Université Claude Bernard – Lyon 1
INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES

Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le ________________________

Par : Mlle GAUTHIER Audrey

Titre: Impact d'une réallocation d'actifs sur une garantie plancher en cas de vie dans des contrats investis en unités de compte.

Confidentialité : ☐ NON ■ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans ■ 5 ans)

Membre du jury I.A.

Membres du jury I.S.F.A.

M.	AUGROS Jean-Claude
M.	BIENVENÜE Alexis
Mme	EYRAUD-LOISEL Anne
M.	LAURENT Jean-Paul
M.	LEBOISNE Nicolas
M.	LOISEL Stéphane
Mme	MAUME-DESCHAMPS Véronique
M.	PLANCHET Frédéric
M.	QUITTARD-PINON François
Mme	REY-FOURNIER Béatrice
M.	RULLIERE Didier

Invité :

Entreprise :
AXA France
Direction Technique Vie et Banque

Directeur de mémoire :
M. DUFETEL Amaury

Secrétariat

Mme	GARCIA Marie-José
Mme	BARTHELEMY Diane
M.	BRIAS Samy
Mme	BRUNET Marie-Christine
Mme	GHAZOUANI Sondès
M.	HUET Jean-Daniel
Mme	MOUCHON Marie-Claude

Bibliothèque :
Mme SONNIER Michèle

50 Avenue Tony Garnier
69366 Lyon Cedex 07

RESUME

<u>Mots Clefs</u> :
Réallocation d'actifs, Contrat en Unités de Compte, Option de vente, Garantie plancher en cas de vie.

Pour limiter l'exposition au risque de l'assuré dans un contrat en unités de compte, risque engendré par les fluctuations du rendement de son épargne investie sur les supports, les assureurs ont développé des « garanties complémentaires » qui s'apparentent à des combinaisons linéaires d'options de vente.
Ce mémoire traite de l'impact d'une réallocation d'actifs au sein de contrats en unités de compte, sur ces garanties. La garantie à laquelle nous nous intéressons plus particulièrement est la GMAB : *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*, garantie plancher en cas de vie. Nous étudions l'impact en terme de coût, d'une réallocation d'actifs sur la GMAB.

En premier lieu, nous nous intéressons à l'impact financier qu'engendre une réallocation d'actifs sur la garantie plancher dont le paiement des frais s'effectue de manière unique en début de contrat. Nous basons notre étude sur une garantie présentant les mêmes flux qu'une option de vente car la GMAB peut être vue comme une combinaison linéaire de puts. Nous déterminons le prix de la garantie plancher en présence d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC auquel elle est associée, en adaptant l'approche martingale à notre problème. Nous nous penchons ensuite sur les paramètres sur lesquels l'assureur peut influer pour diminuer le coût de la réallocation, tout en conservant un attrait commercial. Il apparaît que la volatilité du nouveau support et la date de réallocation sont les deux principaux facteurs influençant le coût de la réallocation pour l'assureur. Enfin, nous étudions une solution consistant à prélever des frais d'arbitrage, proportionnellement à l'épargne de l'assuré disponible, en cas de modification de l'allocation d'actifs. Cette solution s'avère efficace puisqu'elle permet d'augmenter le résultat pour la compagnie d'assurance d'une réallocation.
Nous appliquons, ensuite la même démarche dans le cas d'un contrat où le paiement de la garantie s'effectue périodiquement. Nous constatons que le levier supplémentaire, consistant à adapter le montant de frais prélevés au titre de la garantie au support choisi par l'assuré, rend ce deuxième type de contrats beaucoup plus maniable et plus propice pour l'assureur à la réallocation.

En second lieu, notre réflexion est menée sur la GMAB, garantie qui assure le versement d'un montant minimum au bénéficiaire, à l'échéance du contrat si l'assuré est toujours dans le portefeuille à l'échéance. Après avoir décrit les principes de tarification de cette garantie, nous nous intéressons aux conséquences d'une réallocation d'actifs sur la GMAB. L'impact financier décrit précédemment est toujours présent. A celui-ci, s'ajoute un impact au niveau du comportement de l'assuré. Nous abordons les conséquences d'une modification des lois du passif et notamment des lois de rachat suite à une réallocation d'actifs.

ABSTRACT

<u>Key words</u>: Arbitrage, Unit-Linked Contract, Put, Guaranteed Minimum Accumulation Benefit.

To limit the policyholder's exposition to risk in Unit-Linked contract, risk created by the yield fluctuations of saving invested on supports, insurers developed some further guarantees which are similar to linear combinations of puts.
This thesis deals with impact of arbitrage in unit-linked contracts, on these guarantees. The guarantee we interest in especially is the GMAB: *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*. We study the impact in term of cost, of an arbitrage on GMAB.

In a first time, we take an interest in financial impact linked to unit arbitrage on the guaranteed minimum benefit paid in a single way at beginning of the contract. We base our study on a guarantee which presents same payoffs as a put because GMAB can be considered as a linear combination of puts. We determine the price of the guarantee in presence of an arbitrage in unit-linked contract that the guarantee is linked to, by adapting the martingale approach to our issue. Then we bend over to study the parameters the insurer can influence over to decrease the reallocation cost, while keeping marketing interest. Volatility of the new support and arbitrage instant are the two main factors which exercise an influence over the arbitrage costs for insurers. Finally, we study a solution which consists in deducting arbitrage fees proportional to policyholder's saving when there is a move of unit allotment; this solution appears to be efficient since it permits the insurer result due to an arbitrage to increase.

Then, we apply the same approach in case of a contract in which guarantee fees are paid periodically. We observe that the new possibility, consisting in adapting the fees to the unit chosen by the policyholder, enables this second kind of contracts to be handier and more propitious for insurers, when there is an arbitrage.

In a second time, our thought is based on the GMAB: *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*. After describing the pricing principles of this guarantee, we have an interest in consequences after unit arbitrage. The financial impact described before is still present. A policyholder behaviour impact must be added to this first impact. We underline the consequence of alteration of liability laws, especially in repurchase laws due to arbitrage.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord, Monsieur Amaury DUFETEL, tuteur de mon stage et responsable manager de l'équipe Rentabilité de la Direction Technique Vie et Banque d'AXA France, pour son aide précieuse, ses conseils rigoureux et sa disponibilité tout au long de la rédaction de mon mémoire.

Merci à Mademoiselle Anne-Claire FLUHR, pour son soutien régulier et son encadrement ainsi qu'à Monsieur Matthieu POURBAIX, actuel responsable manager de l'équipe Rentabilité, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Merci enfin à toute l'équipe Rentabilité pour leur sympathie et leurs divers conseils.

J'adresse également mes remerciements à toute l'équipe enseignante de l'ISFA et plus particulièrement à Monsieur Didier RULLIERE, mon tuteur de mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils.

Je tiens à remercier pour finir, mes parents pour leur soutien sans faille, depuis mes premiers pas à l'école maternelle.

CONFIDENTIALITE

L'ensemble des informations contenues dans ce mémoire est strictement confidentiel. Il ne pourra être consulté qu'en interne.

La diffusion de ce mémoire en externe se limitera aux besoins de la présentation du pré-mémoire ainsi qu'à la soutenance devant le jury de l'ISFA et de l'Institut des Actuaires.

Toute autre diffusion est interdite.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

L'Assurance Vie a vu se développer au cours de ces dernières années, une nouvelle gamme de contrats : les contrats en unités de compte (UC). Dans ce type de contrat, le capital garanti par l'assureur est égal au nombre de parts détenues par l'assuré multiplié par la valeur de marché de l'unité de compte considérée. Aussi, l'intégralité du risque lié aux fluctuations des marchés financiers est supportée par l'assuré du fait que l'assureur ne garantit que le nombre d'UC et non pas leurs valeurs.

Afin de limiter l'exposition au risque des assurés et ainsi de rendre ces contrats plus attractifs, les compagnies d'assurance ont ajouté des garanties, dites « garanties complémentaires », à ces contrats en UC. Parmi elles, se trouve, la GMAB, *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*, garantie plancher en cas de vie, qui assure le versement d'un capital minimum au bénéficiaire, à l'échéance du contrat, si l'assuré est toujours présent dans le portefeuille à l'échéance.

Le souscripteur d'un contrat en UC peut souhaiter, au cours de la vie de celui-ci, modifier son allocation d'actifs. Il devra dès lors effectuer une réallocation d'actifs, appelée également arbitrage, au sein de son contrat en UC. Quel sera alors l'impact d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC sur la garantie GMAB liée à ces UC ? A travers ce mémoire, nous tenterons de déterminer quelles sont les conséquences d'une réallocation d'actifs sur la GMAB, en terme de coût de la garantie. En outre, nous tenterons d'esquisser des solutions à mettre en place pour limiter le coût pour la compagnie d'une réallocation d'actifs.

Dans un premier temps, nous réduirons notre réflexion à l'étude de la garantie plancher qui assure, au bénéficiaire, le versement d'un montant minimum, à l'échéance du contrat, sans que le décès ou la présence de l'assuré en fin de contrat ne soit un élément déclencheur de la garantie. Cette garantie peut être assimilée en terme de flux financiers à une option de vente. L'intérêt porté à une option de vente s'explique par le fait que la GMAB peut être évaluée, nous le montrerons plus tard, comme un PUT pondéré par une probabilité de présence. Cette partie nous permettra de nous focaliser sur les conséquences financières d'une réallocation d'actifs sur l'option de vente : a priori, une réallocation vers un actif plus volatile entraînera un surcoût dans la garantie plancher pour l'assureur car le risque supporté par la compagnie d'assurance sera dès lors plus important alors que le choix d'un actif moins risqué bénéficiera à l'assureur. Nous vérifierons cette intuition de façon théorique et tenterons de trouver des solutions pour limiter cet impact financier. Nous étudierons successivement, le cas d'un contrat où le paiement des frais au titre de la garantie plancher se fait de manière unique en début de contrat et le cas d'un contrat où le paiement de la garantie est périodique.

Dans un deuxième temps, l'étude sera conduite sur la GMAB. Dans cette partie, nous prendrons en compte, en plus des conséquences financières évoquées précédemment, des modifications comportementales de l'assuré suite à une réallocation d'actifs. En effet, il est plausible qu'un assuré qui ait effectué une modification de son allocation d'actifs sur son contrat en UC ait moins tendance à racheter son contrat puisqu'il sera d'autant plus satisfait de celui-ci. Ainsi, une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC impacte également les lois de rachat qui sont utilisées dans la tarification de la GMAB. Nous tenterons de comprendre en quoi ces modifications des lois du passif engendrent un coût supplémentaire.

Partie I :

IMPACT
D'UNE REALLOCATION D'ACTIFS
AU SEIN D'UN CONTRAT EN UC
SUR UNE GARANTIE PLANCHER

Chapitre 1 : POSITIONNEMENT DU PROBLEME

1. Présentation de la garantie plancher

1.1 Introduction à la garantie plancher

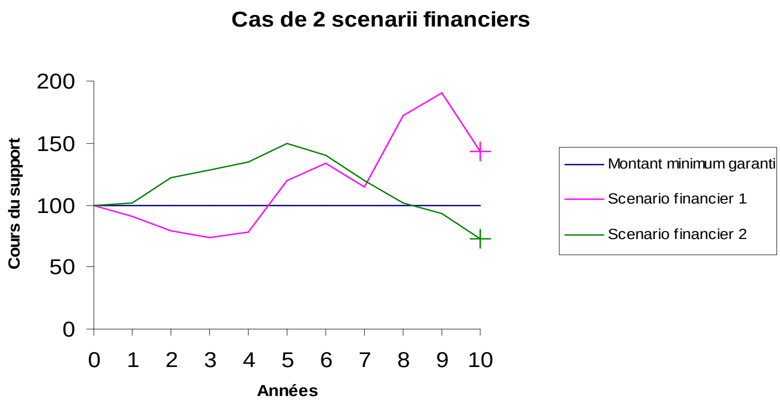
Dans un premier temps, le souscripteur investit une certaine prime dans son contrat en Unités de Compte (UC). La somme qu'il verse correspond en fait à l'achat d'un certain nombre de parts d'un ou de plusieurs supports définis.
La garantie plancher proposée par l'assureur consiste, moyennant le versement de frais au titre de cette garantie, à assurer au bénéficiaire le versement d'un montant minimum, quelle que soit l'évolution des marchés financiers et du niveau de l'épargne, à la maturité du contrat. Il est à noter que dans cette garantie, l'état de l'assuré à la maturité (vivant ou décédé) n'influe pas quant au versement de la garantie.

Remarque :
Dans ce type de garantie, le souscripteur (*personne physique ou morale qui souscrit le contrat d'assurance et s'engage auprès de l'assureur*), l'assuré (*personne physique sur laquelle repose le risque assuré*) et le bénéficiaire (*personne physique ou morale désignée au contrat qui reçoit la prestation prévue lors de la réalisation du risque assuré*) sont, dans la plupart des cas, la même personne. C'est pourquoi nous n'effectuerons plus de distinctions entre ces notions et utiliserons dans la suite de ce mémoire, le terme général d'assuré.

Illustrons la garantie présentée à l'aide de deux scenarii financiers :

Notons S_0 la prime initiale investie par l'assuré,
K le montant minimum garanti par l'assureur,
T la maturité du contrat.

Nous supposerons en outre que $S_0 = K = 100$ et que $T = 10$ ans.



A l'issue du scenario financier 1, l'assuré recevra une prestation égale à la valeur du support S_T alors qu'à l'issue du scenario 2, l'assuré se verra verser le montant minimum garanti K.

Plus généralement, l'assureur garantit donc le remboursement de $\max(S_T, K) = S_T + [K - S_T]^+$ où S_T représente le niveau de l'épargne à l'échéance du contrat. Le versement de S_T ne présentant pas de risque pour l'assureur, la garantie plancher est donc équivalente à une option de vente européenne de support S, de prix d'exercice K et de maturité T.

Apparaît alors une difficulté : quel tarif appliquer à cette garantie ? L'écueil réside dans le fait de la multiplicité des scenarii d'actifs possibles. La garantie plancher étant assimilable en terme de flux financiers à une option de vente européenne, la théorie financière largement développée depuis 1973 permet de répondre à cette question.

1.2 Tarification de la garantie

Pour simplifier le problème, nous considérerons le contrat composé d'un unique support, noté S_A qui suivra, sous la probabilité historique P, la dynamique :

$$\frac{dS_A}{S_A} = \mu_A.dt + \sigma_A.dW_t^A$$

où μ_A désigne la tendance du sous-jacent.

σ_A désigne la volatilité du sous-jacent.

W_t^A est un mouvement brownien.

Les paramètres μ_A et σ_A seront supposés constants.

Sous les hypothèses de marché parfait (absence de coûts de transaction et de taxes) et complet (tout actif est réplicable), en l'absence d'opportunités d'arbitrage et en supposant que les opérations de prêts et d'emprunts se fassent au taux sans risque constant, Black et Scholes parvinrent en 1973 [BLA73] à trouver une formule fermée simple et attrayante pour l'évaluation d'options européennes.

La garantie s'apparentant à une option de vente européenne sur le sous-jacent S_A, le montant des frais demandés à l'assuré au titre de la garantie plancher à l'instant initial est donc selon le modèle de Black-Scholes :

$$\begin{aligned}\Pi &= PUT(S_A, K, T, r, \sigma_A) \\ &= K.\exp(-rT).N(-d_2) - S_0.N(-d_1)\end{aligned}$$

Avec $N(.)$, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S_0}{K}\right] + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).T}{\sigma_A.\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$$

Où
- S_0 est la prime initiale investie par l'assuré,
- K est le montant minimum garanti par l'assureur,
- T est la maturité du contrat,
- r est le taux sans risque,
- σ_A est la volatilité du sous-jacent.

Ces frais payés au titre de la garantie ne suffisent cependant pas à couvrir les risques de l'assureur. En effet, dans le cas d'un scénario d'actifs défavorable à l'assureur, caractérisé par une baisse des UC, les conséquences peuvent s'avérer très lourdes pour la compagnie d'assurance. Considérons le cas extrême dans lequel la valeur des UC devient nulle. L'épargne de l'assuré est alors elle-aussi nulle et l'assureur devra le montant $\max(S_T, K) = \max(0, K) = K$ alors qu'il n'aura reçu que les frais Π : la garantie apparaît alors très couteuse pour l'assureur !
Pour se protéger des fluctuations liées aux marchés financiers, l'assureur peut mettre en place une couverture, appelée également « *hedging* ».

1.3 *Hedging*

1.3.1 Introduction à la couverture en delta

L'assureur peut mettre en place une couverture qu'il lui permettra d'être protégé en cas de baisse des marchés financiers. Le but de cette couverture est de contrôler, voir de « cristalliser » le résultat de la compagnie d'assurance autour d'une valeur connue à l'avance. Grâce à la couverture financière, l'assureur réduit la variance de son résultat et supprime donc l'aléa portant sur celui-ci.

Appliquée à la garantie plancher, la couverture semble évidente : il suffit pour l'assureur de se procurer sur le marché, l'option de vente vendue à l'assuré. Cependant, cette couverture parfaite ne peut être mise en place en pratique car l'option de vente n'est pas forcément échangée sur les marchés financiers (maturité trop longue, prix d'exercice trop élevé…) Face à cette limite, une solution existe : celle-ci résulte du principe même de la valorisation financière des options qui affirme que le prix de l'option est donné par la valeur nécessaire à la mise en place d'un portefeuille délivrant exactement les mêmes flux que l'option quelle que soit l'évolution du marché. Ce portefeuille de réplication est aussi le portefeuille de couverture puisqu'il délivre toujours les mêmes flux que l'option : il procurera au vendeur de l'option, les flux opposés à ceux découlant de son engagement.

Ayant supposé la volatilité et le taux sans risque, le développement de Taylor au second degré du prix de l'option de vente donne :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial S}.dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}.dS^2 = \Delta.dS + \frac{1}{2}\Gamma.dS^2 .$$

La couverture en delta est une approximation à l'ordre 1 du développement de Taylor et la couverture en gamme, une approximation à l'ordre 2.

Le delta d'une option mesure la sensibilité du prix de cette option par rapport au prix de son sous-jacent. La couverture en delta permet dans le cas d'une option de vente, de se couvrir contre les variations du sous-jacent à la baisse. Sous les hypothèses du modèle de Black-Scholes, le delta d'une option de vente est donné par :

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

En particulier $\Delta \in [-1,0]$. Plus un PUT est dans la monnaie, plus le delta tend vers -1. A l'inverse, plus il est en dehors de la monnaie, plus le delta vers 0. Le delta d'un PUT à la monnaie est de 0.5.
Lors d'une vente d'un put, le delta indique le nombre d'actions du sous-jacent à vendre pour créer un portefeuille qui conservera sa valeur initiale même si le prix du sous-jacent fluctue légèrement. Dans ce portefeuille qui a un delta neutre, tout gain (perte) réalisé sur la valeur des actions vendues, suite à une diminution (augmentation) du prix du sous-jacent sera compensé par la perte (gain) sur la valeur des options de vente vendues. Une couverture dynamique semble plus adaptée : en effet, le delta changeant constamment du fait de la variation des cours du sous-jacent et de l'écoulement du temps, le nombre d'actions vendues doit continuellement être réajusté pour maintenir la position sans risque.

1.3.2 Application à la garantie

Pour bien visualiser l'intérêt de la couverture en delta, nous allons déterminer le coût pour l'assureur de la garantie en présence et en l'absence de *hedging*. Pour cela, nous utiliserons la méthode de Monte-Carlo dont le principe sera décrit plus précisément, ultérieurement dans ce mémoire.

En l'absence de couverture, nous simulons le cours du sous-jacent S sous les hypothèses du modèle de Black-Scholes entre les instants initiaux et finaux et déterminons alors le flux de la garantie $[K - S_T]^+$ que nous actualisons à l'instant initial.

Pour la couverture en delta, les positions seront supposées être réajustées annuellement et les coûts de transaction, nuls. Nous commençons par simuler les valeurs prises par le sous-jacent chaque année. Nous calculons les deltas correspondants à ces prix ainsi que la différence des deltas d'une période à l'autre : ceci nous indique le nombre d'actions à vendre. Nous en déduisons alors le profit de l'opération menée.

Le profit cumulé est la somme du profit de l'opération qui vient d'être réalisée avec le profit cumulé précédent capitalisé. A la maturité, la position doit être débouclée. Si l'option est en dehors de la monnaie alors le delta vaudra 0 et le coût de la couverture sera alors donné par le coût cumulé à la maturité (inverse du profit). Si l'option est dans la monnaie alors le delta vaudra -1 et le coût de la couverture sera alors le coût cumulé à la maturité auquel nous ajoutons le prix d'exercice, que l'assureur doit verser à l'acheteur (pour un exemple numérique du principe de la couverture en delta, se reporter à l'*Annexe A*).

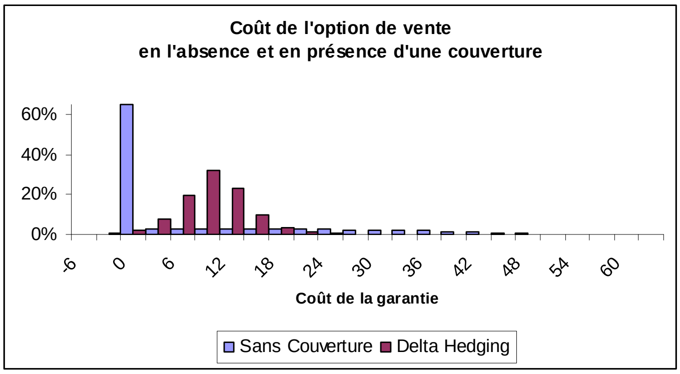
Application numérique :

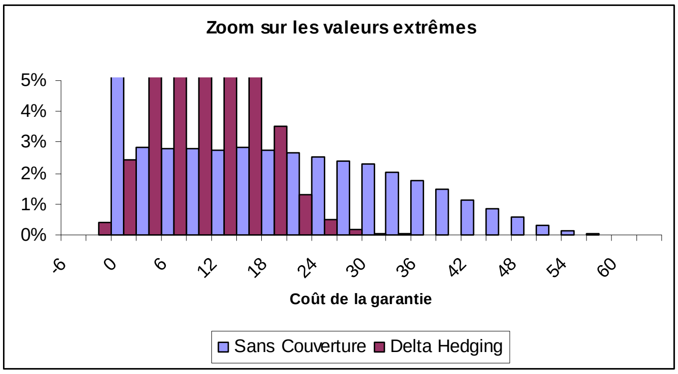
Considérons un contrat auquel est associé une garantie plancher caractérisée par :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support : $\sigma_A = 20\%$

Avec ces données numériques, les frais demandés à l'assuré au titre de la garantie s'élèvent selon le modèle de Black-Scholes à 8.06€.

Intérêt de la mise en place d'une couverture en delta pour l'assureur :





Ces graphiques présentent sous forme d'histogramme, les probabilités associées aux coûts de la garantie, actualisés à l'instant initial.
L'espérance sous la probabilité risque-neutre du coût de cette garantie pour l'assureur est de 8.09€ en cas de non couverture et de 8.07€ si l'assureur met en place une couverture en delta. Le coût est donc de l'ordre des frais payés par l'assuré au titre de la garantie quelle que soit la stratégie adoptée. Cependant, au vu de ces deux graphiques, il apparaît nettement qu'en l'absence de couverture, un tel coût présente une forte dispersion alors que la couverture en delta permet elle, de cristalliser le résultat autour de la valeur moyenne.

La mise en place d'une couverture en delta relève d'une véritable décision managériale. En effet, si le critère de décision est dans le cas de notre exemple, l'absence de coûts de la garantie supérieurs à 30€, alors la couverture en delta s'avérera dès plus utile. Mais soulignons néanmoins qu'en l'absence de couverture, dans 60% des cas, la garantie ne coûtera rien à l'assureur qui dégagera alors des profits énormes. Ainsi, la mise en place d'une couverture en delta est une véritable décision d'entreprise et dépend des critères de management retenus.

Dans le cas où l'assureur opte pour une couverture en delta, cela permet de rendre l'espérance du résultat de la vente d'une option indépendante de l'évolution future du marché. De plus, [SAR04] montre que la variance de ce résultat est inverse de la fréquence des réajustements du portefeuille de couverture. Ainsi, les réajustements doivent être les plus rapprochés possible pour éviter une grande variation du sous-jacent et réduire la variance du résultat. Cependant, le réajustement de la position entraîne des coûts de transaction, supposés jusqu'à présent nuls, nécessaires pour la rémunération des intermédiaires. Dans [YOU04], il a été démontré que ces coûts diminuent le résultat de manière d'autant plus importante que le réajustement est fréquent. Il faut donc faire un arbitrage entre la précision de la couverture et son coût.

2. Problématique d'une réallocation d'actifs

L'assuré en possession d'un contrat en unités de compte peut souhaiter au bout d'un certain temps, modifier l'allocation d'actifs de son contrat c'est-à-dire opter pour un support différent, plus ou moins risqué. Cet attrait pour une nouvelle unité de compte peut s'expliquer par exemple, par de meilleures performances dans le passé de cette dernière par rapport à l'actif du contrat de l'assuré. L'assuré sera alors tenté de changer de support en espérant bénéficier de meilleurs rendements. Le fait d'accorder à l'assuré la possibilité de réallouer son épargne s'inscrit dans un objectif marketing : le but est de satisfaire au maximum le souhait du client et ainsi de permettre la souscription d'un nouveau contrat ou alors sa reconduction au sein de la compagnie d'assurance.

Nous pouvons alors nous demander quel impact une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en unités de compte crée sur la garantie plancher. Plus précisément, quelles sont les conséquences d'une réallocation d'actifs en terme de coût sur cette option de vente ? Mais également, quelles sont les conséquences en terme de couverture ?

Pour répondre à ces questions, nous devons d'abord comprendre en quoi le tarif de la garantie va être modifié en présence d'une réallocation d'actifs.

Chapitre 2 : TARIFICATION DE LA GARANTIE EN PRESENCE D'UNE REALLOCATION D'ACTIFS

Le but de ce chapitre est de tarifier la garantie plancher décrite dans le précédent chapitre associée à un contrat en UC où l'épargne est initialement investie sur le support S_A et pour lequel l'assuré réalise une réallocation vers le support S_B à l'instant déterministe $\mathrm{t} = \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}$.

Pour cela, nous allons adapter l'approche martingale qui permit initialement d'obtenir un éclairage nouveau quant au modèle d'évaluation des options de Black-Scholes, à savoir que sous certaines conditions, le prix d'une option doit être égale à l'espérance actualisée de ses gains futurs.

1. Modélisation du cours du sous-jacent

La première étape dans la tarification de la garantie est de modéliser le cours du support sur lequel l'épargne est investie.

Rappelons la dynamique du support S_A sous la probabilité historique P : $\frac{dS_A}{S_A} = \mu_A.dt + \sigma_A.dW_t^A$.

Le nouveau jacent noté S_B aura pour dynamique $\frac{dS_B}{S_B} = \mu_B.dt + \sigma_B.dW_t^B$ sous la probabilité historique P avec $dW_t^A.dW_t^B = \rho.dt$.

Nous supposerons par la suite que les paramètres μ_A, σ_A, μ_B et σ_B sont constants.

A l'instant de réallocation, nous avons donc :

$$S_{t_{\mathrm{Reall}}}^A = S_0.\exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_A.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^A\right)$$

Et $$S_{t_{\mathrm{Reall}}}^B = S_0.\exp\left(\left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B\right)$$

$$\text{Avec } W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B = \rho.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^A + \sqrt{1-\rho^2}.\overline{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}^A \qquad \text{et} \qquad dW_{t_{\mathrm{Reall}}}^A.d\overline{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}^A = 0$$

Nous en déduisons alors le nombre de parts noté n du support S_B, que le capital obtenu grâce au support S_A permet à l'assuré d'acquérir à l'instant de réallocation :

$$n = \frac{S_{t_{\mathrm{Reall}}}^A}{S_{t_{\mathrm{Reall}}}^B} = \exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\mathrm{Reall}} - \left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_A.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^A - \sigma_B.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B\right)$$

En multipliant ce nombre de part par la valeur finale du support S_B, nous pouvons déterminer la valeur finale du sous-jacent que l'assuré possède :

$$\begin{aligned} S_T = n.S_T^B &= n.S_{t_{\mathrm{Reall}}}^B.\exp\left(\left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).(T - t_{\mathrm{Reall}}) + \sigma_B.\left(W_T^B - W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B\right)\right) \\ &= \exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\mathrm{Reall}} - \left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_A.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^A - \sigma_B.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B\right). \\ &\quad S_0.\exp\left(\left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B.W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B\right).\exp\left(\left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).(T - t_{\mathrm{Reall}}) + \sigma_B.\left(W_T^B - W_{t_{\mathrm{Reall}}}^B\right)\right) \end{aligned}$$

Au final, il vient :

$$S_T = S_0.\exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}} + \left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.W_{t_{\text{Reall}}}^A + \sigma_B.\left(W_T^B - W_{t_{\text{Reall}}}^B\right)\right)$$

Dans cette expression, le coefficient de corrélation ρ qui existe entre les deux sous-jacents S_A et S_B n'intervient pas. En effet, ce coefficient ρ décrit une dépendance spatiale entre les deux cours. Autrement dit, à un instant donné, selon la performance du sous-jacent S_A, le support S_B aura tendance à performer d'une certaine manière en fonction de la valeur de ρ :

- si $\rho < 0$, la dépendance est négative et une hausse (respectivement une baisse) de S_A entraînera une baisse (respectivement une hausse) de S_B.
- si $\rho > 0$, la dépendance est positive et une hausse (respectivement une baisse) de S_A entraînera une hausse (respectivement une baisse) de S_B.
- si $\rho = 0$, il y a indépendance des trajectoires.

Le coefficient de corrélation ρ traduit une dépendance spatiale et non pas temporelle. Dans notre problématique, nous nous intéressons à la modélisation de sous-jacents sur deux périodes temporelles distinctes. La dépendance ne se propageant pas dans le temps, le coefficient de corrélation n'a pas à intervenir.

De plus, l'accroissement $W_T^B - W_{t_{\text{Reall}}}^B$ est indépendant de $W_{t_{\text{Reall}}}^B$ puisqu'il y a indépendance des accroissements des mouvements browniens. Par ailleurs, nous supposerons que les accroissements passés des mouvements browniens du support S_A sont indépendants des accroissements futurs des mouvements browniens du support S_B du fait que cela porte sur deux sous-jacents distincts. Autrement dit, nous avons $W_T^B - W_{t_{\text{Reall}}}^B$ indépendant de $W_{t_{\text{Reall}}}^A$. Nous pouvons donc remplacer les mouvements browniens géométriques W_t^A et W_t^B par un mouvement brownien générique que nous nommerons W_t : nous avons alors bien $W_T - W_{t_{\text{Reall}}}$ indépendant de $W_{t_{\text{Reall}}}$ par la propriété d'indépendance des accroissements.

Au final, nous obtenons :

$$S_T = S_0.\exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}} + \left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.W_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(W_T - W_{t_{\text{Reall}}}\right)\right)$$

Considérons le sous-jacent S caractérisé sous la probabilité historique P, par la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t.dt + \sigma_t.dW_t$$

avec μ_t la tendance telle que $\mu_t = \begin{cases} \mu_A & \text{si t} \le \text{t}_{\text{Reall}} \\ \mu_B & \text{si t} > \text{t}_{\text{Reall}} \end{cases}$

σ_t la volatilité telle que $\sigma_t = \begin{cases} \sigma_A & \text{si t} \le \text{t}_{\text{Reall}} \\ \sigma_B & \text{si t} > \text{t}_{\text{Reall}} \end{cases}$

W_t un mouvement brownien.

En appliquant le lemme d'Itô [ITO51] à $Y_t = \ln(S_t)$, nous pouvons montrer qu'à partir de cette dynamique, nous obtenons la même valeur à la maturité, que celle précédemment établie.

Nous avons :

$$dY_t = 0.dt + \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{(S_t)^2}d\langle S_t\rangle^2$$
$$= \mu_t.dt + \sigma_t.dW_t - \frac{1}{2}\frac{1}{(S_t)^2}\sigma_t^2(S_t)^2.dt$$
$$= \mu_t.dt + \sigma_t.dW_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2.dt$$
$$= \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right).dt + \sigma_t.dW_t$$

Puis en intégrant entre 0 et T :

$$Y_T - Y_0 = \int_0^T\left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right).dt + \int_0^T \sigma_t.dW_t$$
$$S_T = S_0.\exp\left(\int_0^T\left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right).dt + \int_0^T \sigma_t.dW_t\right)$$

Avec les conditions sur les paramètres, le cours du sous-jacent sous la probabilité historique s'écrit donc :

$$\boxed{S_T = S_0.\exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}} + \left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right).(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.W_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(W_T - W_{t_{\text{Reall}}}\right)\right)}$$

<u>Remarques</u> :

- Pour $\mathrm{t}_{\text{Reall}} = 0$ (i.e. dès le départ, la garantie porte sur le nouveau sous-jacent S_B), l'expression devient $S_T = S_0.\exp\left(\left(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2\right)T + \sigma_B W_T\right)$, expression qui caractérise bien la dynamique d'un sous-jacent de tendance μ_B et de volatilité σ_B.

- Pour $\mathrm{t}_{\text{Reall}} = T$ (tout se passe comme s'il n'y avait pas de réallocation), la dynamique se réécrit $S_T = S_0.\exp\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)T + \sigma_A W_T\right)$: il s'agit bien de la dynamique d'un sous-jacent de tendance μ_A et de volatilité σ_A.

Par la suite, pour obtenir le prix de la garantie réallouée, nous considérerons qu'il s'agit de tarifer une option de vente portant sur un seul sous-jacent S dont les caractéristiques (tendance et volatilité) varient au cours du temps en fonction de la date de réallocation. Autrement dit, la dynamique de ce sous-jacent S sera sous la probabilité historique P :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t.dt + \sigma_t.dW_t$$

avec μ_t la tendance telle que $\mu_t = \begin{cases}\mu_A & \text{si t} \le \text{t}_{\text{Reall}}\\ \mu_B & \text{si t} > \text{t}_{\text{Reall}}\end{cases}$

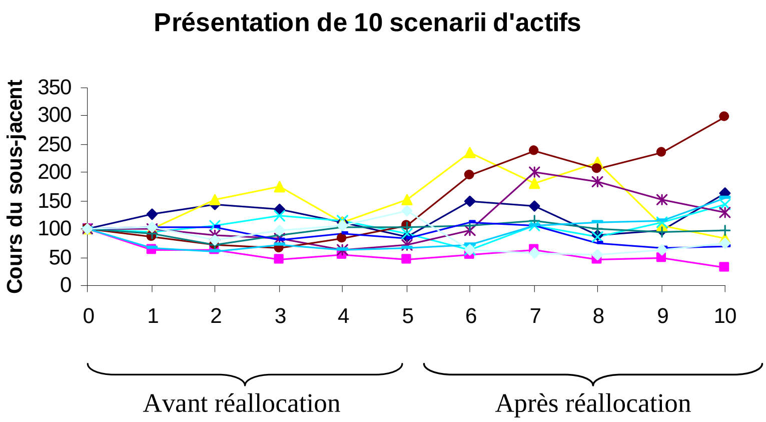
σ_t la volatilité telle que $\sigma_t = \begin{cases}\sigma_A & \text{si t} \le \text{t}_{\text{Reall}}\\ \sigma_B & \text{si t} > \text{t}_{\text{Reall}}\end{cases}$

W_t un mouvement brownien.

Application numérique :

Considérons les données numériques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Date de réallocation : $t_{Reall} = 5$ ans
- Paramètres avant réallocation : $\mu_A = 2\%$ et $\sigma_A = 20\%$
- Paramètres après réallocation : $\mu_B = 3\%$ et $\sigma_B = 30\%$



2. Introduction de la probabilité risque-neutre

L'étape suivante de la tarification est de construite la probabilité risque-neutre. Pour cela, nous adapterons la méthodologie proposée par F. Quittard-Pinon, *Mathématiques financières* (p 190 à 194), à notre problématique.

Notons r le taux d'intérêt sans risque, supposé constant.

Introduisons la mesure Q définie par la densité de Radom-Nikodym :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{r-\mu_t}{\sigma_t} \right)^2 dt + \int_0^T \left(\frac{r-\mu_t}{\sigma_t} \right) dW_t \right)$$

Q est appelée probabilité risque-neutre.

D'après le théorème de Girsanov,

$$\hat{W}_t = W_t - \int_0^t \left(\frac{r-\mu_s}{\sigma_s} \right) ds \qquad \text{est un Q mouvement-brownien.}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t.dt + \sigma_t.dW_t \\ &= \mu_t.dt + \sigma_t d\hat{W}_t + \sigma_t \left(\frac{r-\mu_t}{\sigma_t} \right) dt \\ &= r.dt + \sigma_t d\hat{W}_t \end{aligned}$$

Ainsi, sous la probabilité risque neutre, seule la volatilité est modifiée lors d'une réallocation, la tendance restant égale au taux sans risque quelque soit la date à laquelle nous nous plaçons.

En appliquant le lemme d'Itô à $Y_t = \ln(S_t)$ comme précédemment, la valeur du sous-jacent à la maturité peut être vue comme :

$$\boxed{S_T = S_0.\exp\left(r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{W}_T - \hat{W}_{t_{\text{Reall}}}\right) \right)}$$

Considérons la valeur de l'actif actualisé $\tilde{S}_t = S_t \exp(-rt)$.

En particulier, en appliquant le théorème d'Itô :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -rS_t \exp(-rt)dt + \exp(-rt)dS_t \\ &= -r\tilde{S}_t dt + rS_t \exp(-rt)dt + \sigma_t S_t \exp(-rt)d\hat{W}_t \\ &= -r\tilde{S}_t dt + r\tilde{S}_t dt + \sigma_t \tilde{S}_t d\hat{W}_t \\ &= \sigma_t \tilde{S}_t d\hat{W}_t \end{aligned}$$

La dérive étant nulle, nous déduisons que $\tilde{S}_t$ est une Q-martingale.

Ainsi, sous la probabilité risque neutre, la valeur de l'actif actualisé est une martingale.

3. Pricing de la garantie

Notons $\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)$, le prix à l'instant initial de la garantie associée à un contrat en UC pour lequel l'épargne est investie sur un sous-jacent caractérisé par une volatilité initiale σ_A puis réallouée vers un actif de volatilité σ_B à l'instant $\mathrm{t}=\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}$. Le montant minimum garanti est K, la maturité T et le taux sans risque supposé constant, r.

Comme sous la probabilité risque neutre, le payoff actualisé est une martingale, le prix à l'instant initial de la garantie est donné par :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B) &= E_Q\left[(K-S_T)^+\exp(-rT)\right]\\ &= \exp(-rT).E_Q\left[(K-S_T)\mathrm{I}_{S_T<K}\right]\\ &= \exp(-rT).K.Q(S_T<K)-\exp(-rT).E_Q\left[S_T\mathrm{I}_{S_T<K}\right]\end{aligned}$$

3.1 Tarif de la garantie en présence d'une réallocation d'actifs

3.1.1 Calcul de $Q(S_T < K)$

Rappelons la valeur du cours du sous-jacent à la maturité, sous la probabilité risque-neutre :

$$S_T = S_0.\exp\left(r.T-\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}-\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})+\sigma_A.\hat{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}+\sigma_B.\left(\hat{W}_T-\hat{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}\right)\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}Q(S_T<K) &= Q\left(S_0.\exp\left(r.T-\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}-\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})+\sigma_A.\hat{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}+\sigma_B.\left(\hat{W}_T-\hat{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}\right)\right)<K\right)\\ &= Q\left(\sigma_A.\hat{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}+\sigma_B.\left(\hat{W}_T-\hat{W}_{t_{\mathrm{Reall}}}\right)<\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})\right)\\ &= Q\left(\sigma_A.\sqrt{t_{\mathrm{Reall}}}\varepsilon_1+\sigma_B.\sqrt{.T-t_{\mathrm{Reall}}}\varepsilon_2<\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})\right)\end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$ et $\varepsilon_2 \sim N(0,1)$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ du fait de l'indépendance des accroissements des browniens.

$$=Q\left(\varepsilon_3<\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})\right)$$

où $\varepsilon_3 \sim N\left(0,\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})\right)$

$$=Q\left(\varepsilon_4<\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}}\right) \quad \text{où } \varepsilon_4 \sim N(0,1)$$

Conclusion :

$$Q(S_T < K) = N(-d_2)$$

Où $$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})}}$$

3.1.2 Calcul de $E_Q[S_T.I_{S_T} < K]$

Sous la probabilité risque-neutre, le cours du sous-jacent à maturité est :

$$S_T = S_0.\exp\left(r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{W}_T - \hat{W}_{t_{\text{Reall}}}\right)\right)$$

D'où :

$$E_Q\left[S_T \mathrm{I}_{S_T<K}\right] = S_0.\exp(r.T)E_Q\left\lfloor \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{W}_T - \hat{W}_{t_{\text{Reall}}}\right)\right)\mathrm{I}_{S_T<K}\right\rfloor$$

Définissons la probabilité Q^* par la densité de Radom-Nikodym :

$$\frac{dQ^*}{dQ} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{W}_T - \hat{W}_{t_{\text{Reall}}}\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2.dt + \int_0^T \sigma_t.d\hat{W}_t\right)$$

D'après le théorème de Girsanov,

$\hat{\hat{W}}_t = \hat{W}_t - \int_0^t \sigma_s.ds$ est un Q^* mouvement brownien

D'où $$E_Q\left\lfloor S_T \mathrm{I}_{S_T<K}\right\rfloor = S_0.\exp(r.T)E_{Q^*}\left\lfloor \mathrm{I}_{S_T<K}\right\rfloor$$
$$= S_0.\exp(r.T).Q^*(S_T < K)$$

Déterminons $Q^*(S_T < K)$:

$$
\begin{aligned}
&Q^*(S_T < K)\\
&= Q^*\left(S_0.\exp\left(r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{W}_T - \hat{W}_{t_{\text{Reall}}}\right)\right) < K \right)\\
&= Q^*\left(S_0.\exp\left(r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{\hat{W}}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \sigma_B.\left(\hat{\hat{W}}_T - \hat{\hat{W}}_{t_{\text{Reall}}}\right) + \sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})\right) < K \right)\\
&= Q^*\left(S_0.\exp\left(r.T + \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) + \sigma_A.\hat{\hat{W}}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{\hat{W}}_T - \hat{\hat{W}}_{t_{\text{Reall}}}\right)\right) < K \right)\\
&= Q^*\left(\sigma_A.\hat{\hat{W}}_{t_{\text{Reall}}} + \sigma_B.\left(\hat{\hat{W}}_T - \hat{\hat{W}}_{t_{\text{Reall}}}\right) < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) \right)\\
&= Q^*\left(\sigma_A.\sqrt{t_{\text{Reall}}}.\varepsilon_1 + \sigma_B.\sqrt{T - t_{\text{Reall}}}.\varepsilon_2 < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}}) \right)\\
&= Q^*\left(\varepsilon_3 < \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - r.T - \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} - \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})}} \right) \qquad \text{où } \varepsilon_3 \sim N(0,1)\\
&= N(-d_1)
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$E_Q\left[S_T \mathrm{I}_{S_T < K}\right] = S_0.\exp(r.T)N(-d_1)$$

Où N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + r.T + \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\text{Reall}})}}$$

3.1.3 Tarification finale

En réinjectant les valeurs trouvées, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\text{Reall}}, \sigma_B) &= \exp(-rT).K.Q(S_T < K) - \exp(-rT).E_Q\left[S_T \mathrm{I}_{S_T < K}\right]\\
&= \exp(-rT).K.N(-d_2) - \exp(-rT).S_0.\exp(rT).N(-d_1)
\end{aligned}
$$

Au final, il vient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)=\exp(-rT).K.N(-d_2)-S_0.N(-d_1)$$

Avec
$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}$$

Remarques :

- Pour $\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}=0$ (i.e. dès le départ, la garantie porte sur le nouveau sous-jacent S_B), la formule précédente devient la formule classique de Black-Scholes d'un PUT de sous-jacent S_B.
- Pour $\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}=T$ (absence de réallocation), la formule précédente devient la formule classique de Black-Scholes d'un PUT de sous-jacent S_A.

Ces deux remarques cohérentes sont un premier moyen de valider cette formule.

Remarque :

Pour $\sigma_B=\sigma_A$, il vient $\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)=\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_A)=\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A)$, soit le prix d'une option de vente portant sur un sous-jacent de volatilité σ_A. Tout se passe comme s'il n'y avait pas eu de réallocation.

Comment s'assurer que cette formule théorique est correcte et qu'elle donne le bon tarif pour la garantie ?
D'une part, nous allons valider ce modèle en vérifiant que les valeurs obtenues par la formule concordent avec celles issues de simples simulations.
D'autre part, nous effectuerons un rapprochement au modèle RSLN2 qui peut être adopté à notre problème d'évaluation de la garantie complémentaire en présence de réallocation d'actifs au sein d'un contrat en unités de compte.

3.2 Adéquation du modèle aux simulations

Afin de valider le modèle précédemment établi, nous allons faire appel à la méthode de Monte-Carlo et vérifier que les valeurs obtenues avec la formule analytique coïncident avec les valeurs issues des simulations. La méthode de Monte-Carlo s'appuie sur l'argument de la Loi Forte des Grands Nombres : en effectuant un nombre suffisant de tirages aléatoires, la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique.

3.2.1 Présentation de la méthodologie

Rappelons l'énoncé de la Loi Forte des Grands Nombres :

Soit $X_1,\dots,X_n$ *des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, intégrables,*

Alors,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} E(X)$$

Le Théorème Central Limite précise :

Soit $X_1,\dots,X_n$ *des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance finie* m*,*
de variance finie σ^2 *avec* $\sigma > 0$,

Alors,
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\times m}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} N(0,1)$$

Ce théorème permet notamment de construire des intervalles de confiance qui permettent un encadrement précis des résultats obtenus par simulation. L'intervalle de confiance au niveau de confiance de $1-\alpha$ est donné par :

$$E(X)\in\left[m - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; m + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$
où Z est le quantile d'une loi normale centrée réduite.
m est la moyenne empirique.
σ est l'écart-type empirique.

Pour trouver le tarif de la garantie, nous commençons par simuler le cours du sous-jacent :

- de $t=0$ à $t=t_{\text{Reall}}$: $S_{t_{\text{Reall}}} = S_0 \exp\left(\left(r-\frac{\sigma_A^2}{2}\right).t_{\text{Reall}} + \sigma_A.\sqrt{t_{\text{Reall}}}.\varepsilon_1\right)$
- de $t=t_{\text{Reall}}$ à $t=T$: $S_T = S_{t_{\text{Reall}}} \exp\left(\left(r-\frac{\sigma_B^2}{2}\right).(T-t_{\text{Reall}}) + \sigma_B.\sqrt{T-t_{\text{Reall}}}.\varepsilon_2\right)$

  En particulier, $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$, $\varepsilon_2 \sim N(0,1)$ et $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Nous nous intéressons alors à la valeur liquidative du contrat. Cette dernière est définie par :

$VL_t = n_t.S_t$ où VL_t représente la valeur liquidative du contrat à l'instant t,
n_t représente le nombre de parts possédées par l'assuré à t,
S_t représente le cours du sous-jacent à l'instant t.

Nous verrons l'intérêt de cette écriture ultérieurement : dans notre cas, $\forall t \quad n_t = 1$.

Enfin, nous calculons le payoff actualisé : $[K - VL_T]^+ \exp(-r.T)$

Pour obtenir un résultat qui converge, nous effectuons cette démarche 1 000 000 fois et renvoyons la moyenne des payoffs, ce qui nous donne le tarif final.

Remarque :

Pour simuler une loi normale centrée réduite, nous utilisons l'algorithme de Box-Muller qui fait appel à des transformations de lois uniformes :

> Simuler une réalisation u_1 de $U_1 \sim Unif([0,1])$
> Simuler une réalisation u_2 de $U_2 \sim Unif([0,1])$, avec $U_2 \perp U_1$
> Renvoyer $\sqrt{-2.\ln(u_1)} \times \cos(2.\pi.u_2)$

Remarque :

Tout au long de ce mémoire, nous utiliserons le terme de « valeur liquidative du contrat » pour désigner l'épargne de l'assuré disponible sur le contrat en Unités de Compte. Par abus de langage, l'expression de « provisions mathématiques » est communément utilisée. Cependant, dans cette expression de PM, sont inclus outre l'épargne, d'autres provisions comme les provisions réglementaires. Ne nous intéressant qu'au produit de base et non pas aux provisions, nous retiendrons donc le terme de la valeur liquidative (VL).

3.2.2 Application numérique

Considérons le contrat avec les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité avant réallocation : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité après réallocation : $\sigma_B = 30\%$

Nous retiendrons un seuil de 95% pour l'intervalle de confiance.

Comparaison des valeurs théoriques et des valeurs issues de la simulation :

Date de réallocation	Put théorique	Put issu de la simulation		
		Valeur moyenne	Intervalle de confiance à 95%	
0	16.41 €	16.42 €	16.39 €	16.46 €
1	15.70 €	15.73 €	15.69 €	15.77 €
2	14.96 €	14.94 €	14.90 €	14.97 €
3	14.20 €	14.20 €	14.16 €	14.23 €
4	13.42 €	13.44 €	13.40 €	13.47 €
5	12.61 €	12.58 €	12.55 €	12.61 €
6	11.77 €	11.75 €	11.71 €	11.78 €
7	10.89 €	10.91 €	10.88 €	10.94 €
8	9.99 €	10.02 €	9.99 €	10.05 €
9	9.04 €	9.03 €	9.01 €	9.06 €

Il y a donc bien convergence des valeurs issues de la simulation vers la valeur théorique. Ceci valide le modèle présenté précédemment.

3.2.3 Adaptation de la couverture en delta mise en place

Dans le chapitre 1, nous avons vu que l'assureur pouvait faire le choix de mettre en place une couverture en delta pour se protéger des fluctuations des cours du sous-jacent. Cette couverture reposait sur la constitution d'un portefeuille de réplication qui assurait au vendeur de l'option de recevoir les mêmes flux que ceux qu'il devait à l'acheteur.

Dans le cas d'une réallocation d'actifs au sein du contrat en unités de compte, la garantie complémentaire étant impactée, l'assureur va devoir adapter sa couverture en delta pour continuer à être immuniser. Pour cela, la compagnie d'assurance devra déterminer la valeur du delta de l'option non plus avec la volatilité du support initial mais avec celle du nouveau support dès lors qu'il y a eu réallocation.
Plus précisément, nous simulons le cours du sous-jacent chaque année via la formule :

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma.\varepsilon_1\right)$$

Avec $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_A & \text{si } t \le t_{\text{Reall}} \\ \sigma_B & \text{si } t > t_{\text{Reall}} \end{cases}$$

S_0, la prime initiale investie.

Ensuite, nous déterminons la valeur du delta pour chaque année :

$$\Delta_t = -N(-d_1)$$

Avec $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right).(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $\sigma = \begin{cases} \sigma_A & \text{si } t \le t_{\text{Reall}} \\ \sigma_B & \text{si } t > t_{\text{Reall}} \end{cases}$

Ceci nous indique le nombre d'actions que l'assureur doit vendre pour être couvert contre les fluctuations du cours du sous-jacent.

Ce portefeuille de réplication délivrant les mêmes flux que l'option est un autre moyen de valider le tarif de la garantie établi précédemment comme le montre l'application numérique qui suit. Pour cela, nous reprenons les mêmes valeurs numériques données précédemment et réitérons le processus 100 000 fois.

<u>Comparaison des valeurs théoriques</u>
<u>et des valeurs issues de la couverture en delta</u> :

Date de Réallocation	Put théorique	Portefeuille répliquant
0	16.41 €	16.42 €
1	15.70 €	15.67 €
2	14.96 €	14.97 €
3	14.20 €	14.21 €
4	13.42 €	13.41 €
5	12.61 €	12.63 €
6	11.77 €	11.77 €
7	10.89 €	10.90 €
8	9.99 €	9.99 €
9	9.04 €	9.03 €

Les flux du portefeuille répliquant sont bien très proches du coût de la garantie.

3.3 Rapprochement au modèle RSLN2

Un autre type de démarche pour tarifer la garantie en présence d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC consiste à rapprocher notre problématique de réallocation au modèle RSLN2, *Regime Switching Log-Normal Model à 2 états*. Après avoir expliqué en quoi consistait ce modèle, nous verrons comment l'adapter à notre problème.

Le modèle RSLN 2 est un modèle à changement d'état, dont l'intérêt a été souligné par Mary R.Hardy [HAR01], [HAR03] et qui présente une popularité croissante chez les assureurs. L'idée de ce modèle est qu'il existe deux états du monde :

- un état « bas », à faible volatilité, appelé régime 1 et caractérisé par les paramètres μ_1 et σ_1,
- un état « haut », à volatilité élevée, appelé régime 2 et caractérisé par les paramètres μ_2 et σ_2.

Les périodes d'observation sont de durée égale à $\Delta t = \frac{T}{n}$ où T est la date de fin d'observation. D'une période à l'autre, l'état du monde peut changer ou être conservé, selon des probabilités données par une matrice de passage M_P de la forme :

$$M_P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{Où} \qquad p_{12} = 1 - p_{11} \quad \text{et} \quad p_{21} = 1 - p_{22}.$$

La probabilité p_{ij} représente la probabilité de passer à l'état j sachant que l'on était dans l'état i. En notant $\rho_t \in \{1,2\}$ l'état du monde en t, $p_{ij} = P(\rho_{t+1} = j | \rho_t = i)$. Ainsi, le fait d'être dans l'état bas ou l'état haut en $t+1$ ne dépend que de l'état précédent. Ceci traduit le caractère markovien de la variable.
La calibration de ce modèle se fait en utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance. Les paramètres sont alors au nombre de six : μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 ainsi que p_{12} et p_{21}.

Intéressons-nous à la distribution de probabilités pour la variable aléatoire R représentant le nombre total d'années passées dans le régime 1 : $R \in \{0,1,...,T\}$.

Notons R_t, le nombre total d'années passées dans le régime 1 dans l'intervalle de temps $[t,T]$.
Remarquons que $R = R_0$.

Introduisons $P(R_t = r | \rho_{t-1})$ pour $r \in \{0,1,...,T-t\}$
En particulier, $P(R_{T-1} = 0 | \rho_{T-2} = 1)$ est la probabilité de ne pas avoir passé la dernière année dans le régime 1 sachant que l'on y était l'année précédente. D'où $P(R_{T-1} = 0 | \rho_{T-2} = 1) = p_{12}$.

De même,

$$P(R_{T-1} = 1 | \rho_{T-2} = 1) = p_{11}$$
$$P(R_{T-1} = 0 | \rho_{T-2} = 2) = p_{22}$$
$$P(R_{T-1} = 1 | \rho_{T-2} = 2) = p_{21}$$

Ensuite, nous pouvons tenir un raisonnement rétrospectif à partir de ces valeurs :

$$P(R_{T-2} = r | \rho_{T-3} = 1) = p_{11}.P(R_{T-1} = r-1 | \rho_{T-2} = 1) + p_{12}.P(R_{T-1} = r | \rho_{T-2} = 2)$$

Avec $r \in \{0,1,2\}$

En effet, après l'étape de transition, à l'instant $T-1$, nous nous trouvons :

- soit dans le régime 1 (et $\rho_{T-2}=1$) et il reste alors $r-1$ jours à passer dans le régime 1,
- soit dans le régime 2 (et $\rho_{T-2}=2$) et il reste alors r jours à passer dans le régime 1.

La première possibilité a pour probabilité d'occurrence p_{11} et la seconde, p_{12}.

Pour $\rho_{T-3}=2$, nous pouvons tenir le même raisonnement et il vient :

$$P\left(R_{T-2}=r \middle| \rho_{T-3}=2\right)=p_{21}.P\left(R_{T-1}=r-1 \middle| \rho_{T-2}=1\right)+p_{22}.P\left(R_{T-1}=r \middle| \rho_{T-2}=2\right)$$

Avec $r\in\{0,1,2\}$

En généralisant ceci pour tout instant $t\in[0,T-2]$, nous obtenons :

$$\forall r\in\{0,1,\ldots,T-t\}$$

$$P\left(R_t=r \middle| \rho_{t-1}=1\right)=p_{11}.P\left(R_{t+1}=r-1 \middle| \rho_t=1\right)+p_{12}.P\left(R_{t+1}=r \middle| \rho_t=2\right)$$
$$P\left(R_t=r \middle| \rho_{t-1}=2\right)=p_{21}.P\left(R_{t+1}=r-1 \middle| \rho_t=1\right)+p_{22}.P\left(R_{t+1}=r \middle| \rho_t=2\right)$$

Au final, en utilisant les probabilités stationnaires $\pi_1=\dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}$ et $\pi_2=\dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}$, nous trouvons la distribution de la variable R :

$$\boxed{P(R=r)=P(R_0=r)=\pi_1.P\left(R_0=r \middle| \rho_{-1}=1\right)+\pi_2.P\left(R_0=r \middle| \rho_{-1}=2\right)}$$

Le modèle RSLN repose sur la probabilité historique. D'après Mary R.Hardy dans *A Regime Switching Model of Long Term Stock Return RSLN*, North American Actuarial Journal, 2001, il est cependant possible d'utiliser ce modèle pour évaluer des options, en exhibant une probabilité risque-neutre. Le marché avec changement d'états n'étant pas complet, il existe plusieurs probabilités risque-neutres équivalentes à la probabilité historique. Il faut alors retenir un critère pour en sélectionner une. Mary R.Hardy utilise alors la probabilité qui rend inchangées les probabilités de transition lors du passage de la probabilité historique à la probabilité risque-neutre.

En utilisant la distribution de probabilités de R, il est possible d'évaluer des options européennes. Conditionnellement à R, le prix de l'actif $S_T|R$ suit une distribution log-normale dont les paramètres dépendent de R.

Ainsi, le prix d'une option de vente est donné par :

$$\boxed{\begin{aligned}PUT(S_0,K,T,r)&=E_R\left[\exp(-rT)E_Q\left[\max(K-S_T,0)\middle|R\right]\right]\\&=E_R\left[BSP(R)\right]\\&=\sum_{r=0}^{T}P(R=r).BSP(R=r)\end{aligned}}$$

Où $$BSP(R)=K.\exp(-r.T).N(-d_2(R))-S_0.N(-d_1(R))$$

Avec $$d_1(R)=\frac{\ln\left(\dfrac{S_0}{K}\right)+r.T+\dfrac{1}{2}.\sigma_1^2.R+\dfrac{1}{2}.\sigma_2^2.(T-R)}{\sqrt{\sigma_1^2.R+\sigma_2^2.(T-R)}}$$ et $$d_2(R)=d_1(R)-\sqrt{\sigma_1^2.R+\sigma_2^2.(T-R)}$$

$P(R=r)$ a été présenté précédemment.

Nous pouvons adopter ce modèle à notre problème. En effet, une réallocation d'actifs peut être considérée comme le passage d'un état du monde à un autre : une réallocation vers un actif plus risqué se traduit par le passage du régime 1 vers le régime 2 et une réallocation moins risquée, du régime 2 vers le régime 1. La variable R représente l'instant de réallocation et la distribution de probabilités de R peut être vue comme une loi d'arbitrage, dont nous n'avons pour l'instant pas traité.
Si nous retenons un instant déterministe de réallocation que nous modélisons en choisissant $P(R = t_{\text{Reall}}) = 1$ et $P(R = r) = 0$ pour $r \neq t_{\text{Reall}}$, nous retrouvons bien la formule établie au paragraphe 3.1.3 de ce chapitre.

La tarification retenue pour la garantie en présence d'une réallocation d'actifs dans le contrat en unités de compte apparaît comme pertinente à la vue de tous ces résultats concordants. Au-delà d'une modification du prix de la garantie complémentaire octroyée, une réallocation d'actifs implique donc une modification des engagements de l'assureur vis-à-vis de l'assuré. Quels sont ces nouveaux engagements et comment les modéliser ?

4. Modification du compte de résultat de l'assureur

La vente de la garantie initiale impacte le compte de résultat à l'instant initial, de la compagnie d'assurance de telle sorte :

Compte de résultat

Π	$P(S,K,T,r,\sigma_A)$

Le résultat dégagé d'une telle opération est nul car le montant unique de frais Π est déterminé telle que $\Pi = P(S, K, T, r, \sigma_A)$.

Une réallocation d'actifs impacte le compte de résultat de l'assureur puisque ce dernier ne doit dès lors, plus $P(S, K, T, r, \sigma_A)$ mais $P(S, K, T, r, \sigma_A, t_{\text{Reall}}, \sigma_B)$. Le compte de résultat à l'instant initial s'écrit alors :

Compte de résultat

Π	$P(S,K,T,r,\sigma_A,t_{\text{Reall}},\sigma_B)$

Une réallocation fait naître chez l'assureur un résultat donné par :

$$R_{\text{Reall}} = \Pi - P(S, K, T, r, \sigma_A, t_{\text{Reall}}, \sigma_B).$$

Ce résultat est le résultat de réallocation : il reste alors à savoir s'il s'agit d'une perte ou d'un bénéfice ! Nombre de paramètres impacte ce résultat et nous pouvons nous demander quels sont ceux sur lesquels l'assureur peut influer. Notamment en cas de perte, sur quels paramètres l'assureur pourra-t-il jouer pour minimiser le coût de la réallocation ? C'est ce que nous étudierons dans le chapitre suivant.

<u>Chapitre 3</u> : ETUDE DES SENSIBILITES

Une réallocation d'actifs engendrant la naissance d'un résultat positif ou négatif chez la compagnie d'assurance, nous souhaitons mettre à jour les paramètres sur lesquels l'assureur peut jouer pour maximiser son gain ou tout du moins, minimiser ses pertes.

1. Paramètres modifiables

Une première idée pourrait être de modifier le montant minimal garanti K. En effet, la garantie ayant une relation positive avec ce montant (i.e. plus le montant minimal garanti est élevé, plus la garantie est chère), l'assureur pourrait diminuer le montant garanti en cas de réallocation défavorable pour lui. Cependant, cet acte n'est d'un point de vue commercial, pas du tout favorable ! Ce mémoire ayant pour objectif de s'inscrire au plus près de la réalité du monde des affaires, nous ne donnerons donc pas suite à cette piste.
De même, nous pourrions jouer sur la maturité de la garantie en la modifiant mais, là encore, cela va à l'encontre des pratiques commerciales.

Intéressons-nous désormais aux paramètres sur lesquels la compagnie d'assurance peut réellement influer, à savoir la volatilité du nouveau support et la date de réallocation. Pour cela, nous allons calculer la sensibilité à ces paramètres, du prix de la garantie en présence de réallocation au sein du contrat en UC auquel elle est liée.

2. Sensibilité à la nouvelle volatilité

Repartons de l'expression précédemment établie :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_{\mathrm{A}},\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_{\mathrm{B}}) = \exp(-rT).K.N(-d_2) - S_0.N(-d_1)$$

En dérivant par rapport à la nouvelle volatilité σ_B, il vient :

$$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_{\mathrm{A}},\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_{\mathrm{B}})}{\partial \sigma_B} = -\exp(-rT).K.\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_B} N'(-d_2) + S_0.\frac{\partial d_1}{\partial \sigma_B}.N'(-d_1)$$

Avec en particulier, $$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}$$

D'où $$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_B} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_B} - \frac{\sigma_B.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}}$$

Puis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_{\mathrm{A}},\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_{\mathrm{B}})}{\partial \sigma_B} &= -\exp(-rT).K.\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_B} N'(-d_2) + S_0.\left(\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_B} + \frac{\sigma_B.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}}\right).N'(-d_1) \\ &= \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_B}\left(-\exp(-rT).K.N'(-d_2) + S_0.N'(-d_1)\right) + S_0.N'(-d_1).\frac{\sigma_B.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})}}\end{aligned}$$

Or, comme démontré en *Annexe B*, $-\exp(-rT).K.N'(-d_2) + S_0.N'(-d_1) = 0$

Conclusion

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_{\mathrm{A}},\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_{\mathrm{B}})}{\partial \sigma_B} = S_0 \frac{\sigma_B (T - t_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2 . t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2 .(T - t_{\mathrm{Reall}})}} . N'(-d_1)}$$

En particulier, $$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)}{\partial \sigma_B} > 0 \qquad \forall \quad t_{\mathrm{Reall}}$$

Ainsi, en maintenant tous les autres paramètres constants, le prix de cette garantie est croissant avec la nouvelle volatilité.
Ceci est en accord avec l'intuition selon laquelle plus la réallocation se fait vers un actif présentant une forte volatilité, plus le risque s'accroît et donc plus la garantie est chère.

Puisque le prix de la garantie ayant subi une réallocation est croissant avec la volatilité du nouveau support et que nous avons remarqué dans le paragraphe 3.1.3, l'égalité $\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_A) = \Pi$, nous en déduisons que :

$$\forall \ \sigma_B \leq \sigma_A \qquad \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B) \leq \Pi \qquad \text{et} \qquad R_{\mathrm{Reall}} \geq 0$$

$$\forall \ \sigma_B > \sigma_A \qquad \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B) > \Pi \qquad \text{et} \qquad R_{\mathrm{Reall}} < 0$$

Au vu de ces résultats, il apparaît qu'une réallocation vers un actif moins risqué de la part de l'assuré s'avère être « une bonne affaire » pour l'assureur puisque dans ce cas, la garantie en présence d'une réallocation d'actifs a un tarif moins élevé que la garantie vendue initialement.
A l'inverse, en cas de réallocation vers un actif plus risqué, la garantie présente alors un tarif supérieur aux frais payés par l'assuré au titre de la garantie initiale. Il faudra donc trouver un autre financement pour combler cet écart.

Le second paramètre sur lequel l'assureur peut jouer est l'instant de réallocation. Intéressons nous désormais à la valeur temps de l'option vendue.

3. Sensibilité à la date de réallocation

Soit $\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)=\exp(-rT).K.N(-d_2)-S_0.N(-d_1)$

La dérivation par rapport à la date de réallocation $\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}$ donne :

$$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}=-\exp(-rT).K.\frac{\partial d_2}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}N'(-d_2)+S_0.\frac{\partial d_1}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}.N'(-d_1)$$

De plus comme $d_2=d_1-\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial d_2}{\partial t_{\mathrm{Reall}}}=\frac{\partial d_1}{\partial t_{\mathrm{Reall}}}-\frac{\sigma_A^2-\sigma_B^2}{2\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}}$$

En réinjectant, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}&=-\exp(-rT).K.\frac{\partial d_2}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}N'(-d_2)+S_0.\left(\frac{\partial d_2}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}+\frac{\sigma_A^2-\sigma_B^2}{2\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}}\right).N'(-d_1)\\&=\frac{\partial d_2}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}\left(-\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.N'(-d_1)\right)+.S_0\frac{\sigma_A^2-\sigma_B^2}{2\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}}.N'(-d_1)\end{aligned}$$

Puisque $-\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.N'(-d_1)=0$ (cf. *Annexe B*), nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}=S_0\frac{\sigma_A^2-\sigma_B^2}{2\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-t_{\mathrm{Reall}})}}.N'(-d_1)}$$

Et

$$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B)}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}\begin{cases}>0 & \text{si } \sigma_B<\sigma_A\\ <0 & \text{si } \sigma_B>\sigma_A\end{cases}$$

Le prix de la garantie en présence d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en unités de compte est donc une fonction croissante de la date de réallocation si l'allocation se fait vers un actif moins risqué et une fonction décroissante de la date de réallocation si l'allocation se fait vers un actif plus risqué. Là encore, ce résultat peut être pressenti à priori.

La sensibilité à la nouvelle volatilité a montré que la réallocation est profitable à l'assureur dans tous les cas, dès lors qu'elle a lieu vers un actif moins risqué. La sensibilité à la date de réallocation permet juste d'ajouter que cette réallocation bénéficie d'autant plus à l'assureur qu'elle est réalisée dans les plus brefs délais.

A l'inverse, une réallocation vers un actif plus risqué engendre un coût pour l'assureur, mais ce coût diminue au fil du temps. Une première idée serait donc d'essayer de retarder cette réallocation plus risquée. Le contrat pourrait par exemple comporter une clause imposant un certain délai pendant lequel l'assuré ne pourrait prétendre à une réallocation vers un actif plus volatile mais autorisant une réallocation vers un support moins risqué à tout moment.

4. Application numérique

Considérons le contrat avec les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$

4.1 Cas d'une réallocation plus risquée

Nous nous placerons sous les hypothèses suivantes :

- Volatilité avant réallocation : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité après réallocation : $\sigma_B = 30\%$

Le montant de frais payés au titre de la garantie par l'assuré est :

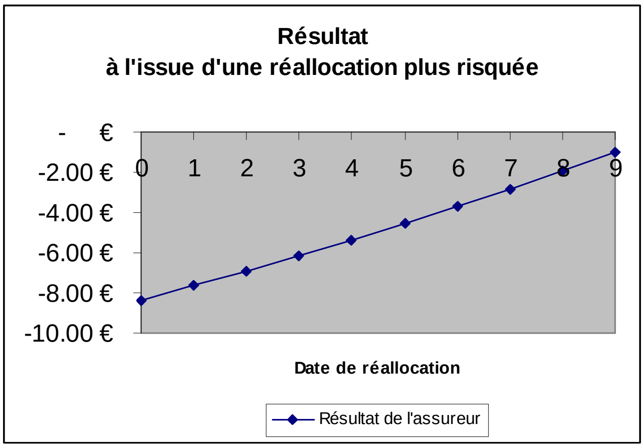
$$\Pi = PUT(S_0, K, T, r, \sigma_A) = 8.06€.$$

Rappelons la formule d'évaluation du résultat pour l'assureur, suite à une réallocation :

$$R_{\text{Reall}} = \Pi - \mathrm{P}(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_{\mathrm{A}}, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_{\mathrm{B}})$$

Résultat de l'assureur suite à une réallocation plus risquée :

Date de réallocation	Tarif Garantie Réallouée	Résultat
0	16.41 €	- 8.35 €
1	15.70 €	- 7.64 €
2	14.96 €	- 6.90 €
3	14.20 €	- 6.14 €
4	13.42 €	- 5.36 €
5	12.61 €	- 4.55 €
6	11.77 €	- 3.71 €
7	10.89 €	- 2.83 €
8	9.99 €	- 1.93 €
9	9.04 €	- 0.98 €



Une réallocation plus risquée engendre bien une perte pour la compagnie d'assurance. L'intérêt d'une réallocation tardive apparaît clairement sur le graphique puisque la perte diminue au cours du temps.

4.2 Cas d'une réallocation moins risquée

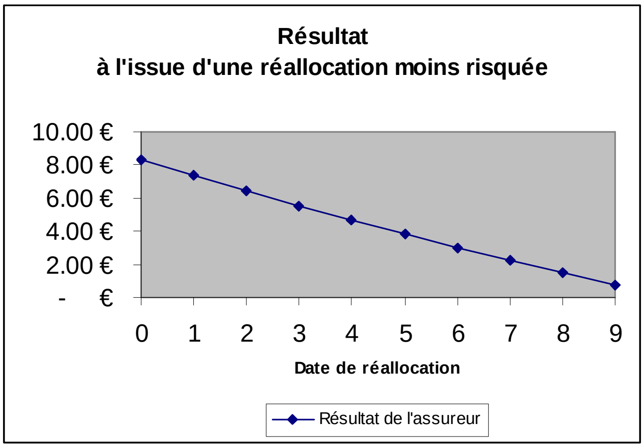
Nous nous placerons sous les hypothèses suivantes :

- Volatilité avant réallocation : $\sigma_A = 30\%$
- Volatilité après réallocation : $\sigma_B = 20\%$

La prime unique payée par l'assuré est : $\Pi = PUT(S_0, K, T, r, \sigma_A) = 16.41€$.

<u>Résultat de l'assureur suite à une réallocation moins risquée</u> :

Date de réallocation	Tarif Garantie Réallouée	Résultat
0	8.06 €	8.35 €
1	9.04 €	7.37 €
2	9.99 €	6.42 €
3	10.89 €	5.52 €
4	11.77 €	4.65 €
5	12.61 €	3.81 €
6	13.42 €	2.99 €
7	14.20 €	2.21 €
8	14.96 €	1.45 €
9	15.70 €	0.71 €



L'intérêt pour l'assureur, d'une réallocation moins risquée apparaît nettement sur ce graphique puisque dès lors, la compagnie d'assurance réalise un bénéfice, bénéfice d'autant plus important que la réallocation est réalisée tôt dans le contrat.

Nous venons d'appréhender quels paramètres influent sur le coût de la garantie en présence d'une réallocation. Une première solution est apparue, consistant à repousser dans le temps, les réallocations plus risquées. Cette idée permet de diminuer les pertes de l'assureur mais pas de les annuler complètement. Dans ce cas, pourquoi ne pas faire supporter à l'assuré une partie du coût de la réallocation en lui faisant payer des frais lorsqu'il effectue cette opération?

Chapitre 4 : PRELEVEMENT DE FRAIS D'ARBITRAGE

Dans ce paragraphe, nous étudierons une nouvelle solution qui consiste à autoriser la réallocation moyennant le paiement de certains frais. Ainsi, l'assuré qui souhaite modifier son allocation d'actifs se verra demander le paiement d'un certain pourcentage de la valeur liquidative de son contrat à la date de réallocation, que celle-ci se fasse vers un actif plus ou moins risqué.

1. Pricing de la garantie avec prélèvement de frais

1.1 Tarification théorique

En cas de réallocation à l'instant $t = t_{\text{Reall}}$, il y a donc versement du dividende égale à $fr\_reall.S_{t_{\text{Reall}}}$.

La valeur actualisée à l'instant initial de ce dividende est $D = fr\_reall.S_{t_{\text{Reall}}}.\exp(-r.t_{\text{Reall}})$.

L'espérance de ce dividende actualisée sous la probabilité risque-neutre donne :

$$E_Q(D) = \exp(-r.t_{\text{Reall}}).fr\_reall.E_Q\left(S_{t_{\text{Reall}}}\right).$$

Or, le cours du sous-jacent ayant une distribution log-normale, nous pouvons écrire :

$$S_{t_{\text{Reall}}} = S_0.\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}} + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(S_{t_{\text{Reall}}}\right) = \ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}} + \sigma_A.\hat{W}_{t_{\text{Reall}}}$$

Donc $$\ln\left(S_{t_{\text{Reall}}}\right) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}}, \sigma_A^2.t_{\text{Reall}}\right)$$

Et $$S_{t_{\text{Reall}}} \sim \log-\text{normal}\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}}, \sigma_A^2.t_{\text{Reall}}\right)$$

D'où $$E_Q\left(S_{t_{\text{Reall}}}\right) = \exp\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).t_{\text{Reall}} + \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\text{Reall}}\right)$$

$$= S_0 \exp(r.t_{\text{Reall}})$$

Au final, . $$E_Q(D) = \exp(-r.t_{\text{Reall}}).fr\_reall.S_0 \exp(r.t_{\text{Reall}})$$

$$= fr\_reall.S_0$$

Soulignons que l'espérance du dividende est constante quelque soit la date de réallocation puisqu'elle ne dépend que de la prime initiale investie et du taux de frais prélevé suite à une réallocation.

De façon théorique, nous pouvons modéliser ce prélèvement de frais d'arbitrage comme un versement de dividende discret.

Pour obtenir la formule de tarification de la garantie pour laquelle il y a prélèvement de frais lorsqu'il y a réallocation, il suffit alors de remplacer S_0 par $S_0 - E_Q(D) = (1 - fr\_reall).S_0$ dans la formule trouvée précédemment.

Notons $\mathrm{P}\left(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right)$ le prix à l'instant initial de la garantie associée à un contrat en unités de compte pour lequel l'épargne est investie sur le support de volatilité σ_A puis subie une réallocation vers un support de volatilité σ_B à l'instant $\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}$, réallocation pour laquelle l'assuré paye comme frais d'arbitrage fr_reall. Le montant minimum garanti est K, la maturité T et le taux sans risque supposé constant, r.

Il vient :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) = \exp(-rT).K.N(-d_2) - S_0.(1 - fr\_reall).N(-d_1)$$

$$\text{Avec} \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0.(1 - fr\_reall)}{K}\right) + r.T + \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Reall}})}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Reall}})}$$

<u>Remarque</u> :
Cette formule n'est valable que lorsqu'il y a réallocation. Elle ne se généralise pas en l'absence de celle-ci.

1.2 Adéquation du modèle aux simulations

Comme précédemment, la méthode de Monte Carlo va nous permettre de valider le modèle établi.

Le cours du sous-jacent est simulé entre $t = 0$ et $t = t_{\mathrm{Reall}}$ puis entre $t = t_{\mathrm{Reall}}$ et $t = T$ avec pour volatilité σ_A puis σ_B.
Considérons alors la valeur liquidative du contrat donnée par $VL_t = n_t.S_t$.
Cette écriture permet de modéliser le prélèvement de frais comme une diminution du nombre de parts n_t détenues par l'assuré sans impacter le cours du sous-jacent S_t. En effet, le prélèvement de frais dû au souhait de l'assuré de réallouer son épargne n'a pas à modifier le cours du sous-jacent S_t d'où l'intérêt de différencier le cours du support et la valeur liquidative du contrat possédé par le client.
Le nombre de parts possédées par l'assuré n'est modifié qu'en cas de réallocation.
Supposons qu'à l'instant initial, $n_0 = 1$.
Juste avant la réallocation, la valeur liquidative du contrat est donnée par :

$$VL_{t^-_{\mathrm{Reall}}} = n_{t^-_{\mathrm{Reall}}}.S_{t_{\mathrm{Reall}}} = 1.S_{t_{\mathrm{Reall}}} = S_{t_{\mathrm{Reall}}}$$

Au moment de la réallocation, l'assuré se verra demander de payer un certain pourcentage de la valeur liquidative de son contrat, noté fr_reall.
Juste après la réallocation, il vient donc :

$$\begin{aligned} VL_{t^+_{\mathrm{Reall}}} &= S_{t_{\mathrm{Reall}}} - fr\_reall.S_{t_{\mathrm{Reall}}} \\ &= (1 - fr\_reall).S_{t_{\mathrm{Reall}}} \\ &= n_{t^+_{\mathrm{Reall}}}.S_{t_{\mathrm{Reall}}} \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons modéliser la valeur liquidative du contrat à l'instant quelconque t par :

$$VL_t = n_t . S_t \qquad \text{avec} \qquad n_t = \begin{cases} 1 & \forall\, t < t_{\text{Reall}} \\ 1 - fr\_reall & \forall\, t \geq t_{\text{Reall}} \end{cases}$$

En particulier, à la maturité T , en cas de réallocation, le contrat vaut :

$$VL_T = n_T . S_T = (1 - fr\_reall).S_T$$

Enfin, nous effectuons la moyenne des 1 000 000 de payoffs actualisés $[K - VL_T]^+ \exp(-r.T)$ obtenus avec les scenarii générés.

Nous reprenons les mêmes données utilisées précédemment, auxquelles se rajoutent les frais prélevés lors d'une réallocation :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité avant réallocation : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité après réallocation : $\sigma_B = 30\%$
- Frais d'arbitrage : $fr\_reall = 1\%$ de la valeur liquidative du contrat.

<u>Comparaison Valeur théorique – Valeur simulée</u> :

Date de réallocation	Put théorique	Put issu de la simulation		
		Valeur moyenne	Intervalle de confiance	
0	16.60 €	16.63 €	16.59 €	16.67 €
1	15.88 €	15.86 €	15.82 €	15.89 €
2	15.15 €	15.15 €	15.12 €	15.19 €
3	14.39 €	14.39 €	14.35 €	14.43 €
4	13.60 €	13.56 €	13.52 €	13.59 €
5	12.79 €	12.79 €	12.76 €	12.82 €
6	11.95 €	11.97 €	11.94 €	12.01 €
7	11.08 €	11.07 €	11.04 €	11.10 €
8	10.17 €	10.14 €	10.11 €	10.17 €
9	9.22 €	9.23 €	9.20 €	9.26 €

Il y a bien convergence des valeurs issues de la simulation vers la valeur théorique.

1.3 Adaptation de la couverture en delta

Pour répliquer l'option de vente en présence d'une réallocation payante, il suffit de procéder comme il a été décrit précédemment : le delta est calculé avec la volatilité initiale avant réallocation, puis avec la volatilité finale après celui-ci. Cependant, la valeur initiale du sous-jacent utilisée au départ doit être constituée de la prime initiale investie par l'assuré diminuée des frais d'arbitrage. Cela nécessite donc de savoir que l'assuré va effectuer une réallocation : comme expliqué précédemment, la formule ne se généralise pas au cas d'absence de réallocation.

Notre objectif est de faire diminuer le coût de la réallocation en faisant supporter à l'assuré une partie de celui-ci via le paiement de frais d'arbitrage. Cependant, ces frais sont prélevés sur l'épargne de l'assuré et vont donc la faire diminuer, ce qui est néfaste pour l'assureur qui garantit un montant minimum pour celle-ci. Dans quelle mesure le prélèvement de ces frais d'arbitrage augmente le prix de la garantie ? Cette augmentation est-elle nuisible à l'assureur ou peut-il l'accepter ?

2. Présence de frais d'arbitrage

2.1 Sensibilité aux frais d'arbitrage

Dans ce paragraphe, nous étudierons l'effet d'une application de frais sur le prix de la garantie. Pour cela, nous allons déterminer la sensibilité de la garantie par rapport à ces frais.

Repartons de :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall) = \exp(-rT).K.N(-d_2) - S_0.(1-fr\_reall).N(-d_1)$$

En dérivant par rapport aux frais, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall)}{\partial fr\_reall} = -\exp(-rT).K.\frac{\partial d_2}{\partial fr\_reall}N'(-d_2)$$
$$+S_0.(1-fr\_reall).\frac{\partial d_1}{\partial fr\_reall}N'(-d_1)+S_0N(-d_1)$$

Puisque $d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Re}all} + \sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Re}all})}$, nous obtenons $\frac{\partial d_2}{\partial fr\_reall} = \frac{\partial d_1}{\partial fr\_reall}$.

Puis,

$$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall)}{\partial fr\_reall} = \frac{\partial d_2}{\partial fr\_reall}\left(-\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.(1-fr\_reall)N'(-d_1)\right)+S_0N(-d_1)$$

Or, en adaptant la démonstration donnée en *Annexe B*, nous pouvons montrer que

$$\left(-\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.(1-fr\_reall)N'(-d_1)\right)=0$$

Donc
$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall)}{\partial fr\_reall} = S_0N(-d_1)}$$

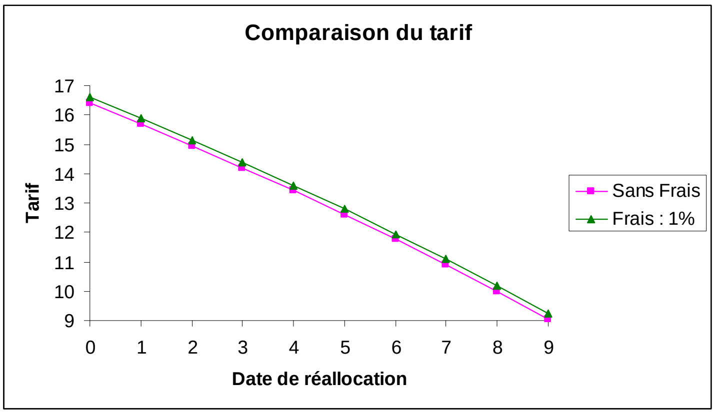
En particulier, $\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall)}{\partial fr\_reall} > 0$.

Ainsi, le tarif de la garantie augmente avec les frais. En effet, le prélèvement impacte le cours du sous-jacent en le faisant diminuer et la garantie ayant une relation négative avec le sous-jacent, nous avons bien qu'une baisse de la valeur du sous-jacent implique une hausse du prix de la garantie.

Ce phénomène se retrouve bien avec les données numériques trouvées dans les exemples précédents, dont le récapitulatif est donné sur la page suivante :

Comparaison du tarif théorique de la garantie en l'absence et en présence de frais :

Date de réallocation	Garantie sans frais	Garantie avec frais de 1%
0	16.41 €	16.60 €
1	15.70 €	15.88 €
2	14.96 €	15.15 €
3	14.20 €	14.39 €
4	13.42 €	13.60 €
5	12.61 €	12.79 €
6	11.77 €	11.95 €
7	10.89 €	11.08 €
8	9.99 €	10.17 €
9	9.04 €	9.22 €



Nous constatons bien une hausse du tarif lors de la présence de frais.

L'application de frais d'arbitrage accroît le coût de la garantie en présence de réallocation, ce qui est à priori néfaste pour l'assureur mais n'oublions pas que le prélèvement de frais présente un deuxième effet : l'apport de l'assuré ne se réduit plus à la prime initialement versée mais est majoré par ces frais qui vont être capitalisés au fil du temps. Par la suite, nous allons déterminer quel effet prédomine.

2.2 Résultat à l'issue d'une réallocation payante

Une réallocation impacte le compte de résultat de l'assureur, qui à l'instant initial, se réécrit avec les conditions actuelles de tarification :

Compte de résultat	
$\Pi + E(D)$	$P(S,K,T,r,\sigma_A,t_{Reall},\sigma_B,fr\_reall)$

Notons $R_{\text{Reall avec frais}}$ le résultat à l'instant initial qu'engendre pour l'assureur une réallocation à l'instant t_{Reall}, avec prélèvement de frais :

$$\begin{aligned} R_{\text{Reall avec frais}} &= \left(\Pi + E_Q(D)\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B, fr\_reall\right) \\ &= \left(\Pi + fr\_reall.S_0\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B, fr\_reall\right) \end{aligned}$$

Etudions désormais l'impact des frais sur ce résultat :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\text{Reall avec frais}}}{\partial fr\_reall} &= S_0 - \frac{\partial \mathrm{P}\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B, fr\_reall\right)}{\partial fr\_reall} \\ &= S_0\left(1 - N\left(-d_1\right)\right) \\ &> 0 \qquad\qquad \text{puisque } N\left(-d_1\right) \in [0,1] \end{aligned}$$

Ainsi, l'effet de l'augmentation de l'apport de l'assuré prédomine sur l'effet de la hausse du tarif de la garantie.

De plus, le prélèvement de frais élevés lors d'une réallocation augmente d'autant plus le résultat pour l'assureur. N'oublions pas néanmoins que l'assuré est un agent rationnel et donc que des frais trop élevés pourraient le décourager à réallouer son épargne. Il nous faut donc trouver un compromis raisonnable quant au montant de ces frais.

Pour cela, nous pouvons jouer sur la valeur temps de la garantie puisque comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la garantie ayant subi une réallocation vers un actif plus risqué présente un tarif d'autant plus faible que la réallocation est tardive alors que la date de réallocation n'impacte pas la valeur de l'apport de l'assuré.

Rappelons pour finir, que dans le cas d'une réallocation moins risquée en l'absence de prélèvement de frais d'arbitrage, l'assureur effectuait un bénéfice. Ce résultat ajouté au fait que le résultat de l'assureur est une fonction croissante des frais d'arbitrage, nous permet de conclure que quelque soit les frais prélevés lors d'une réallocation moins risquée, cela entraînera un accroissement de bénéfice chez l'assureur. Cet acte n'étant pas le plus intéressant, nous nous restreindrons dans la suite de ce chapitre aux cas des réallocations plus risquées.

2.3 Application numérique

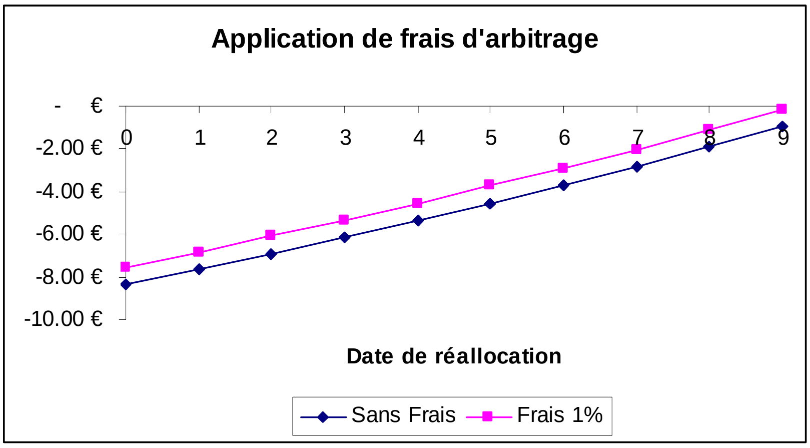
Dans un premier temps, comparons les résultats à l'issue d'une réallocation plus risquée en présence et en l'absence de frais.

Pour cela, nous considérerons le contrat avec les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité avant réallocation : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité après réallocation : $\sigma_B = 30\%$

<u>Impact d'un prélèvement de frais d'arbitrage</u> :

Date de réallocation	Résultat sans frais	Résultat avec frais de 1%
0	- 8.35 €	- 7.54 €
1	- 7.64 €	- 6.83 €
2	- 6.90 €	- 6.09 €
3	- 6.14 €	- 5.33 €
4	- 5.36 €	- 4.54 €
5	- 4.55 €	- 3.73 €
6	- 3.71 €	- 2.89 €
7	- 2.83 €	- 2.02 €
8	- 1.93 €	- 1.11 €
9	- 0.98 €	- 0.16 €



Nous observons une translation du résultat vers le haut, en présence de frais d'arbitrage.

Déterminons désormais une condition suffisante sur le montant des frais à prélever pour que l'assuré puisse réallouer son épargne à tout moment, à partir d'une date limite sans que cela n'engendre de pertes pour la compagnie d'assurance.

Autrement dit, nous cherchons fr_reall tel que $\forall t_{\text{Reall}} \geq t_{Limite}$ $\quad R_{\text{Reall avec frais}} \geq 0$.

Pour cela, il suffit qu'en $t_{\text{Reall}} = t_{Limite}$, $R_{\text{Reall avec frais}} = 0$ puisque le résultat est croissant avec la date de réallocation.

$$R_{\text{Reallavecfrais}} = 0$$

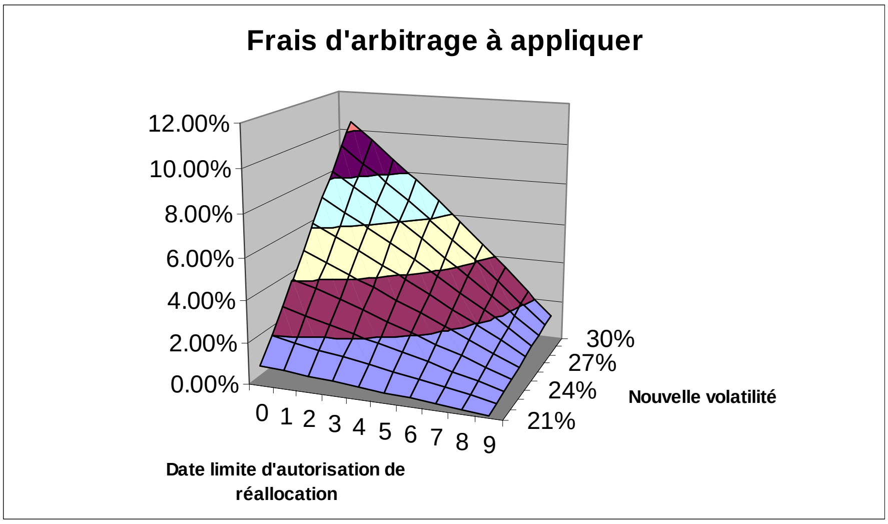
$$\Leftrightarrow (\pi + fr\_reall.S_0) - P(S, K, T, r, \sigma_A, t_{Limite}, \sigma_B, fr\_reall) = 0$$

$$\Leftrightarrow fr\_reall.S_0 + K.\exp(-rT).N(-d_2) - S_0.N(-d_1) - K.\exp(-rT).N\left(-d_2^{Frais}\right) + S_0.(1 - fr\_reall).N\left(-d_1^{Frais}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow fr\_reall.S_0 + K.\exp(-rT)\left[N(-d_2) - N\left(-d_2^{Frais}\right)\right] - S_0\left[N(d_1) - (1 - fr\_reall).N\left(-d_1^{Frais}\right)\right] = 0$$

Nous reprenons les hypothèses du contrat précédemment définies mais nous effectuerons des sensibilités à la volatilité après réallocation : les valeurs de σ_B seront donc variables (de 21% à 30%).

Avec le solveur d'Excel, nous pouvons résoudre l'équation précédente et obtenir le montant minimal des frais à demander à l'assuré pour lui accorder une réallocation.



A la vue de ce graphique, deux effets apparaissent clairement :

- l'effet temps : les frais demandés sont d'autant plus faibles que la réallocation est tardive,
- l'impact de la volatilité du nouveau support : les frais sont plus faibles pour un support moins volatile, à date de réallocation constante.

Les frais à demander en moyenne à l'assuré pour lui accorder une réallocation apparaissent très élevés. Ils atteignent par exemple, 10.45% si la compagnie d'assurance accorde à l'assuré une réallocation vers un support de volatilité 30%, dès l'instant initial. Les frais habituellement prélevés sont de l'ordre de 1%.

Tenons dorénavant le raisonnement inverse : si les frais appliqués représentent 1% de la valeur liquidative du contrat, quelle volatilité maximale l'assureur peut-il offrir à l'assuré ? Là encore, les résultats vont dépendre de la date de réallocation.

Date à partir de laquelle la réallocation est applicable	0	1	2	3	4
Volatilité maximale autorisée	21.02%	21.13%	21.26%	21.44%	21.67%

Date à partir de laquelle la réallocation est applicable	5	6	7	8	9
Volatilité maximale autorisée	21.99%	22.46%	23.21%	24.66%	28.58%

Chapitre 5 : CONCLUSION

1. Résultats obtenus

Dans le cas d'une garantie plancher complémentaire à un contrat en UC, assurant le versement au bénéficiaire d'un montant minimum à l'échéance du contrat et pour laquelle les frais sont payés de manière unique en début de contrat, nous retiendrons donc qu'une réallocation d'actifs vers un support plus risqué entraînera une perte pour l'assureur alors qu'une réallocation moins risquée fera naître un bénéfice pour la compagnie d'assurance, ceci quelque soit la date de réallocation.

Cependant, l'effet temps présente également un intérêt. L'assureur doit ainsi privilégier des réallocations plus risqués, tardives. A l'inverse, si l'assuré choisit un nouveau support moins risqué, il est préférable que cette réallocation ait lieu en début de contrat car le bénéfice de l'assureur est alors d'autant plus important.

De cet effet du temps, peut apparaître une première solution au problème de surcoût de l'option de vente qu'engendre une réallocation d'actifs : une clause de délai pourrait être mise en place afin de n'autoriser une réallocation plus risquée qu'en fin de contrat.

De plus, le prélèvement de frais d'arbitrage, exprimé en pourcentage de la valeur liquidative du contrat à l'instant de la modification de l'allocation d'actifs, permet également d'augmenter le résultat de l'assureur, que ce soit en cas de réallocation plus risquée ou en cas de réallocation moins risquée.

2. Limites du modèle

Le modèle établi est une extension du modèle de Black-Scholes : il présente donc les mêmes « défauts » que ce dernier. En particulier, la formule de Black-Scholes suppose que la distribution des rendements du support est gaussienne, ce qui n'est pas vérifié en pratique pour des rendements mesurés à haute fréquence (rendements journaliers ou intra-journaliers).

De même, elle suppose que la volatilité du rendement du support est constante, or cela n'est absolument pas le cas dans la réalité. En effet, il est possible, connaissant le prix de marché de l'option de déduire une valeur unique pour la volatilité. Cette valeur est appelée volatilité implicite et peut s'écarter notablement de la volatilité historique. En considérant des options de même maturité et de prix d'exercice différents, nous obtenons une courbe convexe, appelée smile de volatilité. Notons que la volatilité est plus faible pour les options à la monnaie. Notre problématique s'intéresse seulement à une modification de la volatilité historique et nous n'abordons pas les problèmes de volatilité implicite.

En outre, le taux d'intérêt a été supposé constant. Soulignons que cette hypothèse peut être réalisée en pratique si l'assureur met en place une couverture en rhô, le rhô d'une option représentant sa sensibilité au taux d'intérêt.

Jusqu'à présent, l'étude que nous avons menée était basée sur une garantie dont les frais étaient payés de manière unique en début de contrat. Il existe cependant d'autres possibilités de règlement de ces frais : ces derniers peuvent en effet être prélevés de façon périodique. Il serait désormais intéressant d'étudier l'impact d'une réallocation d'actifs sur ce nouveau type de garantie.

Partie II :

CAS D'UN CONTRAT OU LE PAIEMENT DE LA GARANTIE EST PERIODIQUE

Chapitre 6 : INTRODUCTION AU CONTRAT OU LE PAIEMENT DE LA GARANTIE EST PERIODIQUE

1. Présentation de la garantie

De même que dans la partie précédente, l'assuré commence par investir une prime au sein d'un contrat en unités de compte. La garantie plancher complémentaire liée à ces UC assure au bénéficiaire le versement d'un montant minimum à l'échéance du contrat. Mais désormais, l'assuré ne paiera plus le montant des frais au titre de cette garantie Π de manière unique en début de contrat mais il le réglera de façon périodique en versant la somme π chaque année comme le montre l'échéancier ci-dessous :

Déterminons la valeur de le montant périodique de frais demandé au titre de la garantie :
De manière générale, pour obtenir la valeur du montant périodique, il nous faut égaliser le montant unique demandé avec la somme des montants périodiques actualisés, soit :

$$\Pi = \sum_{t=0}^{T-1} \pi \exp(-rt)$$
$$\Leftrightarrow \Pi = \pi \frac{1-\exp(-rT)}{1-\exp(-r)}$$
$$\Leftrightarrow \pi = \Pi \frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-rT)}$$

Nous supposerons en outre que le contrat offre un choix de supports restreint. Rappelons que l'assuré ne peut allouer son argent que sur un seul support.

Par la suite, pour simplifier l'étude, nous considèrerons que le contrat ne propose que deux supports :

- un support S_A caractérisé par une volatilité σ_A
- un support S_B caractérisé par une volatilité σ_B

Le support S_B sera supposé plus risqué que le support S_A d'où $\sigma_A < \sigma_B$.

2. Problématique d'une réallocation d'actifs

En cas de réallocation d'actifs au sein de ce contrat, nous pouvons nous poser les mêmes questions que dans le cas d'un contrat où le paiement des frais de la garantie s'effectuait de manière unique en début de contrat : quel impact aura cette modification d'actifs sur la garantie dont le paiement des frais est désormais périodique ? Quelles solutions pouvons-nous apporter s'il y a réallocation d'actifs dans ce nouveau cas ?

La grande différence entre un contrat où le paiement de la garantie s'effectue de manière unique en début de contrat et un contrat où le paiement est périodique est la possibilité pour ce deuxième type de contrat, de modifier au cours du temps, le montant des frais demandés au titre de la garantie. En effet, pour toute modification en cours de contrat, l'article L172-3 du Code des Assurances dispose que :

> *Si l'aggravation est le fait de l'assuré, l'assureur peut, soit résilier le contrat dans les trois jours à partir du moment où il en a eu connaissance, la prime lui étant acquise, soit exiger une augmentation de prime correspondant à l'aggravation survenue.*

De plus, l'article A132-8 du Code des Assurances établit à l'alinéa 1 que :

> *Il est indiqué si le contrat est un contrat d'assurance vie individuel ou de groupe, ou un contrat de capitalisation. Pour les contrats mentionnés à l'article L. 132-5-3, cette indication est complétée par la mention suivante : " les droits et obligations de l'adhérent peuvent être modifiés par des avenants au contrat, conclus entre (dénomination de l'entreprise d'assurance) et (dénomination du souscripteur). L'adhérent est préalablement informé de ces modifications. "*

Ainsi, une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC pourra avoir pour effet l'ajustement des frais payés au titre de la garantie, au support choisi par l'assuré. Les conséquences au niveau du résultat de l'assureur ne seront donc pas les mêmes si le paiement de la garantie est unique ou périodique. Etudions plus précisément ce nouveau levier d'action consistant à réajuster les frais au cours du contrat.

Chapitre 7 :
MODIFICATION DU MONTANT DES FRAIS DEMANDES SUITE A UNE REALLOCATION D'ACTIFS

Une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC pour lequel le paiement de la garantie est périodique entraînera une modification du montant des frais payés annuellement par l'assuré. Ce montant de frais sera ainsi en adéquation avec le support sur lequel l'épargne de l'assuré évolue. Reste à savoir de quelle manière sera déterminé le montant des frais demandés périodiquement.

1. Introduction

Dans ce chapitre, les montants des frais demandés périodiquement au titre de la garantie seront établis pour chaque support à l'instant initial et figureront dans les Conditions Générales du contrat. Si l'assuré décide de réallouer son épargne, il se verra demander dès lors, le montant figurant dans ces CG et correspondant au nouveau support choisi. L'avantage de cette méthode est que l'assuré a simplement à se référer à son contrat pour savoir quel sera le tarif qu'il lui sera alors demandé en cas de modification du support. Il n'y a pas de retarification de la garantie en cours de contrat, suite à une réallocation d'actifs.

Selon la formule établie précédemment, le montant de frais demandé périodiquement pour l'allocation sur le support S_A est :

$$\pi_A = \Pi_A \frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-rT)} = PUT(\mathrm{S}_0, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A)\frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-rT)}$$

Celui demandé pour l'allocation sur le support S_B est :

$$\pi_B = \Pi_B \frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-rT)} = PUT(\mathrm{S}_0, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_B)\frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-rT)}$$

Soulignons que $\pi_B > \pi_A$ puisque le support S_B présente plus de risques que le support S_A .

Nous allons étudier successivement le cas d'une réallocation vers un actif plus risqué puis le cas d'une réallocation moins risquée.

2. Cas d'une réallocation plus risquée

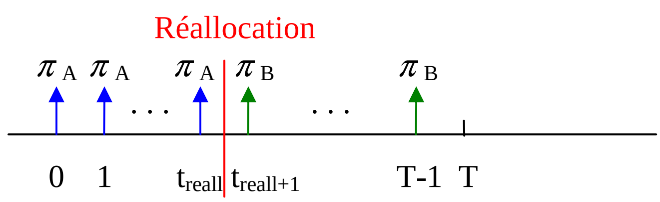
Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas d'une réallocation vers un actif plus risqué : l'assuré qui avait initialement choisi le support S_A, opte à un instant $t = t_{\mathrm{Reall}}$ pour le support S_B.

En reprenant les notations de la partie I, nous remarquons qu'une réallocation d'actifs implique que la garantie réellement vendue par l'assureur est $\mathrm{P}(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B)$.

2.1 Modification des montants de frais

La réallocation d'actifs d'un support vers l'autre implique une modification des frais périodiquement demandés à l'assuré. Nous supposerons en outre que ***la réallocation a lieu juste après le paiement des frais au titre de la garantie.***

Aussi, l'échéancier des frais versés par l'assuré a l'allure suivante :



La somme des montants des frais actualisées, dans le cas d'une réallocation plus risquée (notée $\text{Reall}+$) et sans retarification du contrat (noté SR), donne alors :

$$\begin{aligned}
\Pi^{SR}_{\text{Reall+}} &= \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_A \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\text{Reall}}+1}^{T-1} \pi_B \exp(-ri) \\
&= \pi_A \frac{1-\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1))}{1-\exp(-r)} + \pi_B \exp(-r(t_{\text{Reall}}+1)) \frac{1-\exp(-r(T-t_{\text{Reall}}-1))}{1-\exp(-r)} \\
&= \frac{\pi_A(1-\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1))) + \pi_B(\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1)) - \exp(-rT))}{1-\exp(-r)}
\end{aligned}$$

Il est à noter que dans la somme actualisée des montants de frais payés périodiquement s'avère dans le cas d'une réallocation plus risquée, être supérieure au montant unique de frais qui aurait été demandée pour la même garantie, quelle que soit la date de réallocation.

En effet,

$$\begin{aligned}
\pi_A < \pi_B &\Leftrightarrow \pi_A(1-\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1))) + \pi_A(\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1)) - \exp(-rT)) \\
&\qquad < \pi_A(1-\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1))) + \pi_B(\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1)) - \exp(-rT)) \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi_A(1-\exp(-rT))}{1-\exp(-r)} < \frac{\pi_A(1-\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1))) + \pi_B(\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1)) - \exp(-rT))}{1-\exp(-r)} \\
&\Leftrightarrow \Pi_{\text{A}} < \Pi^{SR}_{\text{Reall+}}
\end{aligned}$$

Ainsi, toutes choses égales par ailleurs, lors d'une réallocation vers un support plus risqué, l'assureur recevra plus de la part de l'assuré si ce dernier paie périodiquement la garantie plutôt que de façon unique en début de contrat. Dans le cas d'un paiement unique de la garantie, nous avons vu qu'une réallocation tardive était préférable lorsque celle-ci se faisait vers un actif plus risqué. Dans le cas d'un paiement périodique, l'effet du temps sera différent puisque l'apport de l'assuré sera d'autant plus important que la réallocation est réalisée tôt du fait de la modification des montants de frais prélevés. Etudions plus précisément cet effet temps.

2.2 Sensibilité à la date de réallocation

Le mécanisme de réallocation engendre chez la compagnie d'assurance, l'apparition d'un résultat que nous noterons dans le cas d'un contrat à prélèvements périodiques, sans retarification du contrat, $R^{SR}_{\text{Reall+}}$:

$$R^{SR}_{\text{Reall+}} = \Pi^{SR}_{\text{Reall+}} - \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B).$$

La dérivation par rapport à la date de réallocation donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^{SR}_{\text{Reall+}}}{\partial \mathrm{t}_{\text{Reall}}} &= \frac{\partial \Pi^{SR}_{\text{Reall+}}}{\partial \mathrm{t}_{\text{Reall}}} - \frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B)}{\partial \mathrm{t}_{\text{Reall}}} \\
&= \underbrace{\frac{r.\exp(-r(t_{\text{Reall}}+1))(\pi_A - \pi_B)}{1-\exp(-r)}}_{<0} - \underbrace{S_0 \frac{\sigma_A^2 - \sigma_B^2}{2\sqrt{\sigma_A^2.t_{\text{Reall}} + \sigma_B^2.(T-t_{\text{Reall}})}}.N'(-d_1)}_{<0}
\end{aligned}$$

Le signe de cette dérivée n'apparaît pas clairement ! Prenons dès lors, un exemple numérique.

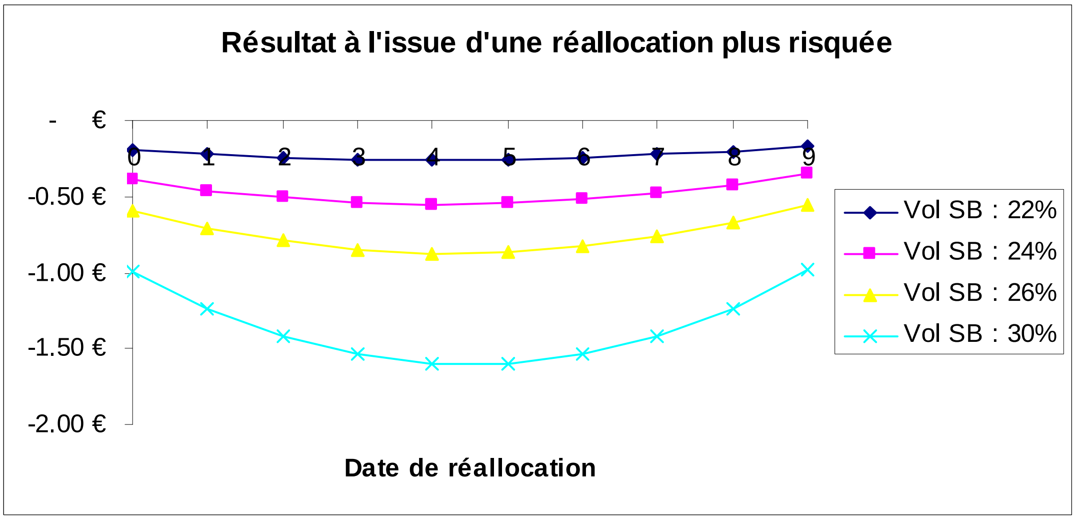
Application numérique :

Considérons le contrat avec les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : σ_B variable (de 22% à 30%)

Effet du temps dans le cas d'une réallocation plus risquée :

Date de réallocation	Résultat à l'issue d'une réallocation plus risquée			
	Vol Supp B : 22%	*Vol Supp B : 24%*	*Vol Supp B : 26%*	*Vol Supp B : 30%*
0	- 0.19 €	- 0.39 €	- 0.59 €	- 0.99 €
1	- 0.22 €	- 0.46 €	- 0.71 €	- 1.23 €
2	- 0.24 €	- 0.51 €	- 0.79 €	- 1.41 €
3	- 0.25 €	- 0.54 €	- 0.85 €	- 1.54 €
4	- 0.26 €	- 0.55 €	- 0.87 €	- 1.60 €
5	- 0.25 €	- 0.54 €	- 0.87 €	- 1.60 €
6	- 0.24 €	- 0.52 €	- 0.83 €	- 1.54 €
7	- 0.23 €	- 0.48 €	- 0.77 €	- 1.42 €
8	- 0.20 €	- 0.42 €	- 0.67 €	- 1.23 €
9	- 0.17 €	- 0.35 €	- 0.55 €	- 0.98 €



Soulignons la forme convexe du résultat, forme particulière qui se retrouve également dans de nombreux cas en faisant varier la maturité du contrat et la volatilité initiale et finale.

Au vu de ce résultat, il apparaît préférable pour l'assureur que la réallocation ait lieu soit en début de contrat, soit en fin de contrat.
La forme parabolique du résultat peut s'expliquer par le fait que lorsque la réallocation a lieu en début de contrat, l'accumulation des montants de frais périodiques adéquats versés très tôt par l'assuré domine l'effet néfaste qu'entraîne pour la compagnie d'assurance, une réallocation trop prématurée. A l'inverse, lorsque l'assuré réalloue en fin de contrat, les frais versés au titre de la garantie ne se révèlent pas être les bons mais cet effet est dominé par le bénéfice qu'entraîne une réallocation tardive. Enfin, quand la réallocation a lieu en milieu de contrat, aucun de ces deux effets ne domine l'autre.

L'exemple précédent montre que la réallocation d'actifs, quel que soit l'instant auquel elle a lieu, engendre une perte pour l'assureur. Nous allons donc imposer à l'assuré de supporter une partie de ces coûts via le paiement des frais d'arbitrage lorsqu'il modifie son support.

2.3 Application de frais d'arbitrage

Avec les notations vues précédemment, en cas de réallocation et de chargement consécutif à cela, la garantie proposée par l'assureur est $\mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall)$. L'apport de l'assuré est $\Pi^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{Reall+}} + E_Q(D) = \Pi^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{Reall+}} + fr\_reall.S_0$. Le résultat engendré pour l'assureur est alors le suivant : $R^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{Reall+}} = \Pi^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{Reall+}} + fr\_reall.S_0 - \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}},\sigma_B, fr\_reall)$.

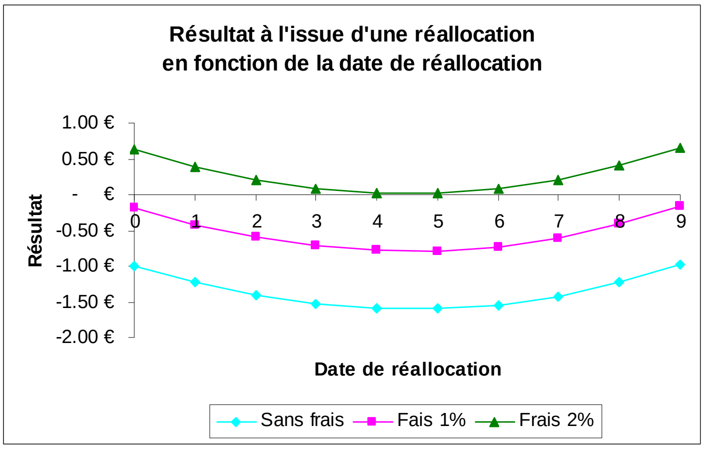
Tout comme dans le cas d'un prélèvement unique de frais, le résultat de l'assureur croît avec le taux de chargement puisque $\dfrac{\partial R^{\mathrm{SR}}_{\mathrm{Reall+}}}{\partial fr\_reall} = S_0.(1 - N(-d_1)) > 0$.

<u>Application numérique</u> :

Nous reprenons les données numériques du paragraphe précédent en supposant que la réallocation s'effectue vers le support B présentant une volatilité de 30%.
Nous supposerons que les frais d'arbitrage s'élèvent à 1% de la valeur liquidative, puis à 2%.

<u>Impact des frais d'arbitrage</u> :

Date de réallocation	Résultat à l'issue de la réallocation		
	Sans Frais	Frais 1%	Frais 2%
0	- 0.99 €	- 0.18 €	0.63 €
1	- 1.23 €	- 0.42 €	0.39 €
2	- 1.41 €	- 0.60 €	0.21 €
3	- 1.54 €	- 0.72 €	0.09 €
4	- 1.60 €	- 0.78 €	0.03 €
5	- 1.60 €	- 0.79 €	0.02 €
6	- 1.54 €	- 0.73 €	0.09 €
7	- 1.42 €	- 0.60 €	0.21 €
8	- 1.23 €	- 0.42 €	0.40 €
9	- 0.98 €	- 0.16 €	0.66 €



Les résultats subissent une translation en fonction du pourcentage de frais appliqué. L'application de frais augmente le résultat de l'assureur : dans le cas de frais d'arbitrage à 2%, une réallocation plus risquée engendre même un bénéfice chez l'assureur quelque soit la date de réallocation.

L'impact d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC vers un support plus risqué n'est donc pas le même selon que le paiement de la garantie s'effectue de manière unique en début de contrat ou de manière périodique. Qu'en est-il d'une réallocation moins risquée ?

3. Cas d'une réallocation moins risquée

Dans le cas d'un paiement unique des frais au titre de la garantie, une réallocation vers un support moins risqué ne posait aucun problème : au contraire, elle générait un bénéfice pour l'assureur et l'application d'un chargement lié à une réallocation faisait croître d'autant plus ce gain. Est-ce toujours le cas lorsque la garantie est payée périodiquement ?

3.1 Modification des montants de frais

La réallocation d'actifs d'un support vers l'autre implique une modification des frais périodiques demandés à l'assuré et c'est de là que va naître le problème d'une réallocation moins risquée ! En effet, certes le tarif de la garantie en présence d'une réallocation moins risquée au sein du contrat en UC est moins élevé que celui de la garantie initiale mais dans le cas d'un paiement périodique de la garantie, la somme des montants actualisés des frais de la garantie sera plus faible que le simple montant demandé en début de contrat en cas de prélèvement unique de frais.

Avec les notations utilisées précédemment, une réallocation moins risquée se modélise par le fait que l'assuré qui avait initialement opté pour le support S_B, réalloue son épargne à un instant $t = t_{\mathrm{Reall}}$ sur le sous-jacent S_A avec $\sigma_A < \sigma_B$.

La garantie réellement vendue par l'assureur est alors $\mathrm{P}(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_B, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_A)$ et la somme des frais actualisés perçus au titre de la garantie donne :

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{Reall}-}^{SR} &= \sum_{i=0}^{t_{\mathrm{Reall}}} \pi_B \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\mathrm{Reall}}+1}^{T-1} \pi_A \exp(-ri) \\
&= \pi_B \frac{1-\exp(-r(t_{\mathrm{Reall}}+1))}{1-\exp(-r)} + \pi_A \exp(-r(t_{\mathrm{Reall}}+1)) \frac{1-\exp(-r(T-t_{\mathrm{Reall}}-1))}{1-\exp(-r)} \\
&= \frac{\pi_B(1-\exp(-r(t_{\mathrm{Reall}}+1))) + \pi_A(\exp(-r(t_{\mathrm{Reall}}+1)) - \exp(-rT))}{1-\exp(-r)}
\end{aligned}
$$

Comme expliqué précédemment, nous pouvons montrer que $\Pi_{\mathrm{Reall}-}^{SR} < \Pi_B$.

Il est légitime de se demander alors quel effet antagoniste prédomine suite à une réallocation moins risquée : la baisse du prix de la garantie, bénéfique pour la compagnie d'assurance ou la diminution des frais périodiquement demandés à l'assuré, néfaste pour cette dernière ? Le temps joue alors un rôle important que nous allons étudier plus précisément dans la suite.

3.2 Sensibilité à la date de réallocation

Nous suivons la démarche utilisée dans le paragraphe précédent. Nous nous intéressons donc au résultat produit par une réallocation moins risquée : $R_{\mathrm{Reall}-}^{\mathrm{SR}} = \Pi_{\mathrm{Reall}-}^{\mathrm{SR}} - \mathrm{P}(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_{\mathrm{B}}, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_{\mathrm{A}})$.

La dérivée par rapport à la date de réallocation est simplement obtenue en inversant les termes π_A et π_B ainsi que σ_A et σ_B dans l'expression de $\frac{\partial R_{\mathrm{Reall}-}^{\mathrm{SR}}}{\partial \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}$. Son signe n'est là encore pas trivial.

Application numérique :

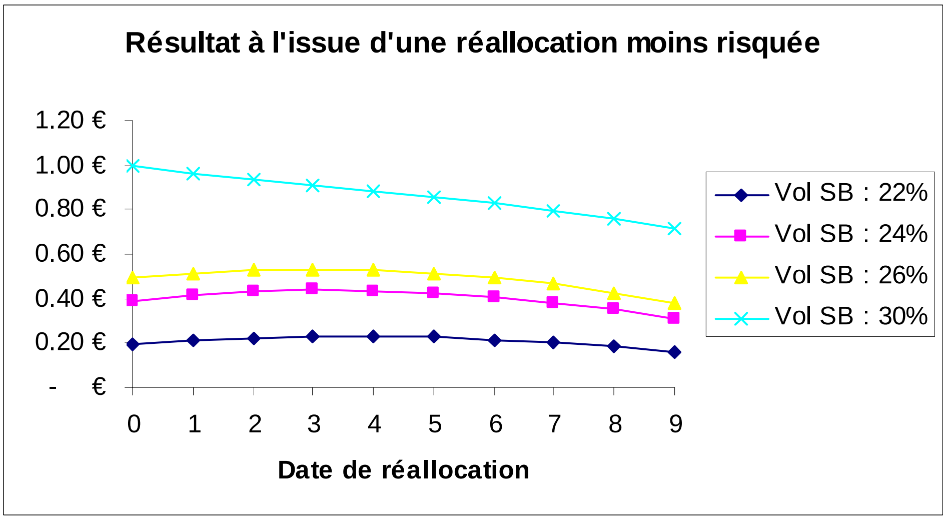
A l'aide d'un exemple numérique, comparons les résultats obtenus suite à une réallocation moins risquée en fonction de la date de réallocation.

Pour cela, nous supposerons que le contrat présente les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : σ_B variable (de 22% à 30%)

Effet du temps dans le cas d'une réallocation moins risquée :

Date de réallocation	Résultat à l'issue d'une réallocation moins risquée			
	Vol Supp B : 22%	*Vol Supp B : 24%*	*Vol Supp B : 26%*	*Vol Supp B : 30%*
0	0.19 €	0.39 €	0.49 €	0.99 €
1	0.21 €	0.42 €	0.52 €	0.96 €
2	0.22 €	0.43 €	0.53 €	0.94 €
3	0.23 €	0.44 €	0.53 €	0.91 €
4	0.23 €	0.44 €	0.53 €	0.89 €
5	0.23 €	0.43 €	0.52 €	0.86 €
6	0.22 €	0.41 €	0.49 €	0.83 €
7	0.20 €	0.38 €	0.46 €	0.80 €
8	0.18 €	0.35 €	0.43 €	0.76 €
9	0.16 €	0.31 €	0.38 €	0.71 €



Notons que pour l'assureur, une réallocation de la part de l'assuré vers un support moins risqué entraîne un bénéfice également dans le cas de prélèvements périodiques de frais, bénéfice d'autant plus grand que l'écart entre les deux supports est important.

Là encore, au niveau du temps, deux effets jouent : une réallocation tardive présentera l'avantage d'un apport plus conséquent de l'assuré mais le bénéfice de la réallocation se verra diminuer. A l'inverse, lorsque la réallocation a lieu en début de contrat, le bénéfice de l'opération est plus fort pour l'assureur bien que l'apport de l'assuré diminue suite au paiement de frais de manière périodique plus faibles.

Soulignons enfin, que nous retrouvons la forme parabolique évoquée dans le cas d'une réallocation plus risquée dans plusieurs exemples. Cependant, pour le passage du support de volatilité 30% à 20%, cette forme n'apparaît plus.

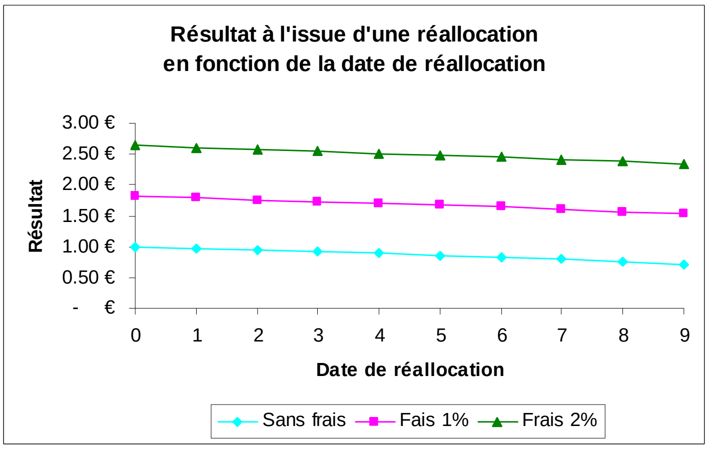
3.3 Application de frais d'arbitrage

Le principe est toujours le même : l'assuré se verra retrancher un certain pourcentage de sa valeur liquidative, à l'instant d'arbitrage pour supporter le coût d'une réallocation.
En effectuant les mêmes calculs que dans la section précédente, il peut être montré que le bénéfice pour l'assureur est d'autant plus grand que les frais demandés sont importants.

A titre d'exemple, nous pouvons comparer les différents résultats d'une réallocation du support B caractérisé par une volatilité de 30 % vers un support A de volatilité 20%, en l'absence et en présence de frais :

<u>Impact des frais d'arbitrage</u> :

Date de réallocation	Résultat à l'issue de la réallocation		
	Sans Frais	Frais 1%	Frais 2%
0	0.99 €	1.82 €	2.64 €
1	0.96 €	1.79 €	2.60 €
2	0.94 €	1.76 €	2.57 €
3	0.91 €	1.73 €	2.54 €
4	0.89 €	1.70 €	2.51 €
5	0.86 €	1.67 €	2.48 €
6	0.83 €	1.64 €	2.45 €
7	0.80 €	1.61 €	2.42 €
8	0.76 €	1.57 €	2.38 €
9	0.71 €	1.53 €	2.34 €



Il y a translation du résultat en présence de frais d'arbitrage, comme dans le cas d'une réallocation plus risquée.

Au final, nous avons montré qu'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC, qu'elle s'effectue vers un support plus ou moins risqué que le support initial, avait un impact différent sur la garantie complémentaire selon que les frais au titre de cette garantie sont prélevés de manière unique ou de manière périodique. Il serait désormais intéressant de comprendre dans quelle mesure cet impact diffère et quel produit est le plus propice à une réallocation d'actifs.

4. Comparaison du résultat de réallocation dans le cas d'un prélèvement unique ou périodique de frais au titre de la garantie

Nous nous plaçons dans le cas de prélèvement de frais en cas d'arbitrage de l'assuré.

4.1 Résultats théoriques

Rappelons les formules établies précédemment :

➢ *Cas d'une réallocation plus risquée* *(du support A au support B)*

- **Contrat où le paiement de la garantie s'effectue de manière unique (noté PU) :**

$$R_{\text{Reall+}}^{PU} = \left(\Pi_A^{PU} + fr\_reall.S_0\right) - P\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B, fr\_reall\right)$$

- **Contrat où le paiement de la garantie est périodique (noté PP) :**

$$R_{\text{Reall+}}^{\text{SR}} = \left(\Pi_{\text{Reall+}}^{\text{SR}} + fr\_reall.S_0\right) - P\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_A,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_B, fr\_reall\right)$$

Comme $\Pi_{\text{Reall+}}^{\text{SR}} > \Pi_A^{PU}$, $R_{\text{Reall+}}^{SR} > R_{\text{Reall+}}^{PU}$: le résultat est donc plus favorable à l'assureur dans le cas d'un prélèvement périodique de frais pour une réallocation plus risquée.

➢ *Cas d'une réallocation moins risquée* *(du support B au support A)*

- **Contrat où le paiement de la garantie s'effectue de manière unique (noté PU) :**

$$R_{\text{Reall}-}^{PU} = \left(\Pi_B^{PU} + fr\_reall.S_0\right) - P\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_B,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_A, fr\_reall\right)$$

- **Contrat où le paiement de la garantie est périodique (noté PP) :**

$$R_{\text{Reall}-}^{SR} = \left(\Pi_{\text{Reall}-}^{SR} + fr\_reall.S_0\right) - P\left(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_B,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_A, fr\_reall\right)$$

Comme $\Pi_{\text{Reall}-}^{SR} < \Pi_B^{PU}$, $R_{\text{Reall-}}^{SR} < R_{\text{Reall-}}^{PU}$: le résultat est ici moins favorable à l'assureur dans le cas d'un prélèvement périodique de frais pour une réallocation moins risquée.

Illustrons ces différentes conclusions à l'aide d'un exemple numérique.

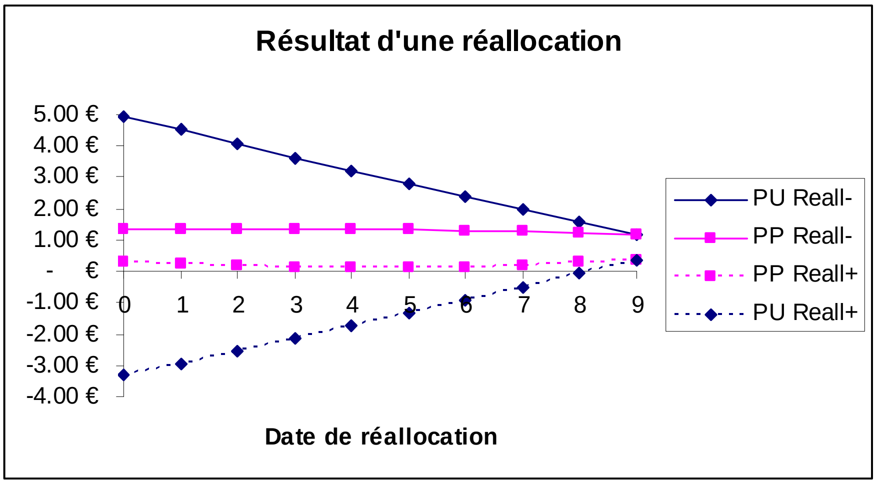
4.2 Illustration numérique

Considérons le contrat présentant les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : $\sigma_B = 25\%$
- Frais d'arbitrage : 1%

Comparaison des méthodes :

Date de Réallocation	Réallocation plus risquée		Réallocation moins risquée	
	PP	PU	PP	PU
0	0.32 €	- 3.32 €	1.32 €	4.96 €
1	0.23 €	- 2.93 €	1.34 €	4.51 €
2	0.17 €	- 2.55 €	1.35 €	4.07 €
3	0.13 €	- 2.15 €	1.35 €	3.63 €
4	0.11 €	- 1.75 €	1.35 €	3.21 €
5	0.12 €	- 1.34 €	1.33 €	2.79 €
6	0.15 €	- 0.92 €	1.31 €	2.38 €
7	0.20 €	- 0.50 €	1.28 €	1.98 €
8	0.28 €	- 0.06 €	1.24 €	1.58 €
9	0.38 €	0.38 €	1.20 €	1.20 €



Ce graphique met bien en évidence l'impact du temps dans une réallocation lorsque le paiement de la garantie s'effectue de manière unique en début de contrat : bénéfice (respectivement perte) d'autant plus important lorsque la réallocation moins (respectivement plus) risquée est effectuée tôt.

Lors d'une réallocation plus risquée, le résultat dans le cas d'un paiement périodique de la garantie est meilleur que celui d'un paiement unique en début de contrat. L'assureur récupère alors un bénéfice quelle que soit la date de réallocation dans le cas d'un prélèvement périodique alors qu'il effectue en général une perte pour un prélèvement unique. Lors d'une réallocation moins risquée, l'assureur est plus gagnant dans le cas d'un prélèvement unique.

Notons en outre, que si la réallocation a lieu en $t = T - 1$ alors le résultat obtenu est identique dans le cas d'un paiement unique et dans le cas d'un paiement périodique. Ceci est dû au fait que nous avons alors $\Pi_{\text{Reall}}^{SR} = \dfrac{\pi_i\left(1-\exp(-rT)\right)}{1-\exp(-r)} = \Pi_i^{PU}$, avec $i \in \{A, B\}$: en effet, si l'assuré réalloue après avoir payé son dernier montant périodique de frais, il n'y a alors pas de possibilités de modifier l'échéancier des montant de frais, selon l'hypothèse précédemment établie.

En supposant que les réallocations s'effectuent uniformément dans le temps, nous pouvons déterminer la moyenne empirique du résultat de l'assureur ainsi que sa variance empirique :

	Réallocation plus risquée		Réallocation moins risquée	
	PP	PU	PP	PU
Moyenne Empirique	0.21 €	- 1.51 €	1.31 €	3.03 €
Variance Empirique	0.0085	1.5414	0.0028	1.5989

Soulignons que la variance est bien plus faible dans le cas à prélèvements périodiques.

Ainsi, un contrat où le paiement de la garantie est périodique semble plus propice à une réallocation d'actifs qu'un contrat où le paiement s'effectue de façon unique en début de contrat. Le bénéfice effectué par l'assureur en cas de réallocation moins risqué est certes plus faible mais ce qui nous intéresse plus particulièrement dans le cas de prélèvements périodiques est le fait que le résultat est bien mieux maîtrisé si l'assuré réalloue vers un support plus risqué.
L'étude que nous venons de terminer était basée sur l'idée que les frais demandés au titre de la garantie pouvaient être ajustés au support sur lequel l'épargne évoluait. Aussi, une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC impliquait une modification du montant des frais prélevés et ces montants étaient indiqués dans les conditions générales du contrat.
Une nouvelle solution qu'il serait intéressant d'étudier pourrait consister à ne pas fixer ces montants de frais a priori. En effet, que se passerait-il si l'assureur déterminait ces frais au titre de la garantie à l'instant de la réallocation d'actifs, en fonction du nouveau support et surtout des conditions de marché du moment ?

Chapitre 8 : RETARIFICATION DE LA GARANTIE SUITE A UNE REALLOCATION D'ACTIFS

Dans ce chapitre, une réallocation d'actifs entraînera toujours une modification des montants des frais périodiques demandés à l'assuré mais les nouveaux montants ne seront pas connus à priori. Ils seront définis à l'instant de la réallocation et dépendront donc des conditions du marché au moment de la modification de l'allocation d'actifs. Nous étudierons d'une part, le cas d'une réallocation vers un actif plus risqué et d'autre part, le cas d'une réallocation moins risquée.

1. Cas d'une réallocation plus risquée

1.1 Présentation de la méthodologie

La réallocation plus risquée se caractérise par le passage du support S_A au support S_B. Suite à la réallocation, le montant des frais périodique demandé à l'assuré sera :

$$\pi^* = PUT\left(\mathrm{S}_{\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}, \mathrm{K}, \mathrm{T} - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \mathrm{r}, \sigma_B\right)\frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.(T-t_{\mathrm{Reall}}))}$$

Ce nouveau montant dépend donc des conditions du marché puisqu'elle est directement liée à la valeur du sous-jacent en date d'arbitrage. Il évolue également en fonction de la date de réallocation.

Comme précédemment, nous supposerons que la réallocation a lieu juste après le paiement des frais au titre de la garantie. Notons cependant que, bien que payé à partir de $t = t_{\mathrm{Reall}} + 1$, le nouveau montant de frais sera déterminée avec les conditions de marché de l'instant de réallocation $t = t_{\mathrm{Reall}}$. Nous pouvons dès lors, déterminer le montant équivalent prélevé de façon unique en cas de retarification du contrat :

$$\begin{aligned}\Pi^R_{\mathrm{Reall+}} &= \sum_{i=0}^{t_{\mathrm{Reall}}} \pi_A \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\mathrm{Reall}}+1}^{T-1} \pi^* \exp(-ri) \\ &= \frac{\pi_A\left(1-\exp\left(-r\left(t_{\mathrm{Reall}}+1\right)\right)\right) + \pi^*\left(\exp\left(-r\left(t_{\mathrm{Reall}}+1\right)\right) - \exp(-rT)\right)}{1-\exp(-r)}\end{aligned}$$

Avec $$\pi^* = PUT\left(\mathrm{S}_{\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}}, \mathrm{K}, \mathrm{T} - \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \mathrm{r}, \sigma_B\right)\frac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.(T-t_{\mathrm{Reall}}))}$$

Le résultat à l'issue d'une réallocation est donc $R^R_{\mathrm{Reall+}} = \Pi^R_{\mathrm{Reall+}} - \mathrm{P}\left(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B\right)$.

Contrairement au chapitre précédent, ce résultat ne peut être calculé en formules fermées puisqu'il dépend de la valeur du sous-jacent à l'instant de réallocation, au travers du montant équivalent des frais prélevés de manière unique.

Pour estimer le résultat de la réallocation, nous devons donc faire appel à la méthode de Monte- Carlo et suivre la démarche décrite ci-dessous :

Nous effectuons une boucle sur les scenarii.

Nous commençons par le calcul de la valeur du sous-jacent à l'instant de l'arbitrage : $S_{t_{\text{Reall}}} = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right).t_{\text{Reall}} + \sigma_A.\sqrt{t_{\text{Reall}}}.\varepsilon_1\right)$ où $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Puis nous déterminons la valeur de le montant périodique $\pi^* = PUT\left(\mathrm{S}_{t_{\text{Reall}}}, \mathrm{K}, \mathrm{T} - \mathrm{t}_{\text{Reall}}, \mathrm{r}, \sigma_B\right)\dfrac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.(T-t_{\text{Reall}}))}$ ainsi que la montant unique équivalent $\Pi^R_{\text{Reall+}} = \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_A \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\text{Reall}}+1}^{T-1} \pi^* \exp(-ri)$. Enfin, nous calculons le résultat $R^R_{\text{Reall+}} = \Pi^R_{\text{Reall+}} - \mathrm{P}\left(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\text{Reall}}, \sigma_B\right)$.

1.2 Application numérique

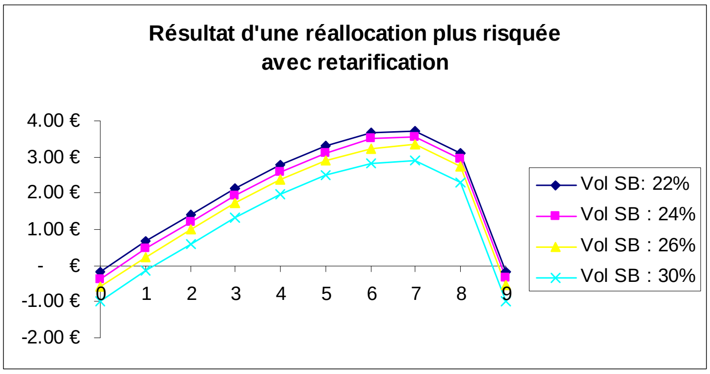
Considérons le contrat avec les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : σ_B variable (de 22% à 30%)

Observons les résultats obtenus suite à une réallocation avec la méthode décrite précédemment :

<u>Résultat à l'issue d'une réallocation plus risquée</u>
<u>dans la méthode de retarification du contrat</u> :

Date de réallocation	Résultat à l'issue d'une réallocation plus risquée			
	Vol Supp B 22%	*Vol Supp B 24%*	*Vol Supp B 26%*	*Vol Supp B 30%*
0	- 0.19 €	- 0.39 €	- 0.59 €	- 0.99 €
1	0.66 €	0.46 €	0.25 €	- 0.13 €
2	1.40 €	1.22 €	1.02 €	0.58 €
3	2.14 €	1.94 €	1.74 €	1.34 €
4	2.77 €	2.57 €	2.39 €	1.96 €
5	3.32 €	3.11 €	2.91 €	2.48 €
6	3.67 €	3.51 €	3.25 €	2.84 €
7	3.72 €	3.56 €	3.35 €	2.89 €
8	3.12 €	2.93 €	2.76 €	2.31 €
9	- 0.17 €	- 0.35 €	- 0.55 €	- 0.98 €



Notons tout d'abord que pour les valeurs extrêmes $t_{\text{Reall}} = 0$ et $t_{\text{Reall}} = T-1$, nous retrouvons les mêmes résultats que dans le cas de non retarification du contrat.

Dans le cas d'une réallocation dès l'instant initial, le nouveau montant de frais demandé est alors $\pi^* = PUT(S_0, K, T, r, \sigma_B)\dfrac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.T)} = \pi_B$, soit le même montant π_B que dans le chapitre précédent : nous obtenons donc bien le même résultat à l'issue de cette réallocation.

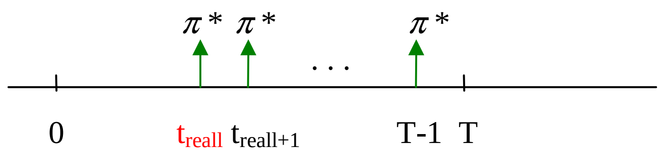
Lorsque la réallocation a lieu en $t_{\text{Reall}} = T-1$, il n'y a pas de modification de frais prélevés au titre de la garantie puisque nous avons fait l'hypothèse que la réallocation a lieu après le paiement de ces derniers. Ainsi, la méthode d'évaluation des frais prime n'impacte pas ce dernier résultat, qui est en outre égal au résultat d'un contrat où la garantie est payée de manière unique en début de contrat.

Intéressons-nous désormais à l'allure des valeurs intermédiaires. La retarification du contrat au moment de la réallocation plus risquée implique que l'engagement de l'assureur devient alors $PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}, K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_B\right)$.

La prime π^* est définie de telle manière que si l'assuré la payait de $t = t_{\text{Reall}}$ à $t = T-1$, l'engagement de l'assuré égaliserait l'engagement de l'assureur et le résultat serait alors nul.
Cependant, du fait de l'hypothèse que la réallocation a lieu après le paiement des frais, la prime π^* n'est pas payé de $t = t_{\text{Reall}}$ à $t = T-1$ par l'assuré mais de $t = t_{\text{Reall}} + 1$ à $t = T-1$. N'oublions pas néanmoins que celui-ci s'est déjà acquitté des montants π_A de $t = 0$ à $t = t_{\text{Reall}}$. Ainsi, le résultat est à priori non nul.

Ce raisonnement peut être résumé par le schéma suivant :

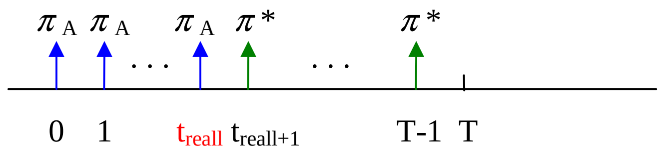
- **Flux des montants de frais égalisant l'engagement de l'assureur et celui de l'assuré :**



Le résultat actualisé à l'instant initial est alors :

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=t_{\text{Reall}}}^{T-1} \pi^*.\exp(-r.i) - PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}, K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_B\right).\exp(-r.t_{\text{Reall}}) \\
&= \exp(-r.t_{\text{Reall}})\left[\sum_{i=0}^{T-t_{\text{Reall}}-1} \pi^*.\exp(-r.i) - PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}, K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_B\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- **Flux des montants de frais payés par l'assuré :**



Le résultat actualisé à l'instant initial donne alors :

$$
\begin{aligned}
R &= \Pi^R_{\text{Reall}+} - PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}, K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_B\right).\exp(-r.t_{\text{Reall}}) \\
&= \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_A \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\text{Reall}}+1}^{T-1} \pi^* \exp(-ri) - \sum_{i=t_{\text{Reall}}}^{T-1} \pi^*.\exp(-r.i) \\
&= \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_A \exp(-ri) - \pi^*.\exp(-r.t_{\text{Reall}}) \\
&= \pi_A \frac{1-\exp(-r.(t_{\text{Reall}}+1))}{1-\exp(-r)} - \pi^*.\exp(-r.t_{\text{Reall}})
\end{aligned}
$$

Avec cette expression, apparaît clairement que le résultat d'une réallocation dépend de la date à laquelle celle-ci est effectuée. Mais il n'est pas facile d'établir le sens de variation de ce résultat en fonction de cette date, du fait notamment que le temps est également présent dans π^*. Nous pouvons simplement dire que la somme des montants π_A versés par l'assuré jusqu'à l'instant de réallocation vient contrer le fait qu'un montant π^* est manquant pour égaliser parfaitement l'engagement de l'assureur et celui de l'assuré.
Jusqu'à présent, une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC avait pour simple conséquence de retarifer la garantie. Désormais, si l'assuré souhaite modifier son allocation d'actifs, il devra payer en outre des frais d'arbitrage au titre de cette opération.

1.3 Application de frais d'arbitrage

Outre la modification du montant des frais, la réallocation d'actifs implique désormais le paiement de frais d'arbitrage s'élevant à $fr\_reall.S_{t_{\text{Reall}}}$ à l'instant de l'opération.

Le nouveau montant de frais π^* sera alors légèrement modifié puisque le cours du sous-jacent sera désormais $S_{t_{\text{Reall}}}.(1-fr\_reall)$.

Ainsi, $\pi^* = PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}.(1-fr\_reall), K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_B\right)\dfrac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.(T-t_{\text{Reall}}))}$.

Le résultat à l'instant initial est alors :

$$R^R_{\text{Reall+}} = \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_A \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\text{Reall}}+1}^{T-1} \pi^* \exp(-ri) + fr\_reall.S_0 - \mathrm{P}(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{t}_{\text{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall)$$

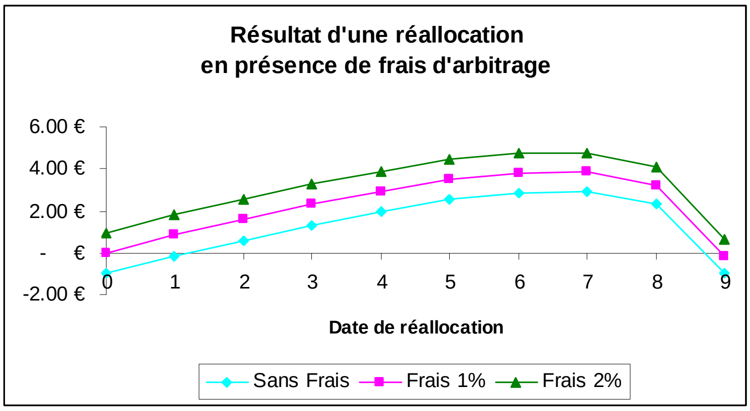
Avec $\pi^* = PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}.(1-fr\_reall), K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_B\right)\dfrac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.(T-t_{\text{Reall}}))}$

Comparons les résultats d'une réallocation en fonction des frais d'arbitrage sur un contrat présentant les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : $\sigma_B = 30\%$

<u>Impact des frais d'arbitrage</u> :

Date de réallocation	Résultat à l'issue d'une réallocation		
	Sans Frais	Frais 1%	Frais 2%
0	- 0.99 €	- 0.02 €	0.96 €
1	- 0.13 €	0.84 €	1.81 €
2	0.60 €	1.58 €	2.55 €
3	1.33 €	2.30 €	3.27 €
4	1.97 €	2.93 €	3.90 €
5	2.52 €	3.48 €	4.44 €
6	2.86 €	3.81 €	4.76 €
7	2.91 €	3.85 €	4.78 €
8	2.31 €	3.22 €	4.12 €
9	- 0.98 €	- 0.16 €	0.66 €



La présence de frais d'arbitrage permet d'accentuer le résultat de l'assureur à l'issue d'une opération de réallocation plus risquée.

L'idée de retarifer le contrat lors d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC s'est avérée très intéressante dans le cas d'une réallocation vers un support plus risqué. En effet, au travers d'exemples, nous avons pu constater que cette retarification permettait à l'assureur de tirer un profit de cette réallocation. Qu'en est-il pour les réallocations vers un actif moins risqué ?

2. Cas d'une réallocation moins risquée

Une réallocation moins risquée se modélisera par le passage du support S_B au support S_A. Tous les résultats obtenus dans le paragraphe précédent sont généralisables dans le cas d'une réallocation moins risquée puisque les volatilités σ_A et σ_B jouent alors des rôles symétriques.

L'assuré paye périodiquement le montant π_B jusqu'à la réallocation et il lui sera ensuite demandé $\pi^* = PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}, K, T - t_{\text{Reall}}, r, \sigma_A\right)\dfrac{1-\exp(-r)}{1-\exp\left(-r.(T - t_{\text{Reall}})\right)}$, ce qui nous donne le montant de frais unique équivalent suivant :

$$\Pi^R_{\text{Reall-}} = \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_B \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\text{Reall}}+1}^{T-1} \pi^* \exp(-ri)$$
$$= \frac{\pi_B\left(1-\exp\left(-r(t_{\text{Reall}}+1)\right)\right) + \pi^*\left(\exp\left(-r(t_{\text{Reall}}+1)\right) - \exp(-rT)\right)}{1-\exp(-r)}$$

Le résultat de la réallocation s'écrit alors $R^R_{\text{Reall-}} = \Pi^R_{\text{Reall-}} - \mathrm{P}\left(\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_B, \mathrm{t}_{\text{Reall}}, \sigma_A\right)$

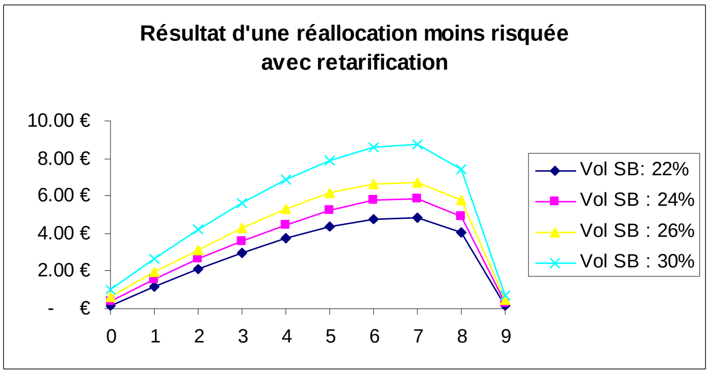
Application numérique :

Nous pouvons effectuer une nouvelle application numérique en considérant les mêmes caractéristiques que choisies précédemment :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : σ_B variable (de 22% à 30%)

Résultat à l'issue d'une réallocation moins risquée dans le cas d'un retarification de contrat :

Date de réallocation	Résultat à l'issue d'une réallocation moins risquée			
	Vol Supp B 22%	*Vol Supp B 24%*	*Vol Supp B 26%*	*Vol Supp B 30%*
0	0.19 €	0.39 €	0.59 €	0.99 €
1	1.20 €	1.57 €	1.92 €	2.63 €
2	2.10 €	2.63 €	3.13 €	4.24 €
3	2.94 €	3.61 €	4.31 €	5.62 €
4	3.74 €	4.48 €	5.35 €	6.90 €
5	4.35 €	5.27 €	6.15 €	7.89 €
6	4.75 €	5.75 €	6.67 €	8.60 €
7	4.86 €	5.82 €	6.75 €	8.73 €
8	4.08 €	4.93 €	5.76 €	7.42 €
9	0.16 €	0.31 €	0.45 €	0.71 €



Là encore, nous retrouvons les mêmes résultats que dans le cas de non retarification du contrat pour les valeurs extrêmes $t_{\text{Reall}} = 0$ et $t_{\text{Reall}} = T - 1$.

Pour les valeurs intermédiaires, le résultat peut être vu comme :

$$R = \pi_B \frac{1-\exp(-r.(t_{\text{Reall}}+1))}{1-\exp(-r)} - \pi^*.\exp(-r.t_{\text{Reall}})$$

Si l'assureur décide de faire payer à l'assuré sa réallocation d'actifs, le résultat devient à l'instant initial :

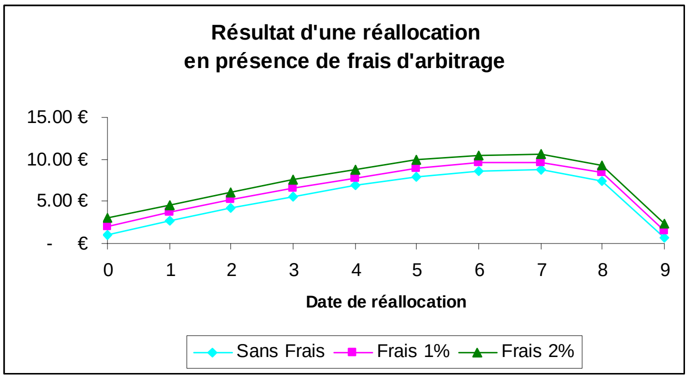
$$R^R_{\text{Reall}-} = \sum_{i=0}^{t_{\text{Reall}}} \pi_B \exp(-ri) + \sum_{i=t_{\text{Reall}}+1}^{T-1} \pi^* \exp(-ri) + fr\_reall.S_0 - \mathrm{P}(\mathrm{S},\mathrm{K},\mathrm{T},\mathrm{r},\sigma_B,\mathrm{t}_{\text{Reall}},\sigma_A, fr\_reall)$$

Avec $\pi^* = PUT\left(S_{t_{\text{Reall}}}.(1-fr\_reall), K, T-t_{\text{Reall}}, r, \sigma_A\right)\dfrac{1-\exp(-r)}{1-\exp(-r.(T-t_{\text{Reall}}))}$

L'application numérique dans le cas d'une réallocation du support B de volatilité 30 % vers le support A de volatilité 20 % permet de mettre en évidence l'augmentation du résultat en présence de frais d'arbitrage :

Impact des frais d'arbitrage :

Date de réallocation	Résultat à l'issue d'une réallocation		
	Sans Frais	Frais 1%	Frais 2%
0	0.99 €	1.97 €	2.95 €
1	2.68 €	3.66 €	4.63 €
2	4.17 €	5.14 €	6.12 €
3	5.62 €	6.59 €	7.56 €
4	6.86 €	7.83 €	8.80 €
5	7.95 €	8.90 €	9.86 €
6	8.62 €	9.57 €	10.52 €
7	8.69 €	9.63 €	10.56 €
8	7.44 €	8.35 €	9.25 €
9	0.71 €	1.53 €	2.34 €



Tout comme dans le cas d'une réallocation plus risquée, l'idée de retarifer la garantie après une réallocation d'actifs au sein du contrat en UC en fonction des conditions du marché du moment s'avère donner de bons résultats si nous l'appliquons à une réallocation s'effectuant vers un support moins risquée. Il serait désormais intéressant de s'attarder quelques instants sur la comparaison des résultats de réallocation obtenus selon les différentes méthodes étudiées jusque là pour réduire le coût pour l'assureur de cette opération.

Chapitre 9 : CONCLUSION

1. Comparaison des résultats des différentes méthodes

Dans ce paragraphe, nous comparerons à travers un exemple numérique, les résultats obtenus en cas de réallocation, selon la méthode utilisée :

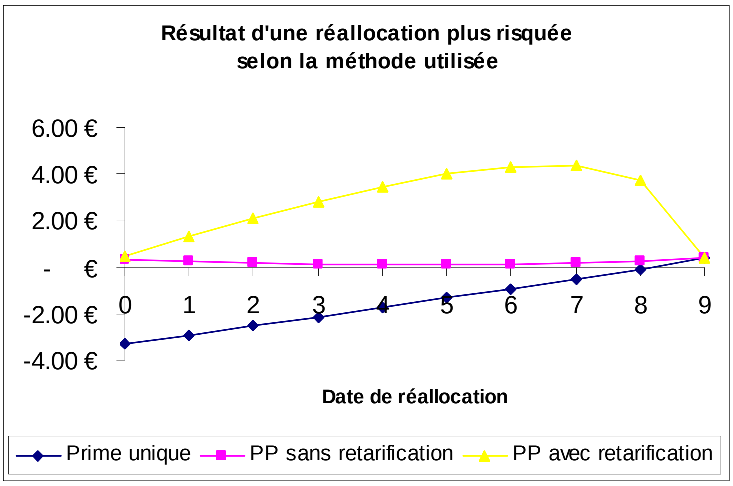
- Cas d'un contrat où le prélèvement des frais au titre de la garantie est effectué de manière unique en début de contrat (noté PU),
- Cas d'un contrat où le prélèvement des frais est effectué périodiquement et le montant des frais est défini à l'instant initial (noté PP sans retarification.),
- Cas d'un contrat où le prélèvement des frais est effectué périodiquement et le montant des frais est défini à l'instant de réallocation selon les conditions du marché (noté PP avec retarification).

Intéressons-nous au contrat présentant les caractéristiques suivantes :

- Prime initiale investie : $S_0 = 100$
- Montant garanti : $K = 100$
- Maturité : $T = 10$ ans
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support B : $\sigma_B = 25\%$
- Frais d'arbitrage : 1%

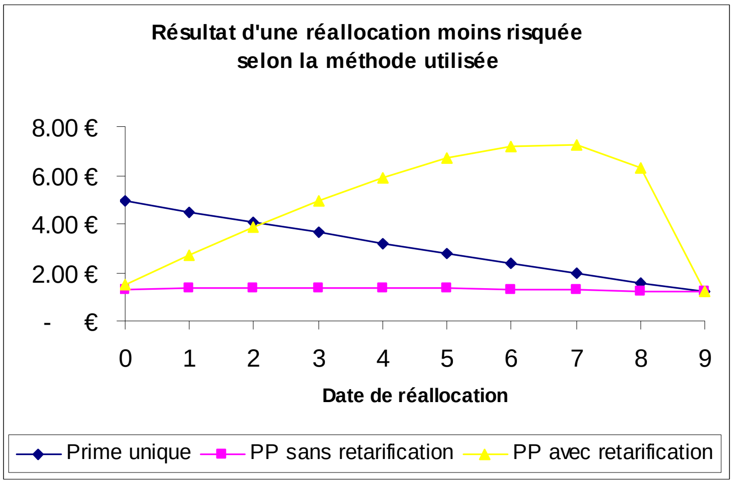
➢ Cas d'une réallocation plus risquée

Date de Réallocation	Réallocation plus risquée		
	PU	PP sans retarif	PP Retarification
0	- 3.32 €	0.32 €	0.49 €
1	- 2.93 €	0.23 €	1.34 €
2	- 2.55 €	0.17 €	2.08 €
3	- 2.15 €	0.13 €	2.82 €
4	- 1.75 €	0.11 €	3.45 €
5	- 1.34 €	0.12 €	4.00 €
6	- 0.92 €	0.15 €	4.33 €
7	- 0.50 €	0.20 €	4.37 €
8	- 0.06 €	0.28 €	3.75 €
9	0.38 €	0.38 €	0.38 €



➢ Cas d'une réallocation moins risquée

Date de Réallocation	Réallocation moins risquée		
	PU	PP sans retarif	PP Retarification
0	4.96 €	1.32 €	1.47 €
1	4.51 €	1.34 €	2.74 €
2	4.07 €	1.35 €	3.85 €
3	3.63 €	1.35 €	4.94 €
4	3.21 €	1.35 €	5.87 €
5	2.79 €	1.33 €	6.68 €
6	2.38 €	1.31 €	7.18 €
7	1.98 €	1.28 €	7.23 €
8	1.58 €	1.24 €	6.28 €
9	1.20 €	1.20 €	1.20 €



Au vu de ces graphiques, la dernière méthode étudiée consistant à recalculer les frais après une réallocation d'actifs selon les conditions du marché, apparaît bien meilleure pour l'assureur puisqu'elle lui permet d'engendrer un bénéfice plus fort que les deux autres méthodes. Ceci est tout particulièrement vrai dans le cas d'une réallocation plus risquée où le bénéfice est plus important, quel que soit l'instant de réallocation.

Notons que quel que soit le sens de la réallocation, en présence de frais d'arbitrage, nous retrouvons l'égalité des résultats entre le cas d'un contrat à paiement périodique de la garantie avec montants des frais définis à l'instant initial et celui d'un contrat à paiement périodique avec retarification seulement pour la date de réallocation $t_{\text{Reall}} = T-1$. N'ayant, dans ce cas, pas de modification de la prime, ce résultat s'explique facilement et correspond également au résultat du contrat pour le lequel la garantie est payé une unique fois en début de contrat.
Par contre, en l'absence de frais d'arbitrage, nous avions remarqué l'égalité également en cas de réallocation à l'instant initial. Ceci n'est plus vrai lors de prélèvement de frais car dès lors, le montant de frais π^* est calculé pour le sous-jacent $S_0.(1-fr\_reall)$ et non plus S_0.

En supposant que les réallocations s'effectuent uniformément dans le temps, nous pouvons déterminer la moyenne empirique du résultat de l'assureur ainsi que sa variance empirique :

	Réallocation plus risquée			Réallocation moins risquée		
	PU	PP sans retarif	PP Retarification	PU	PP sans retarif	PP Retarification
Moyenne Empirique	- 0.03 €	0.21 €	2.71 €	3.03 €	1.31 €	4.74 €
Variance Empirique	1.26	0.02	2.35	1.60	0.00	5.29

Nous avons déjà évoqué l'avantage d'un contrat pour lequel le paiement de la garantie est périodique et le montant de frais présenté dans les Conditions Générales sur un contrat où le paiement est unique. Il apparaît clairement que la méthode de retarification de contrat au moment de la réallocation est encore meilleure, le bénéfice créé par la réallocation étant plus fort que les deux autres méthodes quelque soit le sens de cet arbitrage. Cependant, cette dernière méthode présente une volatilité plus forte.

2. Limites

Outre les limites de modélisation déjà évoquées dans la partie précédente, nous pouvons également souligner la difficulté de mise en œuvre de la méthode de retarification de la garantie qui pourrait paraître la meilleure à mettre en place.

D'une part, la faisabilité même de cette opération n'est pas certaine. En effet, la méthode de retarification implique que l'assureur devra retarifer de manière individuelle toute garantie complémentaire à un contrat pour lequel un assuré a effectué une réallocation d'actifs : cela n'est nullement envisageable sur le plan pratique où les contrats se comptent par milliers ! De plus, ces opérations de retarification ont un coût, que nous avons supposé jusque là nul, mais qui feraient considérablement diminuer les résultats.

D'autre part, l'assuré aurait-il intérêt à réaliser une réallocation d'actifs ? Cette question est en effet cruciale. Dans la méthode de retarification, notre raisonnement menait à considérer les conséquences d'une réallocation comme la souscription d'une nouvelle option de vente avec un sous-jacent et une maturité différente. Si l'assuré effectuait le rachat de son épargne, il pourrait alors, avec son épargne disponible, souscrire un nouveau contrat avec une nouvelle garantie portant sur un nouveau sous-jacent, une nouvelle maturité ainsi qu'un nouveau montant garanti. La méthode de retarification pourrait alors pousser l'assuré à racheter son contrat plutôt qu'à effectuer une réallocation : ceci est totalement contraire au but de l'assureur qui est de garder l'assuré dans son portefeuille !

A première vue très tentante, la méthode de retarification n'est finalement pas si pertinente d'un point de vue pratique et commercial. Cependant, les contrats où le paiement de la garantie est périodique restent beaucoup plus propices à l'autorisation de réallocation d'actifs que ne le sont les contrats à paiement unique de la garantie, du fait de la possibilité de modifier les montants des frais payés en cours du contrat au titre de la garantie.

Ces deux premières parties nous ont permis de mettre en avant les enjeux financiers d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC présentant comme garantie complémentaire, une garantie plancher. La réallocation d'actifs ayant pour conséquence de modifier le support, elle peut ainsi être vue comme une erreur d'estimation de la volatilité lors de la tarification de la garantie. Cette erreur est moindre dans le cas où le paiement de la garantie est périodique car le tarif peut alors être adapté et redevenir en adéquation avec le support sur lequel l'épargne est investie. Néanmoins, dans le cas d'un prélèvement unique de frais en début de contrat, les conséquences peuvent être lourdes pour l'assureur.
Après cette étude purement financière, nous allons donner à notre réflexion, une vision plus assurantielle en nous intéressant plus particulièrement à l'impact d'une réallocation d'actifs sur les lois du passif. En effet, si la modélisation financière est importante dans la phase de pricing d'une garantie, les assureurs ne doivent en aucun cas négliger la modélisation du comportement des assurés. C'est pourquoi les conséquences d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC sur les lois du passif et notamment sur les lois de rachat doivent être étudiées avec soin. Pour cela, nous baserons notre travail sur l'étude de la garantie GMAB (*Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*), garantie plancher en cas de vie.

Partie III :

APPLICATION A LA GARANTIE GMAB

Chapitre 10 : PRESENTATION DE LA GARANTIE GMAB

Pour débuter, nous présenterons la garantie GMAB et nous nous attarderons sur la méthodologie de tarification de cette garantie.

1. Introduction à la GMAB

La GMAB *(Guaranted Minimum Accumulation Benefit)* est une garantie de capital en cas de vie. Elle permet à l'assuré, dont le contrat est toujours en portefeuille, de percevoir à l'issue d'une période donnée, le maximum entre la valeur de son épargne et un montant minimum garanti.

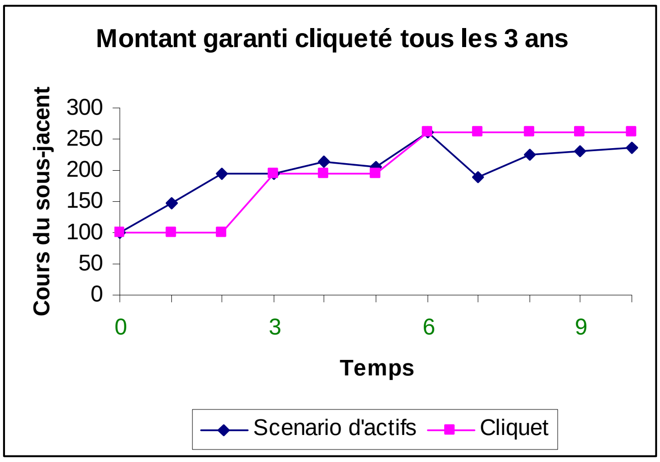
Cette garantie permet ainsi à l'assuré de bénéficier d'une garantie de performance à terme et donc de sécuriser considérablement son investissement en unités de compte.

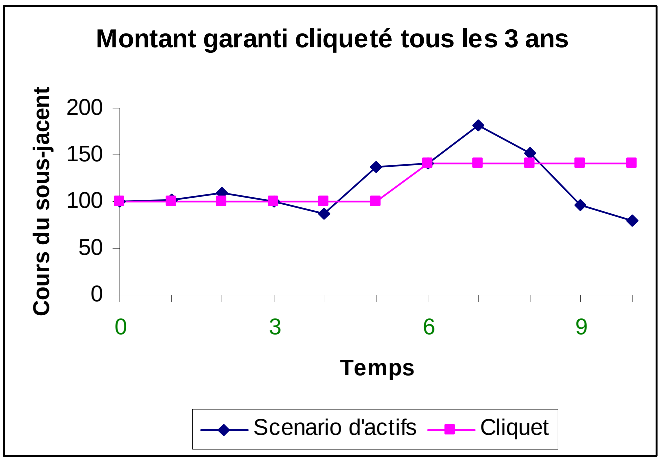
Le montant garanti peut différer selon la garantie proposée dans le contrat. Comme type de garantie, nous pouvons citer :

- la garantie plancher simple : le capital garanti est fixe et en général, égal au montant initialement investi par l'assuré sur le support en unités de compte.
- la garantie plancher roll-up : il y a garantie d'un taux minimal de revalorisation du montant initial investi.
- la garantie plancher cliquet : le capital garanti est égal à la valeur de marché historique la plus élevée de l'épargne gérée en unités de compte, valeur relevée à dates fixes de manière périodique.

Il est à noter que les modalités de calcul du montant garanti sont fixées d'avance dans le contrat.

Illustration de la garantie plancher cliquet (Périodicité du cliquet : 3 ans)





Dans ces 2 exemples de scenarii, le montant garanti est cliqueté tous les 3 ans : au moment du cliquet (dates en vert), le montant garanti cliqueté est égal au maximum entre la valeur liquidative du contrat et la valeur du cliquet précédent. Cette solution est sécuritaire pour l'assuré car elle lui permet de se prémunir contre une éventuelle chute du montant de son épargne. Cependant si la valeur liquidative du contrat augmente puis diminue entre deux cliquets, cela ne profite pas à l'assuré. C'est le cas dans la figure de droite entre les instants 6 et 9 : l'épargne à la date 7 est supérieure au cliquet. Mais puisque l'instant 7 n'est pas un instant de cliquet, le montant garanti n'est pas majoré par cette hausse et à la date 9, ce dernier reste égal à celui évalué à l'instant 6.
Il apparaît ainsi clairement que la garantie plancher cliquet dépend du scénario d'actifs : il ne sera alors pas possible de tarifer ce type de garantie en formules fermées.

Quel tarif donner à cette garantie ? La solution à cette question provient du comportement optionnel de la garantie : la théorie financière nous vient alors en aide. Dans quelle mesure cette garantie s'apparente à une option ?

2. Tarification de la GMAB

2.1 Assimilation de la garantie à une option

La GMAB peut s'interpréter en termes financiers comme une option de vente dont le sous-jacent serait l'épargne du client et le prix d'exercice, le montant minimal garanti car de même que le vendeur d'un PUT assure à son acheteur le droit de vendre son sous-jacent à un prix défini à l'avance, l'assureur promet à son assuré un montant minimum pour son épargne. L'assureur serait donc le vendeur de l'option et l'assuré, son acheteur.

Par souci de simplification, nous supposerons que le contrat est à support unique. Nous le noterons S_A et il suivra, sous la probabilité historique P, la dynamique suivante :

$$\frac{dS_A}{S_A} = \mu_A.dt + \sigma_A.dW_t^A$$

où μ_A désigne la tendance du sous-jacent, supposée constante.

σ_A désigne la volatilité, supposée constante.

W_t^A est un mouvement brownien.

Soulignons que la GMAB ne pouvant s'exercer qu'à une date donnée, à la fin de la période de carence, il s'agit d'une option de vente de type européenne.

La GMAB ne s'exerce que si l'assuré est toujours dans le portefeuille à l'échéance du contrat. Il faudra par conséquent pondérer l'option de vente par une probabilité de présence à la maturité de l'option pour prendre en compte cette condition d'exercice.

Notons que c'est le fait que la GMAB s'exprime comme une combinaison linéaire d'options de vente avec pour facteur une probabilité de présence indépendante de l'option qui explique l'intérêt porté jusque là à une garantie de type option de vente. Ainsi, tout ce qui a été dit d'un point de vue financier pour l'option de vente sera applicable à la GMAB car celle-ci n'est autre qu'un PUT auquel nous appliquons une probabilité.

Nous nous sommes demandés jusque là comment apparenter la GMAB à une option. Une formule simple en a découlé : la GMAB sera tarifée comme une option de vente européenne, pondérée par la probabilité de présence de l'assuré à l'échéance du contrat. Cependant, comme tout contrat d'assurance, la GMAB présente des frais. Comment modéliser ces frais dans la tarification de la GMAB ?

2.2 Prise en compte des frais

Les frais en lien avec la GMAB, exprimés en pourcentage de la valeur liquidative du contrat, peuvent être classés en trois catégories.

Tout d'abord, intéressons-nous aux frais d'acquisition. Ces derniers sont prélevés, comme son nom l'indique, lors de l'acquisition de la garantie : ils ne sont donc réglés qu'une fois au cours de la vie de la garantie, au début du contrat. La garantie présentera pour valeur initiale du sous-jacent, la prime initiale investie nette de frais d'acquisition.

Ensuite, viennent les frais de gestion. Ces frais, liés à la vie du contrat, sont prélevés chaque année sur l'épargne du client. Du point de vue de la modélisation, ils seront assimilés à un versement de dividendes continus. En effet, un dividende vient diminuer le cours d'une action, tout comme les frais diminuent la valeur liquidative du contrat, quelque soit le montant de l'épargne disponible.

Enfin, il y a le chargement lié à la garantie, que nous cherchons à déterminer. Ce chargement n'est pas donné en euros mais en pourcentage de la valeur liquidative du contrat. Dans le cas d'un prélèvement unique de frais au titre de la garantie, ce chargement s'exprime en pourcentage de la prime investie, nette de frais d'acquisition. Dans le cas de prélèvements périodiques, il s'exprime en pourcentage de la valeur liquidative du contrat à l'instant du prélèvement, prélèvement effectué chaque année.
Le chargement à déterminer est la valeur des frais qui annule la *Fair-Value* de la garantie. La Fair-Value est définie comme la différence entre l'engagement de l'assureur et celui de l'assuré. Quels sont-ils ?

2.3 Valeur actuelle probable de l'assureur et de l'assuré

Notons $PUT(S, K, T, r, \sigma_A, q)$, le prix à l'instant initial d'une option de vente européenne présentant les caractéristiques suivantes :

S	le sous-jacent,
K	le prix d'exercice,
T	la maturité de l'option,
r	le taux sans risque,
σ_A	la volatilité du sous-jacent,
q	le taux de dividende continu.

Des méthodes d'évaluation de cette option de vente seront expliquées ultérieurement.

2.3.1 Cas d'un contrat à paiement unique de la garantie

Puisque la GMAB s'évalue comme une option de vente européenne pondérée par une probabilité de présence de l'assuré à l'échéance du contrat, la valeur actuelle probable (VAP) de l'assureur à l'instant initial, dans le cas d'un contrat pour lequel la garantie est payée de façon unique en début de contrat est donné par :

$$VAP\_Assureur = PUT\left(S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt), \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, fr\_gestion\right) \times {}_T p_x^{PRES}$$

Où	S_0	est la prime initiale investie,
	K	est le montant minimum garanti par l'assureur,
	T	est la maturité du contrat,
	r	est le taux sans risque,
	σ_A	est la volatilité du sous-jacent,
	fr_acq	représente les frais d'acquisition,
	$fr\_gestion$	représente les frais de gestion,
	$chgt$	représente les chargements au titre de la garantie,
	x	représente l'âge de l'assuré.

Le sous-jacent est bien constitué de la prime initiale investie nette de frais d'acquisition et du chargement de la garantie. Les frais de gestion sont, quant à eux, assimilés à un dividende continu.

La VAP de l'assuré en début de contrat est :

$$VAP\_Assuré = chgt.S_0.(1 - fr\_acq)$$

2.3.2 Cas d'un contrat à paiement périodique de la garantie

Dans le cas d'un contrat où la garantie est payée périodiquement, le chargement au titre de la garantie est assimilé à un dividende continu. La VAP de l'assureur s'écrit à l'instant initial alors :

$$VAP\_Assureur = PUT\left(S_0.(1-fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt\right) \times {}_T p_x^{PRES}$$

Sommons les frais probables futurs actualisés pour obtenir la VAP de l'assuré à l'instant initial :

$$VAP\_Assuré = \sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_t p_x^{PRES}$$

Remarquons que la VAP de l'assuré dépend de l'évolution de l'épargne et ne peut donc être connue à l'instant initial.

Les VAP de l'assureur et de l'assuré font appel à des probabilités de présence puisque l'assuré doit être encore dans le portefeuille à l'échéance du contrat, pour bénéficier de sa garantie et tout au long du contrat, pour payer les chargements au titre de cette garantie. Que signifie plus précisément être présent sur le contrat ? Comment évaluer ces probabilités de présence ?

2.4 Probabilité de présence

L'assuré est considéré comme sorti du contrat s'il est décédé ou s'il a racheté son contrat. Le rachat correspond à la volonté de l'assuré de récupérer l'épargne acquise sur son contrat avant la date d'échéance de son contrat. Le rachat peut être total, l'assuré désire reprendre la totalité de son épargne et met fin à son contrat ou partiel, l'assuré ne désire récupérer qu'une partie de son épargne et son contrat reste alors en vigueur.

La probabilité de sortie de l'assuré est donc la somme de la probabilité de décès, de la probabilité de rachat total et de la probabilité de rachat partiel. Il faut noter que ces probabilités sont différentes des valeurs données par les tables, seules valeurs que nous possédons. En effet, les tables définissent des lois de sortie par événement sur des portefeuilles de contrats indépendamment des autres évènements (comme s'ils ne se produisaient jamais sur ces portefeuilles). Par exemple, nous utilisons la table TGF05 pour estimer les décès sur notre portefeuille, cependant cette table ne prend pas en compte le fait que l'assuré ait pu déjà effectuer le rachat de son contrat. Il y a donc une manipulation à effectuer entre les valeurs issues des tables (que nous nommerons « probabilités absolues ») et les valeurs qui nous seront utiles pour calculer la probabilité de sortie (que nous appellerons « probabilités observées ») car sinon nous risquerions de comptabiliser deux fois une sortie pour un même assuré.

Nous avons donc $P^{SORTIE} = P^{DC,obs} + P^{RT,obs} + P^{RP,obs}$ avec :

- $P^{DC,obs}$, la probabilité de décès observée,
- $P^{RT,obs}$, la probabilité de rachat total observée,
- $P^{RP,obs}$, la probabilité de rachat partiel observée.

Notons ${}_t p_x^{PRES}$, la probabilité que l'assuré d'âge x soit présent sur le contrat, l'année $t \in [0,T]$.

Après calculs (cf. démonstration en *Annexe C*), il vient :

$${}_t p_x^{PRES} = \prod_{k=0}^{t-1} p_{x+k}^{PRES} \qquad \text{où} \qquad p_{x+k}^{PRES} = \left(1-P_{x+k}^{DC}\right).\left(1-P_k^{RT}\right).\left(1-P_k^{RP}\right)$$

Avec P_{x+k}^{DC}, probabilité de décès <u>absolue</u> (donnée par les tables), à l'âge $x+k$.

P_k^{RT}, probabilité de rachat total <u>absolue</u>, à l'instant k.

P_k^{RP}, probabilité de rachat partiel <u>absolue</u>, à l'instant k.

Notons que les rachats sont difficilement appréhendables car plusieurs facteurs peuvent intervenir. En effet, les rachats peuvent dépendre de l'évolution des marchés financiers : en cas de très bonnes performances de ces derniers, la garantie peut apparaître à l'assuré inutile et pousser ainsi ce dernier à racheter son épargne. De même, des avantages fiscaux plus avantageux à partir de 8 ans peuvent le tenter au rachat. N'oublions pas qu'il existe aussi des raisons exogènes au rachat, pas vraiment quantifiables par l'assureur, comme par exemple, un besoin de liquidité chez l'assuré. Ainsi, la difficulté de modéliser ce type de comportement est liée à son caractère incomplètement rationnel.
Pour la tarification, nous utiliserons des lois statiques de rachat et supposerons donc que les rachats proviennent d'une cause totalement exogène et ne dérivent pas d'un comportement du client. Les coefficients de chute dépendront alors de l'ancienneté du contrat et seront indépendants de l'âge de l'assuré et des performances des marchés financiers.

Après avoir vu comment évaluer les probabilités de présence, reste à déterminer comment tarifer l'option de vente. Deux méthodes peuvent être utilisées.

2.5 Méthodes de tarification

2.5.1 Formule fermée

Pour tarifer l'option de vente, nous pouvons utiliser le modèle de Merton (1973) qui généralise la formule de Black-Scholes aux instruments payant des dividendes continus.

Sous les hypothèses de marché parfait et complet, en l'absence d'opportunités d'arbitrage et en supposant que les opérations de prêts et d'emprunts se fassent au taux sans risque constant, le modèle de Merton donne :

$$PUT(S,K,T,r,\sigma_A,q) = K.\exp(-rT).N(-d_2) - S_0.\exp(-q.T).N(-d_1)$$

Avec $N(.)$, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

et $$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S_0}{K}\right] + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right).T}{\sigma_A.\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$$

Il suffit alors de pondérer ce résultat par la probabilité de présence de l'assuré à l'échéance du contrat, ce que nous avons défini dans le paragraphe précédent, pour obtenir la VAP de l'assureur.

La formule précédente est utilisable dans le cas d'une garantie plancher simple en prenant $K = S_0$ et dans le cas d'une garantie plancher roll-up en prenant $K = S_0 \times (1 + roll\_up)^T$ où $roll\_up$ désigne le taux minimum de revalorisation garanti. Par contre dans le cas d'une garantie plancher cliquet, le montant garanti K dépend du scenario d'actifs. L'option de vente est du type lookback et il n'existe pas de formules fermées pour obtenir son prix.

2.5.2 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo, basée sur la Loi Forte des Grands Nombres, permet de tarifer certaines caractéristiques du contrat en effectuant un nombre suffisant de simulations, que nous ne pouvons évaluer en formules fermées. C'est le cas, comme cité précédemment, de la garantie plancher cliquet car le montant garanti dépend alors du scenario de l'actif. De même, les montants périodiques de frais ne peuvent être déterminés que via cette méthodologie puisque là encore, l'apport de l'assuré dépendra de l'épargne présente sur son contrat à l'instant du prélèvement.

Pour utiliser la méthode Monte-Carlo, nous devons établir une chronologie des frais prélevés puisque la valeur liquidative du contrat est calculée chaque année. Nous retiendrons la chronologie suivante :

- Frais d'acquisition (prélevés une seule fois, au moment de l'acquisition du contrat)
- Chargement au titre de la garantie (prélevé de manière unique ou périodique selon le contrat)
- Frais d'arbitrage (en cas de réallocation d'actifs)
- Frais de gestion
- Probabilité de sortie

Pour déterminer le prix de la garantie par cette méthode, nous devons effectuer des boucles.

<u>Voici la méthodologie retenue pour le cas d'un contrat où la garantie est payée en une unique fois</u> :

Nous commençons par calculer la Valeur Liquidative (VL) du contrat à l'instant initial : il s'agit de la prime brute nette de frais d'acquisition. Les frais payés au titre de la garantie par l'assuré sont constitués du chargement appliqué à la prime brute nette de frais d'acquisition. La VL du contrat est alors diminuée de ce chargement. Puis, il y a prélèvement des frais de gestion. Nous supposons en outre, qu'il n'y a pas de sortie à l'instant initial : nous n'avons donc pas à pondérer la VL par la probabilité de présence de l'assuré.

Ensuite, repartant de l'épargne ainsi obtenue, nous calculons la VL à l'instant $t = 1$ en utilisant la formule d'évaluation du support issu du mouvement brownien géométrique. Les paramètres utilisés sont ceux du support sur lequel l'assuré a choisi d'allouer son épargne. Les frais de gestion sont alors prélevés sur l'épargne et enfin, la VL est pondérée par la probabilité de rester de l'assuré, au cours de cette première année.

Nous reproduisons cette démarche jusqu'à $t = T$. A l'instant final, les flux de la garantie sont évalués. La VAP de l'assureur est le maximum entre le montant garanti (prime initiale brute diminuée de la probabilité de sortie des assurés) auquel la VL finale du contrat est retranchée et zéro, le tout actualisé à l'instant initial. La VAP de l'assuré est constituée de la du montant des frais versés au titre de la garantie à l'instant initial. Enfin, nous déduisons la Fair-Value de ce scenario d'actif, qui est constituée de la VAP assureur, moins la VAP assuré.

Nous effectuons une boucle sur les scenarii (au nombre de 100 000) pour obtenir la Fair-Value moyenne.

Rappelons que nous cherchons le chargement qui annule la Fair-Value moyenne. Pour cela, nous procédons par dichotomie en supposant que la Fair-Value est une fonction affine croissante du chargement.

Dans le cas d'un contrat où le paiement de la garantie est périodique, le programme précédent est légèrement modifié car il ne faut pas oublier de prélever les chargements périodiquement. La phase d'initialisation reste inchangée. Par contre, après avoir calculé la VL du contrat par la formule d'évaluation du mouvement brownien géométrique, nous déterminons l'apport de l'assuré en multipliant le chargement par cette VL pondérée par la probabilité de présence. La VL est alors diminuée de ce chargement. Puis sont appliqués, les frais de gestion et la probabilité de rester durant la période. Pour obtenir la VAP de l'assuré, il faut alors sommer tous les apports en les actualisant. La méthodologie est ensuite la même.

<u>Remarque</u> :
Soulignons que dans la méthodologie proposée, la valeur liquidative du contrat est pondérée chaque année de la probabilité de présence à la fin de l'année. Nous aurions pu choisir d'appliquer la probabilité de présence seulement à l'échéance du contrat. Cependant, cette technique ne permet pas, par exemple de prendre en compte les rachats dynamiques (rachats effectués selon les performances des marchés financiers). Ce type de rachat n'est pas pris en compte dans notre modèle pour simplifier l'étude mais les programmes utilisés pour la tarification des véritables produits les modélisent. Souhaitant être au plus proche dans ce mémoire, des pratiques utilisées chez AXA, nous privilégierons donc la diminution de l'épargne au fil du temps.

2.6 Application numérique

Dans ce paragraphe, nous donnerons une illustration chiffrée de la tarification. Pour cela, nous nous baserons sur un seul contrat présentant les caractéristiques décrites ci-dessous.

2.6.1 Caractéristiques du contrat

Considérons le contrat présentant les spécificités suivantes :

- Caractéristiques du contrat :
  - Prime initiale investie brute : $S_0 = 30\,000$ €
  - Maturité du contrat : $T = 10$ ans
  - Age de l'assuré : $x = 40$ ans
- Frais (exprimés en % de la valeur liquidative du contrat)
  - Frais d'acquisition : $fr\_acq = 4\%$
  - Frais de gestion : $fr\_gestion = 0.96\%$
- Caractéristiques du support
  - Taux sans risque : $r = 4\%$
  - Volatilité du support A : $\sigma_A = 20\%$

2.6.2 Cas d'un contrat à paiement unique de la garantie

Comparons les tarifs de la GMAB dans le cadre d'un contrat où le paiement de la garantie s'effectue de manière unique en début de contrat. Ces tarifs sont obtenus par les méthodes de tarification en formules fermées (FF) et par Monte-Carlo (MC) :

<u>Tarifs Prélèvement Unique de frais</u>

Garantie Simple		**Garantie Roll-Up** *Taux de revalorisation : 2%*		**Garantie Cliquet** *Périodicité du cliquet : 5 ans*	
FF	MC	FF	MC	FF	MC
10.30%	10.53%	20.25%	20.56%	xxxx	13.41%

Les tarifs des deux méthodes coïncident malgré une légère différence. Cette divergence peut être expliquée par le fait que dans le modèle en formules fermées, les frais de gestion sont prélevés de manière continue alors que dans la méthode de Monte-Carlo, ils sont prélevés annuellement en fin de période. Il y a donc une légère différence de modélisation.

Notons que le tarif de la garantie Roll-Up est plus élevé que celui de la garantie Simple : ceci est totalement logique puisque le montant minimum garanti est plus important en cas de revalorisation. La garantie Cliquet présente quant à elle, un tarif intermédiaire : elle ne peut être que plus chère que la garantie Simple puisque là encore, elle permet d'obtenir un montant garanti au moins égal à la prime brute mais son prix n'explose pas car le montant garanti dépend des performances du marché à la date de relevé du cliquet.

2.6.3 Cas d'un contrat à paiement périodique de la garantie

Dans le cas d'un contrat où le paiement de la garantie est périodique, seule la méthode de Monte-Carlo permet de tarifer la garantie.
Nous supposerons en outre que le contrat présente deux supports :

- le support S_A caractérisé par une volatilité $\sigma_A = 20\%$,
- le support S_B caractérisé par une volatilité $\sigma_B = 30\%$.

<u>Tarifs Prélèvements Périodiques (issus de la méthode de Monte-Carlo)</u>

	Garantie Simple	**Garantie Roll-Up** *Taux de revalorisation : 2%*	**Garantie Cliquet** *Périodicité du cliquet : 5 ans*
Support A	1.24%	2.75%	1.79%
Support B	2.33%	4.19%	3.29%

Nous pourrions effectuer les mêmes remarques que dans le cas à prélèvement unique concernant l'évolution des tarifs entre les différentes garanties. Notons, de plus, que le tarif du support S_B est toujours supérieur à celui du support S_A pour une même garantie : ceci est dû au fait que le support S_B est plus risqué donc plus cher. Cependant, nous pouvons remarquer que l'écart entre ces deux tarifs varie selon la garantie considérée.

Après avoir bien introduit la GMAB, intéressons-nous aux conséquences d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC sur cette garantie. Deux types d'effets vont apparaître. Nous retrouverons les conséquences purement financières évoquées précédemment. Mais cette fois, la tarification de la GMAB prend en compte également le comportement des assurés via les lois de mortalité et de rachat. D'autres conséquences vont ainsi apparaître suite à une réallocation d'actifs, dues à la modification du comportement des assurés ayant réalloué leur épargne. Quel sera ce deuxième coût ?

<u>Chapitre 11</u> : IMPACT D'UNE REALLOCATION D'ACTIFS

Dans ce chapitre, nous étudierons l'impact d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC sur la garantie GMAB. Nous nous limiterons au cas d'une garantie plancher <u>simple</u>.

1. Modification de l'option de vente

Dans un premier temps, nous supposerons qu'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC ne modifie pas les lois du passif utilisées pour la tarification. Ainsi, les probabilités de décès et surtout les probabilités de rachat total et partiel ne subiront aucune modification en cas de réallocation. En revanche, une réallocation d'actifs impactera l'option de vente, comme nous l'avons vu dans les précédentes parties. En reprenant les notations déjà utilisées, nous pouvons donc dire qu'une réallocation d'un support S_A vers un autre support S_B avec prélèvement de frais d'arbitrage, modifie l'option de vente initiale qui était $PUT(S_0, K, T, r, \sigma_A, q)$ en la faisant devenir $PUT(\mathrm{S}_0, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{q}, t_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall)$.

En particulier,

$$PUT(\mathrm{S}_0, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{r}, \sigma_A, \mathrm{q}, t_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall) = K.\exp(-rT).N(-d_2) - S_0.(1 - fr\_reall).\exp(-q.T).N(-d_1)$$

Où

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0.(1 - fr\_reall)}{K}\right) + (r-q).T + \frac{1}{2}\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \frac{1}{2}\sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Reall}})}{\sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Reall}})}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_A^2.t_{\mathrm{Reall}} + \sigma_B^2.(T - t_{\mathrm{Reall}})}$$

1.1 Cas d'un contrat à paiement unique de la garantie

Dans le cas d'un contrat où la garantie est payée une unique fois en début de contrat, la VAP de l'assureur à l'instant initial s'écrit suite à une réallocation :

$$VAP\_Assureur = PUT(S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion, t_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall) \times {}_T p_x^{PRES}$$

La VAP de l'assuré reste la même, soit :

$$VAP\_Assuré = chgt.S_0.(1 - fr\_acq) + fr\_reall.S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt)$$

Ainsi, une réallocation d'actifs fait naître le résultat suivant chez l'assureur :

$$\begin{aligned} R &= VAP\_Assuré - VAP\_Assureur \\ &= chgt.S_0.(1 - fr\_acq) + fr\_reall.S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt) \\ &\quad - PUT(S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion, t_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall) \times {}_T p_x^{PRES} \end{aligned}$$

Avec

$$chgt.S_0.(1 - fr\_acq) = PUT(S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion) \times {}_T p_x^{PRES}$$

Ce résultat peut être calculé soit par formules fermées, à l'aide de la formule donnée précédemment, soit par la méthode de Monte Carlo.

Dans le cas d'une tarification par la méthode de Monte Carlo, la méthodologie décrite précédemment doit être adaptée comme suit :

Nous commençons par calculer la Valeur Liquidative (VL) du contrat à l'instant initial : il s'agit de la prime brute nette de frais d'acquisition. Le montant unique de frais demandés à l'assuré au titre de la garantie est constitué du chargement appliqué à la prime brute nette de frais d'acquisition. La VL du contrat est alors diminuée de ce chargement. *Si l'assuré réalloue dès l'instant initial, il y a alors prélèvement de frais d'arbitrage sur cette VL et consécutivement, l'apport de l'assuré est augmenté de ce montant de frais.* Puis, il y a prélèvement des frais de gestion sur la VL. Nous supposons en outre, qu'il n'y a pas de sortie à l'instant initial : nous n'avons donc pas à pondérer la VL par la probabilité de présence de l'assuré.

Ensuite, repartant de l'épargne ainsi obtenue, nous calculons la VL à l'instant $t=1$ en utilisant la formule d'évaluation du support issu du mouvement brownien géométrique. *La volatilité utilisée pour cela est la volatilité du support initial (si l'on est avant ou au moment de la réallocation) ou la volatilité du support final (si l'on est après la réallocation). Si l'assuré effectue une réallocation à ce moment là, il y a alors prélèvement de frais d'arbitrage sur cette VL et consécutivement, l'apport de l'assuré est augmenté de ce montant de frais.* Les frais de gestion sont prélevés sur l'épargne et enfin, la VL est pondérée par la probabilité de rester de l'assuré, au cours de cette première année.

Nous reproduisons cette démarche jusqu'à $t=T$. A l'instant final, les flux de la garantie sont évalués. La VAP de l'assureur est le maximum entre le montant garanti (prime initiale nette diminuée de la probabilité de sortie) auquel la VL finale du contrat est retranchée et zéro, le tout actualisé à l'instant initial. La VAP de l'assuré est constituée des frais versés au titre de la garantie à l'instant initial *ainsi que de l'apport de l'assuré au moment de l'arbitrage actualisé à l'instant initial*. Enfin, nous déduisons la Fair-Value de ce scenario d'actif, qui est constituée de la VAP assureur, moins la VAP assuré.

Nous effectuons une boucle sur les scenarii (au nombre de 100 000) pour obtenir la Fair-Value moyenne.

Application numérique :

Reprenons les données numériques utilisées dans le chapitre précédent :

- Prime brute : $S_0 = 30\,000$ €
- Maturité du contrat : $T = 10$ ans
- Age de l'assuré : $x = 40$ ans
- Frais d'acquisition : $fr\_acq = 4\%$
- Frais de gestion : $fr\_gestion = 0.96\%$
- Taux sans risque : $r = 4\%$
- Frais d'arbitrage : $fr\_reall = 1\%$

Rappelons que cette étude est menée dans le cas d'une garantie plancher simple, aussi $K = 30\,000$ € .

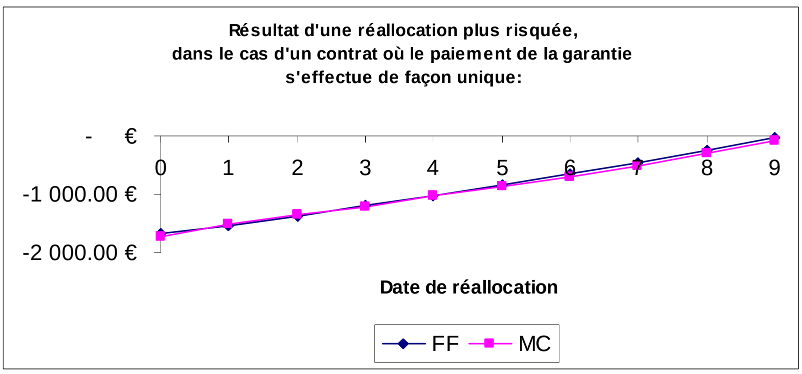
➢ Cas d'une réallocation plus risquée

Nous considérerons les paramètres suivant :

- Volatilité du support initial A : $\sigma_A = 20\%$
- Volatilité du support final B : $\sigma_B = 30\%$

Résultat en fonction de la méthode utilisée :

Date de réallocation	Reallocation plus risquée	
	FF	MC
0	- 1 686.29 €	- 1 719.58 €
1	- 1 530.25 €	- 1 508.16 €
2	- 1 368.65 €	- 1 361.32 €
3	- 1 201.02 €	- 1 222.05 €
4	- 1 026.77 €	- 1 040.11 €
5	- 845.24 €	- 875.74 €
6	- 655.64 €	- 691.77 €
7	- 457.01 €	- 521.16 €
8	- 248.18 €	- 301.86 €
9	- 27.71 €	- 86.78 €



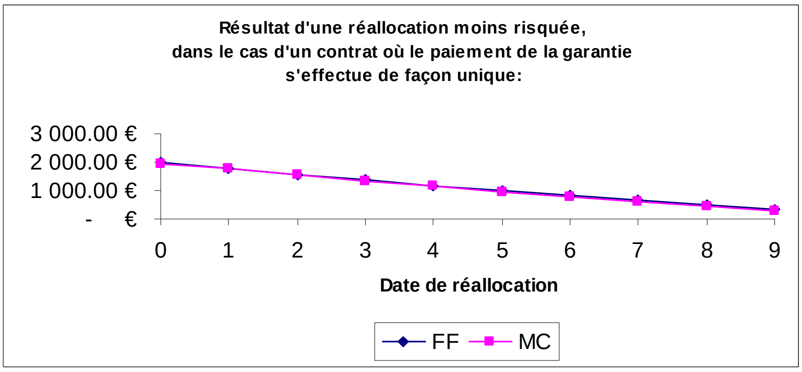
➢ Cas d'une réallocation moins risquée

Nous considérerons les paramètres suivant :

- Volatilité du support initial A : $\sigma_A = 30\%$
- Volatilité du support final B : $\sigma_B = 20\%$

<u>Résultat en fonction de la méthode utilisée</u> :

Date de réallocation	Reallocation moins risquée	
	FF	MC
0	2 018.66 €	1 956.75 €
1	1 790.71 €	1 776.47 €
2	1 576.38 €	1 546.48 €
3	1 373.75 €	1 352.41 €
4	1 181.31 €	1 143.54 €
5	997.86 €	960.50 €
6	822.41 €	789.72 €
7	654.15 €	607.59 €
8	492.42 €	445.15 €
9	336.62 €	286.07 €



Les résultats obtenus sont similaires quelque soit la méthode de tarification utilisée. Remarquons que nous retrouvons les formes de résultat obtenues dans la partie I :

- forme croissante avec le temps, pour une réallocation plus risquée,
- forme décroissante, pour une réallocation moins risquée.

Ceci est dû au fait qu'une réallocation d'actifs dans la GMAB payée par un prélèvement de frais unique en début de contrat, implique une modification de l'option de vente, semblable à celle déjà vue en première partie. Là encore, une réallocation vers un support plus risqué entraîne une perte pour l'assureur, qui doit alors la privilégier en fin de contrat.

1.2 Cas d'un contrat à paiement périodique de la garantie

Dans le cas d'un contrat où le paiement de la garantie est périodique, une réallocation modifiera la VAP de l'assureur comme suit :

$$VAP\_Assureur = PUT\left(S_0.(1 - fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt, t_{\text{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) \times {}_T p_x^{PRES}$$

La forme de la VAP de l'assuré reste la même, soit

$$VAP\_Assuré = \sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_t p_x^{PRES} + fr\_reall.S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt)$$

mais la VL sera évaluée tantôt avec la volatilité initiale, tantôt avec la volatilité finale selon l'instant où elle est déterminée et la date de réallocation.

Ainsi, une réallocation d'actifs fait naître le résultat suivant chez l'assureur :

$$\begin{aligned} R &= VAP\_Assuré - VAP\_Assureur \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_t p_x^{PRES} + fr\_reall.S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt) \\ &\quad - PUT\left(S_0.(1 - fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt, t_{\text{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) \times {}_T p_x^{PRES} \end{aligned}$$

<u>Application numérique</u> :

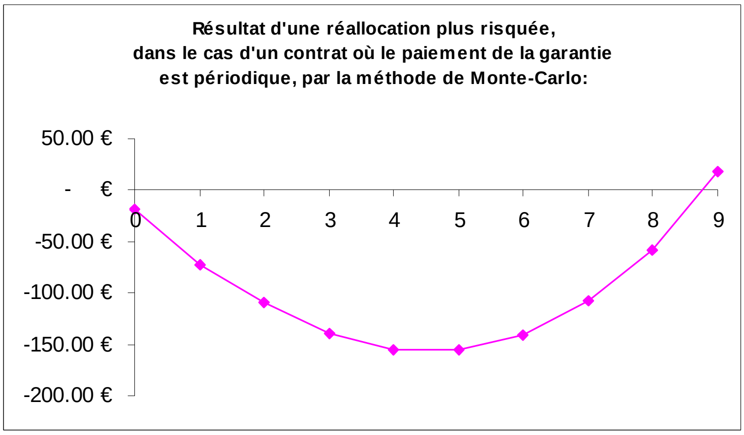
Reprenons les mêmes données chiffrées que celle présentées précédemment. Dans le cas d'un contrat à prélèvement périodique de la garantie, seule la méthode de Monte-Carlo permet d'obtenir le résultat de réallocation car celui-ci dépend du scenario d'actifs via la VAP de l'assuré.

➢ Cas d'une réallocation plus risquée

La réallocation se caractérise par le passage du support de volatilité $\sigma_A = 20\%$ au support de volatilité $\sigma_B = 30\%$.

<u>Résultat dans le cas d'un contrat où la garantie est payée périodiquement</u> :

Date de réallocation	Résultat d'une réallocation plus risquée
0	- 18.44 €
1	- 73.24 €
2	- 109.63 €
3	- 139.65 €
4	- 155.70 €
5	- 156.12 €
6	- 141.52 €
7	- 106.87 €
8	- 57.82 €
9	18.80 €

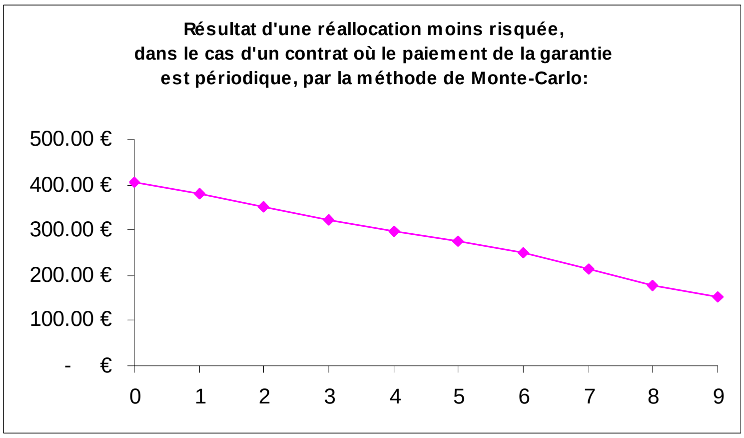


➢ Cas d'une réallocation moins risquée

La réallocation se caractérise par le passage du support de volatilité $\sigma_B = 30\%$ au support de volatilité $\sigma_A = 20\%$.

<u>Résultat dans le cas d'un contrat où la garantie est payée périodiquement</u> :

Date de réallocation	Résultat d'une réallocation moins risquée
0	406.19 €
1	381.32 €
2	351.73 €
3	323.29 €
4	296.76 €
5	276.64 €
6	250.02 €
7	213.47 €
8	177.27 €
9	152.88 €



Là encore, nous retrouvons les formes obtenues dans les parties précédentes. Soulignons la forme parabolique dans le cas d'une réallocation plus risquée.

Dans cette section, nous nous sommes attardés seulement sur les conséquences financières d'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en UC puisque l'impact ne portait que sur l'option de vente, la probabilité de présence n'étant pas affectée. Ceci peut paraître tout à fait réaliste du point de vue de la mortalité : un assuré n'a, a priori, pas plus ou moins de risque de décéder s'il a effectué une réallocation d'actifs ! Cependant, au niveau des rachats, cela peut apparaître plus tendancieux. En effet, nous pourrions penser qu'un assuré ayant réalloué son épargne comme il le désirait, sera plus satisfait et aura alors tendance à effectuer moins de rachat. Penchons-nous désormais sur l'impact d'une réallocation d'actifs au niveau du comportement de l'assuré qui a modifié sont allocation d'actifs.

2. Modification des lois du passif

Etudions les conséquences d'une réallocation sur la GMAB lorsqu'il y a modification des lois du passif et plus particulièrement distorsion des lois de rachat.

2.1 Modélisation des nouvelles lois du passif

Actuellement, il n'existe pas, au sein de AXA, de lois d'arbitrage, ni de lois mesurant l'impact des arbitrages sur les rachats car la compagnie ne dispose pas de données en nombre suffisant pour en élaborer. Dans la suite, nous devrons donc faire des hypothèses pour modéliser ces lois. Soulignons que le but de ce paragraphe n'est pas de trouver comment modéliser au plus juste ces types de loi mais simplement de remarquer l'impact de cette modification des lois du passif sur le coût de la garantie.

Notons ${}_t p'^{PRES}_x$, la probabilité modifiée suite à une réallocation, que l'assuré d'âge x soit présent sur le contrat, l'année $t \in [0,T]$.

En particulier, ${}_T p'^{PRES}_x = \prod_{k=0}^{T-1} p'^{PRES}_{x+k}$ où $p'^{PRES}_{x+k} = \left(1 - P^{DC}_{x+k}\right).\left(1 - P'^{RT}_k\right).\left(1 - P'^{RP}_k\right)$

$$P'^{RT}_k = P^{RT}_k - impact\_RT$$
$$P'^{RP}_k = P^{RP}_k - impact\_RP$$

Ainsi, l'impact d'une réallocation d'actifs sur les lois du passif sera modélisé par un écart absolu entre les lois de rachats d'origine et les lois de rachat modifiées après réallocation. Soulignons également que les réallocations impactent les lois absolues de rachat (total et partiel) : il y aura ainsi, moins de décès « cachés » par les rachats. Nous supposerons enfin, que si les réallocations sont autorisées alors les lois de rachat sont modifiées pour tous les instants et pas seulement les instants après la réallocation.

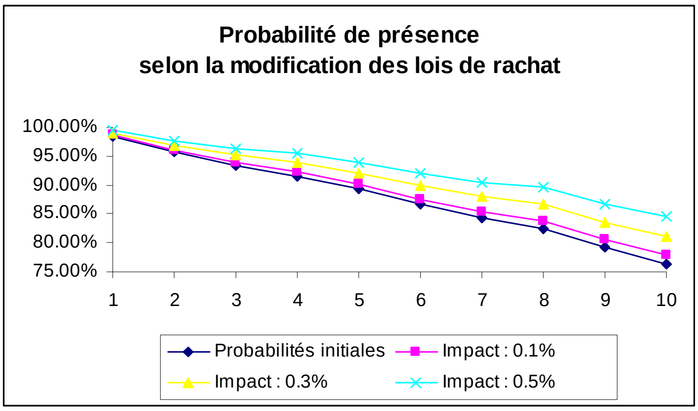
Application numérique :

Pour cette application numérique, nous supposerons comme précédemment que $x = 40 \text{ ans}$ et nous considérerons que $impact\_RT = impact\_RP$.

Le tableau donne les probabilités de présence pour différentes maturités et pour différents écarts absolus entre les lois d'origine et les lois modifiées.

Nouvelles lois du passif :

Date	Probabilité de présence			
	Probabilités initiales	Impact : 0.1%	Impact : 0.3%	Impact : 0.5%
1	98.45%	98.65%	99.04%	99.44%
2	95.72%	96.11%	96.89%	97.67%
3	93.44%	94.00%	95.15%	96.31%
4	91.60%	92.34%	93.84%	95.37%
5	89.34%	90.24%	92.08%	93.96%
6	86.57%	87.63%	89.78%	91.98%
7	84.28%	85.48%	87.94%	90.45%
8	82.56%	83.90%	86.66%	89.50%
9	79.13%	80.58%	83.57%	86.66%
10	76.43%	77.99%	81.21%	84.56%



Les probabilités de présence modifiées en cas d'arbitrage sont alors plus importantes. Cette modélisation paraît donc pertinente puisque comme précédemment expliqué, nous pouvons imaginer que l'assuré, plus satisfait de son contrat s'il peut réallouer son épargne comme il le souhaite, aura moins tendance à le racheter et il y aura au fil du temps, plus d'assurés présents dans le portefeuille.

La GMAB étant une garantie en cas de vie, ceci va dégrader les résultats de la réallocation puisque l'assureur aura alors, en plus d'avoir mal évalué l'option de vente, sous-estimé la probabilité de présence de ses assurés. La VAP de l'assureur va donc augmenter car la compagnie d'assurance devra payer plus de prestations du fait qu'il y aura à l'échéance du contrat plus d'assurés toujours dans le portefeuille envers qui elle s'est engagée. Soulignons qu'une modification des lois du passif dégrade les résultats de l'assureur aussi bien pour une réallocation plus risquée que pour une réallocation moins risquée. Etudions ce phénomène plus précisément dans le cas d'un contrat où la garantie est payée en une unique fois en début de contrat puis dans le cas où le paiement de la garantie s'effectue périodiquement.

2.2 *Cas d'un contrat à paiement unique de la garantie*

En cas de réallocation d'actifs au sein du contrat en UC, la VAP de l'assureur devient :

$$VAP\_Assureur = PUT\left(S_0.(1-fr\_acq).(1-chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion, t_{\text{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) \times {}_T p'^{PRES}_x$$

Puisque ${}_T p'^{PRES}_x > {}_T p^{PRES}_x$, autrement dit la probabilité de présence à l'échéance devient plus importante après une réallocation, la VAP de l'assureur est consécutivement plus élevée après réallocation.

La VAP de l'assuré reste la même que celle définie précédemment, soit

$$VAP\_Assuré = chgt.S_0.(1-fr\_acq) + fr\_reall.S_0.(1-fr\_acq).(1-chgt)$$

Le résultat chez l'assureur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} R = {} & chgt.S_0.(1-fr\_acq) + fr\_reall.S_0.(1-fr\_acq).(1-chgt) \\ & - PUT\left(S_0.(1-fr\_acq).(1-chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion, t_{\text{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) \times {}_T p'^{PRES}_x \end{aligned}$$

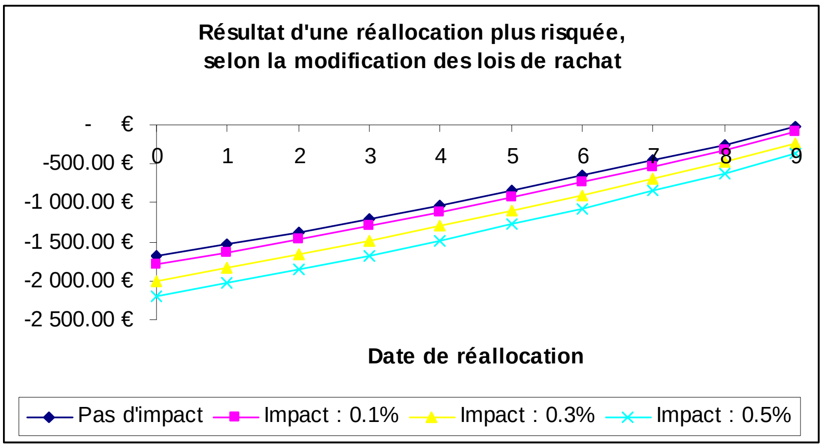
Application numérique :

Nous reprenons les données présentes dans la section 1 et visualisons les résultats de l'assureur suite à une réallocation, selon la modification des lois de rachats. Nous effectuerons des sensibilités suivant l'impact retranché aux probabilités de rachat.

Les résultats des différentes formules sont obtenus par la méthode des formules fermées.

- **Cas d'une réallocation plus risquée**
  (Réallocation du support de volatilité 20% vers le support de volatilité 30%)

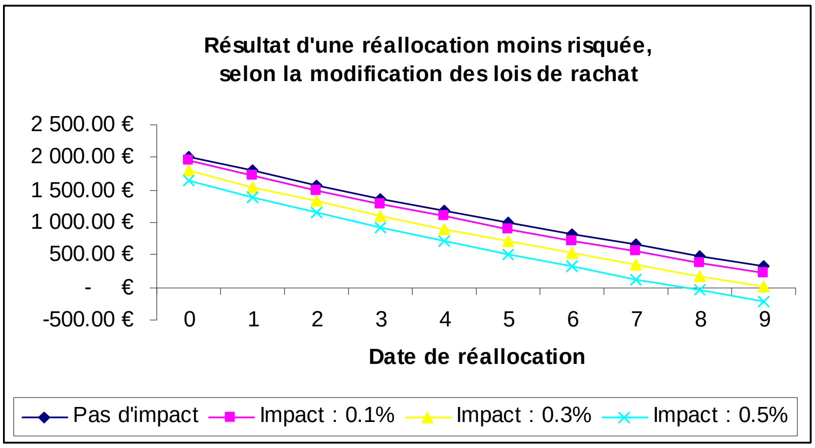
	Résultat d'une réallocation plus risquée			
Date de réallocation	**Pas d'impact**	**Impact : 0.1%**	**Impact : 0.3%**	**Impact : 0.5%**
0	- 1 686.29 €	- 1 786.78 €	- 1 993.67 €	- 2 208.65 €
1	- 1 530.25 €	- 1 627.55 €	- 1 827.86 €	- 2 036.01 €
2	- 1 368.65 €	- 1 462.65 €	- 1 656.16 €	- 1 857.24 €
3	- 1 201.02 €	- 1 291.59 €	- 1 478.03 €	- 1 671.78 €
4	- 1 026.77 €	- 1 113.78 €	- 1 292.88 €	- 1 479.00 €
5	- 845.24 €	- 928.53 €	- 1 100.00 €	- 1 278.17 €
6	- 655.64 €	- 735.05 €	- 898.53 €	- 1 068.40 €
7	- 457.01 €	- 532.35 €	- 687.47 €	- 848.65 €
8	- 248.18 €	- 319.25 €	- 465.57 €	- 617.62 €
9	- 27.71 €	- 94.27 €	- 231.30 €	- 373.70 €



➢ Cas d'une réallocation moins risquée

(Réallocation du support de volatilité 30% vers le support de volatilité 20%)

	Résultat d'une réallocation moins risquée			
Date de réallocation	Pas d'impact	Impact : 0.1%	Impact : 0.3%	Impact : 0.5%
0	2 018.66 €	1 946.32 €	1 797.40 €	1 642.66 €
1	1 790.71 €	1 713.70 €	1 555.18 €	1 390.46 €
2	1 576.38 €	1 494.99 €	1 327.45 €	1 153.35 €
3	1 373.75 €	1 288.22 €	1 112.14 €	929.17 €
4	1 181.31 €	1 091.84 €	907.66 €	716.27 €
5	997.86 €	904.63 €	712.72 €	513.30 €
6	822.41 €	725.59 €	526.29 €	319.20 €
7	654.15 €	553.90 €	347.51 €	133.05 €
8	492.42 €	388.85 €	175.66 €	- 45.88 €
9	336.62 €	229.87 €	10.11 €	- 218.24 €



Quel que soit le sens de la réallocation, plus l'altération des lois de rachat du fait de la réallocation est importante, plus les résultats pour l'assureur sont dégradés car dès lors, l'assureur a d'autant plus mal apprécié son engagement en sous-estimant le nombre d'assurés toujours présents à l'échéance du contrat à qui des prestations devront être versées. Notons que dans le cas d'une réallocation moins risquée, selon l'impact de l'arbitrage sur les lois de rachat, il se peut que la modification de l'allocation d'actifs entraîne une perte pour l'assureur : c'est le cas par exemple, pour les deux dernières dates dans le cas d'un impact de 0.5%.
Consacrons-nous désormais au cas d'un contrat où le paiement de la garantie est périodique.

2.3 *Cas d'un contrat à paiement périodique de la garantie*

Le même type de raisonnement peut être tenu dans le cas d'un contrat à prélèvements périodiques et les mêmes conséquences apparaissent.

La VAP assureur devient :

$$VAP\_Assureur = PUT\left(S_0.(1-fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt, t_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) \times {}_{T}p'^{PRES}_{x}$$

Dans le cas d'un contrat à prélèvements périodiques, la VAP assuré est également modifiée puisqu'elle est composée de probabilités de présence chaque année.

Nous avons alors :

$$VAP\_Assuré = \sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_{t}p'^{PRES}_{x} + fr\_reall.S_0.(1-fr\_acq).(1-chgt)$$

Nous en déduisons le résultat suivant :

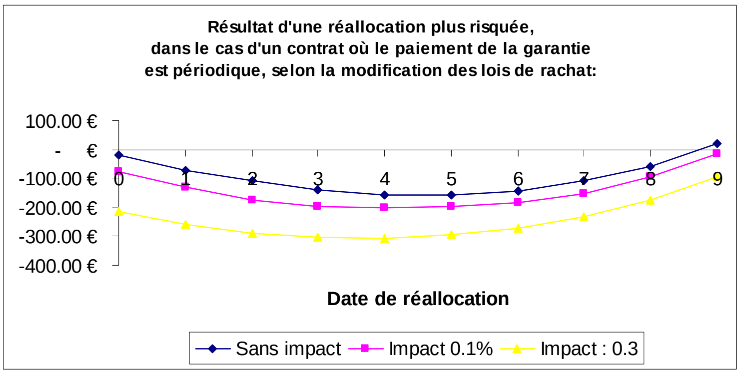
$$\begin{aligned} R = & \sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_{t}p'^{PRES}_{x} + fr\_reall.S_0.(1-fr\_acq).(1-chgt) \\ & - PUT\left(S_0.(1-fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt, t_{\mathrm{Reall}}, \sigma_B, fr\_reall\right) \times {}_{T}p'^{PRES}_{x} \end{aligned}$$

Application numérique :
Visualisons l'effet d'une modification des lois du passif suite à une réallocation sur le résultat, en reprenant les mêmes données chiffrées via la méthode de Monte-Carlo :

➢ Cas d'une réallocation plus risquée

(Réallocation du support de volatilité 20% vers le support de volatilité 30%)

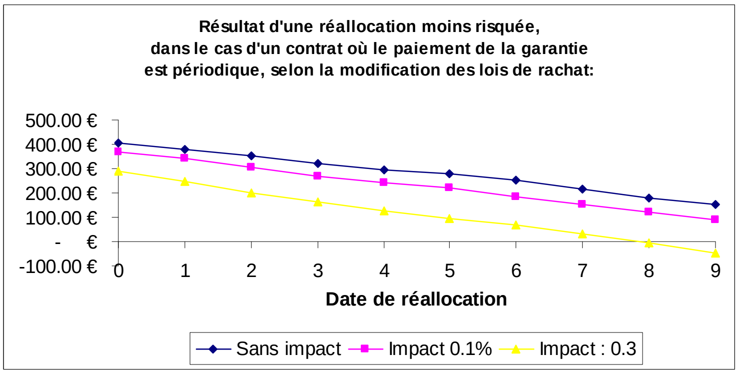
Date de réallocation	Résultat d'une réallocation plus risquée	Impact : 0.1	Impact : 0.3
0	- 18.44 €	- 77.03 €	- 213.02 €
1	- 73.24 €	- 130.87 €	- 257.83 €
2	- 109.63 €	- 172.64 €	- 287.27 €
3	- 139.65 €	- 196.00 €	- 301.88 €
4	- 155.70 €	- 201.95 €	- 304.88 €
5	- 156.12 €	- 198.24 €	- 295.70 €
6	- 141.52 €	- 183.73 €	- 273.64 €
7	- 106.87 €	- 150.51 €	- 233.39 €
8	- 57.82 €	- 96.14 €	- 173.17 €
9	18.80 €	- 14.92 €	- 93.97 €



➢ Cas d'une réallocation moins risquée

(Réallocation du support de volatilité 30% vers le support de volatilité 20%)

Date de réallocation	Résultat d'une réallocation moins risquée	Impact : 0.1	Impact : 0.3
0	406.19 €	369.16 €	287.57 €
1	381.32 €	339.70 €	244.87 €
2	351.73 €	302.99 €	201.64 €
3	323.29 €	267.98 €	163.93 €
4	296.76 €	241.31 €	128.27 €
5	276.64 €	222.31 €	94.03 €
6	250.02 €	186.49 €	65.88 €
7	213.47 €	151.20 €	33.57 €
8	177.27 €	122.36 €	- 6.02 €
9	152.88 €	89.73 €	- 46.68 €



De la même manière que le cas d'un contrat à prélèvement unique de la garantie, les résultats en cas de réallocation sont dégradés pour les contrats à prélèvements périodiques puisque là encore, l'assureur a sous-estimé ses engagements via la sous-estimation du nombre d'assurés à qui il devra verser des prestations. Ainsi dans le cas de la GMAB, aux conséquences financières de mauvaise estimation de la volatilité engendrée par une réallocation d'actifs, s'ajoute un deuxième coût lié à la modification des lois du passif, qui n'était pas présent dans les deux premières parties de ce mémoire puisqu'auparavant aucune probabilité de présence n'était prise en compte. Ce deuxième coût est dû à une mauvaise estimation des rachats des assurés, en particulier à une sous-estimation de ces derniers. La GMAB étant une garantie en cas de vie, les prestations sont versées à l'assuré si celui-ci est toujours dans le portefeuille à l'échéance du contrat. Ainsi, une surestimation des rachats entraînera une sous-estimation de la VAP de l'assureur car la compagnie d'assurance va tarifer la GMAB en faisant l'hypothèse que plus d'assurés sortiront du contrat et donc qu'à l'échéance mois d'assurés seront présents, à qui devra être versée la garantie plancher. Cette sous-évaluation de la VAP de l'assureur va donc dégrader une nouvelle fois le résultat de la réallocation.
Le coût lié à la modification des lois du passif est cependant, difficile à quantifier actuellement puisqu'aucune étude poussée sur les arbitrages n'a encore été effectuée. En effet, le nombre restreint de données disponibles de nos jours implique que les chiffres qui seraient obtenus seraient trop volatiles pour être utilisés de façon fiable dans notre étude.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés au résultat pour l'assureur d'une réallocation. Désormais, nous pouvons nous demander quel serait le tarif à demander pour une telle garantie en faisant l'hypothèse que nous possédons une loi d'arbitrage. Pour cela, nous allons évaluer la garantie sans réallocation et avec réallocation pour toutes les dates d'arbitrage possibles et ensuite appliquer cette loi d'arbitrage pour déterminer le tarif unique à demander à l'assuré.

Chapitre 12 : TARIFICATION DE LA GMAB AVEC UNE LOI D'ARBITRAGE

Nous nous placerons de nouveau dans le cas d'une garantie plancher simple. Nous supposerons que le contrat est composé de deux supports S_A et S_B, de volatilités respectives $\sigma_A = 20\%$ et $\sigma_B = 30\%$. Une seule réallocation sera autorisée et les lois de rachat seront diminuées de 0.3% en cas d'arbitrage. Nous tarifierons sans prélèvement de frais d'arbitrage en cas de réallocation.
Les autres valeurs numériques sont les suivantes :

- Prime brute : $S_0 = 30\,000$ €
- Maturité du contrat : $T = 10$ ans
- Age de l'assuré : $x = 40$ ans
- Frais d'acquisition : $fr\_acq = 4\%$
- Frais de gestion : $fr\_gestion = 0.96\%$
- Taux sans risque : $r = 4\%$

Nous étudierons successivement le cas d'un contrat pour lequel les frais au titre de la garantie sont payés de manière unique en début de contrat puis le cas d'un contrat où le paiement de la garantie est périodique.

1. Cas d'un contrat à paiement unique de la garantie

Dans le cas d'un contrat à prélèvement unique, la VAP de l'assuré est : $chgt.S_0.(1 - fr\_acq)$ et celle de l'assureur :

- $PUT(S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion) \times {}_T p_x^{PRES}$ en cas de non réallocation,
- $PUT(S_0.(1 - fr\_acq).(1 - chgt), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion, t_{\text{Reall}}, \sigma_B) \times {}_T p'^{PRES}_x$ en cas de réallocation.

Rappelons que le chargement que nous recherchons est celui qui annule la Fair-Value moyenne du contrat. Par souci de temps, nous opterons pour la méthode de pricing en formules fermées, beaucoup plus rapide que celle de Monte Carlo.

Application numérique :

➢ Cas d'une réallocation plus risquée

(Réallocation du support de volatilité 20% vers le support de volatilité 30%)

Date de Réallocation	Chargement au titre de la garantie
0	19.95%
1	19.24%
2	18.50%
3	17.73%
4	16.92%
5	16.07%
6	15.18%
7	14.25%
8	13.27%
9	12.23%
Pas de réallocation	10.30%

Soulignons que plus l'allocation vers un support présentant plus de risque, a lieu tôt, plus la garantie est chère : ainsi, nous retrouvons le même phénomène évoqué dans le cas d'une option de vente.

Nous considérerons une loi d'arbitrage statique et uniforme dans le temps, de 1% i.e. chaque année, 1% des assurés n'ayant pas réalisé d'arbitrage avant, effectuent une réallocation d'actifs dans leur contrat en UC :

Probabilités d'arbitrage	
Date	**Loi**
0	1%
1	1%
2	1%
3	1%
4	1%
5	1%
6	1%
7	1%
8	1%
9	1%

Pour déterminer le pourcentage d'assurés effectuant une réallocation par an, nous pouvons effectuer un raisonnement avec un arbre :

- la première année, 1% des assurés effectue une réallocation,
- la deuxième année, sur les (1-1%)=99% restants, 1% réalise une réallocation soit 1%×99%=0.99%,
- la troisième année, sur les (1-1%-0.99%) restants, 1% réalise une réallocation soit :
  1%×(1-1% 0.99%) =0.98% . Etc…

En poursuivant ce raisonnement, il vient :

Date	Pourcentage d'assurés réallouant
0	1%
1	0.99%
2	0.98%
3	0.97%
4	0.96%
5	0.95%
6	0.94%
7	0.93%
8	0.92%
9	0.91%

En prenant le complémentaire à la somme de ces pourcentages, nous obtenons le pourcentage d'assurés n'effectuant pas de réallocation : 90.44%.

Par obtenir le tarif désiré, il suffit alors de pondérer chaque chargement par le pourcentage d'assurés associés. D'où le tarif final : $\boxed{10.89\ \%}$
Ce tarif de 10.89% permet d'égaliser l'engagement de l'assureur avec celui de l'assuré au niveau du portefeuille dans le cas où une réallocation serait accordée quel que soit l'instant où celle-ci est réalisée. Notons que le tarif obtenu n'est finalement pas bien plus élevé que le tarif d'origine de 10.30%.

➢ Cas d'une réallocation moins risquée

(Réallocation du support de volatilité 30% vers le support de volatilité 20%)

Nous pouvons tenir le même raisonnement pour une réallocation moins risquée.

Date de Réallocation	Chargement au titre de la garantie
0	11.13%
1	12.23%
2	13.27%
3	14.25%
4	15.18%
5	16.07%
6	16.92%
7	17.73%
8	18.50%
9	19.24%
Pas de réallocation	18.47%

Les options de vente ayant subi une réallocation vers un actif moins risqué ont un coût inférieur à l'option de vente initiale. Cependant, les lois de rachat étant perturbées également, il y a plus d'assurés présents à l'échéance du contrat lorsqu'il y a eu arbitrage. Le tarif de la GMAB peut alors s'avérer supérieur au prix de la garantie initiale, c'est ce qui se produit dans notre exemple, pour les dates 8 et 9.

Reste alors à pondérer ces tarifs par la loi d'arbitrage. En réutilisant la même loi que précédemment, nous obtenons le tarif final de $\boxed{18.18\ \%}$.

Dans notre exemple, la pondération pour la loi d'arbitrage implique que le tarif final prenant en compte le phénomène de réallocation est inférieur au tarif de la garantie initiale. Dans ce cas, l'assureur peut simplement demander le tarif initial et profitera ainsi des bénéfices tirés d'une réallocation vers un support moins risqué si l'assuré décide de modifier son allocation d'actifs.

2. Cas d'un contrat à paiement périodique de la garantie

Le même raisonnement peut être tenu dans le cas d'un contrat à prélèvements périodiques : nous cherchons le chargement à demander en l'absence de réallocation et pour toutes les dates d'arbitrage possibles puis nous pondérons ces tarifs par la loi d'arbitrage.

Dans le cas d'un contrat à prélèvements périodiques, la VAP de l'assuré est :

- $\sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_t p_x^{PRES}$ en cas de non réallocation,
- $\sum_{t=0}^{T-1} chgt \times VL_t \times \exp(-r.t) \times {}_t p'^{PRES}_x$ en cas de réallocation

La VAP de l'assureur est

- $PUT(S_0.(1-fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt) \times {}_T p_x^{PRES}$ en cas de non réallocation,
- $PUT(S_0.(1-fr\_acq), K, T, r, \sigma_A, fr\_gestion + chgt, t_{\text{Reall}}, \sigma_B) \times {}_T p'^{PRES}_x$ en cas de réallocation.

Application numérique :

- **Cas d'une réallocation plus risquée**
  (Réallocation du support S_A de volatilité 20% vers le support S_B de volatilité 30%)

Voici les chargements obtenus pour le contrat aux caractéristiques présentées précédemment :

Date de réallocation	Chargement au titre de la garantie
0	2.44%
1	2.36%
2	2.27%
3	2.14%
4	2.04%
5	1.93%
6	1.83%
7	1.71%
8	1.57%
9	1.45%
Pas de réallocation	1.24%

Là aussi, la garantie présente un tarif décroissant avec l'instant de réallocation.

Reste alors à pondérer ces chargements par la loi d'arbitrage que nous supposerons égale à celle présentée dans le cas d'un contrat à prélèvement unique. Nous obtenons alors comme tarif : $\boxed{1.31\ \%}$

➢ Cas d'une réallocation moins risquée

(Réallocation du support S_B de volatilité 30% vers le support S_A de volatilité 20%)

Les chargements obtenus dans le cas d'une réallocation moins risquée sont :

Date de réallocation	Chargement au titre de la garantie
0	1.31%
1	1.45%
2	1.56%
3	1.72%
4	1.82%
5	1.94%
6	2.05%
7	2.16%
8	2.26%
9	2.37%
Pas de réallocation	2.33%

Le tarif est croissant avec la date de réallocation. Notons que si la réallocation a lieu à l'instant t = 9, le chargement de la garantie est alors supérieur à celui de la garantie initiale. Ceci est dû à la modification des lois du passif.

En pondérant par la loi d'arbitrage, il vient le tarif suivant : $\boxed{2.28\ \%}$, soit un chargement inférieur à celui de la garantie initiale.

Ainsi, nous retrouvons le même type de résultats et pouvons donc tirer des conclusions similaires dans le cas d'un contrat à prélèvement unique et d'un contrat à prélèvements périodiques.

Remarque :
Dans notre modèle de tarification, nous n'avons pas pris en compte les frais d'arbitrage demandés à l'assuré en cas de réallocation d'actifs qui augmentent l'apport de l'assuré. Si cela avait été le cas, nous aurions obtenu des taux de chargement au titre de la garantie moins élevés puisque l'apport de l'assuré aurait été majoré par le prélèvement de ces frais. Ce deuxième type de modèle de pricing peut être intéressant d'un point de vue commercial. En effet, à la vue de ces tarifs plus faibles, l'assuré peut alors être encouragé à souscrire son contrat, pensant faire une bonne affaire alors que le tarif est simplement décomposé entre chargement au titre de la garantie et frais d'arbitrage.

Pour pondérer les différents changements obtenus, nous avons utilisé des lois statiques d'arbitrage. Cette modélisation signifie que les réallocations ne dépendant que de l'ancienneté dans le contrat et résulte d'une cause exogène. Or, selon les performances des marchés et donc selon la valeur de la garantie que les assurés ont achetée, ces derniers peuvent avoir plus ou moins tendance à souhaiter effectuer une réallocation d'actifs sur leur contrat en UC. Pour prendre en compte plus précisément ce phénomène, il est possible d'utiliser pour la modélisation des lois d'arbitrage, des lois dynamiques qui contrairement aux lois statiques intègrent la valeur intrinsèque de la garantie.

3. <u>Extension au cas d'une loi d'arbitrage dynamique</u>

Ce paragraphe a pour objectif de dresser un aperçu simple du fonctionnement des lois dynamiques. Ces dernières sont déjà utilisées pour la modélisation des rachats. Nous allons dresser une rapide présentation des lois dynamiques utilisées pour modéliser les rachats puis verrons dans quelle mesure nous pouvons étendre ceci au cas des réallocations d'actifs.

La règle utilisée pour modéliser les rachats dynamiques consiste à suivre au cours du temps, le rapport entre la valeur d'exercice de la garantie et l'épargne du client. Lorsque ce rapport franchit un certain seuil, il est considéré que les assurés sont incités à exercer un rachat. Un facteur correctif est alors affecté à la loi de rachat statique.
Au sein d'AXA, les valeurs chiffrées retenues sont de 15% pour le seuil et de 10 pour le facteur correctif. Ainsi, si l'on a $\frac{VL - va\_gar}{VL} \geq 15\%$ où va_gar représente la valeur de la garantie au moment de l'évaluation et VL est la valeur liquidative du contrat alors les rachats totaux et partiels seront augmentés d'un coefficient multiplicatif de 10.
Dans cette méthode, le choix des valeurs du seuil et du facteur correctif s'avère donc déterminant, ce qui rend cette règle très critiquable. Cette méthode nécessite en outre de calculer la valeur de marché de la garantie à chaque pas de simulation, ce qui peut s'avérer long. Enfin, ce raisonnement s'appuie sur une logique de comportement optimal de la part de l'assuré mais celui-ci peut adopter une attitude différente que celle dictée par la recherche d'une espérance de gain maximale. En effet, l'assuré peut être amené à racheter son contrat prématurément pour faire par exemple, face à un besoin de liquidité ou alors préférer un gain instantané certain plutôt qu'une espérance de gains futurs supérieure soumise à aléa.

Pour modéliser les réallocations dynamiques, nous pourrions nous appuyer sur la méthodologie utilisée pour les rachats dynamiques bien que celle-ci présente des limites. Cela permettrait à l'assureur de se coller au plus proche de la réalité quant au comportement des assurés et ainsi de ne pas sous-évaluer le coût de réallocation. Cependant, alors qu'il est facile de comprendre qu'un scenario financier haussier favorise les rachats du fait que la GMAB apparaisse alors comme inutile, il n'est pas évident de voir dans quel type de scenarii, à la hausse ou à la baisse, les assurés seront les plus susceptibles d'effectuer des réallocations d'actifs. Ceci devra donc faire l'objet d'études plus poussées.

CONCLUSION GENERALE

En guise de conclusion, nous retiendrons qu'une réallocation d'actifs au sein d'un contrat en unités de compte auquel est associée une garantie complémentaire GMAB engendre deux types d'impact : un impact financier sur l'option de vente lié au changement de sous-jacent et un impact sur le comportement de l'assuré.

Le premier de ces impacts a été étudié plus précisément à l'aide d'une garantie plancher, assimilable en terme de flux financiers à une option de vente européenne. Il a pu être établi, conformément à l'intuition, qu'une réallocation vers un support plus risqué engendrait une perte pour l'assureur alors qu'une réallocation vers un actif moins risqué impliquait un bénéfice. L'instant où l'assuré choisit de modifier le support de son contrat joue également un rôle quant aux coûts de cette réallocation, mais l'effet du temps diffère selon que le paiement de la garantie s'effectue de manière unique en début de contrat ou de manière périodique.

Dans le cas d'un contrat où la garantie est payée de façon unique à l'instant initial, l'assureur doit privilégier les réallocations plus risquées en fin de contrat et à l'inverse favoriser les réallocations moins risquées en début de contrat s'il souhaite maximiser son bénéfice. Cette suggestion peut être mise en place à l'aide de l'insertion dans les conditions générales du contrat, d'une clause de délai interdisant les réallocations vers un support plus risqué, trop précoce.

Le contrat pour lequel le paiement de la garantie s'effectue périodiquement apparaît, quant à lui, comme le plus propice aux réallocations car il offre la possibilité d'une modification du montant de frais demandés à l'assuré au titre de la garantie, suite à une réallocation. Le montant demandé peut être alors celui figurant dans les conditions générales i.e. celui déterminé à l'instant initial du contrat, et correspondant au nouveau support. L'effet du temps s'avère alors plus flou que dans le cas d'un prélèvement unique de frais car deux phénomènes s'opposent : en cas de réallocation plus risquée, une opération tardive diminue le coût de réallocation mais l'apport de l'assuré ne sera pas aussi important que si elle avait été réalisée plus tôt. Le même type de raisonnement peut être tenu en sens inverse pour une réallocation moins risquée. Une deuxième solution peut être étudiée suite à une réallocation au sein d'un contrat à prélèvements périodiques : celle-ci consiste à retarifer la garantie à l'instant de la réallocation en fonction des conditions de marché du moment et du *time-to-maturity* du contrat. Cette idée s'avère la meilleure car l'assureur applique dès lors, le tarif adéquat à la garantie mais elle semble difficile à mettre en place en pratique du fait du nombre important de contrats. De plus, l'acceptation pour l'assuré d'une retarification de la garantie n'est pas certaine, celui-ci pouvant préférer le rachat de son épargne pour le réinvestir dans un nouveau contrat auquel est associé une garantie complémentaire présentant de nouvelles conditions. Ainsi, l'application d'un montant de frais fixé dans les conditions générales, prélevé périodiquement et en adéquation avec le support sur lequel l'épargne de l'assuré est placée semble la meilleure solution.

Soulignons enfin que le prélèvement de frais d'arbitrage au moment de la réallocation permet d'augmenter le résultat de réallocation pour l'assureur, quels que soient la catégorie du contrat et le type de réallocation.

Toute cette réflexion menée sur une option de vente est généralisable au cas de la GMAB, garantie qui assure au bénéficiaire le versement d'un capital minimal en cas de vie de l'assuré à l'échéance du contrat, puisque elle est évaluée comme une option de vente pondérée par une probabilité de présence. Le même type de conséquences financières apparaissent dans la GMAB suite à une réallocation d'actifs au sein du contrat en UC mais cette réallocation engendre également un deuxième effet sur la GMAB : une modification comportementale de l'assuré. En effet, l'assuré, satisfait d'avoir pu allouer son épargne comme il le souhaitait grâce à la possibilité de réallocation, pourrait alors être poussé à conserver celui-ci jusqu'à l'échéance. Ceci entraînerait alors une surestimation de la part de l'assureur de la probabilité de sortie et donc une sous-estimation du tarif de la garantie car il y aurait plus d'assurés présents sur le contrat au final qu'initialement prévus et donc plus de prestations à payer. Tout ceci n'est cependant qu'hypothèse car actuellement trop peu de données concernant les réallocations d'actifs sont disponibles pour pouvoir établir des lois cohérentes d'arbitrage et d'impact sur les rachats, lois qui pourraient confirmer cette théorie de diminution des rachats suite à une réallocation. La modification comportementale de l'assuré, contrairement à l'impact financier précédemment établi, est par conséquent, difficilement appréhendable actuellement du fait de l'absence de lois.

Une ouverture à ce mémoire pourrait donc consister à s'intéresser plus particulièrement à la modélisation de lois d'arbitrage, qu'il s'agisse de lois statiques qui ne prennent en compte que l'ancienneté dans le contrat ou de lois dynamiques, qui retiennent en plus, la valeur de la garantie. En effet, nous avons vu l'intérêt de ces lois au travers de la troisième partie de ce mémoire : elle permettrait d'une part de quantifier en terme de coût les modifications comportementales de l'assuré supposées apparaître suite à une réallocation d'actifs et d'autre part, il serait alors possible de déterminer un tarif unique prenant en compte cette possibilité de réallocation. L'écueil principal dans l'élaboration de ces lois résulte d'une insuffisance de données concrètes pour échelonner les modèles. Les résultats sont actuellement trop volatiles pour être utilisables.

Par ailleurs, tout ce mémoire repose sur une extension du modèle de Black-Scholes et sur la propriété d'indépendance des accroissements des mouvements browniens. Il serait intéressant de sortir de cet environnement et de prolonger l'étude au cas par exemple, de trajectoires dépendantes du chemin passé. En effet, si le scenario d'actifs dépendait des valeurs prises dans le passé par cet actif, quel serait le prix à donner à une option ? Ce cadre n'est pas celui de la théorie financière classique et le prix de l'option différerait donc de celui donné par le modèle de Black-Scholes. L'étude de l'impact d'une réallocation d'actifs sur des garanties complémentaires assimilables à une combinaison linéaire d'options de vente serait aussi intéressante. Entre autre, le modèle de lois dynamiques de réallocation, qui s'appuie sur la valeur intrinsèque de la garantie et donc sur le scenario d'actifs sur lequel l'épargne est investie différerait également. Ce cadre est une autre vision de la modélisation financière qui serait néanmoins intéressant d'étudier.

BIBLIOGRAPHIE

[BIZ07] V. Bizet, C. Bonnet (2007)
Mesures de risque de garanties financières en cas de vie,
Mémoire d'actuariat, ENSAE.

[BLA73] F. Black, M. Scholes (1973)
The pricing of options and corporate liabilities,
Journal of Political economy,
Volume 81.

[BOL98] N. Bollen (1998)
Valuing options in regime switching models,
Journal of Derivatives 6.

[HAR01] M. R. Hardy (2001)
A Regime Switching Model of Long Term Stock Return RSLN,
North American Actuarial Journal,
Volume 5, Number 2.

[HAR03] M. R. Hardy (2003)
Investment Guarantees: Modelling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance Wiley,
New York.

[HUL04] J. Hull (2004)
Options, futures and other derivatives,
Pearson Education, Fifth Edition.

[ITO51] K. Itô (1951)
On a Formula Concerning Stochastic Differentials,
Nagoya Mathematical Journal 3.

[PAL04] T. Palerm (2004)
Tarification des garanties planchers en cas de vie,
Mémoire d'actuariat, CEA.

[PLA05] F. Planchet, P. Thérond, J. Jacquemin (2005)
Modèles financiers en Assurance, Analyses de risques dynamiques,
Economica.

[QUI02] F. Quittard-Pinon (2002)
Mathématiques Financières,
Edition EMS.

[QUI03] F. Quittard-Pinon (2003)
Marchés de capitaux et théorie financière,
Economica.

[SAR04] A. De Sarreau (2004)
Garanties liées aux unités de comptes des contrats d'assurance vie,
Mémoire d'actuariat, DAUPHINE.

[YOU04] W. Youssef (2004)
Tarification de la garantie plancher et Etude du résultat technique et financier de son portefeuille de couverture,
Mémoire d'actuariat, DAUPHINE.

ANNEXES

ANNEXE A : Exemple d'application de la couverture en delta

Nous allons présenter la mise en œuvre de la couverture en delta pour une option de vente européenne au travers d'un exemple numérique.

Considérons une option de vente présentant les caractéristiques suivantes :

- Valeur initiale du sous-jacent : $S_0 = 100€$
- Prix d'exercice : $K = 100€$
- Taux sans risque : $r = 4\%$ (supposé constant)
- Volatilité : $\sigma = 20\%$ (supposé constant)
- Maturité : $T = 10$ ans

Les réajustements seront supposés annuels et les coûts de transaction négligés.

Chaque année, à partir de la valeur du sous-jacent simulé, nous déterminons la valeur du delta avec la formule suivante :

$$\Delta_t = -N(-d_1(t)) \qquad \text{avec} \qquad d_1(t) = \frac{\ln\left[\frac{S_t}{K}\right] + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)}{\sigma.\sqrt{T-t}}$$

Puis nous calculons la variation de delta entre l'année $t-1$ et l'année t. Cette variation indique le nombre d'actions à vendre si le chiffre est négatif ou le nombre d'actions à acheter s'il est positif.
Nous déduisons alors le profit réalisé en multipliant le nombre d'actions (à vendre ou à acheter) par la valeur de cette action (valeur du cours du sous-jacent).
Ce profit engendre des intérêts au fil du temps puisqu'il y a capitalisation au taux sans risque. Nous obtenons ainsi un profit cumulé.
A la maturité, la position doit être débouclée. Si l'option est en dehors de la monnaie alors le delta vaudra 0 et le coût de la couverture sera alors donné par le coût cumulé à la maturité (inverse du profit). Si l'option est dans la monnaie alors le delta vaudra -1 et le coût de la couverture sera alors le coût cumulé à la maturité auquel nous ajoutons le prix d'exercice, que l'assureur doit verser à l'acheteur.

Exemple d'une simulation pour une option de vente en dehors de la monnaie :

Année	Cours du sous-jacent S	Delta	Variation du delta	Profit des actions vendues	Profit cumulé	Intérêt
0	100.00 €	-0.17139	-0.17139	17.14 €	17.14 €	0.70 €
1	92.11 €	-0.22270	-0.05131	4.73 €	22.56 €	0.92 €
2	67.70 €	-0.43690	-0.21420	14.50 €	37.99 €	1.55 €
3	65.44 €	-0.50306	-0.06616	4.33 €	43.87 €	1.79 €
4	87.17 €	-0.32473	0.17833	-15.54 €	30.11 €	1.23 €
5	103.11 €	-0.22983	0.09490	-9.79 €	21.55 €	0.88 €
6	130.96 €	-0.10126	0.12856	-16.84 €	5.60 €	0.23 €
7	132.65 €	-0.09089	0.01038	-1.38 €	4.45 €	0.18 €
8	118.82 €	-0.15059	-0.05970	7.09 €	11.72 €	0.48 €
9	85.29 €	-0.68996	-0.53937	46.00 €	58.20 €	2.38 €
10	108.75 €	0	0.68996	-75.03 €	-14.46 €	

Coût actualisé à l'instant initial de la couverture : $14.46 \times \exp(-r.T) = 9.69€$

A la maturité, le portefeuille de couverture n'est composé d'aucune action.

Exemple d'une simulation pour une option de vente dans la monnaie :

Année	Cours du sous-jacent S	Delta	Variation du delta	Profit des actions vendues	Profit cumulé	Intérêt
0	100.00 €	-0.17139	-0.17139	17.14 €	17.14 €	0.70 €
1	82.99 €	-0.27784	-0.10644	8.83 €	26.67 €	1.09 €
2	79.10 €	-0.33212	-0.05428	4.29 €	32.05 €	1.31 €
3	95.68 €	-0.23879	0.09332	-8.93 €	24.43 €	1.00 €
4	103.15 €	-0.21238	0.02642	-2.72 €	22.71 €	0.93 €
5	135.10 €	-0.08956	0.12282	-16.59 €	7.04 €	0.29 €
6	143.72 €	-0.06593	0.02363	-3.40 €	3.93 €	0.16 €
7	130.74 €	-0.09793	-0.03200	4.18 €	8.28 €	0.34 €
8	122.08 €	-0.12931	-0.03138	3.83 €	12.44 €	0.51 €
9	79.24 €	-0.80608	-0.67678	53.63 €	66.58 €	2.72 €
10	87.04 €	-1	-0.19392	16.88 €	86.17 €	

Coût actualisé à l'instant initial de la couverture : $(-86.17+100)\times\exp(-r.T)=9.27€$

A la maturité, le portefeuille est composé d'une action. Celle-ci est alors achetée au détenteur de l'option de vente au prix K.

Après 100 000 simulations, le coût moyen de la couverture s'élève à 8.07€ alors que le prix de cette option de vente, selon le modèle de Black-Scholes est de 8.06€.

ANNEXE B : Démonstration de $-\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.N'(-d_1)=0$

$$
\begin{aligned}
& -\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.N'(-d_1)=0\\
& \Leftrightarrow S_0.N'(-d_1)=\exp(-rT).K.N'(-d_2)\\
& \Leftrightarrow S_0.\frac{N'(-d_1)}{N'(-d_2)}=\exp(-rT).K\\
& \Leftrightarrow S_0.\exp\left(\frac{d_2^2-d_1^2}{2}\right)=\exp(-rT).K \qquad \text{car} \quad N'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

En particulier,

$$
\begin{aligned}
& S_0.\exp\left(\frac{d_2^2-d_1^2}{2}\right)\\
& = S_0.\exp\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+r.T-\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}-\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)^2-\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)^2}{2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)}\right)\\
& = S_0.\exp\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)^2+\left(r.T-\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}-\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)^2+2\left(r.T-\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}-\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}{2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)}\right)\\
& \exp\frac{-\left(\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)^2+\left(r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)^2+2\left(r.T+\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)}{2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)}\\
& = S_0.\exp\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)^2-r.T.\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)-\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}{2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)}\right)\\
& \exp\frac{-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\frac{1}{2}\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)^2+r.T.\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)+\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)}{2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)}\\
& = S_0.\exp\left(\frac{-2r.T.\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)-2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}{2\left(\sigma_A^2.\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}}+\sigma_B^2.(T-\mathrm{t}_{\mathrm{Reall}})\right)}\right)\\
& = S_0.\exp\left(-r.T-\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&-\exp(-rT).K.N'(-d_2)+S_0.N'(-d_1)=0 \\
&\Leftrightarrow S_0.\exp\left(-r.T-\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)=\exp(-rT).K \\
&\Leftrightarrow \ln(S_0)-r.T-\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)=-r.T+\ln(K) \\
&\Leftrightarrow \ln(S_0)-\ln(K)=\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \qquad \text{OK !}
\end{aligned}
$$

ANNEXE C : Probabilités observées et Probabilités absolues

Cette annexe a pour objectif de présenter la méthodologie de calcul de la probabilité de présence de l'assuré sur un contrat. Elle est inspirée d'un document interne de la Direction Technique Vie et Banque d'AXA France.

Considérons que la sortie d'un contrat s'effectue suite à l'un de ces trois événements :

- le décès de l'assuré, noté DC
- le rachat total du contrat, noté RT
- le rachat partiel du contrat, noté RP.

Par souci de lisibilité, nous éluderons les indices x, référant l'âge de l'assuré et t, référant l'instant de calcul.

Nous avons donc $P^{SORTIE} = P^{DC,obs} + P^{RT,obs} + P^{RP,obs}$.

Nous ne connaissons pas les probabilités observées. Nous avons simplement en notre possession les probabilités absolues, données par les tables et notées P^{DC}, P^{RT} et P^{RP}. Il s'agit de probabilités annuelles.

<u>Déterminons les probabilités observées</u> :

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P^{DC,obs} &= P(DC \cap \{\text{sans RT, sans RP}\}) + P(DC \cap \{\text{avant RT, sans RP}\}) \\ &\quad + P(DC \cap \{\text{sans RT, avant RP}\}) + P(DC \cap \{\text{avant RT, avant RP}\}) \end{aligned}$$

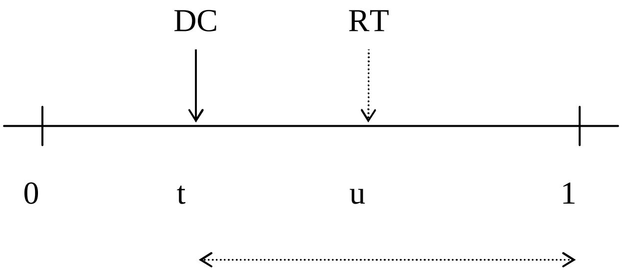
En particulier,

- $P(DC \cap \{\text{sans RT, sans RP}\}) = P(DC).P(\text{non RT}).P(\text{non RP}) = P^{DC}.(1-P^{RT}).(1-P^{RP})$
  car les trois évènements sont indépendants.

- $P(DC \cap \{\text{avant RT, sans RP}\}) = P(DC \cap \{\text{avant RT}\}).P(\text{non RP}) = P(DC \cap \{\text{avant RT}\}).(1-P^{RP})$

  Déterminons $P(DC \cap \{\text{avant RT}\})$. Pour cela, nous effectuerons les hypothèses, pour chaque évènement (décès, rachat total et rachat partiel), que la probabilité de survie est proche de 1 et que le taux de hasard est proche de la probabilité annuelle absolue. Ainsi, la densité de chaque évènement peut être approchée par sa probabilité annuelle absolue.

  Appuyons-nous sur le schéma suivant :



Les deux évènements étant indépendants, la probabilité de décès avant rachat total s'écrit :

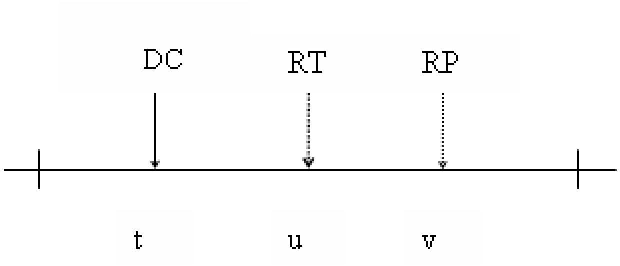
$$\begin{aligned} P(DC \cap \{\text{avant RT}\}) &= \int_0^1 P^{DC}\left(\int_t^1 P^{RT}\,du\right)dt \\ &= \int_0^1 P^{DC}.P^{RT}.(1-t)\,dt \\ &= P^{DC}.P^{RT}.\left[\frac{1-t^2}{-2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}P^{DC}.P^{RT} \end{aligned}$$

Donc, $$P(DC \cap \{\text{avant RT, sans RP}\}) = \frac{1}{2}P^{DC}.P^{RT}.(1-P^{RP})$$

- $P(DC \cap \{\text{sans RT, avant RP}\}) = \frac{1}{2} P^{DC}.P^{RP}.(1 - P^{RT})$ en procédant de la même façon.

- $P(DC \cap \{\text{avant RT, avant RP}\}) = P(\text{DC puis RT puis RP}) + P(\text{DC puis RP puis RT})$

Déterminons $P(\text{DC puis RT puis RP})$. Là aussi, nous supposerons que les probabilités annuelles absolues sont proches des densités.



$$\begin{aligned} P(\text{DC puis RT puis RP}) &= \int_0^1 P^{DC} \left(\int_{u=t}^{1} P^{RT} \left(\int_{v=u}^{1} P^{RP} dv \right) du \right) dt \\ &= \int_0^1 P^{DC} \left(\int_{u=t}^{1} P^{RT}.P^{RP}.(1-u) du \right) dt \\ &= \int_0^1 P^{DC}.P^{RT}.P^{RP}.\frac{(1-t)^2}{2} dt \\ &= \frac{1}{6} P^{DC}.P^{RT}.P^{RP} \end{aligned}$$

De même, $P(\text{DC puis RP puis RT}) = \frac{1}{6} P^{DC}.P^{RT}.P^{RP}$

D'où

$$P(DC \cap \{\text{avant RT, avant RP}\}) = \frac{1}{6} P^{DC}.P^{RT}.P^{RP} + \frac{1}{6} P^{DC}.P^{RP}.P^{RT} = \frac{1}{3} P^{DC}.P^{RP}.P^{RT}$$

Au final,

$$\begin{aligned} P^{DC,obs} &= P^{DC}.(1-P^{RT}).(1-P^{RP}) + \frac{1}{2} P^{DC}.P^{RT}.(1-P^{RP}) + \frac{1}{2} P^{DC}.P^{RP}.(1-P^{RT}) + \frac{1}{3} P^{DC}.P^{RP}.P^{RT} \\ &= P^{DC}.\left[(1-P^{RT}).\left(1 - P^{RP} + \frac{1}{2} P^{RP}\right) + \frac{1}{2} P^{RT}.(1-P^{RP}) + \frac{1}{3} P^{RP}.P^{RT} \right] \\ &= P^{DC}.\left[(1-P^{RT}).\left(1 - \frac{1}{2} P^{RP}\right) + \frac{1}{2} P^{RT} - \frac{1}{2} P^{RP}.P^{RT} + \frac{1}{3} P^{RP}.P^{RT} \right] \\ &= P^{DC}.\left[1 - \frac{1}{2} P^{RP} - P^{RT} + \frac{1}{2} P^{RP}.P^{RT} + \frac{1}{2} P^{RT} - \frac{1}{2} P^{RP}.P^{RT} + \frac{1}{3} P^{RP}.P^{RT} \right] \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P^{DC,obs} = P^{DC}.\left[1 - \frac{1}{2}\left(P^{RT} + P^{RP}\right) + \frac{1}{3} P^{RT}.P^{RP}\right]}$$

Les probabilités P^{DC}, P^{RT} et P^{RP} jouant des rôles symétriques, nous pouvons en déduire les autres probabilités observées :

$$\boxed{P^{RT,obs} = P^{RT}.\left[1 - \frac{1}{2}\left(P^{DC} + P^{RP}\right) + \frac{1}{3} P^{DC}.P^{RP}\right]}$$

$$\boxed{P^{RP,obs} = P^{RP}.\left[1 - \frac{1}{2}\left(P^{DC} + P^{RT}\right) + \frac{1}{3} P^{DC}.P^{RT}\right]}$$

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
P^{SORTIE} &= P^{DC,obs} + P^{RT,obs} + P^{RP,obs} \\
&= P^{DC}.\left[1-\frac{1}{2}\left(P^{RT}+P^{RP}\right)+\frac{1}{3}P^{RT}.P^{RP}\right]+P^{RT}.\left[1-\frac{1}{2}\left(P^{DC}+P^{RP}\right)+\frac{1}{3}P^{DC}.P^{RP}\right] \\
&\quad +P^{RP}.\left[1-\frac{1}{2}\left(P^{DC}+P^{RT}\right)+\frac{1}{3}P^{DC}.P^{RT}\right] \\
&= P^{DC}+P^{RT}+P^{RP}+P^{DC}.P^{RT}.P^{RPT} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(P^{DC}.P^{RT}+P^{DC}.P^{RP}+P^{RT}.P^{DC}+P^{RT}.P^{RP}+P^{RP}.P^{DC}+P^{RP}.P^{RT}\right) \\
&= P^{DC}+P^{RT}+P^{RP}+P^{DC}.P^{RT}.P^{RPT}-P^{DC}.P^{RT}-P^{DC}.P^{RP}-P^{RT}.P^{RP} \\
&= 1-\left(1-P^{DC}\right).\left(1-P^{RT}\right).\left(1-P^{RP}\right)
\end{aligned}
$$

<u>Conclusion</u> :

Puisque $P^{PRES} = 1 - P^{SORTIE}$, nous obtenons au final : $\boxed{P^{pres} = \left(1-P^{DC}\right).\left(1-P^{RT}\right).\left(1-P^{RP}\right)}$