ajustées semble plus faible avec la méthode de Bongaarts qu'avec la méthode de Brass. Comme la méthode de Bongaarts est une méthode à 3 paramètres, il n'est pas illogique de penser que les taux estimés avec cette méthode concordent plus aux données brutes qu'avec la méthode de Brass (qui a seulement 2 paramètres).

Nous constatons toutefois de manière satisfaisante que, quel que soit le sexe, l'intersection des intervalles de confiances obtenus avec les deux méthodes contiennent les valeurs des *best estimates* estimés à partir des données brutes.

Nous observons maintenant les coefficients de dispersion définis dans la section précédente :

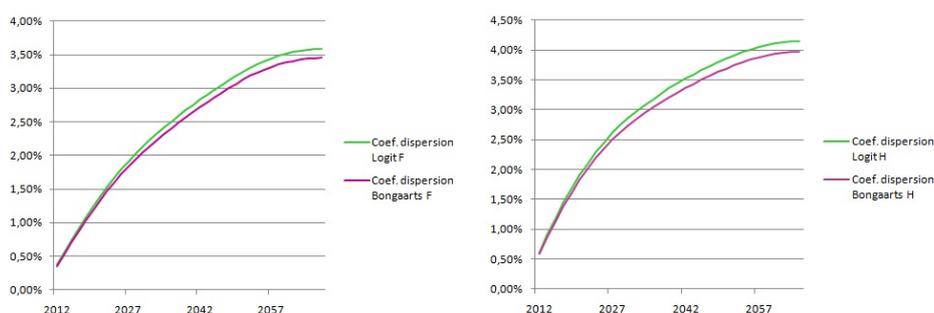


FIGURE 3.9 – Coefficients de dispersion $c(\Psi_t)$

Ces graphiques illustrent le fait que l'incertitude des flux est plus élevée pour les hommes que pour les femmes. Par ailleurs, ils confirment le fait que les arrérages calculés avec la méthode de Brass semblent légèrement plus exposés au risque d'estimation qu'avec la méthode de Bongaarts.

Le coefficient de dispersion calculé pour la dernière année correspond en fait à une mesure de dispersion des *best estimate* simulés autour du *best estimate* obtenu avec les tables de mortalité ajustées. Nous constatons que dans l'ensemble les coefficients ne dépassent pas 4,15 % pour les hommes (sur 45 années de projection) et 3,60 % pour les femmes (sur 48 années de projection). La dispersion des *best estimate* est donc relativement faible et nous pouvons conclure que l'impact du risque d'estimation sur les provisions de ce portefeuille n'est pas fortement significatif.

CONCLUSION

L'OBJECTIF de ce travail était d'étudier et de couvrir le risque de longévité inhérent à un portefeuille de rentes viagères. A cette fin, la première partie de ce mémoire consistait en un état de la mortalité, ainsi qu'une revue des types de méthodes d'ajustement et de projection existantes. Nous avons constaté qu'au cours des dernières décennies, la prévision de la mortalité avait gagné en importance du fait de l'augmentation rapide et inattendue de l'espérance de vie et du dépassement des limites d'âge précédemment observées. Aussi, l'utilisation de tables prospectives semble désormais inévitable pour les assureurs qui s'engagent à couvrir un risque viager sur une période relativement longue.

Par ailleurs, nous avons précisé que, dans le cadre de la nouvelle directive Solvabilité 2 qui pose le principe des valorisations *best estimate* (et non plus prudentes comme sous Solvabilité 1), il est dorénavant essentiel pour les assureurs de disposer de tables d'expérience afin d'estimer au mieux leurs provisions. L'intérêt des tables d'expérience réside dans la meilleure prise en compte du risque de longévité associé au portefeuille d'assuré et notamment dans la restriction du phénomène d'antisélection. Nous avons observé brièvement qu'il existait un large choix de modèles de construction de tables qu'il convient de sélectionner soigneusement en fonction du type de garantie concernée, du cadre d'étude et des données.

Il est certain que les tables de mortalité, réglementaires ou d'expérience, constituent depuis longtemps le référentiel central des activités de tarification et de provisionnement des compagnies d'assurance vie. Cependant, les tables prospectives prenant en compte non seulement l'âge des individus mais aussi le temps, les modèles de construction de telles tables sont bidimensionnels et nécessitent un panel de données plus important que pour l'élaboration d'une table du moment. Cette problématique a été développée dans la deuxième partie de ce mémoire. Dans notre contexte, nous disposons d'un échantillon de population de rentiers restreint et nous avons notamment du choisir des modèles adaptés à cette contrainte : le modèle relationnel de Brass et le modèle "logistique décalé" de Bongaarts incluant un avis d'expert. Des comparaisons des tables obtenues avec chaque méthode ont été effectuées : si la méthode de Brass semble donner des taux de mortalité ajustés inférieurs à ceux de la méthode de Bongaarts, la comparaison ne s'avère pas aussi directe pour les taux projetés.

Dans la troisième partie, l'étude portée sur un portefeuille fictif de rentes viagères a ressorti les résultats suivants :

- les flux d'arrérages calculés avec les tables ajustées selon les deux méthodes sont relativement proches ;
- pour les hommes comme pour les femmes, les *best estimates* obtenus d'après la méthode de Bongaarts sont supérieurs à ceux de la méthode de Brass, ce qui indique que l'approche de Bongaarts est plus prudente que celle de Brass pour notre portefeuille de rentes viagères ;
- les *best estimates* choqués au titre du risque de longévité ne présentent pas toujours les mêmes ordres de comparaison ; ce phénomène s'explique par la structure des taux de mortalité ajustés quelque peu différente au fil des âges entre la méthode de Brass et la méthode de Bongaarts ;
- les exigences de capitaux calculées au global sont supérieures avec la méthode de Bongaarts ;
- l'analyse du risque d'estimation montre que l'incertitude des tables simulées d'après la méthode de Bongaarts est légèrement plus faible que celles simulées d'après la méthode de Brass ; les coefficients de dispersion restent cependant très bas pour chaque méthode et ainsi l'impact du risque d'estimation sur les provisions de notre portefeuille de rentiers est peu important.

Au final, le fait de mal anticiper la mortalité future aux âges de service des prestations constitue un risque majeur pour les régimes de rente. Dans ce contexte, les méthodes retenues dans cette étude sont relativement simples à mettre en oeuvre et permettent également une mesure de la sensibilité de l'engagement du régime aux risques systématiques associés aux modèles. En particulier, l'impact du risque d'estimation a été évalué dans notre contexte et, de manière satisfaisante, il s'avère faible. L'étude de tous les risques systématiques pourrait être un sujet complémentaire à ce mémoire.

Par ailleurs, la construction de telles tables de mortalité d'expérience, une fois certifiées, est une base fondamentale pour une modélisation stochastique des engagements d'assurance, seule technique capable de fournir une "*fair value*" du passif ; cette problématique pourrait également faire l'objet d'un complément utile à ce travail.

Pour aller encore plus loin en terme de modélisation de la mortalité, Barriou & al (2010) [38] constatent que les modèles standards, dont ceux évoqués dans ce mémoire, sont appliqués à l'ensemble des données, distinguant seulement les assurés par leur sexe, leur âge et leur génération. Afin de tenir compte de facteurs de mortalité supplémentaires, d'autres approches sont envisagées dont la modélisation microscopique qui permet de refléter les caractéristiques d'une population au niveau individuel. Si cette méthode s'avère nettement plus complexe que les précédentes, elle fournirait néanmoins des taux de mortalité à variance moindre et, à ce titre, elle constituerait une alternative à étudier de manière plus approfondie.

BIBLIOGRAPHIE

- [16] ALHO J-M., 2007, *Méthodes utilisées pour établir les projections relatives à la mortalité - Distributions prédictives de la mortalité future*, ISSA, Quinzième Conférence internationale des actuaires et statisticiens de la sécurité sociale
- [21] ALHO J-M. & SPENCER B-D., 1990, *Error models for official mortality forecasts*, Journal of the American Statistical Association n°85
- [26] ALHO J-M. & SPENCER B-D., 2005, *Statistical demography and forecasting*, E-U
- [27] BABEL B., BOMSDORF E. & SCHMIDT R., 2008, *Forecasting German mortality using panel data procedures*, Journal of Population Economics n°21-3
- [38] BARRIEU P., BENSUSAN H., EL KAROUI N., HILLAIRET C., LOISEL S., RAVANELLI C. & SALHI Y., 2010, *Understanding, modelling and managing longevity risk : key issues and main challenges*, Scandinavian Actuarial Journal
- [5] BLAKE D., CAIRNS A-J., DOWD K. & MACMINN R., 2006, *Longevity Bonds : Financial Engineering, Valuation and Hedging*, The Journal of Risk and Insurance n°73
- [30] BONGAARTS J., 2004, *Long-Range trends in adult mortality : models and projections methods*, Population Council WP192
- [20] BOOTH H. & TICKLE L., 2008, *Mortality modeling and forecasting : A review of methods*, Annals of Actuarial Science n°3
- [1] BOURGEOIS-PICHAT J., 1952, *Essai sur la mortalité biologique de l'homme*, Population juillet-septembre
- [25] BOX G.E., JENKINS G-M. & REINSEL G-C., 1994, *Time series analysis, forecasting and control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, E-U
- [9] BRASS W., 1971, *Methods for estimating fertility and mortality from limited and defective data*, University of North Carolina at Chapel Hill, Laboratories for Population Statistics, E-U
- [3] CAMBOIS E., LABORDE C. & ROBINE J-M., 2008, *La double "peine" des ouvriers*, Population et sociétés n°441, INED
- [13] DE JONG P. & MARSHALL C., 2007, *Forecasting mortality using the Wang transform*, ASTIN Bulletin n°37

- [31] DELWARDE A. & DENUIT M., 2006, *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*, Paris : Economica
- [24] GOLULAPATI R., DE RAVIN J-W. & TRICKETT P-J., 1984, *Projections of Australian mortality rates*, Australian Bureau of Statistics
- [6] GOMPERTZ B., 1825, *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London n°115
- [10] HELIGMAN L. & POLLARD J-H., 1980, *The Age pattern of mortality*, Journal of the Institute of Actuaries n°107
- [37] KAMEGA A. & PLANCHET F., 2010, *Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience*, Cahiers de recherche de l'ISFA
- [23] LEE R-D. & CARTER L., 1992, *Modelling and forecasting the time series of US mortality*, Journal of the American Statistical Association n°87
- [39] LELIEUR V., 2007, *Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations*, Mémoire d'actuariat, ISFA (<http://www.ressources-actuarielles.net>)
- [28] PLANCHET F. & JUILLARD M., 2007, *Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité*, Assurance et gestion des risques (<http://www.ressources-actuarielles.net>)
- [15] PLANCHET F. & KAMEGA A., 2011, *Hétérogénéité : mesure du risque d'estimation dans le cas d'une modélisation intégrant des facteurs observables*, Bulletin Français d'Actuariat, Vol.11, n°21
- [35] PLANCHET F. & KAMEGA A., 2011, *Mortalité prospective en cas de petits échantillons : modélisation à partir d'informations externes en utilisant l'approche de Bongaarts*, Cahiers de recherche de l'ISFA
- [17] PLANCHET F. & LEROY G., 2009, *Quel niveau de segmentation pertinent ?*, la Tribune de l'assurance, n°142
- [29] PLANCHET F. & THÉRON P., 2006, *Modèle de durée - applications actuarielles*, Paris : Economica
- [7] POLLARD J., 1987, *Projection of Age-Specific Mortality Rates*, Population Bulletin of the United Nations n°21/22
- [36] QUASHIE A. & DENUIT M., 2005, *Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges*, Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Belgique
- [12] RENSCHAW A-E. & HABERMAN S., 2000, *Modelling for mortality reduction factors*, City University, Actuarial Research Paper n°127
- [2] ROGERS R., 2002, *Will mortality improvements continue ?*, National Underwriter n°106
- [33] SAPORTA G., 2006, *Probabilités, analyse de données et statistique*, Technip

- [8] TABEAU E., VAN DEN BERG JETHS A. & HEATHCOTE C., 2001, *Forecasting Mortality in Developed Countries*, Nederlands Interdisciplinair Demografisch Instituut, Hollande
- [4] TERRIER S., 2001, *Les rentes viagères : mortalité et réassurance*, Bulletin Français d'Actuariat n°39
- [34] THATCHER A-R., 1999, *The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age*, Journal of the Royal Statistical Society n°162
- [32] VIVILLE M-B., 2008, *Comparaison de méthodes d'ajustement de la mortalité des rentiers dans un but prospectif*, Mémoire d'actuariat, ISFA (<http://www.ressources-actuarielles.net>)
- [18] WALDRON H., 2005, *Literature review of long-term mortality projections*, Social Security Bulletin n°66
- [14] WANG S., 2000, *A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks*, The Journal of Risk and Insurance n°67
- [22] WHITE K-M., 2002, *Longevity Advances in High-Income Countries*, Population and Development Review n°28
- [11] WILMOTH J-R., 1990, *Variation in vital rates by age, period and cohort*, Sociological Methodology n°20
- [19] WONG-FUPUY C. & HABERMAN S., 2004, *Projecting mortality trends : recent developments in the United Kingdom and the United States*, North American Actuarial Journal n°8