

**Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles
pour l'obtention du diplôme
du Centre d'Etudes Actuarielles
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le : 18 mars 2011**

Par : Christian GIBOT

Titre : Les garanties de revenus temporaires et viagères (GMWB et GLWB) dans les
contrats d'assurance vie multisupports

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présent du jury de
l'Institut des Actuaire :*

signature

Entreprise :

Nom :

Signature :

*Membres présents du jury du
Centre d'Etudes Actuarielles :*

Directeur de mémoire en entreprise :

Thomas BEHAR

Nom : Vincent DAMAS

Vincent DAMAS

Signature :

Gérard CROSET

Invité :

Arnaud COHEN

Nom :

Jean-Pierre DIAZ

Signature :

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)***

Benoît HUGONIN

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Florence PICARD

Christian-Yann ROBERT

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :

Gibot Christian

Résumé / Abstract

Résumé

Ce mémoire porte sur les garanties de revenus temporaires (GMWB) et viagères (GLWB) et fournit la première contribution non confidentielle sur ce sujet disponible en français. Ce travail devrait être utile à l'ensemble des mémoires d'actuariat ou des travaux à venir portant sur ce sujet. Le mémoire contient quatre parties. Tout d'abord, il dresse un état des lieux du marché français de la retraite et compare les garanties de revenus commercialisées en France. Il contient aussi une étude qualitative des risques et une analyse des dispositions réglementaires et prudentielles qui semblent pouvoir s'appliquer à ces garanties. Une revue de littérature portant sur la tarification et la couverture est effectuée. Tous les résultats portant sur les GMWB sont regroupés dans un cadre unifié de modélisation afin de proposer un état des lieux complets des résultats analytiques mis en évidence. Les solutions analytiques ne suffisent cependant pas dans un contexte opérationnel. Une modélisation par la méthode de Monte Carlo des garanties GMWB / GLWB est donc proposée afin de déterminer le tarif en prime commerciale de ces garanties (programmes Matlab fournis en annexe). Les applications numériques obtenues montrent que le coût des garanties est fortement dépendant de la configuration des produits, des modèles utilisés et de la valeur des paramètres financiers et actuariels. Des réflexions sur les mécanismes de transfert de risques et sur l'intégration dans Solvabilité 2 sont proposées. Par ailleurs une méthode de calcul des provisions mathématiques est définie et des pistes de développements sont identifiées pour des travaux ultérieurs.

Abstract

This dissertation concerns both temporary and lifelong guaranteed minimum withdrawal benefits and offers the first non-confidential contribution written in French on this subject. This work should be useful for future actuary dissertation and academic research on this topic. The dissertation is divided in 4 chapters. First of all, it draws out an inventory of French retirement market and compares withdrawal benefits riders sold on the French market. It also contains a qualitative risks study and an analysis of regulation and prudential clauses which should be applied to these guarantees. A literature review on pricing and hedging is conducted. All the results on GMWB are gathered within a unified modeling framework in order to offer a comprehensive inventory of analytical results available in the actuarial and financial literature. Nevertheless, analytical results are not efficient enough to use them in an operational context. A model using Monte Carlo method is then developed to estimate the trade price of these guarantees (Matlab programs are provided in annex). Numerical applications show that guarantees costs are highly dependent on product design, on models used and on the value of financial and actuarial parameters. Comments are made on risks transfer mechanisms and on the way of integrating these guarantees within Solvency 2 framework. Furthermore, a method for estimating reserves is defined and future developments are identified for future researches.

Table des matières

RESUME / ABSTRACT	2
TABLE DES MATIERES	3
INTRODUCTION	8
PARTIE I : ETUDE PREALABLE DU PRODUIT	11
1 CHAPITRE 1 : BESOIN DES ASSURES	12
1.1 ETAT DES LIEUX DE LA RETRAITE EN FRANCE	12
1.1.1 <i>Un défi économique à relever</i>	12
1.1.2 <i>La prise de conscience progresse</i>	13
1.2 LES DISPOSITIFS EXISTANTS POUR PREPARER SA RETRAITE	14
1.2.1 <i>Le PERP</i>	14
1.2.2 <i>Le PERE</i>	14
1.2.3 <i>Le PERCO</i>	15
1.2.4 <i>Articles 39, 82 et 83</i>	15
1.3 POSITIONNEMENT DES GARANTIES GMWB ET GLWB	17
1.3.1 <i>Avantages pour l'assuré</i>	17
1.3.2 <i>Avantages pour l'assureur</i>	19
1.3.3 <i>Développement des contrats variable annuités en Europe</i>	19
2 CHAPITRE 2 : DESCRIPTION DES GARANTIES	20
2.1 FONCTIONNEMENT DES GARANTIES GMWB ET GLWB	20
2.2 CARACTERISTIQUES DES GARANTIES GMWB	23
2.2.1 <i>Garantie GMWB commercialisée sur le marché français</i>	23
2.2.2 <i>Garanties GMWB commercialisées sur le marché américain</i>	24
2.3 CARACTERISTIQUES DES GARANTIES GLWB	24
2.3.1 <i>Garanties GLWB commercialisées sur le marché français</i>	24
2.3.2 <i>Supports financiers des produits</i>	27
2.3.3 <i>Comparaison des produits GMWB / GLWB</i>	28
2.3.4 <i>Garanties GLWB commercialisés sur le marché américain</i>	30
2.3.5 <i>Modification de l'offre suite à la crise</i>	31
3 CHAPITRE 3 : ETUDE QUALITATIVE DES GARANTIES	33
3.1 RAPPEL SUR LES OPTIONS DE VENTE EUROPEENNES.....	34
3.1.1 <i>Prix du put européen</i>	35
3.1.2 <i>Delta du put européen</i>	36
3.1.3 <i>Gamma du put européen</i>	37
3.1.4 <i>Vega du put européen</i>	37
3.1.5 <i>Rhô du put européen</i>	38
3.1.6 <i>Thêta du put européen</i>	39
3.1.7 <i>Comportement d'un portefeuille de puts</i>	39
3.1.8 <i>Mesure de l'erreur de couverture</i>	40
3.2 RISQUES FINANCIERS.....	40
3.2.1 <i>Risques financiers répliquables</i>	41
3.2.2 <i>Risques financiers non répliquables</i>	42
3.3 RISQUES ACTUARIELS.....	43

3.3.1	<i>Risque lié à la mortalité / longévité</i>	44
3.3.2	<i>Risques non mutualisables</i>	44
3.4	RISQUES OPERATIONNELS	46
3.4.1	<i>Risque de contrepartie</i>	46
3.4.2	<i>Risques liés aux systèmes de gestion</i>	47
3.4.3	<i>Risques liés à la politique commerciale</i>	47
3.5	REDUCTION DES RISQUES PAR LA FORMULATION DES GARANTIE	48
4	CHAPITRE 4 : ENVIRONNEMENT REGLEMENTAIRE	50
4.1	ASPECT REGLEMENTAIRE	50
4.1.1	<i>Dispositions générales des contrats</i>	50
4.1.2	<i>Dispositions relatives au rachat</i>	51
4.1.3	<i>Dispositions relatives à la tarification</i>	52
4.1.4	<i>Dispositions relatives à la Participation aux Bénéfices</i>	53
4.1.5	<i>Dispositions relatives aux actifs de couverture</i>	53
4.2	PROVISIONNEMENT	54
4.2.1	<i>Dispositions relatives au provisionnement</i>	54
4.3	FISCALITE	55
4.3.1	<i>Fiscalité de l'assurance-vie</i>	55
4.3.2	<i>Fiscalité de la rente viagère</i>	56
4.3.3	<i>Fiscalité en cas de décès</i>	56
4.4	COMPTABILITE ET SOLVABILITE	57
	PARTIE II : REVUE DE LITTERATURE	58
5	CHAPITRE 5 : REVUE DE LITTERATURE	59
5.1	ETUDES DES GARANTIES LIEES AUX CONTRATS EN UNITES DE COMPTE	59
5.1.1	<i>Evaluation des GMDB et GMAB sous la probabilité risque neutre</i>	59
5.1.2	<i>Autres méthodes d'évaluation</i>	60
5.1.3	<i>Etude des garanties GMIB</i>	61
5.1.4	<i>Etude des garanties cachés dans les contrats d'assurance-vie</i>	62
5.2	FORMULES ANALYTIQUES POUR LES GARANTIES GMWB / GLWB	62
5.3	MODELISATION PAR MONTE-CARLO DES GMWB / GLWB	64
5.4	MODELISATION DU COMPORTEMENT OPTIMAL DE L'ASSURE	66
5.4.1	<i>Modélisation dans le cadre de la méthode de Monte Carlo</i>	66
5.4.2	<i>Modélisation dans le cadre de l'étude financière de la garantie</i>	66
5.5	COUVERTURE DES GARANTIES GMWB / GLWB	68
5.5.1	<i>Méthodes de construction d'une couverture</i>	68
5.5.2	<i>Application de ces méthodes aux garanties GMDB et GMAB</i>	71
5.5.3	<i>Couverture des garanties GMWB et GLWB</i>	73
6	CHAPITRE 6 : CADRE UNIFIE DE MODELISATION	75
6.1	MODELISATION DE L'EPARGNE	75
6.1.1	<i>Dynamique de l'épargne</i>	76
6.1.2	<i>Expression de l'épargne dans ce modèle</i>	76
6.2	ETUDE FINANCIERE DE LA GARANTIE GMWB	78
6.2.1	<i>Modélisation de la garantie seule</i>	78
6.2.2	<i>Modélisation de l'ensemble « contrat + garantie »</i>	79
6.2.3	<i>Equivalence des deux modélisations</i>	79
6.2.4	<i>Réécriture du problème dans le cas de frais de gestion nul</i>	80
6.3	PRICING SOUS COMPORTEMENT STATIQUE DE L'ASSURE	81

6.3.1	<i>Transformation en option asiatique</i>	81
6.4	PRICING SOUS COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE L'ASSURE	82
6.4.1	<i>Approximation de pénalité</i>	83
6.4.2	<i>Contrôle impulsionnel</i>	86
6.5	PRISE EN COMPTE DE LA MORTALITE	87
PARTIE III : MODELE DE TARIFICATION DES GMWB ET GLWB		89
7	CHAPITRE 7 : MODELISATION DU PASSIF	90
7.1	CADRE DE MODELISATION	90
7.1.1	<i>Modélisation de la mortalité et des rachats totaux</i>	92
7.1.2	<i>Ecriture des probabilités dans le modèle</i>	96
7.1.3	<i>Modélisation des revenus garantis, des rachats partiels et des frais</i>	98
7.2	MODELISATION DU VECTEUR D'ETAT	99
7.2.1	<i>Valeur du vecteur d'état à la souscription ($t = 0$)</i>	99
7.2.2	<i>Evolution entre t_{k-1}^+ et t_k^- ($k > 1$)</i>	99
7.2.3	<i>Evolution entre t_k^- et t_k^+</i>	99
7.3	IMPACT DES VARIANTES DE LA GARANTIE	102
7.3.1	<i>TMG et cliquet de la benefit base</i>	102
7.3.2	<i>Modification de l'assiette de prélèvement des frais</i>	103
7.4	EVALUATION DU TARIF DE LA GARANTIE SEULE	103
7.4.1	<i>Modélisation de la valeur de la garantie GMWB seule</i>	103
7.4.2	<i>Prise en compte de la garantie GMDB</i>	104
7.4.3	<i>Evaluation des frais correspondant à la prime pure</i>	105
7.4.4	<i>Evaluation de la prime commerciale</i>	106
7.4.5	<i>Vérification du tarif commercial</i>	107
8	CHAPITRE 8 : MODELISATION DE L'ACTIF	109
8.1	MODELISATION DES ACTIONS	109
8.1.1	<i>Modèle et discrétisation</i>	110
8.1.2	<i>Etalonnage du modèle</i>	110
8.2	MODELISATION DU TAUX SANS RISQUE	112
8.2.1	<i>Modèle et discrétisation</i>	113
8.2.2	<i>Etalonnage du modèle</i>	114
8.2.3	<i>Utilisation des taux sans risque dans la modélisation</i>	116
8.3	MODELISATION DE L'EPARGNE	118
8.3.1	<i>Modélisation du support obligataire</i>	118
8.3.2	<i>Modélisation de l'épargne</i>	119
8.3.3	<i>Modélisation en l'absence de rebalancement</i>	119
8.3.4	<i>Modélisation en cas de rebalancement annuel</i>	119
8.4	TEST DES PROPRIETES DES MODELES	121
8.4.1	<i>Propriété de martingale</i>	121
8.4.2	<i>Normalité des rendements des actifs</i>	122
8.4.3	<i>Reconstitution de la courbe des taux</i>	123
8.4.4	<i>Normalité de la distribution du taux court</i>	124
9	CHAPITRE 9 : SENSIBILITE DE LA GARANTIE GMWB	125
9.1	ESTIMATION DE LA PRIME PURE	125
9.1.1	<i>Définition du scénario central</i>	125
9.1.2	<i>Estimation du tarif en prime pure dans le scénario central</i>	125
9.1.3	<i>Sensibilité à la proportion d'actions dans l'épargne</i>	127

9.1.4	<i>Sensibilité à la définition de la garantie</i>	128
9.1.5	<i>Sensibilités aux paramètres clients</i>	131
9.1.6	<i>Sensibilités aux garanties de revalorisation de la benefit base</i>	133
9.1.7	<i>Sensibilités aux paramètres de marché</i>	134
9.1.8	<i>Sensibilités au modèle utilisé</i>	137
9.2	CONCLUSIONS SUR LA PRIME PURE	138
9.2.1	<i>Fonction de prime pure - $T = 15$</i>	138
9.2.2	<i>Convexité de la provision mathématique</i>	138
9.2.3	<i>Comparaison avec les résultats de la littérature</i>	139
9.3	EVALUATION DE LA PRIME COMMERCIALE	140
9.4	DURATION ET FREQUENCE DE DECLENCHEMENT DE LA GARANTIE	140
9.4.1	<i>Duration de la garantie</i>	141
9.4.2	<i>Date de déclenchement de la garantie</i>	141
10	CHAPITRE 10 : EXTENSION AUX GARANTIES GLWB	143
10.1	ESTIMATION DE LA PRIME PURE	143
10.1.1	<i>Définition du scénario central</i>	143
10.1.2	<i>Estimation du tarif en prime pure dans le scénario central</i>	144
10.1.3	<i>Sensibilité à la proportion d'actions dans l'épargne</i>	145
10.1.4	<i>Sensibilité à la définition de la garantie</i>	147
10.1.5	<i>Sensibilités aux paramètres clients</i>	150
10.1.6	<i>Sensibilités aux garanties de revalorisation de la benefit base</i>	155
10.1.7	<i>Sensibilités aux paramètres de marché</i>	156
10.1.8	<i>Sensibilités au modèle utilisé</i>	158
10.2	CONCLUSIONS SUR LA PRIME PURE	159
10.2.1	<i>Surface de prime pure - $h_{WL} = 4\%$</i>	159
10.2.2	<i>Convexité de la valeur de la garantie</i>	161
10.2.3	<i>Comparaison avec les résultats de la littérature</i>	162
10.3	EVALUATION DE LA PRIME COMMERCIALE	163
10.3.1	<i>Tarif en prime pure pour les scénarios de stress</i>	163
10.3.2	<i>Surface de prime commerciale et marge explicite</i>	165
10.4	BACKTESTINGS	167
	PARTIE IV : GESTION DES RISQUES DES GARANTIES GMWB ET GLWB	169
11	CHAPITRE 11 : TRANSFERT DE RISQUES DES GARANTIES	170
11.1	METHODES EXISTANTES DE TRANSFERT DE RISQUE	170
11.1.1	<i>Evolution des méthodes de transfert de risque</i>	170
11.1.2	<i>Réassurance</i>	171
11.1.3	<i>Couverture financière des risques</i>	172
11.2	FONCTIONNEMENT DE LA COUVERTURE DYNAMIQUE	173
11.2.1	<i>Risques pris en compte dans les couvertures dynamiques</i>	173
11.2.2	<i>Mise en œuvre de la couverture dynamique</i>	174
11.2.3	<i>Calcul des grecques dans le modèle de Monte-Carlo</i>	178
11.2.4	<i>Test des programmes de couverture</i>	179
12	CHAPITRE 12 : BILAN ET COMPTE DE RESULTAT	180
12.1	VISION ECONOMIQUE DU BILAN	180
12.2	EVALUATION DE LA PROVISION MATHÉMATIQUE	181
12.2.1	<i>Formulation de la provision mathématique</i>	181
12.2.2	<i>Traitement de la couverture financière</i>	184

12.2.3	<i>Impact de la réassurance</i>	185
12.3	CALCUL DU P&L ET DE RENTABILITE	186
13	CHAPITRE 13: TRAITEMENT DANS SOLVABILITE 2	188
13.1	CALCUL DE LA PROVISION BEST ESTIMATE	188
13.2	EVALUATION DU SCR (SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENT).....	190
13.2.1	<i>Recensement des modules à estimer</i>	190
13.2.2	<i>Méthode de calcul</i>	193
13.3	ESTIMATION DU SCR_{mkt} (RISQUE DE MARCHE).....	193
13.3.1	<i>Estimation de Mkt_{int}^{Up} et de Mkt_{int}^{Down} (Risque de taux)</i>	194
13.3.2	<i>Estimation du Mkt_{eq} (risque action)</i>	195
13.4	ESTIMATION DU SCR_{life} (RISQUE DE SOUSCRIPTION VIE).....	195
13.4.1	<i>Estimation du $Life_{mort}$ (risque de mortalité)</i>	196
13.4.2	<i>Estimation du $Life_{long}$ (risque de longévité)</i>	196
13.5	ESTIMATION DU BSCR	196
13.5.1	<i>Estimation du SCR_{op} (risque opérationnel)</i>	196
13.5.2	<i>Estimation du SCR</i>	197
13.6	EVALUATION DE LA RISK MARGIN (MARGE POUR RISQUE)	197
14	CHAPITRE 14 : DEVELOPPEMENTS ULTERIEURS	199
14.1	FORMULATION D'UN PRODUIT ALTERNATIF.....	199
14.2	AMELIORATIONS DE LA MODELISATION.....	200
14.2.1	<i>Modélisation du produit</i>	200
14.2.2	<i>Cadre de modélisation utilisé</i>	200
14.2.3	<i>Impacts sur les résultats lorsque le portefeuille devient ouvert</i>	201
14.3	AMELIORATION DU PROGRAMME MATLAB.....	201
	CONCLUSION	203
	BIBLIOGRAPHIE	204
	PRINCIPALES NOTATIONS	210
	ANNEXE 1 : EXTRAITS DU CODE DES ASSURANCES	211
	ANNEXE 2 : CODE MATLAB	219
	ANNEXE 3 : GRAPHIQUE DU PUT (PARTIE 3.1)	237

Introduction

La production d'Unités de Compte constitue un élément majeur de la rentabilité des assureurs pour de multiples raisons : transmission du risque financier vers l'assuré, diminution du capital immobilisé au titre de la marge de solvabilité, marges plus importantes grâce aux rétrocessions des sociétés de gestion... Ces supports sont cependant plus difficiles à vendre que les fonds en euros, en particulier lorsque les marchés évoluent défavorablement.

Pour favoriser la vente d'unités de compte, les assureurs ont proposé des garanties financières sur leurs contrat d'assurance vie multisupports. Sur le marché français, les assureurs ont depuis longtemps inclus dans leurs contrats des garanties plancher en cas de décès (GMDB)¹ ainsi que des garanties de table ou de taux pour la conversion en rente (GMIB). Par ailleurs, les fonds à formule ou à coussin peuvent être inclus en tant qu'unités de comptes dans les contrats d'assurance-vie multisupports. Enfin, les contrats eurodiversifiés peuvent être vus comme des contrats avec garantie GMAB.

Plus généralement, ces produits d'épargne avec garantie sont appelés *variable annuities*. Développés aux Etats-Unis puis au Japon, ils ont rencontré un large succès commercial dans ces pays et se sont progressivement sophistiqués pour offrir des prestations croissantes, en contrepartie d'une augmentation du risque restant à la charge de l'assureur et du coût des garanties.

Les garanties proposées, optionnelles ou obligatoires, sont souvent combinées au sein d'un même contrat. Nous pouvons distinguer 4 catégories parmi celles-ci :

- La garantie minimale en cas de décès (GMDB²). Cette garantie prévoit le versement d'un capital minimum défini à la souscription en cas de décès de l'assuré ;
- La garantie minimale en cas de vie au terme (GMAB et GMSB³). Il s'agit d'une garantie sur l'épargne à une date fixée à l'avance, en cas de vie ou de rachat ;
- La garantie de rente minimale à une date fixée (GMIB⁴) qui peut prévoir une garantie de taux, de table ou de l'assiette de calcul des arrérages ;
- La garantie de revenus⁵ temporaire (GMWB) ou viagère (GLWB). Cette garantie permet à l'assuré, généralement après une période de différé, de disposer de revenus garantis minimums définis à l'avance, quelle que soit la trajectoire de l'épargne.

Les versions les plus évoluées de ces garanties (GMIB, GMWB, GLWB) sont commercialisées en Europe depuis quelques années, directement ou en Libre Prestation de Service (LPS). En France, les garanties GMWB / GLWB sont apparues en 2007 et pourraient constituer la solution d'épargne retraite complémentaire qui manquent aux français désireux de compléter les prestations du régime obligatoire par répartition.

¹ Obligatoire sur les contrats en Unités de compte jusqu'en 1995. La réforme réglementaire de 1992, en abrogeant le dernier alinéa de l'article L131-1, a supprimé l'obligation d'inclure une garantie plancher. Cette garantie était jugée contradictoire avec la notion d'unités de compte, comportant par nature un risque financier.

² « Guaranteed Minimum Death Benefit » et ses variantes (cliquet, TMG)

³ « Guaranteed Minimum Accumulation Benefit » / « Guaranteed Minimum Surrender Benefit »

⁴ « Guaranteed Minimum Income Benefit »

⁵ « Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit » / « Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit »

Un retraité dispose en effet de 3 degrés de libertés pour son choix d'épargne retraite : le montant de consommation (les revenus dont il souhaite disposer), le choix de l'allocation d'actifs et le moment de conversion en rente. Le risque de ruine est un sujet largement étudié dans la théorie actuarielle. Les garanties GLWB permettent de transférer ce risque de l'assuré vers l'assureur.

Ces garanties comportent de nombreux risques pour les assureurs et nécessitent de recourir à des mécanismes de transfert de risque (réassurance, programme de couverture dynamique...). Elles représentent des engagements de très long terme et pourraient constituer, en cas de large succès commercial et de risques mal maîtrisés, un risque systémique important ayant de fortes implications sociales (faillite des assureurs, perte partielle ou totale de revenus pour les retraités et les futurs retraités ayant souscrit ces garanties...). Quelques articles académiques ont averti, dès 2004, que les prestations de ces garanties étaient trop élevées par rapport à la tarification aux Etats-Unis en raison d'un contexte concurrentiel fort.

Dans un monde de taux élevés et dans un contexte haussier des marchés actions, les *variable annuities* se sont bien comportées du point de vue des assureurs. Mais au cours de la crise financière, les assureurs ont subi de lourdes pertes suite à la dégradation des conditions de marché (hausse de la volatilité des actions et baisse des taux d'intérêts) et à des erreurs de modèles (risque de base, minimisation de l'occurrence des événements extrêmes...).

Cette crise a donc conduit les compagnies d'assurance à revoir la formulation et le tarif des produits. Les assureurs qui réfléchissaient au développement d'une offre ont probablement retardé leur entrée sur le marché et attendent les premiers retours d'expérience des produits déjà commercialisés. Les actuaires ont ainsi pris conscience du risque lié à ces garanties et ont remis en cause les modèles utilisés (choix du modèle, calibration des données, stress tests, prise en compte des risques extrêmes, efficacité des programmes de couverture, liquidité des marchés...).

Mais les travaux portant sur ces garanties sont encore assez peu nombreux :

- Il n'existe pas aujourd'hui de normes d'applications spécifiques à ces contrats concernant l'évaluation des provisions techniques, la réglementation comptable, le besoin de marge de solvabilité dans un cadre Solvabilité 2... ;
- La plupart des publications (articles, mémoires d'actuariat...) sur les *variable annuities* se limitent à l'étude des garanties GMDB ou GMAB pour lesquelles il existe des formules fermées. Très peu de travaux publiés sont consacrés aux garanties GMWB / GLWB dont la modélisation est plus complexe¹.

Ce mémoire a pour objectif de combler en partie ce manque et de fournir une première référence non-confidentielle utile à l'ensemble des actuaires qui s'intéressent aux garanties de revenus. Il est constitué de 4 parties :

- Tout d'abord, la première partie, composée de 4 chapitres, s'intéresse au marché de l'épargne retraite français (chapitre 1) et fournit une comparaison des garanties GMWB / GLWB commercialisées en France (chapitre 2). La cartographie des risques associés à ces garanties ainsi que des préconisations sur la manière de les réduire au travers de la formulation du produit sont proposées dans le chapitre 3. Le

¹ Les retraits, les frais prélevés au titre de la garantie, les frais de gestion, le comportement client impactent la valeur de l'épargne (donc le temps de déclenchement de la garantie).

chapitre 4 s'intéresse à l'analyse du cadre réglementaire dans lequel s'inscrivent ces garanties ;

- La seconde partie (chapitres 5 à 6) fournit une revue de littérature sur le *pricing* et la gestion des risques (chapitre 5). L'ensemble des résultats analytiques disponibles dans la littérature sont regroupées au sein d'un cadre unifié de modélisation dans le chapitre 6 ;
- En l'absence de formules fermées pour ces garanties, nous proposons dans une troisième partie composée de 4 chapitres une modélisation complète par Monte Carlo afin de déterminer le coût des garanties GMWB / GLWB (chapitres 7 et 8). Nous étudions dans les chapitres 9 et 10 la sensibilité du coût des garanties en fonction des modèles utilisés (comportement de l'assuré, modèles d'actif), des paramètres et des caractéristiques des garanties (mécanismes de revalorisation, calcul des revenus garantis, formulation des frais, prise en compte d'un différé, fréquence des retraits...);
- Enfin, dans une dernière partie (chapitre 11 à 13), nous proposons quelques réflexions liées à la couverture (chapitre 11), au provisionnement (chapitre 12) et au traitement de ces garanties dans le cadre de Solvabilité 2 (chapitre 13).

En conclusion, nous fournissons des pistes de compléments d'études (chapitre 14) qui pourraient constituer des sujets de mémoire d'actuariat et de recherche.

Mots-clés : assurance-vie, comportement des assurés, épargne retraite, garanties de revenus, GMWB, GMWB for Life, GLWB, tarification, couverture, provisionnement, rente viagère, Solvabilité 2, variable annuities.

Keywords : life insurance, policyholder behaviour, retirement savings scheme, withdrawal guarantees, GMWB, GMWB for Life, GLWB, pricing, hedging, reserving, life annuity, Solvency 2, variable annuities.

Partie I : Etude préalable du produit

Chapitre 1 : Besoin des assurés

Aux Etats-Unis, la majeure partie de l'épargne consacrée à la préparation de la retraite est investie sur des contrats comportant des garanties GMWB et GLWB. Le marché de la retraite complémentaire étant amené à se développer en France, ces garanties pourraient constituer le chaînon manquant de l'offre existante qui peine à décoller (malgré la loi du 21 août 2003 prévoyant la création du PERP, du PERE et du PERCO et la loi du 26 juillet 2005 créant les contrats eurodiversifiés).

Les contrats eurodiversifiés ont été pensés afin de favoriser l'investissement en actions. Ces contrats prévoient une garantie en capital au terme du contrat (au travers d'une provision de diversification) mais n'ont connu qu'un succès mitigé. Peu d'assureurs ont commercialisé ces produits en raison d'une adaptation jugée trop coûteuse des systèmes d'information et d'une spécificité du produit au seul marché français qui empêche les économies d'échelle pour les assureurs dont l'activité s'étend sur plusieurs pays¹.

1.1 Etat des lieux de la retraite en France

1.1.1 Un défi économique à relever

La population de la France est vieillissante, ce qui va peser sur la solvabilité des régimes de retraite par répartition. Selon les dernières projections du Conseil d'Orientation des Retraites (COR), le nombre de retraités progresserait rapidement jusqu'en 2050, passant de 15 millions en 2008 à 23 millions en 2050. Deux facteurs expliquent l'augmentation du nombre de retraités :

- L'arrivée progressive à la retraite des générations du baby-boom va bouleverser le nombre de cotisants par rapport au nombre de retraités. Cet effet explique principalement le rythme d'accroissement du nombre de retraités jusqu'en 2035 ;
- L'allongement de l'espérance de vie aux âges élevés va augmenter la durée des pensions. L'INSEE estime qu'entre 2000 et 2050, l'espérance de vie à la naissance passera de 75,3 ans à 83,8 ans pour les hommes et de 82,8 à 89 ans pour les femmes. Plus de 10% de la population française sera âgée de plus de 50 ans à l'horizon 2050.

Parallèlement à ces facteurs démographiques, la situation financière des régimes de retraite s'est fortement dégradée suite à la crise économique. Le COR, dans ses projections 2010², utilise trois scénarios économiques qui se distinguent à long terme par le niveau du taux de chômage et le rythme de croissance de la productivité. Par rapport aux projections de 2007, les hypothèses réglementaires et démographiques (projections de l'INSEE de 2006) restent inchangées. L'actualisation a été effectuée en sollicitant les régimes représentant les masses financières les plus importantes³.

¹ Pour en savoir plus sur le fonctionnement et la gestion de ces contrats, voir **Moire (2008)**.

² Ces projections ont été publiées le 14 avril 2010 par le COR.

³ CNAV, AGIRC, ARCCO, FPE (Régime de la Fonction Publique) et CNRACL.

Le ratio démographique, qui rapporte les effectifs de cotisants aux effectifs de retraités, se dégraderait plus rapidement que dans les projections 2007¹ du fait de la baisse du nombre de cotisants liée à la crise, pour atteindre à long terme un peu moins de 1,2 cotisant pour un retraité (dans les scénarios A et B qui prévoient un taux de chômage à long terme de 4.5%). Ce ratio serait davantage dégradé dans le scénario C qui prévoit un taux de chômage de long terme de 7%.

Les résultats des projections financières font apparaître 2 types d'enseignements :

- A moyen-long terme (2015 – 2020), quel que soit le scénario retenu, les perspectives financières du système de retraite apparaissent avant tout marquées par les effets de la crise économique sur l'emploi (baisse des recettes), qui s'ajoutent aux effets du vieillissement de la population. Le besoin de financement des régimes serait de 1.8 points de PIB en 2015 (environ 40 milliards d'euros) puis représenterait, à l'horizon 2020, entre 1,7% et 2,1% du PIB selon le scénario économique retenu. Dans le scénario de base des projections 2007, le déficit annuel était estimé à 0.7% du PIB en 2015 et 1% en 2020 ;
- A plus long terme, les effets de la crise économique se réduisent et le besoin de financement dépend davantage de la croissance et du chômage à long terme. En 2050, le déficit annuel anticipé serait compris entre 1.7 (équivalent au scénario de base de 2007) et 3 points de PIB.

Des ajustements techniques sur les régimes de retraite sont inévitables (allongement de la durée de cotisation, augmentation des taux de cotisation, diminution des taux de remplacement) et auront un impact sur le niveau des pensions versées dans la mesure où la solution consistant à reculer l'âge de départ à la retraite n'a que peu d'effet si le niveau d'emploi des seniors reste à un niveau faible². Une réforme est actuellement en cours de préparation et sera discuté devant le Parlement fin 2010.

1.1.2 La prise de conscience progresse...

Aujourd'hui seul un Français sur deux épargne pour préparer sa retraite³ mais la prise de conscience collective de la baisse des pensions à venir est en cours, notamment suite à la mise en place du droit à l'information prévue par la loi Fillon de 2003 et aux débats récents sur la pérennité de notre système de retraite par répartition :

- Les Français ont une perception pessimiste : 86% des actifs associent la retraite à une baisse de leur pouvoir d'achat⁴. Cette inquiétude concerne l'ensemble de la population : 52% des personnes se trouvant dans les tranches de revenus les plus élevées (supérieurs à 3500 euros par mois) se disent concernées ;
- L'écart important (275 euros par mois⁵, croissant avec la Catégorie Socioprofessionnelle – CSP -) entre le montant actuel de la retraite et les besoins estimés des foyers commence à être connu.

¹ En 2007, le COR estimait que le ratio démographique diminuerait entre 2006 et 2050, passant de 182 cotisants à 121 cotisants pour un retraité.

² En 2005, la France avait un des plus faibles taux d'emploi des seniors (55 – 64 ans) de l'Union européenne : 37,8% contre 42,5% pour l'ensemble des pays de l'UE.

³ Source : Optimind (2009), voir <http://www.optimind.fr>

⁴ Baromètre Axa de la Retraite 2008 (Sondage IPSOS août-septembre 2008 – échantillon de 1000 personnes).

⁵ Baromètre Axa de la Retraite 2007.

Cette baisse de revenus se trouve aggravée par l'apparition progressive de dépenses supplémentaires (prise en charge de la dépendance, accès à une maison de retraite qui coûte en moyenne 1600 euros par mois, augmentation de la mutuelle suite à la fin de la prise en charge de l'employeur, aménagement pour rendre les logements accessibles pour les personnes les plus âgées...).

En se basant sur cet état des lieux, il semble exister un véritable besoin en France de développer des produits d'épargne retraite complémentaire. Le contexte actuel pourrait être l'occasion de communiquer davantage autour des garanties GLWB.

1.2 Les dispositifs existants pour préparer sa retraite

La loi du 21 août 2003 a ouvert la possibilité de se constituer, à titre privé ou dans le cadre de son activité professionnelle, une épargne par capitalisation. A cet effet, la loi a créé trois dispositifs : le Plan d'Épargne Retraite Populaire (PERP), le Plan d'Épargne pour la Retraite d'Entreprise (PERE) et le Plan d'Épargne pour la Retraite Collective (PERCO).

Le PERP et le PERE sont des contrats d'assurance-vie contrairement au PERCO qui est un contrat d'épargne retraite. Ces produits ont complété les dispositifs existants (Préfon, Madelin, articles 39, 82 et 83). Nous détaillons les solutions existantes pour les salariés dans le paragraphe suivant.

1.2.1 Le PERP

Le PERP est un contrat d'assurance-vie mis en place pour permettre aux salariés de disposer d'un régime individuel de retraite complémentaire par capitalisation, par analogie avec la Préfon (fonctionnaires et assimilés) et les contrats Madelin (indépendants). Il existe plusieurs catégories de PERP : contrats multisupports, en points (L.441) et eurodiversifiés. L'encours de ce produit est estimé à 4.1 Mds€ en 2008 et 5.3 Mds€ en 2009¹.

Ce contrat renforce la sécurité prévue par les dispositions générales du Code des Assurances en imposant l'existence d'un comité de surveillance du contrat et un cantonnement de l'actif avec privilège de créancier. L'épargne accumulée sur le contrat est convertie en rente viagère, à compter de la date de liquidation des droits à la retraite ou à un âge fixé. En juillet 2006, la liste des cas permettant de sortir en capital a été élargie.

Les versements effectués sont déductibles du revenu net imposable dans la limite du plafond global de déductibilité fiscale de l'épargne retraite (10% du revenu net d'activité professionnelle de l'année n-1, dans la limite de 8 fois le plafond annuel de la sécurité sociale). Les versements effectués dans le cadre de mécanismes proposés par l'employeur viennent en déduction de l'enveloppe fiscale individuelle.

1.2.2 Le PERE

Le PERE correspond à la version collective du PERP, les catégories de produit et le fonctionnement restant identiques. Le salarié dispose d'un compte d'épargne retraite individuel et peut compléter ses cotisations obligatoires et celles de l'entreprise par des

¹ Source : DREES, FFSA, AFG cité dans *La Tribune* du 18 août 2010.

versements individuels (libres ou programmés). Les droits à retraite acquis restent inscrits au compte du salarié en cas de dénonciation du régime, avec la possibilité de transférer ceux-ci sur un PERP ou sur un contrat de même nature en cas de changement d'employeur. L'encours de ce produit est estimé à 2.2 Mds€ en 2008 et 2.4 Mds€ en 2009.

Le traitement des sorties anticipées et les dispositions fiscales sont analogues aux produits de l'article 83 (voir 1.2.4.2). Les cotisations obligatoires de l'entreprise sont déduites du résultat imposable et exonérées de charges patronales. Le salarié est exonéré d'impôt sur le revenu pour les cotisations obligatoires et peut déduire du revenu imposable, dans la limite du plafond global de déductibilité fiscale de l'épargne retraite, ses versements.

1.2.3 Le PERCO

Le PERCO est un système d'épargne retraite collectif et facultatif de l'entreprise. Il permet aux bénéficiaires de se constituer un capital en vue de la retraite en investissant uniquement sur des unités de compte. Les entreprises doivent disposer au préalable d'un PEE pour pouvoir mettre en place un PERCO.

Le PERCO peut être alimenté de 5 façons: versements personnels, intéressement, abondement de l'entreprise (net de charges sociales), participation, transfert du compte épargne temps.

Les sommes versées sont indisponibles jusqu'au départ effectif en retraite. L'assuré peut alors disposer de son épargne sous la forme d'une rente (soumise à la fiscalité des rentes acquises à titre onéreux) ou d'un capital (les plus-values sont exonérées d'impôts mais soumises aux prélèvements sociaux). Cinq cas de déblocages anticipés sont prévus.

Au 31 décembre 2009¹, les encours s'établissaient à 3 Mds€ en progression de 63% sur un an (1.9 Mds€ en 2008). Le nombre d'entreprises proposant ce produit est en augmentation (en 2009, 111 500 contre 56 000 en 2007 et 37 000 en 2006) mais il s'agit essentiellement de grandes entreprises. Le nombre de salariés couverts par ce dispositif est estimé à 2.5 millions, dont près de 557 000 ont effectivement alimenté leur compte (334 191 à fin 2007).

1.2.4 Articles 39, 82 et 83

Les articles 39, 82 et 83 du Code général des impôts désignent des produits de retraite par capitalisation.

1.2.4.1 Article 39

L'article 39 est un contrat d'assurance vie collectif à prestations définies et à adhésion obligatoire. Ce contrat est le plus souvent réservé à une catégorie spécifique de salariés de l'entreprise² (cadres, cadres supérieurs...). Cette retraite supplémentaire est financée intégralement par l'entreprise, les versements du salarié n'étant pas autorisés. L'article 39 ne prévoit qu'une sortie en rente viagère. Le versement des annuités est exclusivement dû aux salariés présents dans l'entreprise lors de leur départ à la retraite (dispositif de fidélisation et de rémunération différé des salariés). Deux types de régimes existent :

¹ Source : AFG (Association Française de Gestion) / Agefi du 8 mars 2009.

² Une catégorie spécifique de salariés de l'entreprise s'entend au titre du Code du travail (ouvriers, employés, agents de maîtrise, ingénieurs et cadres). Il est cependant possible de retenir d'autres catégories si les critères retenus sont objectifs et clairement définis par les usages et les accords collectifs en vigueur (par exemple les salariés dont le salaire est supérieur au double du plafond du régime de retraite des cadres). L'article 39 peut être applicable aux mandataires sociaux. Un PDG d'une SA ou un gérant d'une SARL ne constitue pas une catégorie.

- Un régime additionnel offrant un revenu de remplacement égal à un pourcentage du salaire de fin de carrière. Les prestations servies au titre de l'article 39 sont indépendantes des régimes de retraite et viennent en complément ;
- Un régime différentiel (ou régime chapeau) garantissant un complément de revenu calculé de telle sorte que la pension totale de retraite (retraite obligatoire, ou autres régimes par capitalisation existant dans l'entreprise) perçue par les salariés atteignent un niveau prédéterminé du salaire de fin de carrière.

La contribution de l'employeur est déductible du résultat imposable, exonérée de charges patronales dans la limite de 85 % du plafond annuel de la Sécurité sociale mais soumise à contributions sociales. La loi de financement de la sécurité sociale pour 2010 a modifié le traitement des articles 39 (partie retraite chapeau). L'article 15 prévoit le doublement des taux de contribution sociale sur ces dispositifs :

- le taux de la contribution sur les retraites liquidées depuis le 1er janvier 2001 passe de 8 à 16% ;
- le taux de la contribution sur les primes versées à un assureur ou sur les dotations aux provisions constituées dans le cas d'une gestion en interne du régime de retraite chapeau passe de 12 à 24%.

Cet article prévoit par ailleurs la mise en place d'une contribution additionnelle de 30% à la charge de l'employeur sur les rentes excédant 276 960 euros pour 2010.

Pour le salarié, les sommes versées par l'entreprise sont exonérées de charges sociales ainsi que d'impôt sur le revenu.

L'encours sur ce produit est estimé à 29.4 Mds€ en 2009.

1.2.4.2 Article 83

L'article 83 est un contrat d'assurance vie collectif à cotisations définies et à adhésion obligatoire. Il peut être soit réservé à une catégorie spécifique et objective de salariés, soit ouvert à tous les salariés. Les bénéficiaires disposent d'un compte individuel alimenté par les cotisations, prises en charge par l'entreprise ou partagées entre le salarié et l'employeur. Le niveau de cotisation doit être uniforme pour l'ensemble des bénéficiaires. En cas de départ, le salarié conserve ses droits et peut demander à transférer son compte sur un contrat de même nature dans sa nouvelle entreprise.

A l'échéance, au plus tôt à la date de liquidation de la retraite du régime général, le bénéficiaire disposera d'une rente viagère. En cas de décès avant le départ à la retraite du bénéficiaire, l'assureur verse aux ayants-droits un capital. Le remboursement de l'épargne est aussi prévu par la loi en cas de faillite personnelle, fin de droits des allocations chômage, invalidité...

Pour les versements obligatoires, la contribution de l'employeur est déductible du résultat imposable, exonérée de charges patronales dans la limite de 85 % du plafond annuel de la Sécurité sociale mais soumise à CSG / CRDS. Pour le salarié, les sommes versées par l'entreprise sont exonérées de charges sociales ainsi que d'impôt sur le revenu.

En cas de versement complémentaire du salarié, les sommes sont exonérées de l'impôt sur le revenu sous condition de montant (fonction du plafond annuel de la Sécurité sociale). La rente viagère perçue par le salarié au moment de sa retraite est soumise à l'impôt sur le revenu.

L'encours de ce produit est estimé à 36.8 Mds€ en 2009.

1.2.4.3 Article 82

L'article 82 est un contrat d'assurance vie collectif, à adhésion facultative et à cotisations définies, qui prévoit une sortie en capital ou en rente viagère. Ces contrats, encore appelés contrat en sursalaire, sont considérés par l'administration fiscale comme des avantages en nature. La fiscalité applicable pour l'employeur est la même que celle de l'article 83. Les sommes versées par l'entreprise sont soumises à l'impôt sur le revenu. Les versements complémentaires du salarié n'ouvrent pas droit à une déductibilité fiscale.

Le capital perçu par le salarié au moment de sa retraite est exonéré d'impôt sur le revenu, mais l'impôt sur les plus-values reste dû. L'article 82 peut intéresser les salariés préférant disposer d'un capital (en comparaison des articles 39 et 83 qui imposent une sortie en rente viagère). L'encours sur ce produit est estimé à 2.9 Mds€ en 2008 et 2.9 Mds€ en 2009.

1.3 Positionnement des garanties GMWB et GLWB

Nous avons vu dans la partie 1.1 qu'il existait un réel besoin pour les Français de se constituer une épargne retraite complémentaire. L'offre actuelle de produits ne semble pas répondre totalement aux attentes des clients potentiels, notamment pour les raisons suivantes :

- Le PERP, seule solution individuelle, ne prévoit qu'une sortie en rente ;
- Le régime fiscal, basé sur le principe de neutralité inter-temporelle¹ pour le PERP, n'incite pas les ménages peu imposés à la souscription ;
- Les fonds euros cantonnés du PERP offre un rendement faible et les unités de compte proposées ne présentent aucune garantie de capital (exceptée la garantie plancher). La situation financière des fonds de pension anglo-saxons et les conséquences sur le niveau anticipé des pensions actuellement liquidées témoigne du risque des dispositifs investis principalement en actifs risqués sans protection ;
- Les contrats collectifs (PERE, PERCO) concernent peu les TPE et les PME, alors que celles-ci représentent la majeure partie du tissu économique ;
- Les contrats eurodiversifiés sont spécifiques du marché français (absence d'économie d'échelle) et peu commercialisés dans les faits.

Un produit individuel d'épargne retraite proposant des annuités garanties, prévoyant le versement du capital restant en cas de décès ou de besoin, et bénéficiant d'une revalorisation plus attractive sur le long terme que les fonds euros lors de la phase de constitution de l'épargne, pourrait constituer une alternative réelle aux produits existants. Les contrats avec garanties GMWB et GLWB sont ainsi parvenus à drainer depuis leur apparition au début des années 2000 aux Etats-Unis² une épargne importante.

1.3.1 Avantages pour l'assuré

Pour l'assuré, ce produit présente l'avantage d'être à prestations définies, ce qui est de plus en plus rare dans les offres proposées par les fonds de pension ou les assureurs. Il permet par ailleurs de s'exposer aux actions, mieux adaptées à la préparation de la retraite puisque leur

¹ Déductibilité des versements et réintégration des rentes distribuées dans l'impôt sur le revenu.

² Les contrats *variable annuities* représentaient 67% de la collecte aux Etats-Unis en 2006, dont les trois-quarts étaient réalisés sur des garanties GMWB (source: LIMRA 2006). L'encours de ces contrats dépasseraient les 1 400 milliards de dollars à la mi-2008 même si la collecte s'est contractée de 25% sur les 9 premiers mois de l'année 2009 en raison de la crise (source : *National Association for Variable Annuities / Optimind*). Le premier produit proposant une garantie GLWB a été lancé en 2004 aux Etats-Unis.

rendement espéré sur longues périodes est supérieur à celui des obligations, tout en restant protégés contre les conséquences des fluctuations à la baisse des marchés.

Aujourd'hui, en l'absence de garantie, les assurés ne construisent pas leur allocation en maximisant le rendement sous contrôle de la probabilité *a priori* de ruine. Ils favorisent au contraire des placements sécurisés, dégageant une performance moyenne sur le long terme et inefficace d'un point de vue risque / rendement :

- Les assurés ne s'exposent pas aux actions, même pour leur épargne longue : l'âge moyen de souscription d'un PERP est de 43 ans, ce qui signifie un horizon d'investissement d'environ 20 ans, alors que 22 % seulement des cotisations sont investies sur des supports en unité de compte¹. L'érosion des taux de rendements des fonds euros (accentuée par les désinvestissements en actions liés à Solvabilité 2 et la politique de taux bas menée par les banques centrales...²) diminue encore l'intérêt d'investir l'épargne longue sur des fonds en euros ;
- Dans le cadre d'une stratégie de retraits partiels programmés sur un contrat multisupport, la chute des marchés actions a un impact élevé sur la probabilité de ruine lorsqu'elle a lieu peu avant ou peu après le début de la retraite. En effet, cette chute diminue le nombre de rachats partiels pouvant être effectués ainsi que la probabilité de profiter d'un rebond des marchés. Dans le cas d'une stratégie de rente viagère, une chute des marchés actions peu avant la date de conversion impacte directement le niveau des annuités

Les récentes crises boursières, dont la fréquence est croissante, vont probablement inciter les assurés à rechercher davantage de sécurité dans ses placements. Les garanties GMWB et GLWB présentent l'avantage de transférer l'ensemble des risques financiers et de longévité sur l'assureur, sans aliéner le capital. Le Tableau 1-1 résume les avantages et les inconvénients des différentes stratégies d'investissement à la disposition d'un assuré.

Tableau 1-1 : Avantages et inconvénients des différentes stratégies

	Convertir un capital en rente viagère	Rachats programmés sur un multisupport	Investir sur un contrat GLWB
Avantages	Couverture du risque de longévité Nombreuses options : réversible, dépendance, taux technique... et mécanisme de revalorisation	Capital disponible et transmissible Fiscalité des rachats partiels	Certitude de bénéficier de revenus garantis à vie Tant que la garantie n'est pas activée, le capital reste disponible et la fiscalité est celle des rachats partiels
Inconvénients	Le capital est aliéné Fiscalité des rentes viagères avant 70 ans peu attractive Aléa sur le montant de l'annuité	Risque de longévité non couvert Risque en capital sur la partie investie en UC (sauf en cas de décès si garantie plancher)	Capital non garanti et frais élevés Rente généralement non réversible et non revalorisée

¹ Etude FFSA disponible sur http://www.ffsa.fr/ffsa/jcms/p1_84055/retraite-les-contrats-madelin-les-perp-et-les-contrats-des-exploitants-agricoles-en-2009

² Ainsi que dans une moindre mesure par la pratique croissante des taux promotionnels financés sur la réserve de PB et la pratique discrétionnaire de l'assureur de mieux revaloriser les contrats les plus récents.

1.3.2 Avantages pour l'assureur

Les assureurs, s'ils acceptent les risques de ces garanties et sont en mesure de les gérer efficacement, peuvent tirer de nombreux avantages à commercialiser ces produits. Ces garanties témoignent de la capacité d'innovation de l'entreprise et de son expertise financière. Elles jouent un rôle marketing pour l'ensemble de la gamme produit et permettent de se différencier sur un marché de l'assurance vie globalement peu innovant¹. Elles permettent par ailleurs d'augmenter les marges réalisées sur la vente des contrats, en favorisant la vente des unités de compte.

L'argumentaire commercial pour vendre ces produits est efficace et simple : bénéficier de la sécurité d'une rente (montant des retraits minimum connus dès la souscription du contrat), sans aliéner son capital (possibilité de racheter l'épargne ou de la transmettre en cas de décès), tout en profitant du potentiel de hausse des marchés et de la fiscalité de l'assurance-vie pendant la phase de distribution (jusqu'au déclenchement de la garantie viagère).

1.3.3 Développement des contrats *variable annuities* en Europe

En 2005, MetLife lançait le premier produit GMWB au Royaume-Uni. Depuis 2008, la commercialisation des garanties GMWB / GLWB s'est accélérée² en Europe, comme le tableau ci-dessous l'illustre :

Tableau 1-2 : Commercialisation en Europe des garanties GMWB / GLWB

Nom	Produit	Garantie	Lancement
Aegon	Income for Life	WB / IB	UK – Mai 08
MetLife	Retirement Portfolio	WB / AB	UK – Juin 08
Allianz	Invest4Life	WB	Allemagne – Juillet 08
Axa	Accumulator Retraite	WB	France – Juillet 08
MetLife	Citi VA Orchidea	WB	Pologne – Septembre 08
Baloise Life	RentaSafe	WB	Suisse – Octobre 08
Allianz	Invest4Life	WB	France – Octobre 08
Axa	Twinstar	WB	Suisse – Novembre 08
MetLife	Citi VA Investment Bond	WB	UK – Janvier 09
La Mondiale	Terre d'Avenir	WB / DB	France – Janvier 09
Metlife	Citi VA Auvida	WB	Grèce – Février 09
Allianz	Invest4Life	WB	Italie – Février 09
ING	Lifelong Income	WB	Belgique – Février 09
Canada Life	Garantie Investment Rente	WB	Allemagne – Mars 09
Metlife	Citi VA Avida	WB	Espagne – Mai 09
Metlife	Citi VA	WB	Belgique – Mai 09

Sur le marché français, trois produits offrant une garantie GLWB et un produit proposant une GMWB ont été lancés entre 2007 et 2009. Nous les étudions en détail dans le chapitre 2.

¹ « La capacité à structurer des garanties sera, à l'avenir, un avantage concurrentiel déterminant face à des épargnants en quête d'un surcroît de protection ». H. de Castries, *Les Echos*, 30 avril.

² Le tableau a notamment été réalisé à partir de **Holler et Finkelstein (2009)**. Le produit Capital Ressources d'Axa a été lancé en 2007.

Chapitre 2 : Description des garanties

Les 4 produits lancés sur le marché français entre 2007 et 2009 proposent des garanties GMWB (Capital Ressources d'Axa) ou GLWB (Accumulator Retraite d'Axa, Invest4Life d'Allianz, Terre d'Avenir de la Mondiale Partenaire).

Ces produits visent à protéger l'assuré contre un retournement des marchés (en particulier peu avant ou peu après la date de déclenchement de la phase de distribution), en garantissant un niveau de revenus pendant une période déterminée ou viagers. Ce montant est calculé comme un pourcentage (défini à l'avance) de la *benefit base* (assiette de la garantie).

L'entrée d'autres acteurs sur le marché a probablement été freinée par la crise financière. La structure tarifaire, le niveau des garanties et la définition des produits commercialisés ont par ailleurs été modifiées en 2009. Ces produits doivent encore faire la preuve de leur succès commercial et de leur rentabilité mais ont d'ores et déjà permis de faire parler des assureurs qui ont lancé ces offres. Axa France évoquait fin 2009 une collecte de 700 M€¹, depuis le lancement de sa gamme Accumulator (Axa Capital Ressources et Axa Accumulator Retraite). Allianz et La Mondiale fournissent peu de chiffre² en raison de l'échec relatif de leur produit.

Nous présentons dans ce chapitre le fonctionnement et la formulation des produits existants sur le marché français. Quelques éléments de comparaison avec les produits commercialisés aux Etats-Unis sont par ailleurs proposés.

2.1 Fonctionnement des garanties GMWB et GLWB

Nous distinguons 3 phases dans la vie des contrats d'épargne avec garantie GMWB / GLWB :

- Une phase d'accumulation (pouvant être nulle) pendant laquelle l'épargne est revalorisée. Dans le cas d'une garantie GLWB, la durée du différé est choisie par l'assuré en fonction de sa date de départ à la retraite. Au cours de cette période, l'assuré peut être autorisé à effectuer des versements complémentaires. Généralement, il existe des garanties de revalorisation (cliquet, TMG)³ ;
- Une phase de distribution où les revenus garantis sont obtenus par rachat partiel de l'épargne. Une garantie cliquet de la *benefit base*, de fréquence variable, ou une garantie GMDB peuvent également être proposées au cours de cette phase ;
- Une phase d'activation de la garantie (déclenchement de la rente), qui prend le relai des rachats partiels si l'épargne devient nulle.

¹ Source: *Les Echos*, 28 décembre 2009.

² Allianz, dans un communiqué de presse du 16 juin 2010, indique avoir vendu 5000 contrats depuis le début de la commercialisation d'Invest4Life. Dans un article du 19 octobre 2010 relatif au lancement de la nouvelle version de Terre d'Avenir, il est précisé que 50 affaires nouvelles ont été réalisées depuis le lancement.

³ C'est à dire que le produit offre une garantie GMAB lors de la phase d'accumulation.

En contrepartie, l'assuré s'engage à payer des frais au titre du produit d'épargne et de la garantie (outre les frais d'arbitrage et de rachat qui sont liés à des événements ponctuels) :

	Type de frais prélevés	Revenus	Coûts correspondants
Produit d'épargne	Frais acquisition	% des primes versées	Commission sur flux et coût d'acquisition du contrat
	Frais de gestion	% de l'épargne	Commission sur encours et coût de gestion
Garantie	Frais au titre de la garantie	% de la <i>benefit base</i> , de l'épargne ou des primes versées	Coût économique de la couverture ¹ + coût de gestion de la couverture + coût inefficacité partielle de la couverture + coût immobilisation du capital

Le pourcentage de revenus garantis peut dépendre de l'âge (un pourcentage par tranche d'âge ou linéairement croissant avec l'âge). Il peut aussi être formulé en fonction de la durée d'accumulation.

Nous prenons pour illustrer le fonctionnement des produits le cas d'une garantie GLWB offrant un taux de revenu garanti de 4%. La revalorisation de la *benefit base* est possible au travers d'un mécanisme de cliquet semestriel en phase d'accumulation (durée 10 ans) et d'un cliquet annuel en phase de distribution. Les revenus garantis peuvent être retirés annuellement. Le produit est souscrit par un assuré âgé de 50 ans qui investit 100 euros.

L'évolution de l'épargne pendant les premières années de la phase de distribution est fondamentale. En cas de chute des marchés à ce moment là, la garantie a de fortes chances de s'activer rapidement car les retraits et les frais de gestion amplifient la chute. Par ailleurs, les effets d'une remontée des marchés impacteront uniquement la valeur de l'épargne restante, déjà largement inférieure à la valeur de la *benefit base*.

La Figure 2-1 et la Figure 2-2, construites à partir du programme Matlab qui figure en annexe, représentent un scénario favorable et un scénario défavorable pour l'assureur. L'évolution de l'épargne, de la *benefit base* et des prestations payées par l'assureur pour un contrat moyen² sont tracées sur ces graphiques.

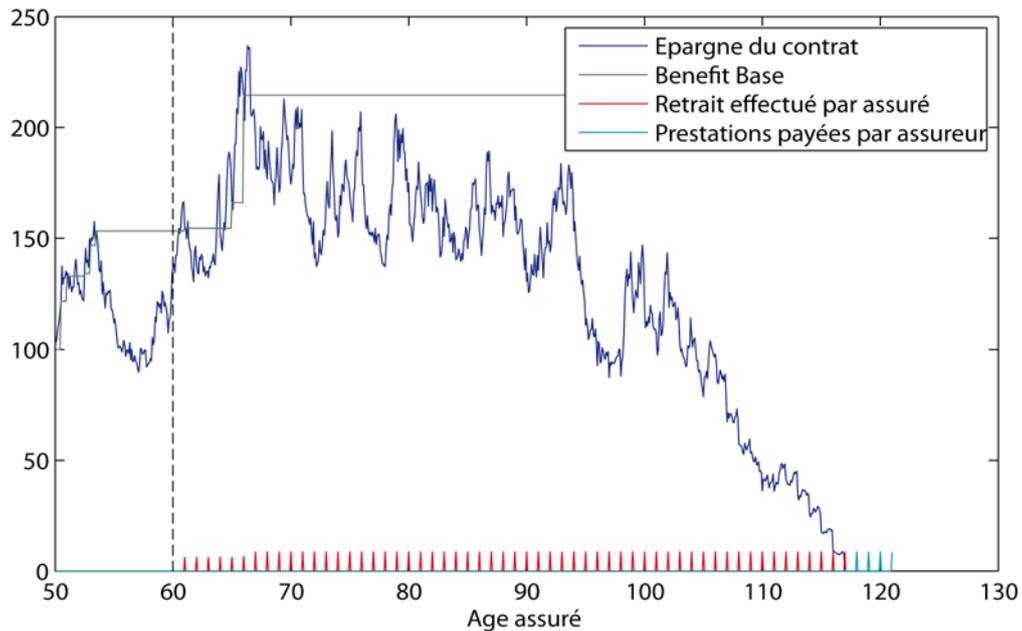
Dans le cas favorable, la garantie ne s'active pas ou alors très tardivement. La Figure 2-1 illustre ce second cas, avec un déclenchement de la garantie proche de la fin de la table de mortalité. Les prestations payées (barres bleues) sont donc assez peu nombreuses en comparaison des revenus garantis prélevés sur l'épargne de l'assuré (barres rouges). Les frais sont prélevés pendant la période où les revenus garantis sont en rouge.

Le cliquet (courbe verte) s'active 7 fois dans ce cas de figure : 4 fois pendant la phase d'accumulation et 3 fois pendant la phase de distribution. L'impact du cliquet se lit sur l'augmentation du revenus garantis.

¹ L'assureur peut choisir de mettre en réserve les frais prélevés ou de privilégier une solution de réassurance.

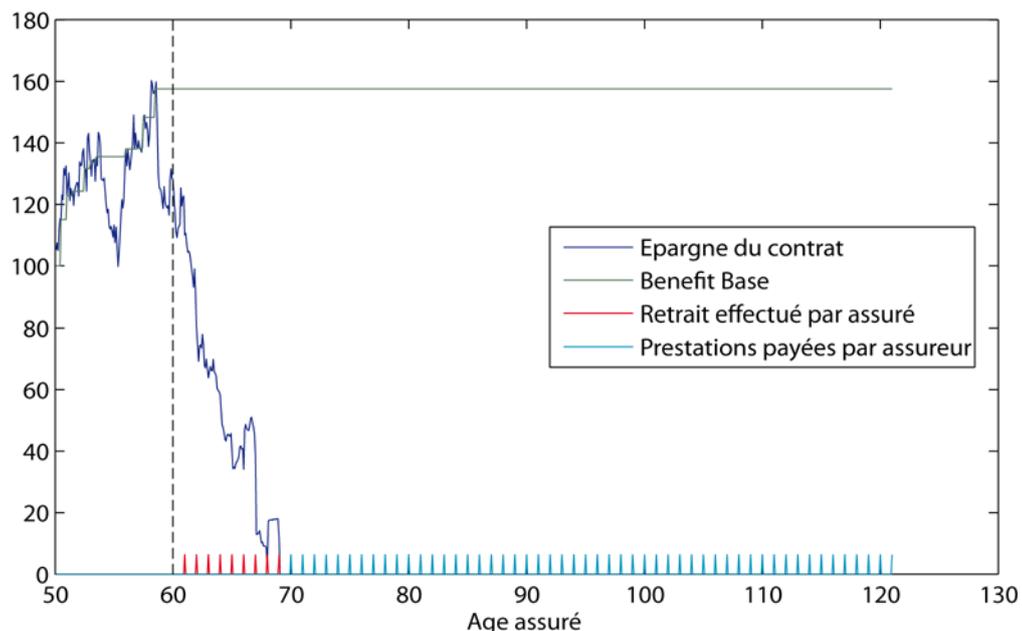
² Les graphiques sont tracés en supposant que nous avons un contrat à $t = 0$ et que le nombre de contrat en cours diminue au fur et à mesure des années suite aux rachats et aux décès de l'assuré. Il s'agit d'un comportement moyen et une représentation graphique plus réaliste consisterait à déterminer *ex ante* le moment de sortie de l'assuré (que la sortie s'effectue par décès ou par rachat).

Figure 2-1 : Scénario financier favorable pour l'assureur



La Figure 2-2 illustre un cas particulièrement défavorable pour l'assureur. La garantie s'active très rapidement suite à la chute de l'épargne dans les premières années de la phase de distribution. Dès lors que la garantie est activée, l'assureur doit prendre en charge les revenus garantis jusqu'au décès de l'assuré et ne perçoit plus de frais au titre de la garantie. Le cliquet s'active uniquement en phase d'accumulation dans le scénario représenté. La *benefit base* reste constante pendant les phases de distribution et d'activation de la garantie.

Figure 2-2 : Scénario financier défavorable pour l'assureur



2.2 Caractéristiques des garanties GMWB

2.2.1 Garantie GMWB commercialisée sur le marché français

Il n'existe qu'un produit GMWB commercialisé sur le marché français (Axa Capital Ressources, lancé en mai 2007).

Ce contrat collectif cible des assurés qui souhaitent utiliser leur capital pour générer un revenu pendant une période définie. Le produit comprend 3 phases : une phase d'accumulation (le différé pouvant être nul), une phase de distribution où les revenus garantis sont obtenus par rachat partiel de l'épargne et une phase d'activation de la garantie si l'épargne devient nulle.

Tableau 2-1 : Caractéristiques de la garantie GMWB commercialisé sur le marché français (mi-2009)

	Capital Ressources
LPS	Non
Contrat	Collectif souscrit auprès de l'association Anpere
Mise en place garantie	A la souscription, pas de résiliation possible de la garantie
Versement initial	Prime unique, montant minimal de 30 k€
Age souscription	Entre 25 et 75 ans (en l'absence de différé, 70 ans maximum si différé)
Différé	Différé nul ou de 4 ans
Durée de la garantie	15 ans en l'absence de différé, 19 ans avec différé de 4 ans A l'échéance de la garantie GMWB, l'assuré peut conserver son contrat d'épargne pour bénéficier de son antériorité fiscale
Frais d'entrée	4.85% de la prime versée
Frais de gestion	0.96% sur encours annuel / 1% sur les arbitrages en gestion libre
Type de gestion	<ul style="list-style-type: none"> Gestions profilées (avec réajustement annuel gratuit) Choix parmi une gamme de fonds.
Supports d'investissements	L'allocation d'actifs peut comporter un fonds en euro (minimum 30% de l'allocation), des fonds obligataires (maximum 20% de l'allocation) et des fonds actions (maximum 50% de l'allocation) ;
Possibilité d'arbitrage	Possibilité d'arbitrer entre les supports tant que les pondérations des classes d'actifs restent dans les limites prévues par le contrat
Assiette de calcul des retraits (<i>benefit base</i>)	Maximum entre la prime investie nette de frais et la valeur de l'épargne à la fin du différé. Cela correspond à une revalorisation avec un TMG nul. En l'absence de différé, la <i>benefit base</i> est égale à la prime nette.
Mise à disposition des revenus garantis	Arbitrage vers le compte monétaire systématique, à date anniversaire du contrat. Pas de rachat obligatoire sur ce compartiment.
Revalorisation des revenus	Pas de revalorisation des revenus garantis en phase de distribution
Garantie si l'épargne devient nulle	Garantie pertes pécuniaires (IARD). Revenus garantis pendant 15 ans : 6% pendant les 5 premières années et 7% les 10 années suivantes
Garantie décès (<i>en cas de rente non activée</i>)	En cas de décès, l'assureur verse aux bénéficiaires un capital au minimum égal à la prime nette investie (diminuée des rachats déjà effectués) ¹ . La prime versée au titre de la garantie pertes pécuniaires est remboursée au prorata de la durée restante
Tarif des garanties financières	Tarif annuel de la garantie, en pourcentage de la prime nette investie : <ul style="list-style-type: none"> 0.5% de la prime nette investie en l'absence de différé 0.4% pour un différé de 4 ans
Tarif révisable	Oui, à chaque génération de contrat
Rachat	Possible mais sans garantie sur le capital
Rachat partiel	Interdiction d'effectuer des rachats partiels au-delà du montant de revenu garanti annuellement

¹ Cela revient à verser la somme non actualisée des revenus garantis futurs.

Suite à la crise, 2 modifications semblent avoir été apportées sur ce contrat :

- Le tarif de la garantie GMWB a augmenté de 0.1% pour passer à 0.6% de la prime nette investie en l'absence de différé ;
- Le produit a été modifié pour limiter le risque financier du sous-jacent et maximiser les économies d'échelle. La gestion est désormais pilotée et impose la répartition suivante de l'épargne¹ : 55% sur le support Capital Ressources Euro (fonds euros) et 45% dans l'OPCVM nourricier AXA Stratégie Horizon. Cet OPCVM a été créé le 17/03/09 et est investi en totalité dans le FCP Axa Stratégie Retraite (utilisé dans l'allocation d'actifs d'Accumulator Retraite).

2.2.2 Garanties GMWB commercialisées sur le marché américain

Le site www.annuityfyi.com, permet d'identifier les différentes garanties GMWB commercialisées sur le marché américain². Ces garanties sont très proches du produit commercialisé sur le marché français.

Tableau 2-2 : Caractéristiques des garanties GMWB commercialisées sur le marché américain

Revenu garanti	Entre 5% et 7%
Revalorisation de la benefit base	Généralement cliquet annuel pendant une durée limitée (par exemple jusqu'à 85 ans ou pendant les 12 premières années du contrat).
Tarifs des garanties	entre 0.55% et 0.85% de l'épargne

2.3 Caractéristiques des garanties GLWB

Il s'agit d'une évolution récente de la garantie GMWB permettant de générer des compléments de retraits viagers à l'issue d'une éventuelle période de différé. Ces garanties sont aussi appelées GMWB for Life.

2.3.1 Garanties GLWB commercialisées sur le marché français

Trois produits GLWB sont commercialisés sur le marché français : Accumulator Retraite d'Axa, Invest4Life d'Allianz et Terre d'Avenir de La Mondiale Partenaire.

En considérant le montant minimum de la prime initiale, nous en déduisons que ces produits s'adressent à une population d'actifs aisés préparant leur retraite ou à de jeunes retraités. La cible d'Accumulator Retraite semble être plus large puisque ce contrat autorise un âge minimum de souscription et une prime initiale plus faible que les autres produits.

Le Tableau 2-3 fournit une comparaison des 3 produits actuellement commercialisés, élaborée à partir des documents contractuels et des sites internet des assureurs. Cette comparaison a été réalisée sur la base des données disponibles mi-2009. Une mise à jour de certaines caractéristiques des garanties est proposée dans la partie 2.3.5.

La nouvelle version de Terre d'Avenir, lancée en octobre 2010, n'est pas intégrée au tableau.

¹ Source : www.accumulator.fr

² Basé sur l'actualisation du site au 7 décembre 2009.

Tableau 2-3 : Comparaison des 3 produits GLWB commercialisés sur le marché français

<i>Données mi-2009</i>	Accumulator Retraite (Axa)	Invest4Life (Allianz)	Terre d'Avenir (La Mondiale)								
LPS	Non	Oui (Irlande)	Non								
Contrat	Collectif	Individuel	Collectif								
Frais d'adhésion	15 €(Anpere) + 30€de frais de dossier	30 €	11 €(Amphitea)								
Mise en place de la garantie GLWB	A la souscription / option (Arpèges)	A la souscription / option	A la souscription ou après / option								
Versement initial Minimum	Différé	Minimum 30 k€	Minimum 100 k€(puis prime abaissé à 30 k€)								
	Montant										
	2/4 ans			30 k€							
	5/10 ans			15 k€							
	11/30 ans	10 k€									
Versements complémentaires (VL = libre, VR = Réguliers)	VL: 480 €min VR: 250 €min/mois Les VL/VR augmentent la benefit base	Contrat à prime unique. Pas de VL/VR.	VL : 5 000 € Les VL augmentent la benefit base								
Age souscription	Entre 25 et 73 ans	Entre 43 et 75 ans	Au moins 45 ans								
Différé (phase d'accumulation avant le 1 ^{er} revenu garanti)	Entre 2 et 30 ans	Entre 0 et 15 ans. L'assuré doit avoir entre 58 et 75 ans à l'issue du différé	Pas de minimum L'assuré a, selon son choix, 60 ou 65 ans à la fin du différé								
Modification du différé	Non modifiable, même si retraite anticipée ou prorogée	Oui, modifiable à la hausse, dans la limite de 15 ans	Non modifiable après choix du début des retraits (60 ou 65 ans)								
Frais d'entrée	4,85% du versement	4.50% du versement									
Frais de gestion (<i>hors garantie financière</i>)	0,96% de l'encours par an (mensuel)	0.99% de l'encours par an (trimestriel)	0.96% de l'encours par an (trimestriel)								
Type de gestion	Choix parmi 3 mandats de gestion et une gestion libre ¹	Choix d'un fonds profilés parmi 2 proposés	Choix du fonds profilé selon l'âge de fin de différé (60/65 ans)								
Supports d'investissements	Mandat ² par défaut : 40% fonds euro, 10% obligations et 50% actions. Mandats 60% et 70% actions possibles	2 fonds (actions internationales et obligation euro)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Fonds³</th> <th>Actions</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prudent</td> <td>20%</td> </tr> <tr> <td>Equilibre</td> <td>40%</td> </tr> <tr> <td>Dynamique</td> <td>60%</td> </tr> </tbody> </table>	Fonds ³	Actions	Prudent	20%	Equilibre	40%	Dynamique	60%
		Fonds ³		Actions							
Prudent	20%										
Equilibre	40%										
Dynamique	60%										
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Fonds</th> <th>Actions</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Strategy 50</td> <td>50%</td> </tr> <tr> <td>Strategy 75</td> <td>75%</td> </tr> </tbody> </table>	Fonds	Actions	Strategy 50	50%	Strategy 75	75%	Pas de fonds euro, fonds obligataires pour le complément		
Fonds	Actions										
Strategy 50	50%										
Strategy 75	75%										
Possibilité d'arbitrage	Pas d'arbitrage possible à l'initiative de l'assuré	Arbitrage de Strategy 75 vers 50 (tarif garantie inchangé). Autre sens interdit.	Arbitrage gratuit (max. 12/an) entre fonds de la garantie ⁴								
Assiette calcul des revenus (<i>benefit base</i>)	Valeur de l'épargne atteinte à la fin du différé, rehaussée si nécessaire par la garantie cliquet ou TMG										
Garantie sur l'épargne en phase	TMG : l'assiette de 1 ^{er} retrait supérieur aux	Cliquet annuel : l'assiette de calcul du 1 ^{er} revenu garanti est égale à la plus haute valeur constatée									

¹ 40% sur le fonds euro et 60% sur AXA Stratégie Retraite, surcoût pour les garanties financières dans ce cas.

² Allocation stratégie 60 (50% actions, 10% taux et 40% fonds euro), 70 et 80. Ce point a été modifié en 2009 et la formulation standard est désormais 50% fonds euros + 50% Axa Stratégie Retraite (voir partie 2.3.2).

³ Les fonds sont suivis de 60/65 (âge fin de différé), le fonds dynamique est accessible si fin du différé = 65 ans.

⁴ Un arbitrage (5000 €minimum) vers un fonds non éligible a le même effet qu'un rachat ponctuel.

<i>Données mi-2009</i>	Accumulator Retraite (Axa)	Invest4Life (Allianz)	Terre d'Avenir (La Mondiale)																																		
d'accumulation	versements nets capitalisés à 2%	annuellement (ne peut donc pas être inférieure aux versements nets de frais)																																			
Revenus garantis à l'issue de la phase d'accumulation ¹	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Fin différé</th> <th>Taux²</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>55 ans</td> <td>3,50%</td> </tr> <tr> <td>60 ans</td> <td>4,00%</td> </tr> <tr> <td>65 ans</td> <td>4,50%</td> </tr> <tr> <td>70 ans</td> <td>5,00%</td> </tr> <tr> <td>75 ans</td> <td>5,50%</td> </tr> </tbody> </table>	Fin différé	Taux ²	55 ans	3,50%	60 ans	4,00%	65 ans	4,50%	70 ans	5,00%	75 ans	5,50%	Taux fixe : 4%	Taux fixe : 4,50%																						
	Fin différé	Taux ²																																			
	55 ans	3,50%																																			
	60 ans	4,00%																																			
	65 ans	4,50%																																			
70 ans	5,00%																																				
75 ans	5,50%																																				
Mise à disposition des revenus garantis	Arbitrage programmé sur compte monétaire	Rachats programmés dès la fin du différé																																			
Fréquence des revenus	Annuel	Mensuel, trimestriel, semestriel ou annuel																																			
Obligation de retirer au moins le montant de revenus garantis	Arbitrage vers le compte monétaire systématique – pas de rachat obligatoire	Max 2 ans tacitement renouvelable. Suspension et reprise possible	Suspension, reprise ou modification dans la limite du revenu garanti.																																		
Revalorisation de BB (phase distribution)	Cliquet tous les 5 ans	Cliquet tous les ans	Cliquet tous les 3 ans																																		
Garantie si épargne devient nulle	Déclenchement d'une rente viagère à hauteur du dernier revenu garanti, non réversible et non revalorisée (pas de TMG, pas de PB)																																				
Garantie décès (<i>en cas de rente non activée</i>)	Pas de garantie plancher	Garantie plancher égale à la somme des versements nets diminuée des rachats																																			
Tarif des garanties financières : <ul style="list-style-type: none"> • prélevés depuis la souscription ou depuis la mise en place de l'option • Révisable à chaque versement 	Tarif, en % des primes nettes, pour la garantie GLWB cliquet (distribution) et garantie roll-up (accumulation). Fonction de la part action uniquement. <table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50%</td> <td>1,40%</td> </tr> <tr> <td>60%</td> <td>1,90%</td> </tr> <tr> <td>70%</td> <td>2,40%</td> </tr> </tbody> </table> Majoration de 0,10% si gestion personnelle	% action	Frais	50%	1,40%	60%	1,90%	70%	2,40%	Tarif, en % de l'encours, pour la GLWB cliquet (distribution et accumulation) et garantie plancher. Fonction de la part action, du sexe, de l'âge à la souscription et du différé ³ : <p>Tarif homme :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50%</td> <td>0,49/1,94</td> </tr> <tr> <td>75%</td> <td>0,68/2,91</td> </tr> </tbody> </table> <p>Tarif femme :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50%</td> <td>0,52/2,44</td> </tr> <tr> <td>75%</td> <td>0,72/3,58</td> </tr> </tbody> </table>	% action	Frais (%)	50%	0,49/1,94	75%	0,68/2,91	% action	Frais (%)	50%	0,52/2,44	75%	0,72/3,58	Tarif, en % de l'encours, pour la GLWB cliquet (distribution et accumulation) et garantie plancher. Fonction de la part action, du sexe et de l'âge à la fin du différé. <p>Fin différé à 60 ans :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>20%</td> <td>0,75%</td> </tr> <tr> <td>40%</td> <td>1,25%</td> </tr> </tbody> </table> <p>Fin différé à 65 ans :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>20%</td> <td>0,50%</td> </tr> <tr> <td>40%</td> <td>0,75%</td> </tr> <tr> <td>60%</td> <td>1,25%</td> </tr> </tbody> </table>	% action	Frais	20%	0,75%	40%	1,25%	% action	Frais	20%	0,50%	40%	0,75%	60%	1,25%
	% action	Frais																																			
50%	1,40%																																				
60%	1,90%																																				
70%	2,40%																																				
% action	Frais (%)																																				
50%	0,49/1,94																																				
75%	0,68/2,91																																				
% action	Frais (%)																																				
50%	0,52/2,44																																				
75%	0,72/3,58																																				
% action	Frais																																				
20%	0,75%																																				
40%	1,25%																																				
% action	Frais																																				
20%	0,50%																																				
40%	0,75%																																				
60%	1,25%																																				
Tarif révisable	A chaque versement																																				
Rachat	Capital non garanti / Pas de frais de rachat																																				
Rachat partiel	Un rachat partiel diminue le montant de la <i>benefit base</i> en proportion ^{4, 5}																																				

¹ Application d'un taux annuel à l'assiette de calcul des revenus garantis, taux garanti par versement.

² Le taux est linéaire entre 2 âges du tableau, par exemple 3.60% à 56 ans.

³ Le tarif détaillé n'est pas disponible. Il est d'autant plus élevé que le différé est court.

⁴ Hors rachat effectué sur le compte monétaire (effectué en priorité) pour Axa Accumulator Retraite.

⁵ Allianz Invest4Life : « Le souscripteur peut procéder à un rachat partiel ponctuel d'un montant minimum de 750 euros dès lors que le capital constitué au titre du contrat après ce rachat est supérieur à 2 250 euros ». Pour Terre d'Avenir, le montant minimum de rachat partiel est fixé à 1500 €

2.3.2 Supports financiers des produits

Nous détaillons dans cette partie les supports financiers sur lesquels l'épargne est investie. Généralement, il s'agit de fonds ou de fonds de fonds diversifiés (actions + obligations). Les pondérations actions des benchmarks de ces fonds sont comprises entre 20% et 83% mais les marges de gestion autorisent à aller de 19% à 100%.

Nous ne nous intéresserons pas à la comparaison des frais et commissions des OPCVM.

Tableau 2-4 : Caractéristiques du fonds Axa Stratégie Retraite (sources : prospectus simplifié de l'AMF + reporting de la société de gestion de mars 2010)

	Axa Stratégie Retraite
Nature juridique	FCP de droit français
Catégorie AMF	OPCVM diversifié
Distribution	Affectation des résultats par capitalisation
Benchmark	50% MSCI Zone Euro + 33% MSCI Monde ex EMU (couvert en euro) + 17% EONIA Capitalisé
Exposition aux actions (% de l'actif net)	<ul style="list-style-type: none"> 70% à 100% de l'actif en actions. En cas d'augmentation de la volatilité, cette exposition peut être baissée jusqu'à 50% de l'actif Limite de 30% de l'actif en actions small / mid caps Limite de 30% de l'actif en actions d'émetteurs de pays émergents
Exposition aux taux (% de l'actif net)	<ul style="list-style-type: none"> Limite de 50% de l'actif en OPCVM diversifiés ou en produits de taux ou du marché monétaire des pays membres de l'OCDE via des OPCVM obligataires ou monétaires. Limite de 10% de l'actif investis dans produits de titrisation (ABS, CDO et titres assimilés)
Rebalancement	Gestion discrétionnaire
OPCVM d'OPCVM	Le FCP pourra être exposé jusqu'à 100% de son actif via des OPCVM
Composition (31 mars 2010)	84.26% actions, 17.71% de fonds monétaires, -0.04% de liquidité, -1.92% autres actifs

L'épargne étant investie à 50% sur ce fonds et à 50% sur le fonds euro, la composition du fonds peut comporter davantage d'actions que les fonds proposés sur le produit d'Allianz et de la Mondiale Partenaires.

Tableau 2-5 : Caractéristiques du fonds Allianz Strategy 50 (sources : Annexe présentant les caractéristiques des supports en vigueur à compter du 14 septembre 2009 - Réf DPP 09-089 + reporting de la société de gestion de mars 2010)

	Allianz Strategy 50
Nature juridique	Fonds luxembourgeois (ISIN : LU0352312184)
Catégorie AMF	Non applicable
Distribution	Affectation des résultats par capitalisation
Benchmark	50% MSCI World + 50% JPM EMU Bond Index
Duration du portefeuille de taux	« L'échéance moyenne restante pondérée des flux de la part des actifs du compartiment investie en titres porteurs d'intérêts, y compris en obligations à coupon zéro (...) et en dépôts et instruments du marché monétaire (...), y compris en intérêts à recevoir sur les actifs mentionnés, devrait s'établir entre zéro et neuf ans. »
Rebalancement	En période de forte volatilité, la part attribuée au marché des actions sera réduite. A l'inverse, elle sera augmentée en période de faible volatilité
OPCVM d'OPCVM	Non
Composition (mars 2010)	53.4% actions, 42.8% obligations, 2.8% fonds, 0.4% contrats à terme sur actions, 0.6% autres et 1.4% liquidité

Tableau 2-6 : Caractéristiques des fonds profilés Terre d'avenir (source : prospectus simplifiés de l'AMF)

	Prudent	Equilibre	Dynamique
Nature juridique	FCP de droit français		
Catégorie AMF	OPCVM diversifié		
Distribution	Affectation des résultats par capitalisation		
Benchmark	80% Euro MTS 7/10 ¹ + 20% Eurostoxx 50 ²	60% Euro MTS 7/10 + 40% Eurostoxx 50	40% Euro MTS 7/10 + 60% Eurostoxx 50
Exposition actions (% de l'actif net)	[19% ; 21%]	[38% ; 42%]	[58% ; 62%]
Exposition aux taux (% de l'actif net)	[79% ; 81%]	[58% ; 62%]	[38% ; 42%]
Rebalancement	Fréquence mensuelle au minimum		
OPCVM d'OPCVM	Le fonds peut investir jusqu'à 100% de son actif en parts ou actions d'OPCVM ou fonds d'investissement. Peut détenir des titres vifs.		
Composition actuelle	Aucune information sur la composition actuelle des portefeuilles		

2.3.3 Comparaison des produits GMWB / GLWB

2.3.3.1 Formulation des produits GMWB / GLWB

La formulation des produits rend les comparaisons difficiles, notamment en raison :

- Du mode de calcul des frais (en pourcentage de l'épargne ou de la benefit base) ;
- De la formulation des garanties de revalorisation de la benefit base ;
- De l'existence d'une éventuelle garantie complémentaire ;
- Des fonds proposés dans les allocations d'actifs : fonds ou fonds de fonds « maison », présence sur certains contrats d'un fonds euro...

L'assuré ne dispose, au moment de la souscription, que du montant minimum de revenus garantis dont il pourra bénéficier au moment de la liquidation de ses droits à la retraite.

Tableau 2-7 : Exemple pour un homme âgé de 58 ans qui investit 100 k€ et souhaite bénéficier du premier retrait à l'âge de 65 ans (différé de 7 ans, 1er retrait à terme échu)

	Accumulator	Invest4Life	Terre d'Avenir
Montant investi	95 150 €	95 500 €	95 500 €
Revenu garanti	4372 €par an (4% * 109 297)	3820 €par an (4% * 95 500)	4298 €par an (4.5% * 95 500)
Revalorisation du revenu garanti	<i>accumulation</i>	Garantie de TMG (si l'épargne à 60 ans est inférieure à 109 297 €)	Revalorisation par activation du cliquet annuel
	<i>distribution</i>	Cliquet tous les 5 ans	Cliquet annuel
Frais annuels au titre de la garantie	1400 €par an, montant fixe	Non estimable avec les données disponibles	Entre 1012 et 1182 € par an ³ (variable)

Le produit Accumulator Retraite, grâce à la garantie TMG, permet d'afficher dès la souscription un montant de revenus garantis supérieur à celui des deux autres produits (qui

¹ L'indice Euro MTS 7-10 ans est un indice mesurant les performances des emprunts d'Etat les plus représentatifs de la Zone euro ayant une durée de vie comprise entre 7 et 10 ans. Cet indice calculé par Euronext.

² L'indice DJ EuroStoxx50, dividendes nets réinvestis, est un indice calculé à partir d'un panier composé des 50 plus grosses capitalisations de la zone Euro. Le poids de chaque valeur dans l'indice est pondéré en fonction de l'importance de sa capitalisation ajustée du flottant.

³ En l'absence de revalorisation de l'épargne

incluent des garanties cliquet). Cette propriété est renforcée par l'utilisation d'un taux de revenus garantis variable avec l'âge atteint à l'issue du différé (contre un taux fixe pour les deux autres produits).

Par ailleurs, la formulation des frais en fonction de la prime investie permet d'annoncer un niveau de frais en pourcentage plus faible que dans les formulations en fonction de l'épargne.

2.3.3.2 Comparaison avec les produits de rente viagère

L'avantage des rentes viagères réside dans la multiplicité des options de rente possible (voir Tableau 1-1). En contrepartie, l'assuré doit aliéner son capital et est soumis à la fiscalité des rentes viagères acquises à titre onéreux (voir partie 4.3).

En souscrivant une garantie GLWB, l'assuré se voit immédiatement offrir une garantie de table puisque le « taux de conversion » est connu au moment de la souscription. Nous cherchons dans ce paragraphe à comparer le taux de conversion d'une rente viagère sur une tête, non revalorisée et sans frais d'arréage) avec le pourcentage de revenus garantis des GLWB. Nous prenons l'exemple d'un produit ne comportant pas de garantie de revalorisation minimale pendant la phase d'accumulation¹.

Pour un assuré d'âge x au moment de la conversion de la rente, la valeur d'un euro de rente viagère versée à terme échu est égal à :

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \sum_{k=x}^{\omega} \frac{D_{k+1}}{D_x}$$

Tableau 2-8 : Taux de retrait garanti (aujourd'hui) et taux d'arréage (rente viagère) pour un assuré qui souhaite bénéficier du début de ses revenus garantis à l'âge x

x	55 ans	60 ans	65 ans	70 ans	75 ans
TGH 00-05 (i=0%)	3,00%	3,48%	4,12%	5,02%	6,30%
TGF 00-05 (i=0%)	2,71%	3,10%	3,72%	4,30%	5,28%
TGH 00-05 (i=4%)	5,47%	6,16%	6,82%	7,75%	9,09%
TGF 00-05 (i=4%)	5,41%	5,77%	6,39%	6,97%	8,00%
Accumulator Retraite	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%
Invest4Life	3.70%	3.70%	3.70%	3.70%	3.70%
Terre d'Avenir	4.00%	4.00%	4.00%	4.00%	4.00%

Dans notre scénario central ($r = 4\%$), nous vérifions que le taux d'arréage est supérieur au taux garanti. Lorsque le niveau des taux varie, l'assureur doit contrôler que le taux de revenus garantis qu'il offre dans la garantie GLWB ne dépasse pas l'arréage qui serait obtenu en utilisant la table réglementaire et la valeur best estimate du taux sans risque².

Nous voyons sur la Figure 2-3 que la formulation croissante du taux de revenus garantis sur le produit d'Axa permet de coller davantage au taux d'arréage de la rente viagère.

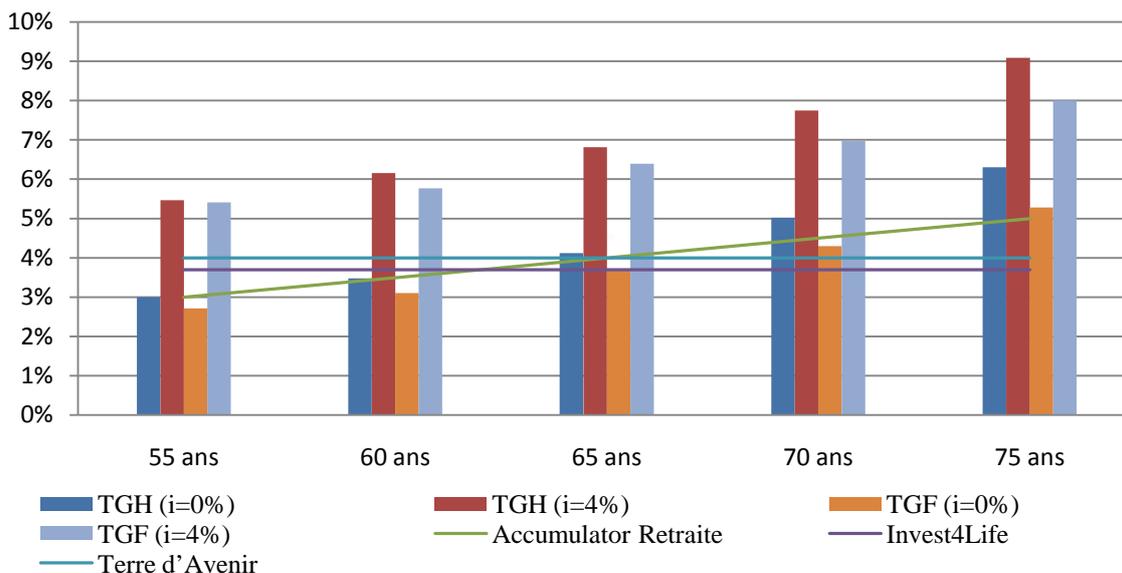
De même, nous pourrions effectuer la comparaison entre une rente temporaire et une garantie GMWB, sachant que le prix d'1 euro de rente payable à terme échu pendant n années s'écrit :

$${}_n a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

¹ Si la base de comparaison reste l'épargne à la fin du différé, la garantie de revalorisation des GLWB augmentent indirectement le taux de revenus garantis

² Le taux utilisé doit satisfaire des contraintes réglementaires (voir chapitre 4)

Figure 2-3 : Taux d'arrérage (rente viagère) et taux garanti dans les GLWB



2.3.3.3 Comparaison avec d'autres contrats d'assurance vie

L'assuré peut choisir d'effectuer des rachats programmés sur son contrat d'assurance-vie au lieu de souscrire une GLWB ou de convertir son capital en rente viagère. Cette stratégie permet de bénéficier de la fiscalité des rachats partiels, sans aliéner le capital et sans payer les frais au titre de la garantie de revenus. Cependant elle ne permet pas de s'immuniser contre le risque de longévité (risque de ruine avant le décès de l'assuré), en particulier lorsque l'allocation d'actifs est fortement exposée aux unités de compte.

Plus généralement, les garanties de revenus permettent d'atteindre de nouveaux couples risque / rendement sur le marché de l'épargne retraite. Il serait donc intéressant d'étudier l'intérêt réel du produit pour le consommateur en comparant l'ensemble des produits existants : PERP, assurance vie mono ou multisupports (avec ou sans GMDB), contrat avec garantie GMIB, contrat eurodiversifiés, fonds profilés ou gestion en CPPI, combinaison d'obligations dont le remboursement du principal intervient à chaque date anniversaire... Des backtestings sur ces produits pourraient être effectués afin de mesurer le taux de rendement espéré du produit, la fréquence de déclenchement de la garantie...

Il serait aussi utile d'étudier l'efficacité en termes de réduction de la probabilité de ruine des stratégies de construction d'allocations d'actifs des contrats multisupports basées sur la minimisation du couple risque / rendement.

Nous ne traiterons pas ces problématiques dans la suite du mémoire.

2.3.4 Garanties GLWB commercialisés sur le marché américain

Les produits commercialisés sur le marché américain comportent des caractéristiques supplémentaires par rapport aux produits français. Ils proposent par exemple des taux de retrait variables en fonction de l'âge, des rentes avec mécanisme de réversion¹ ainsi que des garanties de revalorisation de la benefit base si l'assuré accepte de renoncer à certains revenus garantis. Ces contrats permettraient généralement de réaliser des arbitrages entre les supports.

¹ La nouvelle génération de Terre d'Avenir prévoit un mécanisme de réversion (rente sur 2 têtes)

Cette option a généralement été supprimée en 2009 sur les nouvelles versions des garanties afin de réduire le risque.

Tableau 2-9 : caractéristiques des garanties GLWB commercialisées sur le marché américain

Revenus garantis	<p>Entre 3.5% et 6% mais avec des formulations variables :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Généralement, le taux dépend de l'âge du début des retraits ; • Le taux peut être fixe mais sa valeur dépend d'un âge cible. Par exemple, il peut prendre 2 valeurs, selon que l'assuré est âgé de plus ou moins 75 ans (en général, augmentation de 1% du taux de retrait) ; • Un produit prévoit un taux fixe qui dépend du nombre de têtes sur lequel porte l'engagement (5% si 1 tête, 4,75% si 2 têtes) ; • Un produit comprend une garantie originale : le pourcentage de retrait est doublé si l'assuré (ou son épouse) est hospitalisé pendant une certaine durée.
Options de revalorisation de la benefit base	<p>Formulations variables :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Absence de revalorisation ; • TMG, généralement de 6% pendant les 10 premières années du contrat ; • Cliquet généralement annuel et qui s'arrête au 91^{ème} anniversaire de l'assuré. Les garanties peuvent prévoir des cliquets plus fréquents ; • Bonus d'attente en phase de distribution (exemple : doublement de la benefit base si aucun retrait n'est effectué pendant les 10 premières années de la période de distribution). Certaines garanties prévoient que le bonus d'attente peut s'appliquer si un retrait au plus a été effectué.
Tarifs des garanties	Entre 0.85% et 1.50% de l'encours ;
Réversibilité de la rente	Les garanties GLWB sont commercialisées sur 1 tête ou 2 têtes

L'offre de produits français pourrait être enrichie de certaines de ces composantes, en mesurant attentivement les conséquences de ces ajouts sur le niveau de risque des produits.

2.3.5 Modification de l'offre suite à la crise

L'augmentation de la volatilité des marchés actions et la baisse des taux d'intérêt (voir Figure 2-4) ont révélé le caractère très risqué de ces produits et la complexité à mettre en œuvre les programmes de couverture nécessaires (voir chapitre 11).

Certains assureurs sont sortis du marché, par exemple au Canada et au Japon, mais la plupart ont modifié leurs produits pour les rendre plus simple à gérer (diminution du risque de base...) ¹. Par ailleurs, ils ont adapté les caractéristiques des produits (prestations, tarifs...) aux conditions économiques afin de restaurer leurs marges sur la collecte.

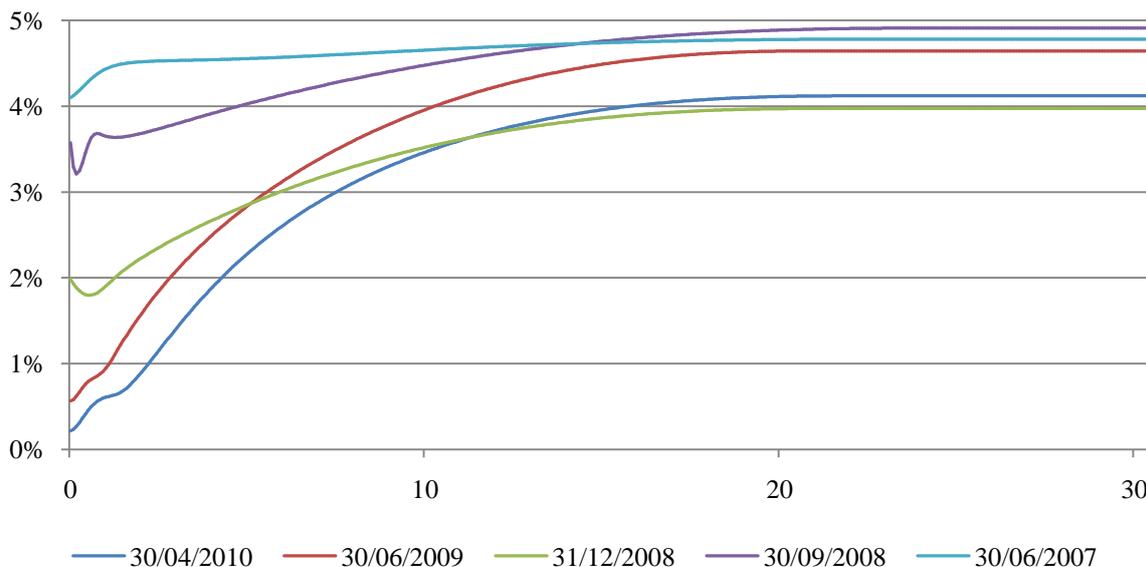
En observant le site www.annuityfyi.com ², nous nous apercevons que :

- Les taux de revenus garantis et de revalorisation de la benefit base (TMG) ont été revus à la baisse d'environ 1% ;
- Les tarifs ont généralement été augmentés à garantie constante ou ont été maintenus pour des garanties abaissées ;
- Les offres ont été simplifiées en limitant le nombre de supports disponibles (diminution du risque de base) et en supprimant les plus exotiques ainsi que les plus exposés aux actions ;
- Les garanties cliquet trimestrielles ont été transformées en garanties annuelles.

¹ Milliman (Juillet 2009), The VA industry : an analysis of recent activities

² Entre le 16 juillet 2009 et le 7 décembre 2009 (dates de dernières mises à jour du site)

Figure 2-4 : Evolution historique de la courbe des taux zéro coupon (source : IAF)



Nous avons essayé de retrouver les modifications apportées sur les produits français suite à la crise. Cet exercice est délicat dans la mesure où la plupart des documentations commerciales mettent davantage en avant le concept et le fonctionnement du produit que les éléments techniques de tarification et de revalorisation des garanties. Nous nous sommes notamment appuyés sur des revues financières et sur des simulations effectuées sur le site internet des assureurs¹. Le résultat doit donc être interprété avec précaution :

	Accumulator Retraite	Invest4Life	Terre d'Avenir												
Revenus garantis	-0.5% (tous âges)	De 4% à 3,85% ²	De 4.5% à 4%												
Tarif des garanties	Tarif inchangé	Tarif augmenté ³ . Par exemple, pour Strategy 50 et pour un homme : <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Avant</td> <td>Après</td> </tr> <tr> <td>0,49/1,94</td> <td>0,52/2.44</td> </tr> </table>	Avant	Après	0,49/1,94	0,52/2.44	Fin différé à 60 ans ⁴ : <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>% action</td> <td>Ecart</td> </tr> <tr> <td>40%</td> <td>+0.30%</td> </tr> </table> Fin différé à 65 ans : <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>40%</td> <td>+0.45%</td> </tr> <tr> <td>60%</td> <td>+0.75%</td> </tr> </table>	% action	Ecart	40%	+0.30%	40%	+0.45%	60%	+0.75%
Avant	Après														
0,49/1,94	0,52/2.44														
% action	Ecart														
40%	+0.30%														
40%	+0.45%														
60%	+0.75%														
Divers	Baisse du TMG (de 2% à 1.5%) Allocation incluant Stratégie Retraite	Allianz Strategy 75 n'est plus commercialisé ⁵	Diminution du versement initial minimum (passage de 100k€ à 30k€)												

La formulation du coût de la garantie dans la plaquette commerciale de Terre d'Avenir a été modifiée. Elle prévoit désormais explicitement des fenêtres de tarif / prestation⁶.

Nous allons désormais nous intéresser à la cartographie des risques (chapitre 3) et aux dispositions réglementaires (chapitre 4) de ces produits.

¹ www.accumulator.fr, www.allianz.fr (pas de site Terre d'Avenir), Mieux Vivre Votre Argent (09/03/2010)

² Source : communiqué de presse Allianz du 16 juin 2010

³ Source : Dispositions Générales valant note d'information - Allianz Retraite Invest4Life – Réf. DPP 08-189

⁴ Le tarif est inchangé lorsque la part actions est égale à 20% (pour une fin de différé à 60 ou 65 ans)

⁵ Annexe descriptive présentant les caractéristiques principales des supports en vigueur à compter du 14/09/09

⁶ « Le taux des revenus, ainsi que les frais de garantie dépendent de la situation des marchés financiers, ils peuvent donc être révisés en cours de contrat. Toutefois ces changements de tarification ne s'appliquent pas aux versements déjà effectués mais uniquement aux nouveaux versements. »

Chapitre 3 : Etude qualitative des garanties

Ce chapitre a pour objectif de répertorier et de décrire les risques relatifs aux garanties GMWB et GLWB. Nous verrons ensuite de quelle manière la conception du produit permet de réduire une partie de ces risques.

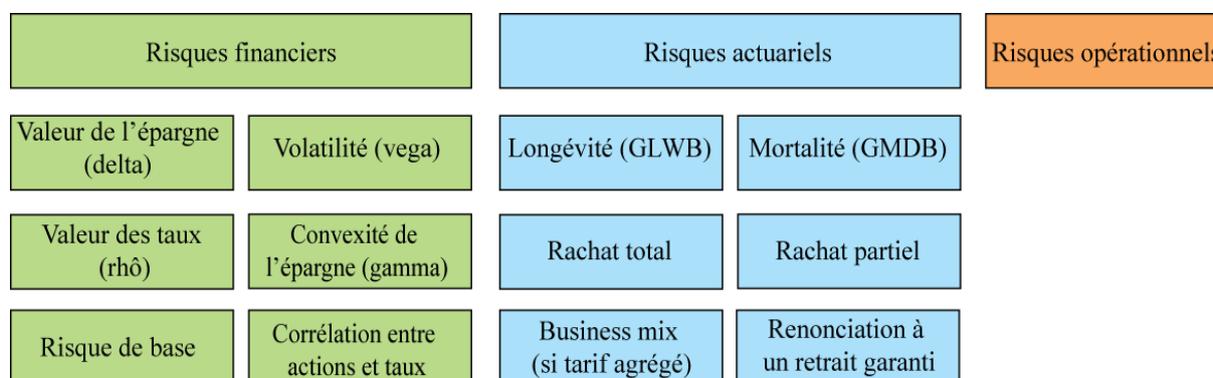
Dans le cadre des garanties GMWB / GLWB, l'assureur verse des prestations lorsque :

- L'épargne du contrat chute fortement et ne permet plus d'assurer les revenus garantis ;
- L'assuré vit plus longtemps que prévu sans que la performance des marchés financiers ne permette de compenser cet accroissement de la longévité.

Ces garanties génèrent donc des risques financiers et actuariels largement plus important pour l'assureur (actions, taux, longévité, rachat...) que les contrats d'épargne en unités de compte (uniquement risque de mismatch sur le nombre de parts d'unités de compte à l'actif et au passif du bilan) ou les contrats de rente (risque de longévité et risque de taux qui sont en partie impactés sur l'assuré au travers des résultats technique et financier).

Nous pouvons distinguer 3 classes de risques : financiers, actuariels et opérationnels. La mise en place de programme de couverture augmente par ailleurs le risque opérationnel auquel l'assureur doit faire face. Nous résumons ces différents risques dans la Figure 3-1 :

Figure 3-1 : Cartographie des risques des garanties GMWB / GLWB



D'une manière générale, les garanties GMWB / GLWB peuvent être décomposées comme des sommes pondérées par les probabilités de décès et de rachat de puts européens de différentes maturités écrits sur un sous-jacent discontinu. Ces puts européens sont conditionnés aux valeurs antérieures du sous-jacent dans la mesure où le payoff est connu si l'épargne est nulle à la date antérieure. Le strike est égal au montant de revenu garanti.

L'assuré est acheteur d'options de vente et l'assureur est vendeur de ces options.

A titre d'illustration, nous considérons le cas d'un produit assurant des revenus garantis constants G et retirés systématiquement à chaque date anniversaire ($t \in \mathbb{N}$). Nous supposons que le sous-jacent S_t sur lequel est investi l'épargne AV_t suit un processus de Black & Scholes. Le marché est supposé parfait et sans opportunité d'arbitrage. La mortalité et les

rachats sont supposés déterministes. Les frais sont prélevés d'un seul coup au moment de la souscription¹.

Le flux à la date T_p est celui d'un put européen de strike G , écrit sur le sous-jacent AV_{T_p} :

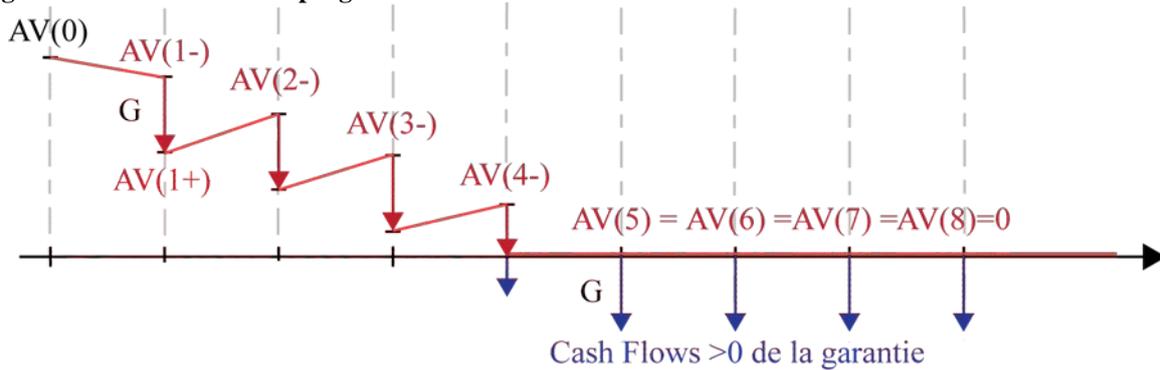
- Le payoff est nul si la garantie ne s'active pas en T_p ;
- Si la garantie s'active en T_p , le payoff de la garantie est compris entre $[0, G]$;
- Une fois que la garantie s'est activée (par exemple en $T_p + 1$), tous les puts de maturité $t > T_p + 1$ ont un payoff certain égal à G puisque AV_t est alors nulle.

Même dans ce cas simple, il n'existe pas de formule fermée pour le prix du put² en raison des sauts de l'épargne. L'évolution de l'épargne AV_t s'écrit³, en raisonnant par récurrence à partir de la Figure 3-2 :

$$AV_t^- = S_t \left(1 - G \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{S_i} \right)^+ < S_t$$

$$AV_t^+ = (AV_t^- - G)^+ = S_t \left(1 - G \sum_{i=1}^t \frac{1}{S_i} \right)^+ = \left(S_T - \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{t-1} S_i \right)^+ \quad [4-1]$$

Figure 3-2 : Evolution de l'épargne dans le cas discret



En supposant le comportement de l'assuré déterministe, nous en déduisons que le comportement financier des garanties GMWB / GLWB présentent des similarités avec celui d'un portefeuille d'options de vente européennes. Nous rappelons dans la partie suivante les principaux résultats concernant ces options et en déduisons des remarques qualitatives sur le comportement des garanties GMWB / GLWB.

3.1 Rappel sur les options de vente européennes

Soit un put de maturité T de strike K écrit sur un sous-jacent action S_t . Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Black & Scholes où il existe des formules fermées⁴ pour le prix et

¹ Il serait aussi possible de raisonner par analogie avec le traitement des dividendes. Le rendement du processus S_t serait alors égal à $r - \alpha_g$ de manière à prendre en compte les frais payés au titre de la garantie.

² $P(O, T) = \mathbb{E}_Q[(G - AV_T^-)^+ e^{-rT}]$ par définition

³ Nous retrouvons simplement les résultats qui seront établis dans le chapitre 6 dans le cas continu.

⁴ Ces formules peuvent s'étendre dans le cas d'un dividende ou de frais perçus de manière continue.

les grecques. Le prix du put est égal à l'espérance sous la probabilité risque neutre du payoff actualisé au taux sans risque.

Nous nous plaçons dans la suite dans la position de l'assuré, détenteur d'options de vente, afin de mesurer l'impact des paramètres sur le prix de la garantie. Les simulations sont effectuées sous Matlab. Le lecteur pourra trouver des graphiques supplémentaires de sensibilités en annexe.

3.1.1 Prix du put européen

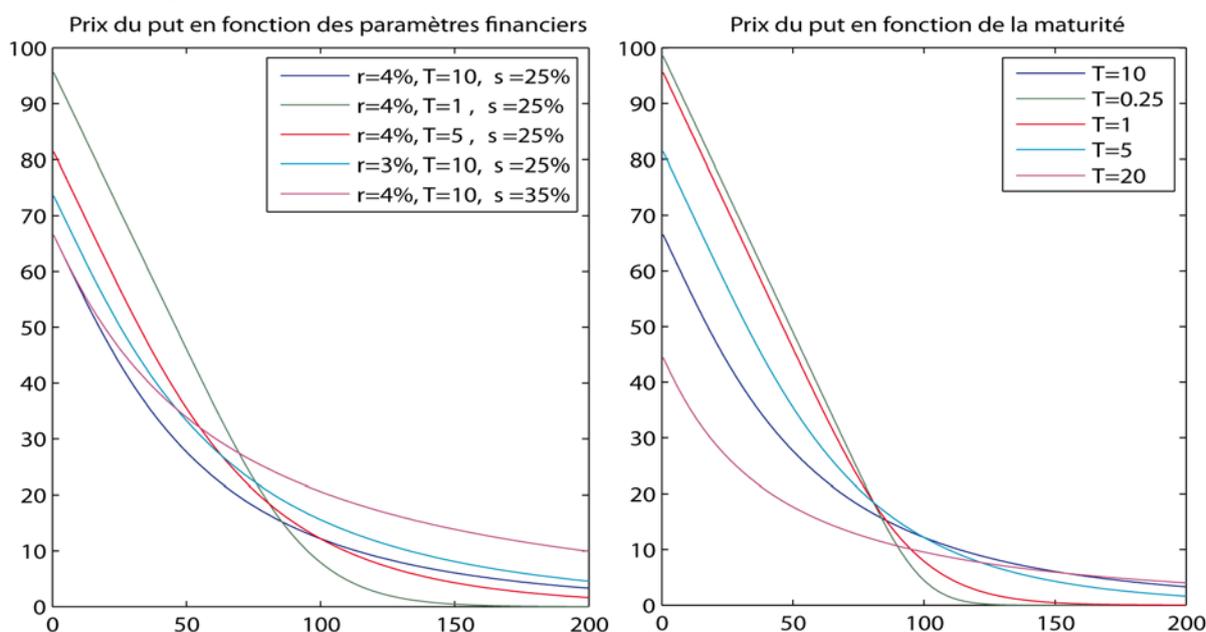
La formule de Black & Scholes pour les options de vente européennes est la suivante :

$$P(t, S_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_T)^+ e^{-r(T-t)}] = K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot N(-d_1)$$

$$\text{Avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} + \frac{1}{2} \sigma \cdot \sqrt{T-t}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t} \text{ et } N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Nous traçons le prix du put de strike $K = 100$ en fonction du cours du sous-jacent à la date $t=0$ pour différentes valeurs de paramètres¹ :

Figure 3-3 : Impact des paramètres sur le prix du put $P(0, T)$



Le prix de l'option de vente est convexe comme le payoff associé. Pour une maturité donnée, le prix augmente lorsque les taux diminuent et lorsque la volatilité augmente.

Dans le cas des garanties GMWB / GLWB, l'assuré vend à la date $t = 0$ des options de vente en dehors de la monnaie². Les propriétés ci-dessus devraient se retrouver dans les applications numériques du chapitre 9 et 10.

Il n'est pas possible d'exploiter immédiatement la propriété liée à la maturité de l'option de vente. En effet, les garanties GMWB / GLWB correspondent à des sommes d'options. Pour un différé fixé, augmenter la maturité revient à augmenter le nombre d'options. La propriété

¹ La volatilité est désignée par le paramètre s dans les graphiques de cette partie

² Le tarif de la garantie étant généralement supérieur au coût réel de l'option (valeur de l'option négative)

sur la maturité des options de vente peut être utilisée pour anticiper le comportement de la garantie lorsque la maturité résiduelle diminue.

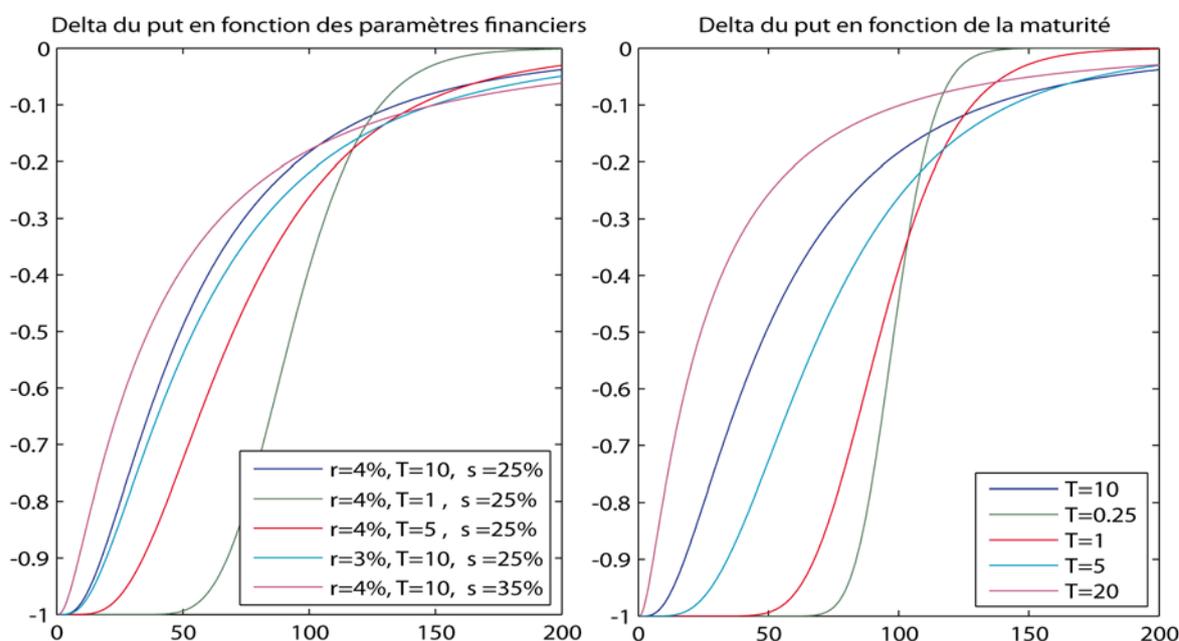
Nous cherchons dans la suite à identifier les paramètres ayant le plus d'influence sur le court terme et sur le long terme. Nous détaillons pour cela dans les parties 3.1.2 à 3.1.6 quelques propriétés des grecques d'une option de vente sous un modèle de Black & Scholes.

3.1.2 Delta du put européen

Le delta correspond à la dérivée du prix de l'option par rapport au sous-jacent. Ce paramètre donne une indication de la vitesse de variation du prix liée à une évolution de la valeur du sous-jacent. Sous un modèle de Black & Scholes, le delta d'une option de vente peut s'écrire :

$$\Delta_{\text{put}}(t, S_t) = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial S_t} = -N(-d_1)$$

Figure 3-4 : Impact des paramètres sur le delta du put (évalué en $t = 0$)



Le delta d'une option de vente prend ses valeurs dans $[-1,0]$:

- Lorsque l'option est largement dans la monnaie, le delta est proche de -1. La valeur de l'option varie comme la valeur du sous-jacent ;
- Lorsque l'option est largement hors de la monnaie, le delta devient proche de 0. Le prix de l'option ne dépend alors plus de la valeur du sous-jacent.

La valeur absolue du delta peut donc être interprétée comme la probabilité qu'une option soit dans la monnaie à la maturité.

La valeur absolue du delta baisse lorsque la maturité diminue et que l'option est hors de la monnaie. Cette relation est inversée pour les options dans la monnaie.

Par ailleurs, pour une maturité et des paramètres financiers¹ donnés, le delta évolue lorsque l'option se décale vers le côté « dans la monnaie » ainsi qu'en fonction des paramètres financiers (voir Figure 3-4 ainsi que les annexes). Ces impacts sont d'autant plus importants

¹ Les données financières correspondent au taux sans risque r et à la volatilité du sous-jacent actions σ_S

que la maturité de l'option est longue. Cette conclusion est valable pour l'ensemble des grecques que nous étudierons.

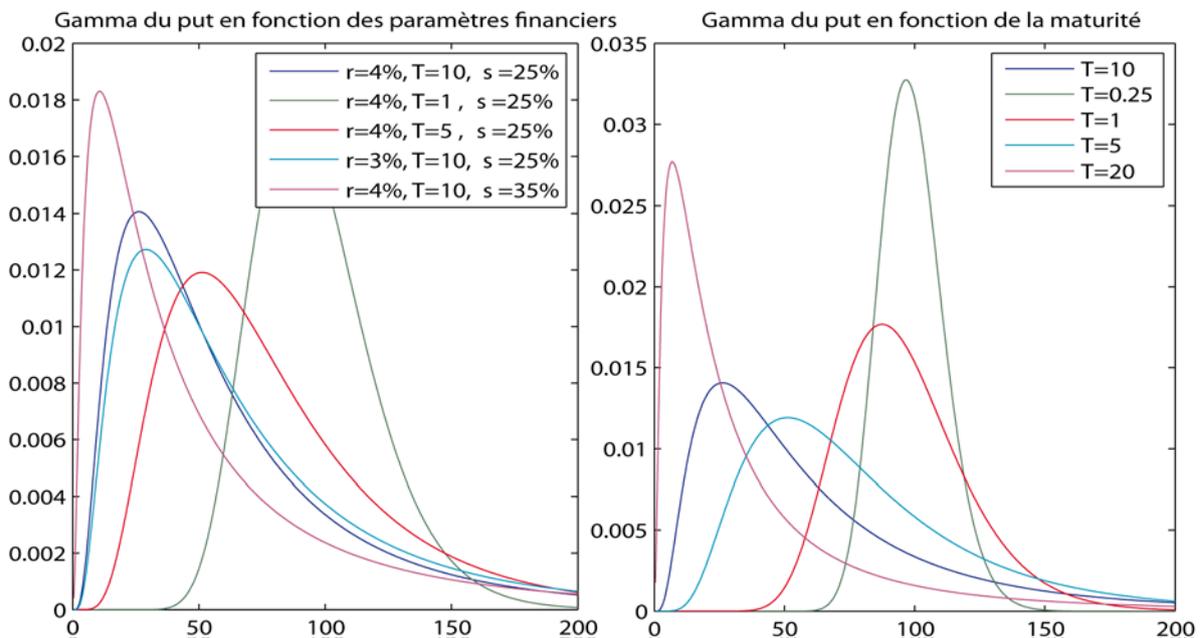
Les grecques varient fortement lorsque les options seront proches de la monnaie et de l'expiration. Cette propriété est vérifiée pour le delta (courbe verte - Figure 3-4 à droite).

3.1.3 Gamma du put européen

Le taux de variation du delta est mesuré par le gamma. Ce paramètre est positif et peut être interprété comme une mesure de l'accélération de la perte de valeur de l'option suite une variation de la valeur du sous-jacent. Sous un modèle de Black & Scholes, le gamma s'écrit :

$$\Gamma_{\text{put}}(t, S_t) = \frac{\partial^2 P(t, S_t)}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t \cdot \sigma \sqrt{T-t}} \cdot N'(-d_1) > 0$$

Figure 3-5 : Impact des paramètres sur le gamma du put (en $t = 0$)



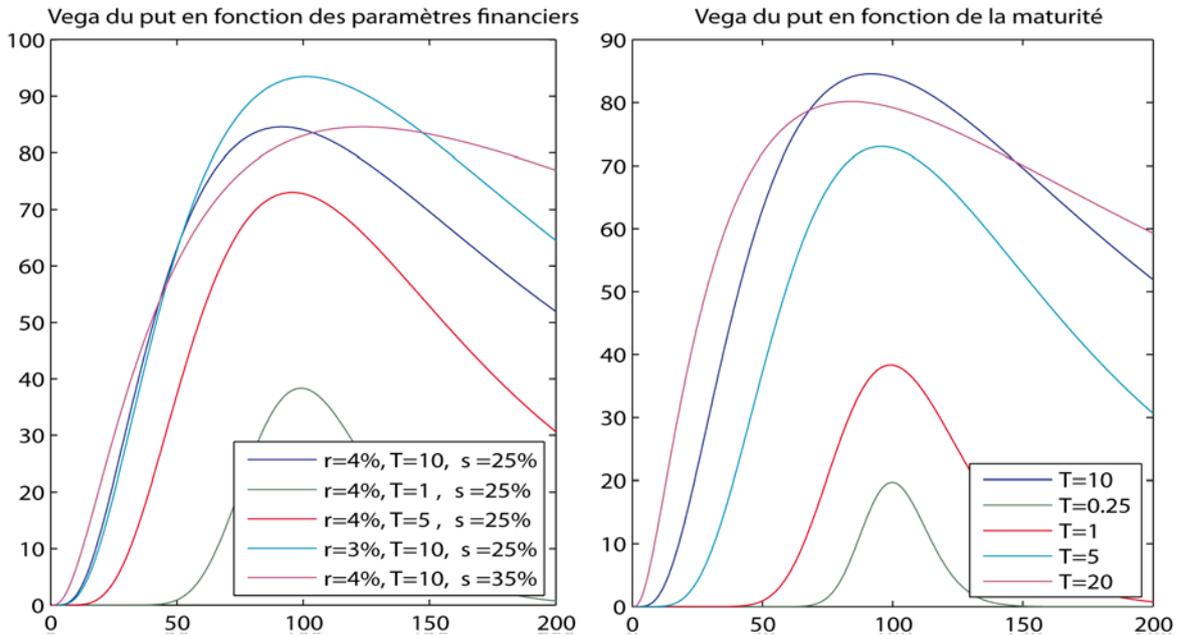
Le gamma a la forme d'une courbe en cloche, ce qui ne permet pas de mettre en évidence des relations monotones comme pour le delta (par exemple lorsque la maturité diminue).

Si l'option est hors de la monnaie, le gamma est faible et ce risque peut alors être négligé. Le sommet et l'amplitude de la courbe en cloche se décale vers des valeurs inférieures de S_t lorsque la maturité augmente. L'amplitude de la courbe croît lorsque la maturité augmente (jusqu'à un certain seuil). Pour les maturités très longues ($T = 20$ sur la Figure 3-5), l'option devient très peu sensible au risque de gamma.

3.1.4 Vega du put européen

Le vega mesure la variation du prix d'une option suite à une modification de la volatilité. Il s'écrit de la manière suivante dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes :

$$Vega_{\text{put}}(t, S_t) = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{T-t} \cdot N'(d_1)$$

Figure 3-6 : Impact des paramètres sur le vega du put ($t = 0$)

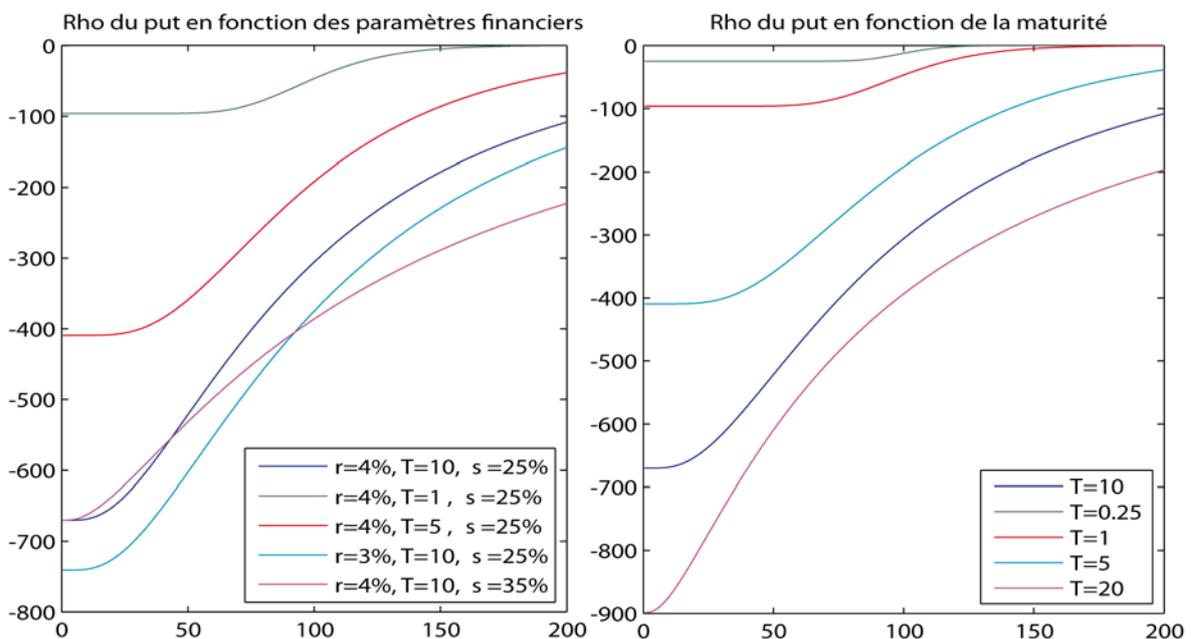
Lorsque la maturité de l'option diminue, le vega diminue. Nous constatons sur la Figure 3-6 que cette relation n'est plus vérifiée pour les longues maturités (par exemple $T = 20$).

La volatilité a peu d'impact sur le prix de la garantie pour les options très largement dans la monnaie ou hors de la monnaie.

3.1.5 Rhô du put européen

Le rô mesure le changement du prix de l'option suite à une variation du taux d'intérêt sans risque :

$$\rho_{put}(t, S_t) = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial r} = -K(T-t) \cdot e^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

Figure 3-7 : Impact des paramètres sur le rô du put (en $t = 0$)

La valeur absolue du rho diminue avec la maturité de l'option. C'est la seule grecque dont le comportement n'est pas modifié par le fait que l'option soit dans la monnaie ou hors de la monnaie.

3.1.6 Thêta du put européen

Le thêta se définit comme le taux de variation de la valeur de l'option par rapport à la durée de vie restante (exprimées en années) :

$$\Theta_{put}(t, S_t) = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial(T-t)} = -\frac{\sigma \cdot N'(d_1) \cdot S_t}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

La valeur des produits dérivés diminue généralement lorsque la maturité résiduelle diminue.

3.1.7 Comportement d'un portefeuille de puts

La garantie s'écrit comme une somme pondérée d'options de vente européennes de maturités différentes.

La gestion d'un portefeuille de puts est difficile dans la mesure où les grecques du portefeuille sont discontinues lors de l'expiration d'une des options. Les variations des grecques d'une option proche de l'expiration et proche de la monnaie sont en effet très fortes, quel que soit le paramètre modifié.

Nous traçons sur la Figure 3-7 et la Figure 3-8 les grecques d'un portefeuille composé de 3 options de maturités différentes. Nous faisons par ailleurs figurer sur chacun des graphiques les grecques de chaque option prise séparément.

Figure 3-8 : Delta et gamma pour un portefeuille composé de 3 options de maturités différentes

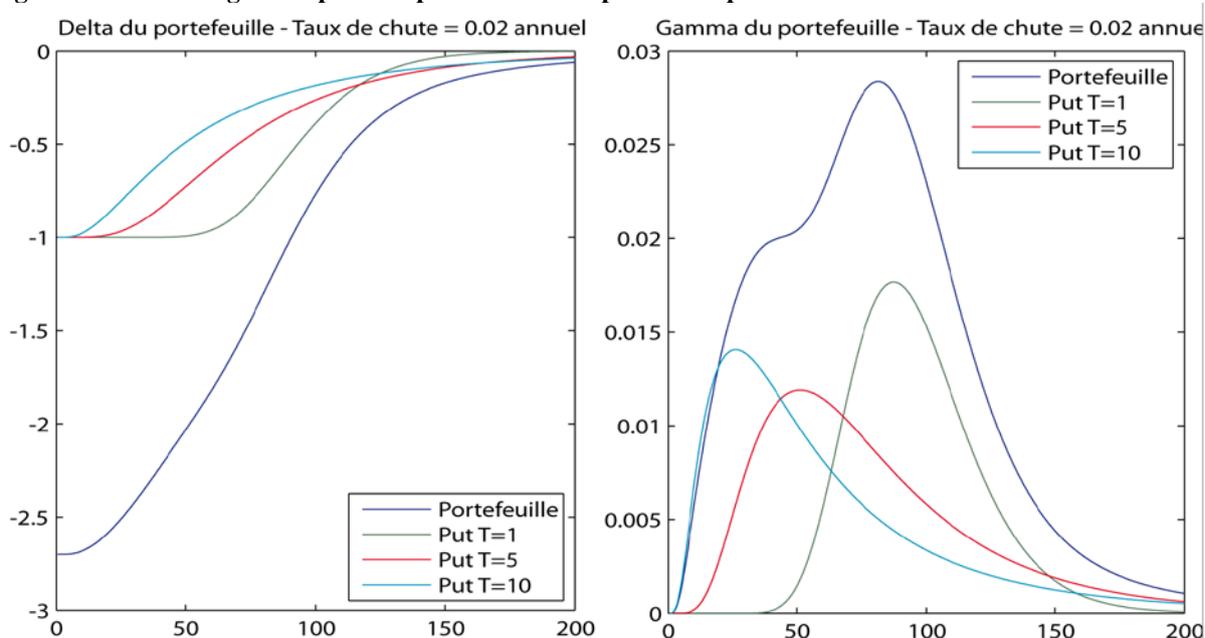
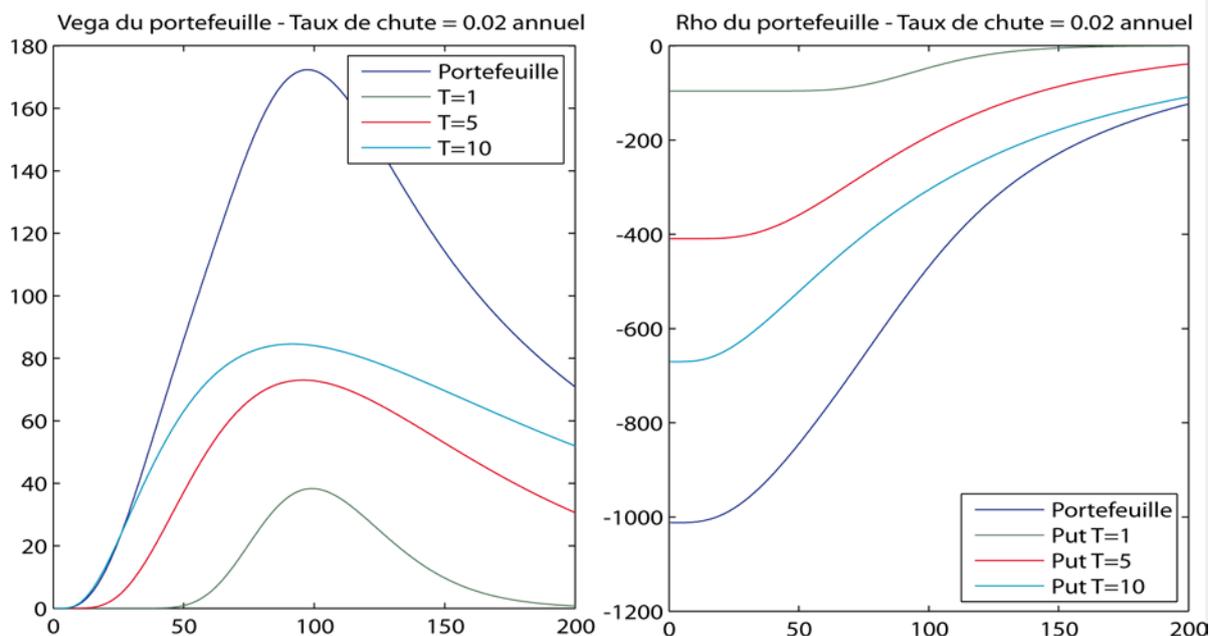


Figure 3-9 : Vega et rhô pour un portefeuille composé de 3 options de maturités différentes



3.1.8 Mesure de l'erreur de couverture

Dans un modèle de Black & Scholes, l'erreur de réplication à maturité ϵ_T pour une option de vente européenne peut s'exprimer comme une intégrale :

$$\epsilon_T = V_T - P_{BS}(T, S_T) = \frac{1}{2} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} (\hat{\sigma}^2 - \sigma_t^2) S_t^2 dt$$

Le résultat de couverture est positif si la volatilité choisie pour le *pricing* ($\hat{\sigma}$) est supérieure presque sûrement à la volatilité réalisée (σ_t).

Par ailleurs, il peut être montré que l'erreur de couverture est proportionnelle à la racine carrée du temps entre 2 rebalancements du portefeuille¹. Ainsi, diviser l'erreur de couverture par 2 impose de multiplier par 4 la fréquence de rebalancement. En raison des coûts de transaction liés à chaque mouvement, il est nécessaire d'arbitrer entre le gain engendré par un meilleur ajustement du portefeuille de couverture et l'augmentation des coûts de transaction en résultant.

Nous étudions dans la suite du chapitre les risques portant sur les garanties GMWB / GLWB.

3.2 Risques financiers

Le risque financier constitue le premier aléa, qu'il porte sur l'évaluation de la date de déclenchement de la garantie², sur la valeur des coefficients d'actualisation ou sur la gestion du programme de couverture des engagements de l'assureur. Ces risques correspondent à ceux d'un portefeuille de puts de longue maturité hors de la monnaie en $t = 0$. Le nombre d'options constituant le portefeuille n'est pas connu avec certitude.

¹ Voir par exemple **Tankov P. (2008)**

² C'est à dire sur la valeur actualisée des prestations

Les risques financiers ne sont pas mutualisables et constituent un risque systémique. Ils peuvent être classés en 2 catégories (risques répliquables et risques non répliquables sur les marchés financiers). Nous supposons dans le reste du mémoire que les fonds sont libellés en euros et ignorons le risque de change.

3.2.1 Risques financiers répliquables

Nous déduisons quelques résultats qualitatifs des conclusions obtenues dans la partie 3.1. Il est cependant nécessaire de modéliser la garantie pour estimer les risques dominants en fonction de l'horizon de temps dans la mesure où plusieurs phénomènes interviennent (probabilité d'être dans la monnaie, variation des grecques en fonction des paramètres financiers...). Une fois la garantie activée, la seule dépendance financière proviendra des taux.

3.2.1.1 Risque lié au niveau de l'épargne

Par construction, le delta des garanties GMWB / GLWB est toujours négatif, ce qui signifie que le coût de la garantie augmentera lorsque la valeur du sous-jacent diminuera.

Cette conclusion reste valable lorsque les frais sont prélevés au fur et à mesure de la vie du contrat puisque ceux-ci sont proportionnels à la valeur de l'épargne et contribuent négativement au calcul du delta de la valeur de la garantie.

Lorsque la maturité résiduelle du portefeuille diminue, le nombre d'options composant la garantie se réduit ainsi que le delta de chacune des options (si elles sont hors de la monnaie). Si les options sont dans la monnaie, le nombre d'options diminue mais le delta augmente, ce qui ne permet pas d'en déduire un résultat.

En cas de convexité trop importante du passif, l'assureur devra être très attentif au gamma (toujours positif) afin de contrôler la vitesse de variation du delta et de couvrir ce risque.

3.2.1.2 Risque lié à la volatilité de l'épargne

Le vega est positif, ce qui signifie qu'une augmentation de la volatilité de l'épargne conduit à une augmentation du coût de la garantie.

Le coût de la garantie sera d'autant plus sensible à la volatilité que la maturité des options est importante. En effet, la contribution de l'option supplémentaire rajoutée dans la décomposition de la garantie aura une contribution élevée en vega.

Lorsque la maturité résiduelle de la garantie diminue, le nombre d'options diminue ainsi que le vega de chacune des options restantes. Toutes choses égales par ailleurs, nous pouvons donc en déduire que la sensibilité à la volatilité sera plus faible lorsque le temps passe.

Dans le cas d'un mandat de gestion ou d'un fonds à volatilité capé, l'assureur peut modifier l'allocation d'actifs afin de réduire l'exposition aux actifs risqués lorsque les conditions de marché deviennent très volatiles (et inversement).

L'étude de ce genre de fonds ne sera pas abordée dans la suite du mémoire et constituerait un sujet de mémoire (pilotage du fonds, prise en compte de la volatilité réalisée ou ex ante...)

3.2.1.3 Risque de taux

Le rhô est négatif, c'est à dire que le coût de la garantie augmente lorsque les taux d'intérêts diminuent (uniformément).

Pour un niveau de référence de taux et de volatilité, la valeur absolue du rhô d'une option décroît avec la maturité (que l'option soit dans la monnaie ou hors de la monnaie). Nous pouvons en déduire que la sensibilité de la garantie par rapport au taux d'intérêt diminue avec le temps.

Lorsque la garantie est activée, le risque de taux est le seul risque financier résiduel à la charge de l'assureur.

Remarque : même si l'inflation n'intervient pas dans la revalorisation du montant de revenus garantis (pourcentage fixe), elle aura un impact sur le niveau des taux d'actualisation et sur la valeur de l'épargne. *Nous ne traiterons pas cette problématique dans la suite du mémoire.*

3.2.1.4 Corrélations entre les actifs

La structure de dépendance entre actifs impacte le coût et la sensibilité des garanties. La modélisation de la corrélation est un point crucial des modèles d'actifs. Par ailleurs, une déviation de la corrélation réelle avec la corrélation anticipée aura des impacts sur la stratégie de couverture et sur le niveau des provisions.

3.2.2 Risques financiers non répliquables

3.2.2.1 Risque de base

Les supports sur lesquels l'épargne est investie sont généralement des fonds non indiciels. Il est nécessaire de les décomposer en un portefeuille d'indices (proxy) au moyen d'une régression linéaire. L'assureur construira sa couverture sur cette décomposition.

Le risque de base provient de l'écart entre la performance du fonds sur lequel l'épargne est investie et celle du portefeuille d'indices utilisé pour définir le programme de couverture. Cet écart peut être décomposé en 2 sources d'erreurs :

- L'écart entre la performance réelle du proxy et le benchmark du fonds ;
- L'écart entre le benchmark du fonds et la performance réelle du fonds.

En période d'instabilité des marchés, la performance du proxy peut être éloignée du comportement réel du fonds. Suite à la crise, les assureurs ont fortement réduit les listes de supports éligibles aux garanties GMWB / GLWB¹ afin de réduire le risque de base.

La solution la plus simple pour réduire le risque de base consiste à commercialiser des fonds indiciels. Cette solution permet par ailleurs d'améliorer la lisibilité du produit pour le client et de le rendre ainsi accessible à un plus large public. La conséquence de ce choix n'est pas neutre en termes de marge et de liberté de gestion :

- Les rétrocessions faites par le gestionnaire d'actif sur des fonds actions actifs n'ont pas de rapport avec celles des fonds indiciels ;

¹ Voir par exemple la présentation des résultats 2008 d'Axa, 19 février 2009. Modifications apportées à Accumulator 8.0 aux Etats-Unis : « retrait de l'offre d'investissement de 10 fonds difficiles à couvrir » et « élimination de la garantie de retrait à vie (GMWB for life) » pour les affaires nouvelles.

- Si l'assureur commercialise les fonds de sa filiale de gestion d'actifs, l'utilisation de fonds indiciaires aura un double impact sur le compte de résultat du groupe ;
- L'assureur ne peut pas proposer de gestion discrétionnaire dans ce cas (fonds à volatilité capée...).

Dans la suite du mémoire, nous ferons l'hypothèse que l'épargne est investie sur des indices. Nous n'étudierons donc ni la méthode de décomposition des fonds, ni la gestion et l'impact du risque de base.

3.2.2.2 Risque de liquidité

La crise a démontré qu'il était nécessaire de veiller au risque de liquidité. Ce risque peut intervenir au moins à 4 niveaux pour les garanties de revenus :

- Les programmes de couverture peuvent faire intervenir des produits dérivés négociés sur des marchés peu profonds ou de gré à gré. Il est préférable de privilégier, dès que possible, les actifs liquides (les coûts de transaction seront par ailleurs moins élevés) ;
- La gestion des appels de marge vis-à-vis des contreparties sur les produits dérivés ;
- Le coût d'emprunt des titres qui peut fortement augmenter en cas de stress des marchés et qui a un impact direct sur le coût de la couverture (l'assureur étant short sur le sous-jacent dans le cadre de la couverture du delta) ;
- Le comportement de l'assuré (décès, rachat partiel, rachat total) peut provoquer des décaissements différents des décaissements anticipés. L'assureur peut devoir céder des actifs ou augmenter le niveau de sa couverture dans un contexte financier adverse.

Le risque de liquidité peut être pris en compte dans les coefficients utilisés pour l'actualisation. *Nous négligeons ce risque dans la suite du mémoire, excepté dans le chapitre 13 pour la mise en œuvre de Solvabilité 2.*

3.2.2.3 Risque de modèle

Ce risque traduit l'incapacité du modèle développé à prédire les lois régissant la valeur de marché des instruments, le comportement du programme de couverture, les rachats et la mortalité réels... Ce risque n'est pas mesurable directement et son impact peut être évalué en étudiant les sensibilités des résultats à une variation des paramètres ou en comparant les résultats obtenus dans le cadre de plusieurs modèles.

Le risque de modèle peut être en partie piloté par un suivi régulier du portefeuille afin de détecter et de mesurer l'impact des déviations entre données anticipées et réelles.

3.3 Risques actuariels

Les risques actuariels constituent le second aléa et ne sont pas répliquables. Ils déterminent le nombre d'options de vente sur lequel l'assureur est exposé à la date t (risque de notationnel). L'impact de ces paramètres peut être mesuré en calculant des grecques pour les rachats, la mortalité... Le comportement dynamique de rachat (partiel ou total) rend le prix des options dépendant de la trajectoire du sous-jacent.

3.3.1 Risque lié à la mortalité / longévité

Ce risque, potentiellement mutualisable, traduit l'écart entre l'évolution réelle de la mortalité et la table utilisée pour effectuer la tarification et le provisionnement. Il peut se décomposer en 2 parties :

- Une partie commune aux garanties GMWB et GLWB : l'aléa portant sur les décès a un impact sur le nombre de contrats en cours à une date donnée ;
- Une partie spécifique aux garanties GLWB : une augmentation de la longévité provoquera une augmentation de la valeur actualisée des prestations. Ce risque est typique des rentes viagères.

Nous pouvons considérer, en première approximation, que le risque de décès est mutualisable lorsque le portefeuille est suffisamment important et homogène¹ (application de la loi des grands nombres). Dans ce cas, les décès sont supposés suivre une table de mortalité déterministe, généralement une table réglementaire sur laquelle l'assureur ajoute une marge de prudence. Une attention particulière doit être portée au phénomène d'antisélection en raison des caractéristiques de ces contrats, les produit de rente et/ou à capitaux élevés attirant des assurés dont la mortalité est généralement plus faible que la moyenne.

La question du choix des tables de mortalité pour ces garanties figure dans la partie 4.1.3 et la modélisation correspondante est développée dans la partie 7.1.1.1.

3.3.2 Risques non mutualisables

3.3.2.1 Risque de rachat total (« risque de lapse »)

La possibilité pour l'assuré de racheter son contrat² complexifie la détermination du prix et la gestion du risque de la garantie. Les causes des rachats sont multiples³ et il est usuel de les classer en deux catégories selon leur nature :

- Les rachats structurels (exogènes), caractéristiques de tout produit d'épargne, sont évalués à partir d'un historique établis sur des produits analogues. Ces rachats traduisent l'effet de la fiscalité dégressive, les besoins d'argent de l'assuré, l'efficacité du réseau de distribution... Ces rachats peuvent être évités par une action commerciale même si la mise en place d'avances sur le contrat semble délicate. En l'absence de garantie complémentaire en cas de décès (GMDB), ces rachats sont assimilables à des décès lorsque nous modélisons les flux de la garantie (voir chapitre 7.1.1.2) ;
- Les rachats conjoncturels (endogènes), qui traduisent la volonté de l'assuré d'optimiser la valeur de son contrat. Ces rachats provoquent un aléa supplémentaire sur le nombre de contrats à couvrir et privent l'assureur des frais escomptés au titre de la garantie. Par exemple, si la valeur de la garantie augmente pour l'assuré (en cas de baisse des marchés ou des taux, de l'augmentation de la volatilité...), le taux de rachat aura tendance à être inférieur au taux structurel. L'assureur devra alors augmenter son niveau de couverture pour compenser l'écart non anticipé sur le montant du notionnel, dans un contexte où l'achat de couverture est coûteux.

¹ Ce n'est pas le cas lors de la constitution du portefeuille

² Ce risque est désigné par le terme « risque de lapse » dans la littérature anglo-saxonne.

³ Besoin de liquidité, hausse des taux, performance des supports décevante, chute de la valeur de la garantie, concurrence tarifaire...

La tarification, la couverture et le provisionnement devront prendre en compte cet aspect dynamique des rachats. Nous supposons dans la suite du mémoire que les rachats conjoncturels sont seulement liés à la volonté de l'assuré d'optimiser la valeur de sa garantie et ne dépendent pas de l'écart entre la revalorisation réelle et la revalorisation attendue de l'épargne¹. La modélisation détaillée des rachats est proposée dans la partie 7.1.1.2.

3.3.2.2 Risque de rachat partiel

L'assuré peut aussi optimiser la valeur de sa garantie en modulant le montant des revenus garantis dont il est souhaité disposer. Certains contrats prévoient en effet la possibilité pour l'assuré de renoncer à un revenu garanti ou de compléter le revenu garanti par un rachat partiel.

Dans la revue de littérature du chapitre 5, nous verrons que plusieurs auteurs démontrent l'existence de trois zones de comportement pour une garantie GMWB (en l'absence de revalorisation de la benefit base et en présence de pénalité de rachat). Ces zones dépendent de la valeur de l'épargne et de la valeur des revenus garantis restants. La présence de garanties de revalorisation (cliquet² ou TMG³) ou de garantie décès (GMDB) sur le produit peut modifier ce comportement.

Dans le cas d'une GLWB et sous les mêmes hypothèses d'absence de revalorisation, l'assuré n'aura jamais intérêt à renoncer à un revenu garanti puisque la garantie est viagère et que le niveau des retraits garantis n'est pas réajusté. Seuls les deux premières zones de comportement identifiées ci-dessus pour les garanties GMWB semblent pertinentes dans ce cas.

Il est cependant nécessaire que l'assuré soit capable d'effectuer les calculs d'optimisation de la garantie pour que ce risque soit avéré. Cela paraît peu probable et une étude menée aux Etats-Unis semble prouver que la plupart des retraits sont effectués automatiquement et n'obéissent pas à une logique d'optimisation⁴. *Nous expliciterons la manière dont nous pourrions prendre en compte l'optimisation du comportement de l'assuré dans le modèle mais n'étudierons pas davantage cet aspect du problème dans la suite du mémoire.*

3.3.2.3 Risque lié aux arbitrages entre fonds

Pour des investissements de long terme, ne pas pouvoir modifier l'allocation d'actifs peut poser un problème d'efficience pour l'assuré (et donc un inconvénient pour la réussite commerciale du produit). Les arbitrages à la main de l'assuré sont cependant difficiles à gérer puisqu'ils peuvent modifier le profil de risque de la garantie.

Si l'assuré opte pour une allocation plus risquée, le tarif de la garantie sera augmenté mécaniquement. Cependant, appliquer le tarif de la nouvelle allocation ne permet pas nécessairement à l'assureur de disposer des frais suffisants pour honorer ses engagements. Le plus simple consisterait à traiter ce cas de figure comme un nouveau contrat (tarification et niveau des garanties en vigueur au moment de l'arbitrage), en conservant l'antériorité fiscale.

¹ Cette modélisation en fonction du rendement est courante pour les contrats d'épargne

² La valeur la plus élevée de l'épargne, à des dates prédéterminées (généralement les dates anniversaires du contrat), est retenue comme étant la valeur de la benefit base à l'issue du différé.

³ La benefit base à l'issue de la période de différé est au moins égale à la prime versée revalorisée chaque année du taux garanti (TMG)

⁴ Cette étude du LIMRA (*Guaranteed Living Benefits Utilization Study –2006 Data, 2008*), se basant sur les contrats comportant une garantie GLWB vendus avant 2006 aux Etats-Unis, montre que la plupart des retraits et des rachats partiels (75%) sont effectués automatiquement

D'un point de vue pratique, cela revient à considérer un rachat et un réinvestissement sur un nouveau contrat, en conservant l'antériorité fiscale de la garantie.

Nous ne traiterons pas dans la suite du mémoire la problématique des arbitrages et nous placerons dans le cadre d'un mandat de gestion.¹

3.3.2.4 Risque lié à la période de conversion

Dans certains contrats, l'assuré peut choisir à chaque date d'anniversaire s'il arrête la phase d'accumulation et débute la phase de retrait. Cette attente additionnelle peut faire bénéficier l'assuré d'un bonus de revalorisation de la benefit base ou du taux de revenus garantis.

Nous n'étudierons pas ce risque dans la suite du mémoire et supposerons que la durée du différé est choisie au moment de la souscription par l'assuré et ne peut pas être modifiée.

3.3.2.5 Risque de marché secondaire

Les garanties GMWB / GLWB étant des produits dérivés, il serait possible théoriquement de développer un marché secondaire pour jouer contre l'assureur, sur le modèle du life settlement². Ce marché pourrait prendre plusieurs formes :

- Un autre investisseur professionnel pourrait souscrire des contrats GMWB si la valeur intrinsèque des garanties devenait supérieure au tarif commercial et réaliser un arbitrage ;
- Un investisseur pourrait proposer à un assuré ayant souscrit une garantie de racheter le contrat (versement d'une soulte) en contrepartie des flux futurs du contrat³. L'investisseur chercherait alors à optimiser la valeur de la garantie en jouant sur les rachats et les rachats partiels, de manière analogue à une option américaine.

Pour limiter ce risque, la notice d'information doit comporter une clause interdisant le transfert du contrat à un tiers ainsi que la souscription collective. L'assureur doit aussi mettre en place un système de contrôle pour suivre la dynamique de souscriptions et de rachats.

3.4 Risques opérationnels

Le risque opérationnel regroupe l'ensemble des risques touchant la mise en œuvre des stratégies financières (erreur de calcul dans les couvertures, erreur dans les opérations de marché, non déclenchement d'un rebalancement du portefeuille de couverture...), la défaillance éventuelle des systèmes de gestion, la structure de rémunération des distributeurs... *Nous n'étudierons pas ces risques dans la suite et les citons pour mémoire.*

3.4.1 Risque de contrepartie

Ce risque comprend les conséquences d'une dégradation de la notation des émetteurs obligataires ou de crédits sur lesquels l'épargne a été investie ainsi que les possibles

¹ Un mémoire d'actuariat confidentiel, que je n'ai pas pu me procurer, traite de cette question pour les garanties GMAB. Voir **Gauthier A. (2008)**, *Impact d'une réallocation d'actifs sur une garantie plancher en cas de vie dans des contrats investis en unités de compte, ISFA*.

² Le life settlement est un marché secondaire qui engendre une antisélection (les assurés ayant les plus gros risques ont tendance à davantage rester dans les portefeuilles des assureurs). Voir **Gatzert et Schmeiser (2009)**

³ Le transfert de la propriété du contrat semble cependant nécessaire pour contraindre l'assuré rentrant dans ce mécanisme à honorer ses engagements de livrer les flux

défaillances du réassureur ou des contreparties des produits dérivés achetés pour assurer la couverture de la garantie. Ce dernier risque peut être partiellement maîtrisé en exigeant la mise en place systématique de collatéraux ou en utilisant des produits gérés par des chambres de compensation.

3.4.2 Risques liés aux systèmes de gestion

La commercialisation des garanties nécessite d'adapter et de moderniser les systèmes d'information et de calcul. Il en résulte une barrière forte à l'entrée ainsi qu'une difficulté importante à déterminer les frais de gestion a priori. Les systèmes d'information doivent notamment permettre de :

- Gérer de nouveaux flux, en particulier à destination des plateformes de couverture interne ou bien vers les prestataires extérieurs (réassureurs, banques d'investissement...). En cas d'internalisation de la couverture, cela suppose de mettre en place un système de gestion robuste et de disposer de capacités de calculs informatiques suffisantes pour effectuer des projections stochastiques dans le stochastique : calcul des grecques, détermination des positions (rebalancement du portefeuille de couverture), calcul de P&L, de provision, de marge de solvabilité... ;
- Gérer une garantie en parallèle d'un contrat. Cette question est d'autant plus complexe qu'il existera de nombreuses générations de contrat suite aux retarifications et aux changements du niveau de revenus garantis ;
- Mettre en place un système de reporting robuste et à fréquence élevée (quotidienne, hebdomadaire ou mensuelle selon le type de paramètre à suivre) afin de détecter rapidement toute déviation du profil de risque des assurés par rapport aux anticipations qui ont servi à construire le tarif ;
- Etre en mesure de modifier rapidement les paramètres des contrats pour commercialiser une nouvelle génération en cas de sous-tarification.

3.4.3 Risques liés à la politique commerciale

La réussite commerciale d'un produit passe par l'attractivité financière de celui-ci pour le distributeur. La structure des garanties impose des contraintes sur les systèmes de rémunération que l'assureur peut proposer :

- Le commissionnement sur la base des frais d'acquisition est à privilégier même si un commissionnement précompté reste possible. Il est nécessaire dans ce cas de mettre en place des mécanismes de reprise de commissions en cas de sortie anticipée du client. Les reprises sont difficiles à mettre en œuvre à grande échelle et souvent peu effectives dans la réalité. Si cette solution est retenue par l'assureur, il est nécessaire de formuler les frais sur la base de la benefit base (ou des primes investies) plutôt que sur l'épargne afin de sécuriser l'assiette de prélèvement (par rapport à l'assiette qui a servi de base au calcul de la commission précomptée) ;
- Le commissionnement sur encours doit être favorisé mais il diminue chaque année en raison des retraits. La variation de la valeur des unités de compte impacte aussi ce poste de rémunération. Ce mécanisme permet à l'assureur d'inciter le distributeur à limiter le risque de rachat.
- Les arbitrages, s'ils sont autorisés et payants, ne doivent pas accorder de commission car ils ont tendance à augmenter le profil de risque de l'assureur.

3.5 Réduction des risques par la formulation des garanties

Le profil de risque dépend largement de la façon dont l'assureur formule la garantie. Celui-ci aura en effet intérêt à proposer une garantie qui limite les possibilités d'aléa moral (rachat dynamique...) et les risques financiers. Nous proposons dans le tableau ci-dessous quelques pistes permettant de réduire les risques des garanties.

Tableau 3-1 : Réduction des risques des garanties par la formulation du produit

Caractéristiques	Recommandations
Gestion proposée	Privilégier une gestion par profil. Cette solution permet de conserver la main sur l'allocation d'actifs, d'intégrer des fonds à volatilité capée... La gestion personnelle est déconseillée, à moins d'interdire les arbitrages. La gestion évolutive (part actions décroissante avec l'âge de l'assuré) a peu d'intérêt pour l'assuré, protégé quoi qu'il arrive.
Limites sur l'allocation d'actifs	Une allocation d'actifs risquée aura une espérance de rendement et une volatilité plus élevées. Ces 2 effets jouent en sens contraire pour le déclenchement de la garantie GMWB / GLWB et la garantie cliquet. La présence d'un fonds en euros assure une revalorisation minimale de l'épargne (minimisant ainsi la probabilité de déclenchement de la garantie) mais introduit la problématique de la participation aux bénéficiaires. Il est nécessaire de limiter le nombre de fonds proposé pour simplifier la gestion et d'éviter les fonds à trop forte volatilité ainsi que les fonds pouvant présenter un risque de base élevé. Il est préférable, pour des raisons de lisibilité et afin de réduire le risque de base, de recourir à des fonds indiciels.
Formulation des frais de la garantie	Il est possible de définir les frais comme un pourcentage de l'épargne, de la benefit base (permet de capter les revalorisations liées aux garanties cliquet ou TMG) ou de la prime versée. Utiliser l'épargne comme assiette pour prélever les frais liés à la garantie permet d'afficher un chiffre inférieur aux frais calculés sur la base des primes versées (ou de la benefit base). Cependant, cela accentue l'aléa moral de l'assuré puisque lorsque l'épargne augmentera, les frais payés seront de plus en plus élevés alors que la garantie aura de moins en moins de valeur.
Durée du différé	La durée du différé doit être fixée lors de la souscription, par exemple en s'alignant sur l'âge légal de départ à la retraite.
Segmentation du tarif	Il est préférable de favoriser une tarification par âge et par sexe afin de limiter les écarts entre l'assuré moyen anticipé et les souscriptions réelles.
Rachats	Les rachats totaux peuvent être minimisés par des garanties de revalorisation de la benefit base. La problématique de la valeur de rachat de la garantie doit être creusée et pourrait empêcher d'intégrer une garantie GMDB au produit (voir chapitre 4). Pour les rachats partiels, il est possible de les restreindre contractuellement : <ul style="list-style-type: none"> • En limitant le nombre maximum de rachat partiel pouvant être effectué annuellement (par un montant minimum de rachat partiel ou une limite en nombre) ; • En prévoyant une pénalité de rachat (disposition non utilisée sur le marché français). Cette pénalité peut être dégressive en fonction de l'ancienneté du contrat ; Le produit doit prévoir un mécanisme d'abattement (généralement proportionnel) de la benefit base en cas de rachat partiel. Si le contrat prévoit des garanties de revalorisation (cliquet, TMG...), un mécanisme non proportionnel semble mieux adapté (la benefit base est alors égale au maximum entre l'épargne après rachat et la benefit base ajustée du rachat partiel).
Age de l'assuré	Encadrer l'âge de souscription pour d'une part imposer un minimum de différé et

Caractéristiques	Recommandations															
	d'autre part éviter de prendre des engagements trop longs (difficulté à anticiper les conditions de marché et de longévité). Il ne paraît pas nécessaire d'introduire un âge maximum de souscription, à condition toutefois de limiter la portée de la garantie GMDB et des garanties de revalorisation de la benefit base (ex : 80 ans). L'âge de début de la phase de distribution peut être piloté par la formulation des taux de revenus garantis (ex : croissant avec l'âge du 1 ^{er} revenu garanti mis à disposition de l'assuré))															
Benefit base	Prévoir des garanties de revalorisation permet de réduire l'aléa moral (rachat partiel). Il peut être envisagée de fixer une benefit base égale à 90% de la prime investie afin de limiter le niveau des prestations et de proposer des garanties de revalorisation basées sur le rendement..															
Versements complémentaires	Prévoir une révision régulière du tarif et des caractéristiques des garanties pour coller aux conditions de marché réelles.															
Revalorisation de la Benefit Base	<p>Une formulation moins couteuse de la garantie TMG en phase d'accumulation pourrait reposer sur le schéma suivant :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Durée de la phase d'accumulation</th> <th>Revalorisation de l'épargne</th> <th>Taux implicite (composé) i_{TMG} depuis l'origine</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$5 \leq d < 10 \text{ ans}$</td> <td>3%</td> <td>$0.96\% \leq i_{TMG} \leq 1.92\%$</td> </tr> <tr> <td>$10 \leq d < 15 \text{ ans}$</td> <td>30%</td> <td>$1.76\% \leq i_{TMG} \leq 2.66\%$</td> </tr> <tr> <td>$15 \leq d < 20 \text{ ans}$</td> <td>50%</td> <td>$2.05\% \leq i_{TMG} \leq 2.74\%$</td> </tr> <tr> <td>$d \geq 20 \text{ ans}$</td> <td>100%</td> <td>$i_{TMG} \leq 3.53\%$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Pour les garanties cliquet et TMG, il est préférable de caper la revalorisation annuelle de la benefit base (par exemple maximum de 10% par an) afin de limiter le coût de cette option. Un autre mécanisme pourrait consister à revaloriser annuellement, sur un compte virtuel, la benefit base en utilisant un TMG variable et modifiable chaque année en fonction des conditions de marché.</p>	Durée de la phase d'accumulation	Revalorisation de l'épargne	Taux implicite (composé) i_{TMG} depuis l'origine	$5 \leq d < 10 \text{ ans}$	3%	$0.96\% \leq i_{TMG} \leq 1.92\%$	$10 \leq d < 15 \text{ ans}$	30%	$1.76\% \leq i_{TMG} \leq 2.66\%$	$15 \leq d < 20 \text{ ans}$	50%	$2.05\% \leq i_{TMG} \leq 2.74\%$	$d \geq 20 \text{ ans}$	100%	$i_{TMG} \leq 3.53\%$
Durée de la phase d'accumulation	Revalorisation de l'épargne	Taux implicite (composé) i_{TMG} depuis l'origine														
$5 \leq d < 10 \text{ ans}$	3%	$0.96\% \leq i_{TMG} \leq 1.92\%$														
$10 \leq d < 15 \text{ ans}$	30%	$1.76\% \leq i_{TMG} \leq 2.66\%$														
$15 \leq d < 20 \text{ ans}$	50%	$2.05\% \leq i_{TMG} \leq 2.74\%$														
$d \geq 20 \text{ ans}$	100%	$i_{TMG} \leq 3.53\%$														

Les garanties GMWB / GLWB présentent des risques importants et il est nécessaire de les réduire en partie lors de la conception du produit. Le pricing et la gestion des risques mise en place doivent permettre de gérer les risques résiduels.

Dans un contexte où peu d'acteurs se sont lancés sur ce marché, il existe un réel « pricing power » permettant d'intégrer les marges de sécurité nécessaires dans le tarif. Il faut cependant veiller au fait que le déclenchement de la garantie est d'autant plus rapide que les frais seront élevés. Les contraintes d'affichage commercial (par exemple ne pas prélever plus de 2% de frais au titre des frais de gestion et de la garantie) peuvent aussi imposer des contraintes sur portée des garanties.

Chapitre 4 : Environnement réglementaire

Les garanties GMWB et GLWB mélangent fortement risques financiers et actuariels. Elles ne rentrent pas actuellement dans le cadre du Code des Assurances et l'ACP n'a pas fait de recommandations sur ces produits.

L'absence de cadre réglementaire et fiscal spécifiques pour ces produits laisse la place à l'imagination des assureurs mais fait peser en contrepartie un risque si la réglementation venait à être précisée. Les assureurs ont donc souvent choisi de commercialiser leurs produits en LPS, généralement au travers de leur filiale irlandaise. Outre les économies d'échelle réalisées par un développement et une gestion centralisée des garanties pour l'ensemble des marchés européens, la commercialisation en LPS a permis aux assureurs d'appliquer la réglementation et la fiscalité irlandaise. Par ailleurs, les activités en LPS étant placées sous l'autorité des organes de contrôle du pays d'origine, les assureurs ont pu s'exonérer du contrôle de ces activités par l'ACP. La mise en place de Solvabilité 2 devrait permettre de faire converger les différents référentiels européens et de supprimer ces asymétries.

Ce chapitre s'intéresse aux dispositifs réglementaires, aux normes comptables et aux principes de solvabilité qui pourraient s'appliquer aux garanties GMWB et GLWB.

Les majorité des références réglementaires citées sont des articles du Code des Assurances. Cette précision sera alors omise. Dans le cas contraire, le texte réglementaire sera précisé. Les articles du Code des Assurances cités dans ce chapitre sont disponibles en annexe.

4.1 Aspect réglementaire

4.1.1 Dispositions générales des contrats

Le Code des Assurances ne prévoit pas explicitement de cadre réglementaire pour les garanties GMWB / GLWB qui combinent des risques financiers et des risques en cas de vie. Nous sommes donc amenés à chercher de quelle manière ces garanties pourraient s'appuyer sur la réglementation existante.

Selon l'article R321-1, les contrats d'épargne multisupports avec garantie GMWB et GLWB relèvent de la branche 20 (vie-décès) et 22 (assurances liées à des fonds d'investissement). La garantie GMWB / GLWB considérée seule relève de la branche 22 et la garantie GMDB, que l'on peut trouver en garantie complémentaire sur ces produits, relève de la branche 20.

La garantie du produit Capital Ressources relève de la branche 16-k (pertes pécuniaires diverses). L'assuré souscrit alors 2 contrats, un contrat d'assurance vie multisupport (branche 20) et un contrat IARD au titre de la garantie de revenus (branche 16-k). L'utilisation de cette branche ne semble pas possible dans le cas de la GLWB (garantie viagère) puisque les garanties pertes pécuniaires ne doivent pas faire référence à la durée de vie de l'assuré.

Les contrats avec garantie GMWB et GLWB peuvent contenir des unités de compte, dont la liste admissible est détaillée à l'article L131-1, et un fonds en euro.

4.1.2 Dispositions relatives au rachat

Les contrats comportant des garanties GMWB et GLWB doivent prévoir une possibilité de rachat à tout moment avant le déclenchement de la garantie, conformément à l'article L132-23. Dès le déclenchement de la rente viagère, ce même article prévoit qu'il n'existe plus de valeur de rachat.

L'article L132-5-1 dispose que les assurés doivent connaître les valeurs de rachat de leur contrat à la souscription. Dans le cas contraire, la faculté de renonciation de l'assuré (initialement de 30 jours) est prorogée. Les valeurs de rachat doivent être mentionnées au minimum pour les 8 premières années, conformément à l'article A132-5-2. Pour les contrats en unités de compte, l'article A132-5 prévoit que les valeurs de rachats soient formulées en nombre d'unité de compte.

Ces dispositions semblent devoir s'appliquer pour la provision mathématique du contrat en unités de compte et celle de la garantie en cas de vie lorsque le contrat prévoit une garantie en cas de décès (assurance en cas de vie avec contre-assurance). L'article L331-2, dans sa version du 19 décembre 2007, précise que la valeur de rachat ne peut être supérieure au montant assuré en cas de décès. Le fait que les provisions constituées au titre de la garantie soient en partie rachetables revient à donner à l'assuré une garantie permanente sur le capital contre la chute des marchés (dans la limite de la provision mathématique du contrat avec assurance décès) alors que l'intention initiale consiste à donner une garantie uniquement sur les revenus garantis.

La pénalité de rachat applicable par l'assureur ne couvre que partiellement le manque à gagner provoqué par l'obligation de fournir une garantie de la valeur de rachat à tout moment. Elle doit en effet être inférieure à 5% pendant les 10 premières années du contrat conformément aux articles L132-22-1 et R331-5.

Le risque réglementaire lié au rachat doit donc être correctement mesuré dans la phase de définition du produit. Plusieurs solutions semblent envisageables pour contourner ce problème des provisions rachetables :

- Ne pas prévoir de garantie décès : l'article L132-23 dispose en effet que les assurances en cas de vie sans contre-assurance ne prévoient pas de valeur de rachat ;
- Commercialiser la garantie en LPS via un pays dont la réglementation permet de limiter les provisions à constituer ou la possibilité de rachat de la provision de la garantie. Le contrat reste ainsi rachetable sur la base de la provision mathématique de l'épargne, calculée selon la réglementation du pays où le produit est vendu. Par exemple, les conditions générales du produit Allianz Invest4Life (commercialisés en LPS) distinguent le contrat d'épargne du reste des garanties. Elles prévoient que la valeur de rachat est exprimée en unités de compte, uniquement sur la partie épargne du contrat, nette des frais maxima liés aux garanties et aux frais de gestion. Les garanties du contrat (GMWB et GMDB) sont traitées dans un paragraphe distinct ;
- Dissocier le produit en un contrat d'assurance vie et un contrat accessoire IARD, sur le modèle d'Axa Capital Ressources. Cette solution devrait théoriquement résoudre le problème dans la mesure où, la garantie « pertes pécuniaires diverses » (branche 16-k) n'étant pas rachetable, seul le contrat multisupport a une valeur de rachat égale à la valeur de l'épargne :

- La gestion de la garantie complémentaire se fait en utilisant des Provisions pour Primes Non Acquises et des Provision pour Sinistres à Payer (PSAP), conformément aux dispositions de l'article R331-6. Par exemple, en cas d'arbitrage ou de rachat total ou partiel, l'assureur doit rembourser l'assuré de la PPNA et éventuellement réémettre une nouvelle prime ;
- Cependant la branche 16-k a été prévue pour palier à une perte de revenus professionnels et cette utilisation détournée pourrait être sanctionnée par l'ACP si elle se généralisait.

Une seconde contrainte réglementaire liée au rachat existe pour ce type de garantie. En cas d'acceptation du bénéfice du contrat par le(s) bénéficiaire(s) que l'assuré a désigné(s), l'assuré doit recueillir son (leur) accord pour effectuer des rachats sur le contrat. Il ne peut donc plus disposer à son gré des revenus garantis prévus par le contrat.

Nous ne prendrons pas en compte la problématique de la valeur de rachat dans la suite du mémoire.

4.1.3 Dispositions relatives à la tarification

L'article A335-1 fixe les exigences auxquelles doivent répondre les tables de mortalité et les taux d'actualisation utilisés dans la tarification des garanties. L'article A132-1 explicite les contraintes sur le niveau maximum des taux d'actualisation :

- Pour les 8 premières années, le taux d'actualisation doit être inférieur à 75% du TME calculé sur une base semestrielle ;
- Au-delà de 8 ans, ce taux doit être égal au maximum entre 3.5% et 60% du TME calculé sur une base semestrielle.

Cet article impose par ailleurs des contraintes sur le taux maximum de revalorisation pouvant être accordé dans le cadre d'une garantie TMG en phase d'accumulation.

L'article A335-1 impose de choisir attentivement la table de mortalité qu'on utilisera pour effectuer le *pricing* (et le provisionnement).

- Pour les garanties GMWB, le risque financier semble a priori prédominant et il ne s'agit pas d'engagements viagers. La tarification et le provisionnement pourraient être effectués en utilisant les tables TH/TF 00-02 abattues dans ce cas¹ ;
- La garantie GLWB pose davantage de problème dans la mesure où il est difficile de déterminer a priori s'il s'agit d'une garantie en cas de vie ou de rente viagère. Nous choisirons donc la table donnant le tarif le plus élevé après avoir effectué les 2 calculs suivants :
 - En assimilant cette garantie à une rente viagère, nous utiliserons les tables générationnelles TGH/TGF 05;
 - En considérant qu'il s'agit d'une garantie en cas de vie², nous utiliserons les tables TH/TF 00-02 abattues.

Dans la suite du mémoire, nous utiliserons les tables générationnelles pour effectuer les applications numériques.

¹ Dans les applications numériques du chapitre 9, nous utiliserons les tables TGH-TGF 00-05 afin de comparer les résultats obtenus à ceux de la GLWB (chapitre 10)

² Dans la mesure où la fiscalité et l'absence d'aliénation du capital ne sont pas cohérentes avec les caractéristiques d'une rente viagère

4.1.4 Dispositions relatives à la Participation aux Bénéfices

L'article L331-3 dispose que « les entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent (...) ». Lorsque la garantie n'est pas activée, l'article A331-3 précise que le mécanisme de PB ne s'applique pas si le contrat est investi uniquement en unités de compte, étant donné que la totalité du rendement des placements financiers revient par construction à l'assuré. Un contrat qui prévoit ou impose un fonds euro dans l'allocation d'actif sera donc soumis au mécanisme de PB.

Rien n'est explicitement prévue pour les garanties GMWB / GLWB. Cependant si l'on considère que ces contrats avec garantie relèvent des branches 20 ou 22, les dispositions relatives à la participation aux bénéfices devraient s'appliquer.

Lorsque la garantie est activée, le produit est assimilable à une rente à durée finie ou viagère. L'assureur est susceptible de devoir faire bénéficier l'assuré d'un mécanisme de PB. Les conditions générales du produit Allianz Invest4Life, commercialisées en LPS, excluent cependant explicitement ce cas de figure : « En cas de versement d'une rente viagère, celle-ci ne bénéficiera pas d'une participation aux bénéfices. »¹

Les articles A331-4 à A331-9-1 définissent les modalités de calcul de la participation aux bénéfices techniques et financiers. En simplifiant, l'assureur doit redistribuer 85% du résultat financier et 90% du résultat technique à l'assuré. Ces résultats prennent en compte l'impact des opérations de réassurance définies dans l'article A331-8. Cette redistribution peut être immédiate ou différée sur 8 ans, conformément à l'article A331-9. Le résultat technique comprend notamment le résultat sur risque de mortalité (différence entre les tables et la mortalité réelle) et le résultat relatif à la gestion du contrat (différence entre les frais de gestion réels et les chargements définis contractuellement). Le placement des frais prélevés au titre de la garantie et le résultat généré par le programme de couverture pourraient être interprété comme du résultat financier.

Cependant, pour des produits mélangeant risques financiers et actuariels, il est difficile d'effectuer une distinction nette entre marge technique et marge financière. Par exemple, un gain de couverture lié à une surmortalité dans un marché baissier pourrait être interprété à la fois comme un gain technique et un gain financier.

Nous ne prendrons pas en compte la participation aux bénéfices dans la suite du mémoire.

4.1.5 Dispositions relatives aux actifs de couverture

L'assureur peut utiliser des instruments financiers à terme (IFT) pour établir un programme de couverture, en lien avec ses placements et en adéquation avec ses engagements.

L'article R332-2 détaille la liste des actifs pouvant figurer en représentation des engagements d'un assureur. Les dispositions communes (paragraphe D) précisent les règles et les conditions d'utilisation des instruments financiers à terme en représentation des engagements de l'assureur, en renvoyant à l'article R332-45 (couverture de placements détenus ou à détenir). Les articles R332-46 (optimisation du prix d'achat d'un placement) et R332-47 (garantir un taux de rendement) définissent les 2 autres stratégies admissibles pour l'investissement dans les IFT.

¹ Source : Dispositions Générales valant note d'information - Allianz Retraite Invest4Life - Référence DPP 08-189 – Partie « Participations aux Bénéfices »

Les opérations sur IFT dans le cadre des garanties GMWB / GLWB rentrent difficilement dans ces catégories. La situation la plus proche consisterait à considérer qu'elles s'inscrivent dans les dispositions prévues par l'article R332-45 et visent à protéger la valeur de l'épargne en vue du désinvestissement (retrait, rachat et décès). Cependant, la plupart de ces événements s'opèrent à des dates ou pour des montants inconnus, il est impossible de déterminer la stratégie a priori.

L'article R332-58 définit les règles de suivi nécessaires et l'article R332-53 limite la mise en œuvre d'opérations de gré à gré. D'un point de vue comptable, les instruments financiers à terme sont valorisés en valeur de marché s'ils sont négociables ou à dire d'experts dans le cas contraire, conformément à l'article R332-20-2.

L'article R332-1 impose que les provisions techniques soient représentées par des actifs équivalents et interdit à l'assureur de vendre à découvert les unités de compte qu'il détient en représentation de l'épargne de l'assuré. L'article R332-3 prévoit que les IFT sont partiellement admis en représentation des engagements réglementés dans la limite de 0.5% de ces engagements.

Concernant les exigences de solvabilité, l'article R334-11 dispose que les plus values latentes sur ILT peuvent être incluses dans les éléments de couverture de la marge de solvabilité, sur demande de l'entreprise et sous réserve de l'accord de l'ACP. De même, les moins-values latentes non provisionnées sont déduites de la couverture de la marge.

Nous ne prendrons pas en compte les contraintes sur les instruments financiers à terme dans la suite du mémoire.

4.2 Provisionnement

4.2.1 Dispositions relatives au provisionnement

Les articles L331-1 et R331-1 disposent que les assureurs doivent constituer dans leurs comptes, d'un point de vue réglementaire, des provisions techniques pour honorer le règlement de leurs engagements, nets de réassurance. Le calcul des provisions s'effectue contrat par contrat, sans compensation.

Dans notre cas de figure, lorsque les garanties relèvent des branches 20 ou 22, les provisions techniques relèvent de l'article R331-3 (opérations d'assurance sur la vie, d'assurance nuptialité-natalité et aux opérations de capitalisation). Pour les formulations utilisant une garantie IARD, c'est l'article R331-6 qui s'applique.

L'article A331-1-1 précise les tables de mortalité et les taux techniques à utiliser pour calculer les provisions mathématiques :

- Les taux techniques ne doivent pas être supérieurs à ceux utilisés dans la tarification ;
- Les tables de mortalité retenues sont les tables les plus prudentes entre celles utilisées lors de l'établissement du tarif et celles en vigueur au moment de l'inventaire.

Aucune autre disposition du Code des Assurances ne semble pouvoir être exploitée en l'état. Ce genre de cas de figure avait déjà conduit l'ACP à émettre un avis technique concernant le provisionnement des garanties planchers en cas de décès :

- Les provisions mathématiques doivent être calculées contrat par contrat, en l'absence de rachat et sans possibilité de compensation (c'est-à-dire que lorsque la provision est négative, elle est forcée à 0) ;
- La provision retenue est égale au maximum obtenue par une méthode déterministe (baisse annuelle progressive des supports égale à 15% de leur volatilité, dans la limite de 50% de la volatilité) et par une méthode des puts, dans un environnement de Black & Scholes ;
- Le taux d'actualisation considéré est égal au minimum entre 3.5% et 60% du TME, quelle que soit l'échéance de l'option, ce qui est plus prudent que les dispositions de l'article A132-1 pour les engagements inférieurs à 8 ans ;
- La volatilité des supports retenue est la volatilité historique, avec un minimum imposé de 20% pour les actions et de 10% pour les obligations.

Ces principes pourraient être utilisés dans le cadre des garanties GMWB / GLWB, exception faite du 2nd principe cité qui peut s'avérer insuffisant en raison de la nature des garanties. Par exemple, ces principes pourraient imposer l'utilisation d'un modèle de taux stochastique et d'une formulation des provisions mathématiques ne prenant pas en compte l'intégralité des frais prélevés par l'assureur (voir chapitre 12). Par ailleurs, les paramètres utilisés dans le 4^{ème} principe semble trop faibles pour saisir la réalité des risques des garanties dans le contexte actuel.

L'introduction de nouveaux référentiels (Solvabilité 2 et IFRS phase 2) conduira à utiliser une lecture économique du bilan et à recalculer les provisions évaluées dans le cadre du référentiel réglementaire français.

Dans la suite du mémoire, nous adoptons une vision économique du bilan et nous nous intéressons uniquement au calcul de la provision mathématique de la garantie (chapitre 12).

4.3 Fiscalité

Les garanties GMWB et GLWB sont construites en faisant l'hypothèse que c'est la fiscalité de l'assurance vie qui s'appliquera au retrait effectué par l'assuré, lorsque la garantie n'est pas activée. Il semble exister un risque de requalification des retraits en rente viagère, en particulier pour la garantie GLWB. Cela pourrait expliquer la différence de formulation entre les produits commercialisés sur le marché français : arbitrage des sommes pouvant être retirées vers un fonds monétaire pour Accumulator Retraite, rachat partiel explicite pour Invest4Life et Terre d'Avenir.

4.3.1 Fiscalité de l'assurance-vie

Avant le déclenchement de la garantie (c'est-à-dire tant qu'il existe une valeur de rachat), seule la partie des intérêts et des plus-values incluses dans l'épargne rachetée est soumise à

l'impôt sur le revenu ou à un prélèvement libératoire. Cette interprétation de la loi pourrait néanmoins conduire à une à requalification fiscale¹ :

Date du rachat	Prélèvement libératoire (hors prélèvements sociaux)
Effectué avant 4 ans	35%
Effectué entre 4 et 8 ans	15%
Effectué au-delà de 8 ans	7.5% (exonération d'IR de 4600 € par an par personne)

L'assuré assujetti à l'ISF doit reporter la valeur de rachat ou de la PM de son contrat au 1^{er} janvier de chaque année sur sa déclaration ISF.

4.3.2 Fiscalité de la rente viagère

En cas d'activation de la garantie, la fiscalité bascule vers celle des rentes viagères à titre onéreux et les dispositions de l'article 158-6 du Code Général des Impôts s'appliquent. Une fraction des arrérages rentre dans l'évaluation de l'impôt sur le revenu. Elle est déterminée forfaitairement et de façon définitive, en fonction de l'âge du crédientier lors de l'entrée en jouissance de la rente. Les arrérages sont soumis en totalité aux prélèvements sociaux.

Age du crédientier	Fraction de rente entrant dans le calcul de l'IR
Jusqu'à 49 ans inclus	70%
De 50 ans à 59 ans inclus	50%
De 60 ans à 69 ans inclus	40%
A compter de 70 ans	30%

L'assuré assujetti à l'ISF doit reporter la valeur de rachat ou de la PM de son contrat au 1^{er} janvier de chaque année sur sa déclaration ISF. Au moment de la transition entre la phase de distribution et la phase de rente viagère, l'assuré subira une forte variation du montant à reporter sur sa déclaration ISF puisque celui-ci passera d'une valeur de rachat quasi-nulle à une provision mathématique représentative de la rente viagère (si l'on suppose que la valeur de rachat du contrat avant le déclenchement de la garantie n'intègre pas la PM de la garantie, voir partie 4.1.2).

4.3.3 Fiscalité en cas de décès

La fiscalité de l'épargne transmise dépend de la nature des bénéficiaires désignés. Elle est prévue dans par les articles 757 B et 990 I du Code Général des Impôts :

Bénéficiaires	Fiscalité
Conjoint, frère/sœur ²	Exonération des droits de succession et de la taxation de 20%
Autres bénéficiaires	Versements effectués avant les 70 ans de l'assuré : abattement de 152 k€ par bénéficiaire. Au-delà, taxe de 20% ; Versements effectués après 70 ans : Frais sur les versements (hors intérêts et plus values), après abattement de 30 500 €

Dans tous les cas, le capital transmis n'est pas soumis aux prélèvements sociaux.

¹ Extrait de Lamy Assurance : « (...) l'Administration fiscale est parfois amenée à faire application du régime fiscal des rentes viagères à des prestations dont la durée de versement n'est pas liée au décès du crédientier. Tel peut être le cas dans l'hypothèse d'un fractionnement du paiement d'un capital ou encore de versement régulier de prestations résultant des arrivées à terme successives de contrats de capitaux différés. L'administration considère en effet que ces sommes doivent être soumises à ce régime si, eu égard à l'âge du bénéficiaire et à la durée prévue des engagements, ceux-ci interviennent en réalité jusqu'au décès de l'assuré. (...) »

² Conditions précisées à l'article 796 O Ter du Code Général des Impôts

4.4 Comptabilité et solvabilité

Les garanties GMWB / GLWB peuvent être considérés comme des contrats d'assurance dans le cadre des normes IFRS. Nous adopterons dans la suite du mémoire une approche économique du bilan, en préparation de l'entrée en vigueur de Solvabilité 2 au 1^{er} janvier 2013 et à la phase 2 des normes IFRS¹ en 2014. L'actif et le passif seront évalués en anticipant ces futures normes en valeur mark to market.

Dans Solvabilité 1, en appliquant l'article R334-13 pour ces garanties relevant des branches 20 et 22, la marge de solvabilité exigée serait égale à :

- 4% de la provision mathématique du contrat en UC et de la garantie GMWB / GLWB puisqu'il existe un risque de placement². La provision mathématique est calculée contrat par contrat de manière prudente (utilisation des taux et tables réglementaires) ;
- Une marge additionnelle de 0.3% des capitaux sous risque au titre du risque de mortalité pourrait être exigée en cas de présence d'une garantie décès.

Le montant de la marge de solvabilité serait modifié en présence de réassurance, en utilisant un coefficient d'abattement égal au rapport, pour le dernier exercice, entre le montant des provisions mathématiques après cessions en réassurance et le montant des provisions mathématiques brut de réassurance. Ce rapport ne peut être supérieur à 85%. Dans le cas d'une garantie décès, le mécanisme est équivalent en tenant compte des capitaux sous risque et d'un majorant égal à 50%. Dans le cadre Solvabilité 1, les programmes de couvertures dynamiques n'ont pas d'impact sur le montant exigé au titre de la marge de solvabilité.

Si la garantie relève de la branche 16, l'article R331-5 dispose que la marge de solvabilité soit calculée sur la base du montant annuel des cotisations ou sur la base de la charge annuelle moyenne des sinistres. L'exigence de marge de solvabilité correspond au résultat le plus élevé obtenu par ces 2 méthodes.

La directive Solvabilité 2 modifie totalement cette approche forfaitaire. L'exigence de marge de solvabilité est déterminée de manière à éviter la ruine de l'assureur à l'horizon d'un an dans 99.5% des cas. Le capital que l'assureur doit détenir correspond à la VaR du besoin de fonds propres évalué selon une approche par module des risques.

Nous étudions la manière dont les garanties GMWB / GLWB peuvent s'intégrer dans le cadre Solvabilité 2 dans le chapitre 13.

Nous effectuons dans les deux chapitres suivants une revue de littérature sur le pricing et la gestion des risques de ces garanties (chapitre 5). L'ensemble des résultats analytiques disponibles dans la littérature seront regroupés au sein d'un cadre unifié de modélisation dans le chapitre 6.

¹ La 1^{ère} phase des normes IFRS permettait de valoriser le passif en utilisant les provisions réglementaires locales et en comptabilisant les actifs à leur valeur de marché. Cette différence de traitement était notamment corrigée en faisant figurer une PB différée au passif.

² Le risque de placement lié à la garantie empêche d'utiliser le coefficient de 1% pour l'épargne en UC

Partie II : Revue de littérature

Chapitre 5 : Revue de littérature

Très peu d'articles académiques ou de mémoires d'actuariat (non confidentiels) traitent du pricing, de la couverture et de la gestion des risques des garanties en cas de vie¹. A l'opposé, un grand nombre d'articles et de mémoires sont consacrés aux garanties en cas de décès (GMDB) dans la mesure où celles-ci existent depuis longtemps sur le marché et permettent davantage de modélisation analytique. Les nouveaux référentiels comptables et prudentiels ainsi que les exigences accrues en termes de gestion des risques devraient conduire à développer la littérature sur les garanties GMWB / GLWB.

La modélisation et la gestion des risques des garanties GMWB / GLWB sont plus complexes que celles des garanties GMAB ou GMDB. En effet, ces garanties :

- Couplent les risques financiers et le risque de longévité de l'assuré, ce qui rend le temps de déclenchement de la garantie et le montant des prestations aléatoires ;
- Mélangent des événements continus (revalorisation de l'épargne...) et discrets (retraits, prélèvement des frais...). Une large partie de ces événements viennent en déduction de l'épargne, ce qui a pour effet de lier le déclenchement de la garantie au niveau de frais prélevés (et donc à la marge de sécurité prévue dans la tarification). Par ailleurs, les frais sont prélevés tant que l'épargne est positive, ce qui introduit un aléa sur la ressource dont disposera l'assureur ;
- Permettent à l'assuré, dans certaines formulations, de jouer contre l'assureur en adoptant une stratégie optimisée de rachats partiels et totaux.

Dans ce cadre, nous avons jugé utile de présenter une revue de littérature afin de montrer la diversité des approches proposées pour valoriser et assurer la gestion du risque des garanties (explicites dans les contrats *variable annuities*) et des options cachées (rachat, taux garanti, participation aux bénéficiaires...) des contrats d'assurance vie.

L'étude des garanties GMWB / GLWB est par ailleurs très proche de la problématique de minimisation de la probabilité de ruine d'un retraité en fonction de la nature du placement et de la consommation de celui-ci. La littérature propose de nombreux articles sur ce thème, par exemple **Huang et al. (2004)** ou **Bayraktar et Young (2007)**. *Nous n'aborderons pas ce thème dans la suite du mémoire mais tenions à souligner la proximité des deux problèmes.*

5.1 Etudes des garanties liées aux contrats en unités de compte

5.1.1 Evaluation des GMDB et GMAB sous la probabilité risque neutre

Dans la mesure où les garanties des contrats d'assurance-vie peuvent se décomposer en sommes pondérées d'options de vente européennes ou américaines, l'approche la plus utilisée consiste à transposer la méthode d'évaluation des produits dérivés utilisée en finance de marché.

¹ Ces travaux se limitent alors généralement aux garanties GMAB, parfois aux GMIB

Ce type de raisonnement est ancien : **Brennan et Schwartz (1976)** et **Boyle et Schwartz (1977)** ont proposé des évaluations sous probabilité risque neutre des engagements liés au décès de l'assuré. Dans ce cadre, les marchés sont généralement supposés complets et l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage vérifiée, ce qui permet de garantir l'unicité du prix. La mortalité est souvent considérée comme indépendante des risques financiers et mutualisable.

Sur ce principe de nombreux articles ont été écrits autour de la garantie en cas de décès (GMDB) et de la garantie de revalorisation minimale en cas de vie (GMAB). Nous n'en citerons que quelques uns pour illustrer notre propos. **Merlus et Pequeux (2000)**, par exemple, étudie la tarification de différentes formes de GMDB en décomposant celles-ci en une somme pondérée par les probabilités de décès d'options de vente européennes écrites sur un sous-jacent ou un panier (contrat mono / multisupports). Ces options sont valorisées en supposant que les actifs (actions, obligations...) suivent une loi lognormale et les taux d'intérêt un processus de Hull & White. Les auteurs proposent par ailleurs quelques résultats sur la couverture de ces produits. **Ulm (2008)** écrit la valeur de la garantie GMDB dans un modèle de Black & Scholes comme une intégrale de puts pondérés par la probabilité de rachat et de décès instantané. Il propose une formule générale et effectue des applications en précisant la forme de la loi de mortalité.

Très rapidement, la littérature a cherché à améliorer les modèles d'actifs utilisés, notamment pour décrire le comportement des actifs risqués ou les taux d'intérêts. **Hardy (2003)** propose ainsi un exposé complet sur les garanties présentes dans les contrats d'assurance vie et sur les problématiques de modélisation et de pricing. Elle introduit des modèles à changement de régimes à 2 niveaux (RSLN2) pour modéliser les actions. **Lin et Tan (2003)**, **Pernoud et Favre-Bonvin (2003)** et **Kijima et Wong (2006)** proposent des modèles de valorisation des garanties GMAB dans un environnement de taux stochastique (modèles de Vasicek ou de Hull & White à 1 facteur). Ces articles négligent généralement les rachats et parfois la mortalité.

Des articles plus récents cherchent à étendre ces résultats pour mieux reproduire le comportement des marchés et rendre plus robuste les projections sur le long terme. Cela se traduit notamment par l'introduction de processus à saut, traduisant mieux l'asymétrie des rendements, et de modèles à volatilité stochastique. La modélisation de la mortalité a aussi été améliorée en intégrant des processus stochastiques de mortalité.

Ces articles donnent généralement lieu à la recherche d'une équation différentielle partielle ou à la valorisation de l'espérance des payoffs actualisés sous une probabilité risque neutre. Les auteurs recourent à une résolution par différences finies, à des méthodes d'arbres (binomiaux comme dans **Gaillardetz et Lin (2006)** pour l'étude des GMAB par exemple...) ou de Monte Carlo pour effectuer les applications numériques.

5.1.2 Autres méthodes d'évaluation

Les techniques proposées pour effectuer la valorisation des options vont au-delà de ces approches. **Tiong (2000)** propose de recourir à la transformée d'Esscher¹ pour rechercher des formules fermées pour les garanties GMAB (cliquet et TMG) dans un environnement financier simple (marché complet, absence d'opportunité d'arbitrage et de coût de transaction,

¹ L'utilisation de la transformée d'Esscher pour valoriser des options a été introduite dans Gerber H. U. et Shiu E. S. W. (1994), Option pricing by Esscher Transforms. Transactions of the SOA 46, pp. 99-191. Cette approche revient à effectuer un changement de probabilité.

modèle de Black & Scholes, taux constant...). L'auteur suppose par ailleurs qu'il n'y a ni décès ni rachat avant le terme du contrat. Cette transformation permet de mener les calculs sous la probabilité historique et d'estimer les déflateurs associés.

Cette approche est utilisée dans d'autres conditions, par exemple **Gerber et Shiu (2003)** et **Lee (2003)** pour les garanties GMAB cliquet et pour l'étude du temps de 1^{er} passage d'un brownien, **Siu (2005)** pour des garanties en cas de vie dans le cadre de modèle d'actifs à sauts, **Lin et al. (2009)** dans le cadre de modèles à changement de régime...

Des méthodes généralement mises en œuvre lorsque les marchés sont supposés incomplets sont aussi proposées. Certains auteurs recourent ainsi au pricing par indifférence d'utilité. Cette méthode consistant à trouver le prix rendant l'assuré indifférent à la souscription de la garantie, elle nécessite de se donner en amont une fonction d'utilité. **Grasselli et Silla (2009)** propose un modèle basé sur l'utilité pour déterminer le prix d'une garantie de conversion en rente (GMIB, voir partie 5.1.3). Les taux sont supposés constants et les auteurs s'intéressent au montant de frais qu'un assuré pourrait accepter de payer à $t = 0$ pour bénéficier de cette garantie¹. De même, **Young (2003)** s'intéresse aux garanties GMDB et suppose que l'assuré choisit son allocation d'actifs (part d'actifs risqués et part de taux sans risque) de manière à maximiser l'espérance d'utilité de sa richesse. L'actif risqué est supposé suivre un modèle de Black & Scholes. Une fois déterminée l'allocation cible, l'auteur calcule le tarif de la garantie associée à une prime unique ou à des primes périodiques.

Des méthodes basées sur la minimisation d'un critère de risque (généralement la variance de la valeur actualisée de l'écart entre les engagements de l'assureur et ceux de l'assuré) sont aussi proposées, par exemple dans **Lin et Tan (2003)**.

D'autres techniques mathématiques (transformée de Fourier, transformée de Laplace...) sont proposées dans la littérature actuarielle. *Nous ne détaillerons pas ce point.*

5.1.3 Etude des garanties GMIB

Les garanties GMIB (aussi dénommée GAO – « Guaranteed Annuity Option ») ont donné lieu à de nombreux articles à la suite des difficultés financières rencontrées par Equitable en Angleterre à la fin des années 1990. Le risque de ces garanties réside dans la chute des taux d'intérêts et l'augmentation de la longévité des assurés, ce qui présente une caractéristique commune avec les garanties GLWB.

Ces garanties peuvent être considérées comme des options européennes écrites sur le taux de conversion et dont le strike dépend du taux garanti. **Boyle et Hardy (2003)** s'intéresse à la tarification, au provisionnement et à la couverture d'un produit à prime unique en utilisant la probabilité forward neutre. Les taux d'intérêt suivent un modèle de Hull & White à 1 facteur et la mortalité une table prédéfinie. **Ballotta et Haberman (2003)** propose un modèle intégrant des taux (HJM) et de la mortalité stochastiques. **Biffis et Millosovich (2006)** propose un modèle unifié étendant les travaux précédents (discontinuité du processus actions, volatilité et mortalité stochastiques...). **Marshall et al. (2010)** utilise une méthode de Monte Carlo pour étudier les garanties GMIB avec différé dans un marché complet. Les auteurs intègrent un modèle de taux stochastique (Hull et White 1 facteur) et négligent la mortalité (étude d'une rente certaine de durée 20 ans), les rachats et les frais de gestion.

Van Haastrecht et al. (2009) propose de déterminer le tarif des garanties GAO dans le cadre d'un modèle d'actions à volatilité stochastique et de taux courts stochastiques (modèle de Schöbel-Zhu-Hull-White).

¹ C'est à dire le montant que l'assuré est prêt à payer pour que son espérance d'utilité soit la même en souscrivant ou non le contrat

D'autres approches sont aussi proposées. **Pelsser (2003)** s'intéresse à la couverture de ces options au travers de la réplcation des engagements de taux par des swaptions. L'auteur ne traite pas de l'exposition au risque de mortalité et au risque actions. **Chu et Kwok (2004)** teste des approximations analytiques des formules d'évaluation pour déterminer numériquement le coût des GAO.

5.1.4 Etude des garanties cachés dans les contrats d'assurance-vie

La littérature s'intéresse par ailleurs à la valorisation des options cachées dans les contrats d'assurance-vie. **Gatzert (2009)** fournit une revue de littérature détaillée de ces options cachées figurant sur les contrats. Beaucoup d'articles sont consacrés à l'option de rachat, semblable à une option de vente américaine. **Grosen et Jorgensen (2000)**, **Bacinello (2003a et b)** ou **Costabile et al. (2008)** évaluent le prix et la sensibilité de l'option de rachat contenue dans les contrats offrant un taux de revalorisation minimum garanti. Les auteurs utilisent une méthode d'arbre et supposent que les taux d'intérêts sont déterministes.

L'analyse des options de rachat peut aussi s'effectuer par analogie avec les options américaines (problème de borne libre) en résolvant une équation différentielle partielle. C'est, par exemple, l'approche retenue par **Shen et Xu (2005)**.

Pour en savoir plus, le lecteur intéressé peut se référer à **Bacinello et al. (2007)** et à **Bernard et Lemieux (2008)** pour une analyse comparée des études sur les options de rachat et une utilisation de l'algorithme de Longstaff et Schwartz.

Cette première partie témoigne du nombre de travaux portant sur la valorisation des garanties en cas de vie (GMAB, GMIB) et en cas de décès (GMDB). Les options cachées et la question de la probabilité de ruine (voir introduction du chapitre) ont aussi données lieu à de nombreuses recherches.

Plus récemment, la littérature actuarielle s'est tournée vers les garanties GMWB / GLWB, plus complexes à modéliser. Nous effectuons une revue de littérature sur ce thème dans la suite de ce chapitre.

5.2 Formules analytiques pour les garanties GMWB / GLWB

Les articles traitant de la décomposition analytique de la garantie et de la recherche de formules fermées concernent principalement les GMWB. Ils supposent généralement que l'assuré est en vie à la maturité T du contrat, ce qui revient à négliger les risques actuariels (décès et rachat total) pour ne se concentrer que sur la partie financière de la garantie. Les engagements relatifs à la gestion (paiement des frais de gestion pour l'assuré et des coûts de structure pour l'assureur) sont par ailleurs négligés afin de simplifier les modèles.

Nous verrons dans le chapitre 9 que l'impact de la mortalité sur le prix des garanties GMWB est faible dans la mesure où la maturité des garanties vendues étant de l'ordre de 15 ans, pour des souscriptions autour de 50 ans, les taux de mortalité sont peu élevés. L'hypothèse de négliger les rachats, qui sont indépendants de l'âge et plus élevés, a un impact plus important sur le prix de la garantie.

Les différents articles existants concluent qu'il n'existe pas, même sous ces approximations, de formule fermée pour les garanties GMWB / GLWB (contrairement aux GMDB ou GMAB). Il est néanmoins possible de fournir des approximations numériques.

Milevsky et Salisbury (2006)¹, premier article qui traite de ce sujet, se concentre sur l'étude d'une garantie GMWB simple (absence de revalorisation de la benefit base, de garantie décès...) sous une dynamique de Black & Scholes. Les auteurs s'intéressent à l'ensemble « contrat + garantie » et fournissent l'intuition de deux résultats importants :

- D'une part, en supposant que l'assuré adopte un comportement statique (c'est à dire qu'il effectue des retraits constants conformes aux montants de revenus garantis définis contractuellement), la garantie GMWB peut s'écrire comme la somme d'une rente temporaire et d'une option asiatique ;
- D'autre part, en faisant l'hypothèse que l'assuré cherche à maximiser la valeur de son contrat au travers de sa stratégie de retrait, l'article propose une méthodologie pour déterminer le niveau de retrait optimal à chaque instant. Les auteurs raisonnent par analogie avec les options de vente américaines (problème de borne libre) et proposent un θ schéma de différences finies pour résoudre le problème.

Gupta (2007) propose un modèle très simplifié pour la garantie GMWB en considérant une somme de puts européens dont le strike est égal au montant de revenu garanti, en négligeant la mortalité, les rachats et en se plaçant sous une dynamique de Black & Scholes. Ce modèle ne prend pas en compte le fait que les retraits et les frais prélevés au titre de la garantie viennent en déduction de l'épargne, ce qui minimise la probabilité de déclenchement de la garantie et la portée du modèle. Les formules fermées présentées apportent peu par rapport à **Milevsky et Salisbury (2006)**. Cet article ne figure d'ailleurs pas dans la bibliographie de **Gupta (2007)**.

La modélisation d'engagements de long terme avec des taux continus étant peu réaliste, **Peng et al. (2009)** étend les résultats présentés par **Milevsky et Salisbury (2006)** à des taux stochastiques (modèle de Vasicek). Les auteurs supposent que l'assuré adopte un comportement statique et considèrent l'ensemble « contrat + garantie ». Les processus sont supposés continus et le problème peut se réécrire comme le pricing d'une option asiatique de maturité T . Le prix de cette option est approximé par une borne supérieure et une borne inférieure, en utilisant les méthodes de **Thompson (2002)** et **Rogers et Shi (1995)** :

- L'écart entre le prix trouvé par la méthode de la borne inférieure et l'application de la méthode de Monte Carlo reste inférieur à 1% lorsque les auteurs font varier les paramètres du modèle. Il est donc possible d'utiliser uniquement cette approximation pour déterminer le prix de la garantie. La qualité des approximations diminue lorsque la maturité de la garantie et la volatilité de l'épargne et des taux augmentent ;
- La borne supérieure est moins robuste (écart pouvant aller jusqu'à 4%) et plus difficile à implémenter informatiquement.

D'autres méthodes peuvent être mises en œuvre pour déterminer le prix de l'option asiatique (extension et amélioration² des bornes proposées par Roger et Shi et Thompson, inversion de la transformée de Laplace³, méthode de Vecer⁴...). Le lecteur pourra se référer à la revue de littérature de **Dai et al (2009)** qui recense les différentes méthodes développées pour résoudre ce genre de problème ou bien à **Boyle et Potapchik (2008)** qui compare l'efficacité d'une partie de ces méthodes.

Huang et al. (2009) définit l'option RCLA (Ruin Contingent Life Annuity) qui promet de verser 1 euro de revenu par an à l'assuré jusqu'à son décès dès lors qu'un indice de référence (revalorisé et net des retraits effectués par l'assuré) devient nul. Cette option constitue

¹ La version initiale de cet article date de 2004.

² Voir **Lord (2006)** et **Vanduffel et al. (2008)**

³ Voir **Geman et Yor (1993)**

⁴ Voir **Vecer (2001)**

l'engagement de l'assureur au titre de la garantie GLWB lorsque l'assuré est contraint d'adopter un comportement de retrait statique. Les auteurs s'intéressent à la date de déclenchement de cette option et estime le prix de celle-ci, sous la forme d'une prime unique payée par l'assuré à la souscription. La mortalité instantanée suit une loi de Gompertz (exponentielle) et l'index suit la même dynamique que celle de l'épargne proposée dans **Milevsky et Salisbury (2006)**. Les auteurs estiment le prix de cette option pour différentes formulations (GLWB simple, cliquet annuel...) en utilisant une approche de différences finies. Ils proposent par ailleurs une étude de sensibilité aux paramètres de marché (volatilité de l'indice et niveau du taux sans risque), au pourcentage de retrait garanti et à l'âge de souscription.

Tous ces articles concluent à une sous-tarification des offres commercialisées aux Etats-Unis.

5.3 Modélisation par Monte-Carlo des GMWB / GLWB

D'autres articles étudient la modélisation par Monte-Carlo des garanties GMWB / GLWB. Allant au-delà de l'étude financière des garanties GMWB / GLWB, ils intègrent les risques actuariels (décès et rachats) et cherchent à déterminer le niveau des frais de la garantie annulant la valeur de la garantie ou du contrat à la date de souscription. Tous font l'hypothèse de marché complet, d'absence d'opportunités d'arbitrage et de nullité des frais de transaction.

Bauer et al. (2006)¹ propose un modèle de valorisation d'un contrat à prime unique, investie sur un seul support et comportant des garanties GMDB, GMAB, GMIB, et GMWB. Les auteurs choisissent de modéliser les flux des prestations et des frais prélevés au titre de la garantie. L'actif obéit à un modèle de Black & Scholes. Les retraits², les rachats totaux et les décès sont comptabilisés à date anniversaire. Entre 2 dates anniversaires, l'épargne suit la trajectoire lognormale du sous-jacent, déduction faite des frais au titre de la gestion et de la garantie (prélevés de manière continue). Les applications numériques de cet article portent uniquement sur des engagements de courte durée.

Sun (2006) étudie l'impact du couplage de garanties dans les *variable annuities* sur le coût total de ces garanties. L'auteur démontre que le coût d'un produit comportant une GMDB ou une GMAB couplée à une garantie GMWB est inférieur à la somme des coûts individuels des garanties présentes sur le produit. Par ailleurs, ce couplage réduit le profil de risque du produit.

Holz et al. (2007) étend aux garanties GLWB le modèle développé par **Bauer et al. (2006)**. Le couplage de cette garantie avec une garantie plancher en cas de décès est abordé. Le contrat étudié est un contrat à prime unique³ investie sur une seule unité de compte obéissant à une dynamique de Black & Scholes. Les retraits sont annuels et effectués à chaque date anniversaire. Les frais de gestion et de la garantie sont prélevés de manière continue. La modélisation du contrat prévoit une garantie TMG ou cliquet si l'assuré est prêt à différer la

¹ Pour faciliter la présentation, on se réfère à la version initiale de l'article (2006), actualisé à plusieurs reprises. Par exemple : Astin Bulletin, 38 (2), pp. 621 – 651. La dernière version date de 2009 (Colloque AFIR).

² Les retraits peuvent être considérés comme des rachats partiels si le retrait réalisé à la date t est supérieur au montant de revenu garanti contractuellement.

³ Cela revient à considérer que les versements complémentaires sont effectués sur des sous-contrats dont le tarif et le niveau des garanties ne seront pas nécessairement identiques.

date de son premier retrait. Les auteurs considèrent les flux du contrat et utilisent une décomposition selon les probabilités de décès.

Les articles de **Bauer et al. (2006)** et de **Holz et al. (2007)** supposent que les taux d'intérêts sont constants. **Su (2007)** étend le modèle de **Bauer et al. (2006)** aux garanties GLWB en intégrant un modèle de taux stochastique (Hull & White à un facteur). Les actions suivent un modèle lognormal. L'auteur s'intéresse aux flux de la garantie seule et décompose les prestations et les frais prélevés en fonction des probabilités de vie. Cette approche permet de réduire à 4 variables d'état le vecteur utilisé pour décrire l'évolution de la garantie : valeur de l'épargne, benefit base de la garantie, frais prélevés au titre de la garantie et prestations payées.

Shah et Bertsimas (2008) propose des formules fermées pour la garantie GLWB sous une dynamique de Black and Scholes et effectuent des simulations de Monte-Carlo sous d'autres dynamiques d'actifs (taux intérêt suivant un modèle de Vasicek à 2 facteurs et volatilité des actions stochastique suivant un modèle d'Heston). Les auteurs utilisent une modélisation continue des événements (retraits, frais, cliquet) et font l'hypothèse que les frais prélevés au titre de la garantie ne viennent pas en déduction de l'épargne (déduits d'un compte séparé). Cette hypothèse est supposée avoir très peu d'impact sur les résultats proposés mais n'est pas testée dans l'article¹. Le comportement de l'assuré est supposé statique.

Deux enseignements de cet article sont à retenir :

- L'utilisation d'un modèle de taux stochastique augmente fortement le coût de la garantie (par rapport à un modèle de Black & Scholes à taux constant). En fonction de l'âge de l'assuré à la souscription et de la part d'actions dans l'allocation d'actifs choisie, l'augmentation de tarif de la garantie est comprise entre 8% et 63% (moyenne de 26%) ;
- L'introduction d'un modèle de volatilité stochastique / taux stochastique par rapport à un modèle lognormal à volatilité constante / taux stochastique a peu d'impact sur la valorisation de la garantie. En reprenant les mêmes contrats que pour le cas précédent, l'augmentation de la garantie est comprise entre 2% et 9% (moyenne de 5.5%).

S'agissant d'engagements de long terme, la prise en compte de taux stochastique s'avère fondamentale dans la valorisation. L'utilisation de modèle de volatilité stochastique augmente la complexité du modèle (modélisation, étalonnage...) sans modifier les ordres de grandeur du prix de la garantie. Le surcoût lié à la volatilité stochastique peut être absorbé par la marge contenue dans le tarif en prime commerciale (voir chapitre 7.4.4).

Kling et al. (2010) reprend le modèle de **Holz et al. (2007)** pour des garanties GLWB présentant différents mécanismes de revalorisation de la Benefit Base et sous différents modèles d'actifs (taux stochastique, actions suivant un modèle d'Heston ou de Black & Scholes). Le produit étudié impose des retraits annuels du montant garanti et ne prévoit pas de GMDB. L'assuré peut, à chaque date anniversaire, effectuer les retraits garantis ou racheter totalement son contrat, selon une règle déterminée à l'avance.

Avec un modèle différent de celui proposé par **Shah et Bertsimas (2008)**, les auteurs retrouvent les mêmes impacts du modèle sur le prix de la garantie. Quelle que soit la formulation retenue pour la garantie, le coût de la garantie diffère de quelques points de base entre l'utilisation d'un modèle d'Heston et d'un modèle de Black & Scholes.

¹ Cette hypothèse annule le côté circulaire du pricing qui joue pourtant un rôle important sur le résultat numérique (voir chapitres 9 et 10)

L'introduction d'un modèle de Heston pour modéliser le monde réel a cependant un impact important sur l'efficacité du programme de couverture (établi sous un modèle de Black & Scholes). Nous reviendrons sur ce point dans la partie 5.5.

5.4 Modélisation du comportement optimal de l'assuré

La liberté donnée à l'assuré de piloter ses rachats (partiels ou totaux) impacte fortement le coût du pricing et la gestion des risques des garanties. Deux approches sont proposées dans la littérature pour modéliser le comportement de l'assuré¹.

5.4.1 Modélisation dans le cadre de la méthode de Monte Carlo

La première approche consiste à intégrer dans la modélisation de Monte Carlo des règles déterministes ou stochastiques décrivant le comportement des assurés. Les articles de **Bauer et al. (2006)**, **Holz et al. (2007)**, **Su (2007)** et **Kling et al. (2009)** se limitent au cas où l'assuré restreint ses décisions au rachat total et au retrait du montant de revenus garantis définis contractuellement. Ils distinguent 3 types de stratégies que l'assuré peut choisir de mettre en œuvre :

- La stratégie déterministe : stratégie définie à la souscription du contrat (\mathcal{F}_0 mesurable) et inchangée quelle que soit l'évolution de l'épargne ;
- La stratégie probabiliste : combinaison linéaire de stratégies déterministes, pondérées par leur probabilité de mise en œuvre (\mathcal{F}_0 mesurable) ;
- La stratégie stochastique : l'assuré peut à chaque date anniversaire renoncer au revenu garanti, effectuer un rachat partiel qui dépasse le montant de retrait annuel garanti ou racheter totalement son contrat. Aucun des articles ne met en œuvre cette approche.

5.4.2 Modélisation dans le cadre de l'étude financière de la garantie

La seconde approche est analogue à la détermination de la frontière libre des options de vente américaines. Elle consiste à formuler le comportement de l'assuré comme un problème d'optimisation stochastique de la valeur du contrat en fonction du taux de retrait. Une équation différentielle d'Hamilton-Jacobi-Bellman est mise en évidence et résolue en utilisant une approche de différences finies.

Les outils mathématiques (programmation dynamique) utilisés dans le cadre des articles identifiés dans cette partie sont complexes à manipuler et nous ne justifierons pas l'intégralité des résultats théoriques mis en évidence dans les articles.

Ces résultats sont développés uniquement pour les garanties GMWB, sous des conditions restrictives, dans **Milevsky et Salisbury (2006)**, **Dai et al. (2008)**, **Chen et Forsyth (2008)**, **Chen et al. (2008)**, **Huang et Forsyth (2009)** et **Jimenez (2010)**. Ces modèles imposent généralement que les retraits soient continus, négligent la mortalité et les rachats et se limitent à des garanties simples (absence de mécanisme de revalorisation de la benefit base...). Ils prennent uniquement en compte le coût direct pour l'assuré, lié à la pénalité de rachat, d'un

¹ D'autres approches ont été proposées dans la littérature mais sans être développées. Par exemple, la modélisation du comportement de l'assuré en utilisant un modèle de probabilités de transition à 3 états (retrait non effectué, retrait effectué sur le contrat, rachat) dans lequel les probabilités de transition dépendraient de la valeur de la garantie. Ce genre d'approche ne semble pas constituer une piste intéressante en raison de la difficulté opérationnelle à effectuer l'étalonnage des modèles qui seraient obtenus.

retrait supérieur au montant garanti (non prise en compte des coûts indirects comme la fiscalité dégressive des rachats ou des décès...).

Ces articles fournissent des résultats utiles pour comprendre le risque des garanties GMWB mais restent insuffisants et peu exploitables dans un cadre opérationnel.

Nous avons vu dans la partie 5.2 que **Milevsky et Salisbury (2006)** avait montré que le pricing de la GMWB sous l'hypothèse d'un comportement optimal de l'assuré pouvait se formuler comme un problème d'optimisation stochastique. Les auteurs développent partiellement la manière de résoudre le problème. Deux méthodes d'approximation ont été proposées dans la littérature par la suite.

La première approche repose sur l'utilisation d'une méthode de pénalisation. Elle a été développée par **Dai et al. (2008)** et est mieux formalisée dans **Huang et Forsyth (2009)**. Cette approche consiste à imposer une contrainte sur le taux de retrait maximum de l'assuré afin de le rendre fini et ainsi simplifier la résolution du problème d'optimisation.

Dai et al. (2008) étudie l'impact des paramètres sur le comportement de l'assuré et propose un algorithme de résolution de l'équation dans le cas de retraits discrets ou continus. Les résultats ne sont quasiment pas sensibles à la valeur de la pénalité. Les auteurs ne fournissent pas de démonstration de la convergence de la formulation discrète vers la solution continue que les simulations numériques mettent en avant. **Huang et Forsyth (2010)** fournissent une preuve de la convergence des solutions trouvées vers la solution de viscosité de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman.

La méthode de pénalisation serait la plus simple à mettre en œuvre mais ne permet pas d'incorporer dans le cas continu des variantes de la garantie (possible dans le cas discret).

La seconde approche est développée dans **Chen et Forsyth (2008)** et **Chen et al. (2008)** qui reformulent le problème sous la forme d'un contrôle impulsionnel¹ en autorisant l'assuré à retirer un montant fini dans un temps infiniment petit (c'est à dire que le taux de retrait peut être infini).

Chen et Forsyth (2008) proposent une solution numérique ainsi qu'une étude de sensibilité du comportement de l'assuré aux paramètres du modèle. Les auteurs fournissent une preuve de la convergence des solutions trouvées vers la solution de viscosité de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman. **Chen et al. (2008)** distingue, par rapport aux articles précédents, les frais prélevés au titre des frais de gestion² et au titre de la garantie. Les auteurs étudient l'impact des caractéristiques du contrat (cliquet, pénalité de rachat...) sur le comportement optimal de l'assuré. Ils proposent par ailleurs une formulation discrète des retraits, plus proche de la réalité et leur permettant de mesurer l'impact de la durée de l'intervalle de temps entre deux retraits. Ils s'intéressent enfin à l'impact des sauts boursiers en utilisant un modèle de Merton pour les actions.

La formulation de contrôle impulsionnel serait plus générale et permettrait de prendre en compte les variantes de la garantie (cliquet...), que les retraits soient continus ou discrets.

Les conclusions de l'ensemble de ces articles sont semblables :

¹ Cette méthode est utilisée dans d'autres domaines ou d'autres problématiques financières (par exemple la détermination de l'allocation d'actifs sous contrainte). Elle est notamment mise en œuvre dans **Bélangier (2008)** et **Bélangier et Forsyth (2009)** pour étudier les stratégies optimales de retraits partiels d'un assuré ayant souscrit une garantie GMDB.

² Les auteurs ne prennent pas en compte les coûts de gestion des contrats en contrepartie des frais prélevés

- Les montants de frais trouvés dans le cadre des applications numériques sont supérieurs aux tarifs des garanties commercialisées, ce qui était déjà le cas dans les articles supposant un comportement statique de l'assuré ;
- Le comportement de l'assuré tend rapidement vers le comportement statique lorsque le niveau de pénalité augmente, ce qui a pour conséquence de diminuer le coût de la garantie ;
- L'assuré effectue un rachat supérieur au niveau de revenus garantis si $AV_t \gg G_t^W$. Dans ce cas de figure, la garantie a peu de chance de se déclencher et l'assuré cherche ainsi à revenir dans la zone où il est optimal de retirer le montant de revenus garantis par la suite. L'assureur optimise alors l'espérance du reliquat d'épargne à maturité du contrat en réduisant les frais prélevés par la suite¹ ;
- L'assuré effectue un rachat supérieur au niveau de revenus garantis lorsque $AV_t \ll G_t^W$ de manière à déclencher la garantie. Cette conclusion est étonnante dans la mesure où une telle opération se solderait par le rachat total du contrat. Un comportement statique visant à attendre le déclenchement proche de la garantie serait intuitivement plus approprié ;
- L'assuré retire le montant de revenus garantis dans les autres cas. Il existe par ailleurs une zone (AV_t, G_t^W) où la stratégie optimale n'est pas unique : il est alors équivalent pour l'assuré de retirer le montant de revenus garantis ou de renoncer à ce revenu.

5.5 Couverture des garanties GMWB / GLWB

La question de la couverture des garanties reste indissociable du pricing, même si elle n'est traitée que partiellement dans ce mémoire. En effet, la volatilité du résultat des garanties GMWB / GLWB incite les assureurs à mettre en place des mécanismes de transfert de risques (réassurance ou mécanisme de couverture financière).

La réassurance permet de connaître en amont le coût et l'efficacité du transfert de risques mais expose l'assureur au risque de contrepartie du réassureur et à une possible restriction des capacités d'acceptation. Les couvertures financières peuvent être statiques, semi-statiques ou dynamiques. Les assureurs ont tendance à privilégier les couvertures financières dynamiques construites à partir des grecques du passif (voir chapitre 11).

Nous effectuons dans cette partie une brève revue de littérature sur cette thématique.

5.5.1 Méthodes de construction d'une couverture

La littérature et les mémoires d'actuariat fournissent de nombreuses références pour la couverture des garanties GMDB et GMAB, principalement au travers de stratégies de couverture dynamiques utilisant les grecques. Le portefeuille de couverture est construit à partir de la sensibilité de 1^{er} et de 2nd ordre du passif aux paramètres financiers. Généralement, les études se limitent à des couvertures en delta en se plaçant dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes et d'un marché complet².

Dans le cadre des GMWB / GLWB, il semble insuffisant de se limiter à cette approche :

¹ Lorsque G_t^W est inférieure à un seuil et que $AV_t \gg G_t^W$, le comportement optimal consiste à retirer les revenus garantis jusqu'à la maturité du contrat.

² Sous ces hypothèses, il est possible de répliquer parfaitement un passif en constituant un portefeuille autofinancé que l'on rebalance continuellement. Le coût de mise en place du portefeuille définit le prix du produit.

- Le coût des garanties sont fortement dépendantes des autres paramètres financiers (rho et vega) comme nous le verrons dans les chapitres 9 et 10 ;
- Les couvertures dynamiques construites sur les grecques ne sont pas reconnues comme des méthodes de réduction des risques dans le cadre de Solvabilité 2, ce qui devrait inciter les assureurs à rechercher d'autres méthodes de couverture¹ ;
- La question de l'optimalité de la couverture (mise en œuvre dès la souscription, nécessité de se couvrir en permanence...) se pose pour des garanties qui s'étendent sur une ou plusieurs dizaines d'années.

Le cadre de modélisation pourrait aussi être remis en cause :

- Le marché n'est pas complet dans la mesure où il n'existe pas, par exemple, d'options de maturité suffisante pour répliquer l'ensemble des flux de la garantie². En se plaçant dans le cadre d'un marché incomplet, la problématique de couverture devient plus complexe puisque la probabilité risque neutre n'est alors plus unique ;
- Même si le marché était complet, la couverture ne pourrait être parfaite dans la mesure où le rebalancement des portefeuilles ne peut être effectué que de manière discrète pour des raisons opérationnelles et pour limiter les coûts de transaction ;

La recherche d'une solution de couverture optimale pour les garanties GMWB / GLWB dit donc aller au delà de la recherche d'un portefeuille autofinçant construit sur la base des grecques du passif. La littérature s'est depuis longtemps intéressée à la couverture des produits financiers dans un marché incomplet, notamment dans le cadre des modélisations des actions par des processus à sauts. Le coût d'une couverture suffisante en marché incomplet est égal au maximum du coût des couvertures calculées sous chacune des probabilités risque neutre. Cette méthode (appelée « super-réplication ») permet à l'assureur de disposer d'une richesse supérieure à son engagement à l'échéance de l'option. Le portefeuille de couverture obtenu est une sur-martingale³.

En contrepartie de cette efficacité, la méthode de « super-réplication » a un coût que l'assureur jugera généralement trop élevé. Celui-ci peut alors opter pour une couverture autofinancée et partielle, construite en minimisant le risque résiduel pour un capital initial donné. Ces méthodes de couvertures partielles reposent sur l'une des mesures de risque suivantes⁴ :

- La couverture par minimisation du risque (aussi dénommé « mean-variance hedging ») cherche à minimiser la distance quadratique entre le payoff et la valeur du portefeuille de couverture à la maturité du produit dérivé. Cette méthode revient à minimiser la distance \mathcal{L}^2 de projection du payoff de la garantie sur l'ensemble des combinaisons linéaires obtenus avec les actifs du marché⁵ : $Min \mathbb{E}[H_T - V_T]^2 = Min Variance[H_T - V_T]$
- La couverture par minimisation locale du risque repose sur deux conditions : 1/ Elle impose que la valeur du portefeuille soit égale au payoff à l'échéance ; 2/ Elle cherche à

¹ Les méthodes de couverture statiques ou semi-statiques (par exemple celles basées sur un portefeuille composé d'options détenues jusqu'à maturité et suivi d'un réinvestissement dans le même type d'actifs) peuvent être prises en compte dans Solvabilité 2 ;

² D'autres arguments poussent à supposer que le marché n'est pas complet. Si le sous-jacent est modélisé par des processus à sauts, le marché devient par exemple incomplet. Il n'existe enfin pas d'instruments permettant de prendre en compte les risques actuariels

³ Une sur-martingale est telle que $Y_t (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_t | \mathcal{F}_s] \geq Y_s)$

⁴ Ces critères fournissent des mesures pour classer les portefeuilles de couverture testés. Les stratégies obtenues sont optimales par rapport à la mesure de risque utilisée et au capital consacré à la couverture.

⁵ L'égalité suivante est satisfaite si $\mathbb{E}[H_T - V_T] = 0$

minimiser la fonction de coût de la stratégie testée, définie comme la valeur des coûts de transaction sur la période $[t, T]$. Le plus souvent, la mesure utilisée est l'écart quadratique entre le coût cumulé des frais depuis l'origine jusqu'au dénouement du produit dérivé (T) et le coût cumulé des frais de l'origine jusqu'à la date de mise en œuvre de la stratégie (t).

L'inconvénient des méthodes de minimisation du risque (locale ou globale) provient de l'utilisation de la distance quadratique. En effet, le calcul traite les pertes réalisées sur le programme de couverture de la même manière que les gains. Deux autres méthodes sont utilisées dans la littérature :

- La couverture par quantile est définie de manière à optimiser la probabilité que la valeur de la couverture soit suffisante pour payer le payoff à maturité en fonction d'un capital initial donné¹. Par symétrie, cette méthode revient à chercher le capital minimum nécessaire pour que l'assureur puisse honorer son engagement avec une probabilité donnée². Cette méthode a été proposée par **Föllmer et Leukert (1999)** pour une option d'achat européenne, dans le cadre d'un marché complet ou incomplet. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne prend pas en compte le niveau de perte mais seulement l'occurrence de perte³.
- La couverture du risque de déficit (« shortfall risk ») utilise une fonction de perte décrivant l'aversion de l'assuré vis-à-vis d'un portefeuille de couverture insuffisant pour payer le payoff de l'option. Une fois que cette fonction a été définie, l'assureur recherche le portefeuille de couverture qui minimise, pour un capital donné, l'espérance de la fonction de perte à maturité de l'option : $\text{Min } \mathbb{E}[l(H_T - V_T)^+]$. Cette méthode présente l'inconvénient de dépendre de la fonction d'utilité choisie au départ. **Föllmer et Leukert (2000)** utilise la fonction $l(x) = x^p$ et nous pouvons remarquer que la couverture par quantile est un cas particulier de cette méthode en posant $l(x) = x^+/x$.

Une fois la méthode choisie, l'assureur cherchera le portefeuille autofinancé⁴ maximisant l'efficacité de la couverture pour un capital initial donné. Ces méthodes nécessitent de définir les critères de rebalancement et de modéliser les frais de transaction. Par ailleurs, la construction des portefeuilles optimaux doit intégrer les anticipations des gestionnaires sur la liquidité des marchés, notamment la capacité à mener des opérations de vente à découvert. La mise en place de ces méthodes, en utilisant différents processus de diffusion des actifs, ont été proposés dans la littérature.

Par ailleurs, les articles que nous avons identifiés⁵ comparent généralement les couvertures dynamiques (grecques, minimisation du risque) à une stratégie de couverture semi-statique reposant sur la décomposition développée dans **Carr et Wu (2004)**. Ces auteurs montrent que la valeur d'une option de vente européenne peut s'écrire comme une intégrale d'options de vente européennes de maturités plus courtes⁶. Les pondérations de ces options ne sont théoriquement pas modifiées tant que celles-ci ne sont pas arrivées à maturité. A l'expiration du portefeuille, l'assureur construit un nouveau portefeuille d'options sur le même principe.

¹ Le résultat doit être inférieure à la VaR de la distribution dans la mesure où l'assureur gère son portefeuille de couverture dynamiquement (rebalancement en fonction du comportement du passif)

² Cette méthode est analogue à celle utilisée dans l'étude du problème de la probabilité de ruine de l'assureur

³ Similaire aux reproches faits sur la VaR en tant que critère de risque

⁴ Les auteurs cherchent systématiquement un portefeuille autofinancé et il serait possible d'étendre l'ensemble des portefeuilles testés en autorisant par exemple les portefeuilles autofinancés en moyenne.

⁵ Par exemple **Nteukam et al. (2009)** ou **Liu (2010)**

⁶ Ces maturités sont communes à l'ensemble des options entrant dans la décomposition

La constitution d'un portefeuille comportant un nombre infini d'options est aussi peu crédible que l'hypothèse de rebalancement continu. En supposant que le portefeuille ne comporte qu'un nombre fini d'options, cette stratégie semi-statique est jugée aussi efficace qu'une couverture en delta neutre et engendrent des coûts de transaction inférieurs. Dans la mesure où le portefeuille de couverture est constitué d'options, ces stratégies devraient être aussi comparées à des couvertures en gamma/delta, ce qui est très rarement fait (et biaise certainement la portée des conclusions). Par ailleurs, la couverture semi-statique serait moins sensible aux sauts des actifs et aux écarts entre les risques modélisés et les risques réalisés.

5.5.2 Application de ces méthodes aux garanties GMDB et GMAB

Les méthodes citées dans la partie 5.5.1 ont été développées pour la couverture d'options simples, écrites sur un seul sous-jacent, dans le cadre de marché incomplet. Elles ont été dans un second temps étendues aux garanties contenues dans les contrats d'assurance-vie, dont la couverture est plus complexe étant donné que :

- L'assureur doit couvrir, pour chaque contrat, un portefeuille d'options dont le nombre est aléatoire (fonction des lois de décès et de rachats de l'assuré) ;
- Certaines garanties sont équivalentes à des options dont le payoff dépend de la trajectoire empruntée¹ (par exemple les GMAB ou les GMWB / GLWB) ;
- L'assureur perçoit les frais au fur et à mesure, c'est-à-dire qu'il ne dispose pas d'un capital initial pour mettre en place la stratégie de couverture (contrairement à une option pour laquelle la prime est payée au moment de la vente de l'option).

Dans les articles traitant de la garantie GMDB et GMAB en marché incomplet, les méthodes de couverture par minimisation locale du risque et par les grecques sont principalement utilisées. **Moller (1998 et 2001)** semble être le premier à étendre ces méthodes aux garanties GMAB. Il utilise la méthode de minimisation quadratique locale du risque sur une garantie prévoyant un TMG, dans le cas d'une mortalité déterministe.

Les deux articles de **Coleman et al. (2006a et b)** étudient la couverture d'une garantie GMDB avec cliquet, d'une part en présence de taux stochastique, d'autre part dans le cadre d'un modèle de volatilité stochastique. L'épargne est investie sur un support action.

Le premier article intègre un modèle de Hull & White à 1 facteur pour les taux et un modèle de Black & Scholes pour les actions. Le second suppose que la volatilité est stochastique, que les actions suivent un processus à saut ou lognormal et que les taux restent constants. Les auteurs comparent la performance d'une stratégie de couverture en delta et d'une couverture par la méthode de minimisation locale du risque (basée sur l'écart quadratique entre la valeur de la garantie et la valeur du portefeuille de couverture sur la prochaine période de couverture). Les rebalancements sont effectués en temps discrets et ne donnent pas lieu à des coûts de transaction. Dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes, la couverture par minimisation locale est équivalente à celle en delta neutre lorsque le portefeuille de couverture est construit uniquement avec du cash et du sous-jacent. L'efficacité des couvertures augmente avec la fréquence des rebalancements.

En cas d'aléa sur la volatilité, ces couvertures ne suffisent pas et il est nécessaire d'intégrer des options dans les portefeuilles. En cas de sauts sur les actions, la couverture construite par minimisation du risque est plus efficace qu'une stratégie dynamique en delta.

¹ Et plus seulement de la valeur terminale comme pour la GMDB

Gabriel et Sourlas (2008) étudie l'efficacité des stratégies basées sur la minimisation de la variance des pertes résiduelles du portefeuille de couverture dans le cadre d'un modèle à sauts. Les auteurs s'intéressent à des couvertures dynamiques utilisant le sous-jacent et des options de vente ayant la même maturité que les options à couvrir ainsi qu'à une stratégie de couverture statique. Ils concluent que la couverture statique avec suffisamment d'options est la meilleure stratégie. Les auteurs indiquent par ailleurs qu'il serait nécessaire d'élargir le champ des stratégies de couverture à des portefeuilles autofinancés en moyenne ou à des stratégies semi-statiques permettant de rebalancer le portefeuille d'options. Ils soulignent enfin la difficulté existante lorsque les options à couvrir n'ont pas les mêmes maturités que les options disponibles sur le marché.

Nteukam et al. (2009) étudie les stratégies de couverture d'une GMDB sous les modèles de Black & Scholes et de Merton. Les auteurs supposent qu'il n'y a qu'un actif risqué et que les décès sont mutualisables. Ils prennent en compte les coûts générés par les rebalancements (coûts de transaction...) et mesurent l'efficacité de la couverture, estimée par différents indicateurs (VaR, CTE, perte moyenne...), en effectuant des stress tests sur la mortalité et les paramètres financiers.

Plusieurs stratégies de couverture sont testées dans l'article :

- Une couverture dynamique en delta neutre (rebalancement à intervalle de temps régulier ou en fonction de l'atteinte de seuils) ;
- La construction, en utilisant les mêmes actifs que ceux utilisés pour la couverture en delta neutre, d'un portefeuille statique minimisant l'erreur quadratique résiduelle à la date du décès. Ce portefeuille peut être éventuellement modifié ;
- Une couverture semi-statique utilisant des options de maturités inférieures à celles du passif. Les auteurs supposent cependant que le portefeuille est uniquement réinvesti dans le sous-jacent ou conservés en cash lorsque les options expirent. Les options étant de maturité 1 an, cette stratégie est analogue à la première stratégie testée à partir de la 2^{ème} année, ce qui conduit les auteurs à dire que son apport en terme d'efficacité est limité.

Les auteurs concluent que toutes les méthodes permettent de réduire la volatilité du P&L de la garantie et les pertes dans les cas les plus défavorables. Dans un modèle de Black & Scholes et en limitant le contenu du portefeuille de couverture au sous-jacent et à du cash, la couverture dynamique en delta neutre et celle basée sur la minimisation du risque donnent des résultats comparables. La couverture statique peut par ailleurs générer une perte maximale supérieure à celle obtenue en l'absence de couverture. Dans le cadre d'un modèle de Merton, les portefeuilles de couverture comportant uniquement du sous-jacent et du cash sont insuffisants.

Wang (2009) teste l'efficacité de la couverture par quantile pour les garanties décès en cas de non mutualisation de la mortalité. **Johannsen et Moller (2009)** étudie la couverture d'une garantie GMAB avec cliquet en présence de risques financiers (modèle d'arbre binomial) et de mortalité. Les auteurs recherchent le portefeuille autofinçant de couverture optimale (composé uniquement de sous-jacent et de cash) permettant de minimiser la probabilité¹ de ne pas honorer son engagement au terme du contrat. Ils s'intéressent à la couverture sur une période puis sur plusieurs périodes pour un portefeuille de contrats.

¹ Cela revient à chercher, pour un capital donné, les stratégies qui permettent d'atteindre le quantile le plus élevé (c'est à dire la probabilité la plus faible de perte)

5.5.3 Couverture des garanties GMWB et GLWB

Si nous négligeons l'incertitude sur le notionnel (ce qui revient à supposer que le comportement de l'assuré est parfaitement connu lors de la souscription), les garanties GMWB et GMAB sont assimilables à une seule option de vente. Dans le cas des GMWB / GLWB et sous les mêmes hypothèses, l'assureur doit couvrir un portefeuille d'options de vente de différentes maturité. Ces options sont par ailleurs conditionnelles puisque le payoff des options est connu pour $t > \tau_S$ ¹.

Nous avons identifiés deux articles traitant de ce sujet pour les garanties GMWB et GLWB.

Kling et al. (2009) s'intéresse à la couverture des garanties GLWB. Les auteurs montrent que la volatilité a un impact significatif sur l'efficacité des couvertures mesurée en définissant le portefeuille de couverture sous un modèle de Black & Scholes et en générant la trajectoire des actifs sous le modèle de Heston.

Les portefeuilles de couverture peuvent contenir les 3 types d'actifs suivants : du cash, le sous-jacent et des options². Trois stratégies (rebalancement mensuel) sont testées : absence de couverture, utilisation uniquement du sous-jacent comme actif de couverture (couverture en delta ou par minimisation locale du risque), utilisation de tous les actifs disponibles (couverture en vega).

Les questions de la couverture pendant la période de différé ou lorsque la garantie est activée (risque de taux et de longévité) ne sont pas traitées. Par ailleurs, la notion de maturité effective de la garantie n'est pas abordée alors qu'elle fournit des indications intéressantes pour construire un portefeuille de couverture (voir chapitre 9)

Liu (2010) applique la couverture semi-statique (voir partie 5.5.1) à la garantie GMWB. Les retraits sont supposés discrets et le modèle est analogue à celui développé en temps continu par **Dai et al. (2008)**³. L'auteur suppose que les taux sont constants et que l'assuré adopte un comportement statique. Le portefeuille de couverture optimale est construit en minimisant la somme des écarts quadratiques des erreurs de couverture.

La problématique de la couverture est étudiée dans le cadre de différents modèles de diffusion et pour différents passifs de couverture (prestations de la garantie ou valeur de la garantie) :

- L'auteur compare l'efficacité sur 1 an de stratégies dynamiques (rebalancement hebdomadaire) en delta et en gamma/delta (sous-jacent + options de vente 1 an) avec celle de la stratégie semi-statique construite à partir de puts de maturité 1 an⁴. Sous le modèle de Black & Scholes, l'efficacité de la couverture en delta et de la couverture semi-statique sont comparables ;
- L'auteur se place ensuite sous un modèle de Heston et compare l'efficacité de 4 méthodes de couverture (2 semi-statiques et 2 dynamiques) pour un passif correspondant à un put européen de maturité T . L'auteur construit les portefeuilles de couverture à la date $t=0$ dont la composition pourra être modifiée au moment du 1^{er} rebalancement (noté T_p dans la suite) :

¹ En notant τ_S la date de déclenchement de la garantie (c'est à dire le moment où l'épargne est insuffisante pour racheter partiellement le montant de revenus garantis sur l'épargne).

² Les auteurs supposent que le portefeuille de couverture contient alors un straddle à la monnaie portant sur le sous-jacent (de maturité 1 an). La position sur le straddle est supposée tenue jusqu'à la maturité et réinvesti ensuite dans un nouveau straddle à la monnaie de maturité 1 an

³ Les rachats et les décès sont négligés dans ce modèle

⁴ L'auteur prévoit d'éviter les discontinuités des grecques en vendant les actifs dont la maturité résiduelle est trop faible. Il suppose par exemple que les options dont la maturité résiduelle devient trop faible (inférieure à 2 mois) sont échangées contre des options de plus longues maturité (au moins 4 mois) puisque le gamma d'une option tend vers 0 lorsque la maturité résiduelle diminue (et que l'option n'est pas à la monnaie)

- La 1^{ère} stratégie de couverture consiste à répliquer le passif à la date t en construisant en $t = 0$ un portefeuille composé d'options de vente de même maturité T_p ($t < T_p < T$). Le poids des options dans le portefeuille est déterminé en minimisant l'écart quadratique entre la valeur du passif et la valeur du portefeuille anticipées à la date t ;
- La 2^{nde} stratégie est équivalente à la 1^{ère}, en imposant que la maturité des options du portefeuille de couverture soit égale à t ($T_p = t$) ;
- La 3^{ème} stratégie consiste à construire un portefeuille minimisant l'écart quadratique entre la valeur du passif et la valeur du portefeuille (constitué de cash et de sous-jacent) à la date t ;
- La 4^{ème} stratégie est une stratégie en delta neutre.

La conclusion coïncide avec les articles cités précédemment : les couvertures semi-statiques sont plus efficaces que les couvertures dynamiques en marché incomplet.

- L'auteur teste enfin les 2 premières stratégies identifiées ci-dessus dans le cadre d'une garantie GMWB simple. Ces stratégies permettent de réduire les pertes maximales mais l'auteur constate que la 1^{ère} stratégie donne de meilleurs résultats que la 2^{nde}. Aucune explication n'est donnée dans l'article et nous pensons que ce résultat pourrait être lié à la volatilité de la valeur des options lorsque la maturité résiduelle tend vers 0 (ce phénomène est moins marqué pour la 1^{ère} stratégie qui prévoit de rebalancer le portefeuille avant l'expiration des options).

Nous proposons dans le chapitre suivant un cadre unifié de modélisation regroupant l'ensemble des résultats analytiques pour les GMWB identifiés dans les articles des parties 5.2 et 5.4.

Chapitre 6 : Cadre unifié de modélisation

La méthode des puts s'applique pour les garanties GMWB / GLWB mais la valorisation des options de vente entrant dans la décomposition n'est pas aisée, contrairement à celles des garanties GMDB ou GMAB, même dans le cas particulier d'un modèle de Black & Scholes. Le développement d'un cadre de modélisation spécifique pour ces garanties s'impose donc.

Nous regroupons¹ dans ce chapitre l'ensemble des résultats proposées dans la littérature (articles identifiés dans le chapitre 5) pour les garanties GMWB afin de proposer un cadre théorique unifié de modélisation dans le cas continu. Nous ne développerons pas les solutions numériques correspondantes (principalement des méthodes de différences finies).

Nous nous intéressons à l'analyse du risque financier de la garantie pour un contrat restant actif jusqu'à la maturité T . D'après les applications numériques du chapitre 9, l'hypothèse d'absence de décès a peu d'impact sur le prix de la garantie GMWB. L'impact de l'hypothèse sur les rachats est plus important, ce qui limitera la portée des modèles proposés dans ce chapitre. Nous étudions dans tout le chapitre une formulation simple de la garantie :

- Prime unique investie sur un seul support en actions S_t , modélisé par un processus de Black & Scholes² ($dS_t = rS_t dt + \sigma_S S_t dZ_t$) ;
- Absence de revalorisation du montant de revenus garantis ;
- Retraits continus³ des revenus garantis par l'assuré.

Nous nous plaçons dans le cadre simplifié de fonctionnement des marchés financiers :

- Le marché est complet et l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage validée ;
- Il n'y a pas de coût de transaction, pas de restriction sur les ventes à découvert et tous les actifs sont disponibles dans les quantités souhaitées.

Dans ce cadre, la probabilité risque neutre est unique et le prix des actifs actualisés au taux sans risque sont des martingales sous cette probabilité. Les espérances sont évaluées conditionnellement à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s, 0 \leq s \leq t)$ construite sur le brownien $(Z_s)_{0 \leq s \leq t}$ intervenant dans la définition de S_t .

6.1 Modélisation de l'épargne

Nous considérons le cas particulier d'un contrat en cours à la date d'échéance T pour étudier le risque financier. Par définition, la valeur des revenus garantis contractuellement est fixée de manière à redistribuer le montant de la prime investie sous forme de coupons (sans actualisation) pendant la vie du contrat :

$$G \times T = AV_0 \quad [6-1]$$

Nous commençons par construire la dynamique de l'épargne du contrat à partir de celle de S_t .

¹ Nous compléterons et justifierons certains des résultats présentés par rapport aux articles originaux

² Certains résultats obtenus dans ce chapitre peuvent se généraliser à des taux et des volatilités non constantes.

³ Il s'agit de l'approximation du modèle discret lorsque l'intervalle entre les retraits tend vers 0

6.1.1 Dynamique de l'épargne

La trajectoire de l'épargne sur $[t, t + dt[$ doit intégrer les éléments suivants :

- La revalorisation au taux sans risque, en lien avec celle du sous-jacent S_t ;
- Le prélèvement des frais, supposés proportionnels à la valeur de l'épargne, au titre de la gestion et de la garantie ;
- Le retrait G_t effectué par l'assuré sur la période $[t, t + dt[$ qui peut être différent du revenu garanti contractuellement (par exemple en cas de rachat partiel)¹ :
 - Le traitement des revenus garantis se fait par analogie avec les taux de dividendes instantanés ;
 - L'assuré récupère le montant de la prime investie sous la forme des retraits effectués, c'est à dire que $\int_0^T G_u du = AV_0$. Si l'assuré a un comportement statique, c'est à dire qu'il retire le montant prévu contractuellement ($G_t = G$), nous retrouvons la relation [6-1].

A partir de ces éléments, nous pouvons écrire la dynamique de la valeur du compte d'épargne, en notant $\alpha = \alpha_m + \alpha_g$ l'ensemble des frais prélevés sur l'épargne :

$$\left| \begin{array}{ll} dAV_t = (r - \alpha)AV_t dt - G_t dt + \sigma_S AV_t dZ_t & \text{si } AV_t > 0 \\ AV_t = 0 & \text{si } AV_t = 0 \end{array} \right. \quad [6-2]$$

En l'absence de garantie ($G_t = 0$) et de frais ($\alpha = 0$), la dynamique de l'épargne se confond avec celle du sous-jacent action. Nous notons τ_S la date à laquelle la valeur de l'épargne devient nulle. La condition $AV_t > 0$ étant équivalente à la condition $t < \tau_S$, l'équation [6-2] peut se réécrire :

$$\left| \begin{array}{ll} dAV_t = (r - \alpha)AV_t dt - G_t dt + \sigma_S AV_t dZ_t & \text{si } t < \tau_S \\ AV_t = 0 & \text{si } t \geq \tau_S \end{array} \right. \quad [6-3]$$

6.1.2 Expression de l'épargne dans ce modèle

Nous définissons le processus \widetilde{AV}_t qui décrit pour tout $t \in [0, T]$ l'évolution de l'épargne en l'absence de la barrière absorbante en 0 :

$$d\widetilde{AV}_t = (r - \alpha)\widetilde{AV}_t dt - G_t dt + \sigma_S \widetilde{AV}_t dZ_t$$

L'expression de l'épargne \widetilde{AV}_t pour $t \geq 0$ s'écrit alors² :

$$\widetilde{AV}_t = e^{(r - \alpha - \frac{\sigma_S^2}{2})t + \sigma_S Z_t} \cdot \left(AV_0 - \int_0^t G_u \cdot e^{-(r - \alpha - \frac{\sigma_S^2}{2})u - \sigma_S Z_u} du \right) \quad [6-4]$$

Dans la mesure où $G_u > 0$, \widetilde{AV}_t peut atteindre 0 et devenir négatif. Nous déduisons l'expression de AV_t en écrivant que $AV_t = \max(\widetilde{AV}_t, 0)$:

$$\begin{aligned} AV_t &= e^{(r - \alpha - \frac{\sigma_S^2}{2})t + \sigma_S Z_t} \left(AV_0 - \int_0^t G_u \cdot e^{-(r - \alpha - \frac{\sigma_S^2}{2})u - \sigma_S Z_u} du \right)^+ \\ &= AV_0 \cdot e^{(r - \alpha - \frac{\sigma_S^2}{2})t + \sigma_S Z_t} \left(1 - \int_0^t \frac{G_u}{AV_0} \cdot e^{-(r - \alpha - \frac{\sigma_S^2}{2})u - \sigma_S Z_u} du \right)^+ \end{aligned} \quad [6-5]$$

¹ Par définition, nous savons que $0 \leq G_t \leq AV_t$

² Ce résultat se trouve dans Karatzas et Shreve (1998), page. 361. Il est aussi possible de partir du résultat et de calculer $d\widetilde{AV}_t$ en appliquant le lemme d'Ito à la fonction $f(t, Z_t)$ définie par [6-4]

Nous pouvons exprimer l'expression dans l'intégrale en fonction de S_t (en posant $S_0 = AV_0$) :

$$\frac{G_u}{AV_0} \cdot e^{-\left(r-\alpha-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)u-\sigma_S Z_u} = \frac{G_u}{AV_0} \cdot \frac{S_0}{S_u} e^{au} = \frac{G_u}{S_u} \cdot e^{au}$$

L'expression [6-5] se réécrit alors, puisque $S_t e^{-\alpha t} > 0$:

$$\begin{aligned} AV_t &= AV_0 \cdot e^{\left(r-\alpha-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)t+\sigma_S Z_t} \cdot \left(1 - \int_0^t \frac{G_u}{S_u} \cdot e^{au} du\right)^+ \\ &= S_t e^{-\alpha t} \cdot \left(1 - \int_0^t \frac{G_u}{S_u} \cdot e^{au} du\right)^+ \\ &= \left(S_t e^{-\alpha t} - \int_0^t G_u \cdot \frac{S_t}{S_u} e^{-\alpha(t-u)} du\right)^+ \end{aligned} \quad [6-6]$$

Par ailleurs, en utilisant l'expression développée de S_t , nous savons que :

$$\frac{S_t}{S_u} = e^{\left(r-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)(t-u)+\sigma_S \sqrt{t-u} \cdot \epsilon}$$

avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ une loi normale centrée réduite. En faisant un changement de variable $s = t - u$ dans l'intégrale, nous pouvons alors simplifier l'équation [6-6] :

$$\begin{aligned} AV_t &= \left(S_t e^{-\alpha t} - \int_0^t G_u \cdot e^{\left(r-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)(t-u)-\alpha(t-u)+\sigma_S \sqrt{t-u} \cdot \epsilon} du\right)^+ \\ &= \left(S_t e^{-\alpha t} - \int_0^t G_{t-s} \cdot e^{\left(r-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)s-\alpha s+\sigma_S \sqrt{s} \cdot \epsilon} ds\right)^+ \\ &= \left(S_t e^{-\alpha t} - \int_0^t \frac{G_{t-s}}{AV_0} \cdot S_s e^{-\alpha s} ds\right)^+ \\ &= \left(S_t e^{-\alpha t} - \frac{1}{T} \int_0^t \frac{G_{t-s}}{G} \cdot S_s e^{-\alpha s} ds\right)^+ \end{aligned} \quad [6-7]$$

Lorsque $AV_t > 0$, l'expression de l'épargne est composée de 2 termes :

$$AV_t = S_t e^{-\alpha t} - \frac{1}{T} \int_0^t \frac{G_{t-s}}{G} \cdot S_s e^{-\alpha s} ds$$

Le premier terme¹ est une martingale représentant la valeur de l'épargne à la date t après paiement des frais au titre de la garantie si aucun retrait n'a été effectué sur la période $[0, t]$. Le second terme correspond à l'impact des retraits effectués.

Nous retrouvons, dans le cas continu, la formule [4-1] mise en évidence dans le chapitre 3 en supposant que $G_t = G$ et que l'intégralité des frais est prélevé à la souscription ($\alpha = 0$) :

$$AV_t = \left(S_t - \frac{1}{T} \int_0^t S_s ds\right)^+$$

Dans le cas particulier où l'assuré adopte un comportement de retrait statique ($G_u = G$), il est possible de calculer la probabilité, notée $\mathbb{Q}(AV_T = 0)$, de déclenchement de la garantie avant la maturité T du contrat en utilisant l'expression [6-6] et les propriétés (symétrie,

¹ Ce terme peut aussi être vu comme la valeur en t de l'épargne d'un contrat d'assurance-vie en unités de compte, sans garantie GMWB et prévoyant des frais de gestion sur encours $\alpha = \alpha_m + \alpha_g$ prélevés de manière continue.

homothétie)¹ du brownien géométrique. Par définition, la garantie ne s'est pas déclenchée si la valeur terminale de l'épargne est strictement positive :

$$\mathbb{Q}(\tau_S \leq T) = 1 - \mathbb{Q}(\tau_S > T) = 1 - \mathbb{Q}(AV_T > 0)$$

En remplaçant AV_T par l'expression [6-6], nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(AV_T > 0) &= \mathbb{Q}\left(S_T e^{-\alpha T} \cdot \left(1 - \int_0^T \frac{G}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du\right) > 0\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(\int_0^T \frac{G}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du < 1\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(\int_0^T e^{-(r-\alpha-\frac{\sigma^2}{2})u + \sigma_S Z_u} du < T\right) \end{aligned} \quad [6-8]$$

Huang et al. (2004) et **Dufresne (2007)**² proposent des méthodes analytiques pour déterminer la distribution de cette probabilité lorsque $T \rightarrow +\infty$ ainsi que le calcul des deux premiers moments de l'expression :

$$\int_0^t e^{-\left(\mu - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)u - \sigma_S Z_u} du$$

En posant $\mu = r - \alpha$, nous retrouvons l'équation [6-8] et pouvons appliquer ces résultats.

6.2 Etude financière de la garantie GMWB

Nous notons dans les parties suivantes $V^G(t, AV_t, G_t^W)$ la valeur de la garantie seule à la date t , lorsque la valeur de l'épargne est égale à AV_t et le montant des revenus garantis restant à retirer est égal à G_t^W . De la même manière, nous définissons $V^C(t, AV_t, G_t^W)$ la valeur de l'ensemble « contrat + garantie ». Dans la suite, nous notons $\min(t, \tau_S) = t \wedge \tau_S$

6.2.1 Modélisation de la garantie seule

La valeur de la garantie est égale à la différence à la date $t = 0$ entre la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et ceux de l'assuré :

- L'assureur s'engage à payer les montants de revenus garantis définis contractuellement dès lors que la valeur de l'épargne devient nulle ;
- L'assuré s'engage à payer les frais au titre de la garantie tant que la valeur de l'épargne reste positive. Les frais sont supposés proportionnels à l'épargne.

$$\begin{aligned} V^G(0, AV_0, G_0^W) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T (G_u - AV_u)^+ e^{-ru} du - \int_0^{\tau_S \wedge T} \alpha_g AV_u e^{-ru} du \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_S \wedge T}^T G_u e^{-ru} du - \int_0^{\tau_S \wedge T} \alpha_g AV_u e^{-ru} du \middle| \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned} \quad [6-9]$$

Le tarif en prime pure de la garantie α_g^{PP} est tel que $V^G(0, AV_0, G_0^W) = 0$.

¹ $Z_t \sim -Z_t$ et $\sigma_S Z_t \sim 2Z_{\frac{\sigma_S^2 t}{4}}$

² Page 138 de **Dufresne (2007)** par exemple

Remarque : l'engagement de payer les retraits démarre en réalité lorsque $AV_u < G_u$. La formulation [6-9] fait démarrer l'engagement en $u + du$, au moment où l'épargne devient nulle : $(G_u - AV_u)^+ \approx (G_{u+du} - AV_{u+du})^+ = G_{u+du}$. Cette approximation ne devrait pas modifier l'ordre de grandeur du coût estimé de la garantie.

6.2.2 Modélisation de l'ensemble « contrat + garantie »

Nous faisons dans cette partie deux hypothèses :

- Les frais d'entrée compensent exactement les coûts de structure et de commissions versées aux distributeurs (Hypothèse H1) ;
- Les frais de gestion prélevés par l'assureur compensent totalement les coûts d'administration du contrat ainsi que les commissions versées aux distributeurs¹ (Hypothèse H2).

De la même manière que pour la valeur de la garantie, nous écrivons la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et de l'assuré à la date $t = 0$:

- L'assureur s'engage à payer les revenus garantis jusqu'à l'échéance du contrat² ainsi que le montant de l'épargne à l'échéance si celle-ci est positive. Il doit par ailleurs faire face aux frais de gestion du contrat ;
- L'assuré investit une prime égale à AV_0 (la partie de la prime dédiée au paiement des frais d'acquisition est traitée à part conformément à l'hypothèse H1).

En utilisant l'hypothèse H2, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} V^C(0, AV_0, G_0^W) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[AV_T \cdot e^{-rT} + \int_0^T G_u e^{-ru} du \mid \mathcal{F}_0 \right] + \text{vap}(F_{\text{gestion}}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[AV_T e^{-rT} + \int_0^T G_u e^{-ru} du + \int_0^{\tau_s \wedge T} \alpha_m AV_u e^{-ru} du \mid \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned} \quad [6-10]$$

Le tarif en prime pure de la garantie α_g^{PP} est tel que $V^C(0, AV_0, G_0^W) = AV_0$.

6.2.3 Equivalence des deux modélisations

Pour tout $t \in [0, T]$, nous pouvons montrer l'égalité suivante³ :

$$V^C(t, AV_t, G_t^W) = V^G(t, AV_t, G_t^W) + AV_t \quad [6-11]$$

En appliquant l'équation [6-11] en $t = 0$, nous obtenons une relation entre les expressions [6-9] et [6-10]:

$$V^C(0, AV_0, G_0^W) = V^G(0, AV_0, G_0^W) + AV_0$$

Nous vérifions ainsi que la détermination du tarif en prime pure α_g^{PP} annulant la valeur de la garantie revient à chercher le taux de frais tel que la valeur du contrat soit égale à l'épargne investie. Les deux approches sont donc équivalentes et nous pourrions les substituer dans la suite du mémoire.

¹ Il s'agit d'une hypothèse forte mais communément appliquée qui permet de simplifier les calculs

² Dans la mesure où nous supposons que l'assuré est en vie en T , ce qui revient à ignorer les rachats et les décès

³ Blamont et Sagoo (2009) ont donné l'intuition de cette relation, sans la démontrer, en se basant sur la relation de parité entre les options de vente et d'achats européennes : $Call_t(T, K) - Put_t(T, K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

Nous démontrons l'égalité [6-11] ci-dessous :

Soit $t < \tau_S \wedge T$. L'équation [6-3] permet d'écrire pour $u \in [t, \tau_S \wedge T[$:

$$\begin{aligned} d[AV_u e^{-r(u-t)}] &= dAV_u e^{-r(u-t)} - rAV_u e^{-r(u-t)} du \\ &= -(\alpha_m + \alpha_g)AV_u e^{-r(u-t)} du - G_u e^{-r(u-t)} du + \sigma_S AV_u e^{-r(u-t)} dZ_u \end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale stochastique nous pouvons écrire que :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\tau_S \wedge T} \sigma_S AV_u e^{-r(u-t)} dZ_u | \mathcal{F}_t \right] = 0$$

Nous pouvons alors simplifier l'équation obtenue en intégrant $d[AV_u e^{-r(u-t)}]$ sur $[t, \tau_S \wedge T[$ et en passant à l'espérance sous \mathbb{Q} conditionnellement à \mathcal{F}_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\tau_S \wedge T} d(AV_u e^{-r(u-t)}) | \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [AV_{\tau_S \wedge T} e^{-r(\tau_S \wedge T - t)} | \mathcal{F}_t] - AV_t \\ &= -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\tau_S \wedge T} [(\alpha_m + \alpha_g)AV_u + G_u] e^{-r(u-t)} du | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad [6-12]$$

Par ailleurs, par définition de τ_S , nous avons l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [AV_{\tau_S \wedge T} e^{-r(\tau_S \wedge T - t)} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\max(AV_T, 0) \cdot e^{-r(T-t)} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [AV_T \cdot e^{-r(T-t)} | \mathcal{F}_t]$$

Ce qui permet de réécrire les deux membres de l'équation [6-12] :

$$-\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [AV_T \cdot e^{-r(T-t)} | \mathcal{F}_t] + AV_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\tau_S \wedge T} [(\alpha_m + \alpha_g)AV_u + G_u] e^{-r(u-t)} du | \mathcal{F}_t \right] \quad [6-13]$$

En utilisant l'égalité [6-13], nous calculons la valeur du contrat à la date t et en déduisons le résultat :

$$\begin{aligned} V^C(t, AV_t, G_t^W) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T G_u e^{-r(u-t)} du + AV_T e^{-r(T-t)} + \int_0^{\tau_S \wedge T} \alpha_m AV_u e^{-r(u-t)} du | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_S \wedge T}^T G_u e^{-r(u-t)} du - \int_t^{\tau_S \wedge T} \alpha_g AV_u e^{-r(u-t)} du | \mathcal{F}_t \right] + AV_t \\ &= V^G(t, AV_t, G_t^W) + AV_t \end{aligned}$$

6.2.4 Réécriture du problème dans le cas de frais de gestion nul

Tous les articles traitant de la décomposition des garanties GMWB¹ négligent les frais de gestion et considèrent dans la modélisation que $\alpha = \alpha_g$. Ils ne mesurent jamais l'effet de cette approximation sur les résultats numériques obtenus.

Cette hypothèse permet certes de simplifier l'écriture de la valeur du contrat mais les applications numériques du chapitre 9 montrent que cette hypothèse est forte en raison de la circularité du problème. En l'absence de frais de gestion, l'épargne est mieux revalorisée et l'impact des retraits des revenus garantis sur l'épargne est plus faible, ce qui minimise la date d'activation et donc le coût de la garantie.

¹ Voir les paragraphes 5.2 et 5.4.2 de la revue de littérature.

Sous cette hypothèse, l'équation [6-7] décrivant l'évolution de l'épargne et l'équation [6-9] donnant la valeur de la garantie seule ne sont pas modifiées¹. La relation [6-11] entre la valeur du contrat et la valeur de l'ensemble « contrat + garantie » n'est pas modifiée.

Seule l'équation [6-10] est modifiée. L'hypothèse de frais de gestion nuls permet d'isoler la dépendance à l'épargne dans le terme $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[AV_T e^{-rT}]$. La valeur de l'ensemble « contrat + garantie » s'écrit alors :

$$V^C(0, AV_0, G_0^W) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[AV_T \cdot e^{-rT} + \int_0^T G_u e^{-ru} du \mid \mathcal{F}_0 \right] \quad [6-14]$$

Nous étudions dans la partie 6.3 le cas où l'assuré adopte un comportement statique ($G_u = G$) et dans la partie 6.4 le cas où l'assuré cherche à optimiser la valeur de son contrat en pilotant le montant de retraits des revenus garantis.

6.3 Pricing sous comportement statique de l'assuré

Nous supposons dans cette partie que l'assuré retire à chaque date t le montant de revenus garantis, c'est à dire que $G_u = G = g \times AV_0$ pour tout $u \in [0; T]$.

6.3.1 Transformation en option asiatique

L'équation [6-14] se réécrit sous l'hypothèse de retraits statiques, en utilisant [6-6] et [6-7] :

$$\begin{aligned} V^C(0, AV_0, G_0^W) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[AV_T \cdot e^{-rT} + G \int_0^T e^{-ru} du \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(S_T e^{-\alpha T} - \frac{1}{T} \int_0^T S_s e^{-\alpha s} ds \right)^+ e^{-rT} \mid \mathcal{F}_0 \right] + G \frac{1 - e^{-rT}}{r} \\ &= e^{-\alpha T} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_T \left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du \right)^+ e^{-rT} \mid \mathcal{F}_0 \right] + G \frac{1 - e^{-rT}}{r} \end{aligned}$$

L'espérance sous \mathbb{Q} sous-entend que le numéraire est le compte courant $R(t) = e^{rt}$. En choisissant pour nouveau numéraire² le sous-jacent S_t , nous pouvons écrire la formule de changement de probabilité suivante :

$$\frac{d\mathbb{Q}_S}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_t}{S_0} \times \frac{R_0}{R_t} = \frac{S_t}{AV_0} e^{-rt} \quad [6-15]$$

En utilisant [6-15], nous pouvons alors simplifier l'écriture de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_T e^{-rT} \left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du \right)^+ \right] &= AV_0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{d\mathbb{Q}_S}{d\mathbb{Q}} \left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du \right)^+ \right] \\ &= AV_0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[\left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du \right)^+ \right] \end{aligned}$$

¹ Les frais de gestion n'interviennent en effet que de manière implicite au travers de la valeur de l'épargne AV_t et de la date d'activation de la garantie τ_S .

² Le processus S_t est positif et $S_t/R_t = S_t \cdot e^{-rt}$ est une \mathbb{Q} martingale

En remplaçant ce résultat dans l'expression donnant la valeur du contrat, nous obtenons la relation suivante :

$$V^C(0, AV_0, G_0^W) = AV_0 \cdot e^{-\alpha T} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[\left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha u} du \right)^+ | \mathcal{F}_0 \right] + G \frac{1 - e^{-rT}}{r}$$

La valeur du contrat peut donc se lire comme la somme d'une rente certaine et d'une option asiatique arithmétique de maturité T écrite sur l'inverse du sous-jacent S_t .

La prime pure α_g^{PP} étant telle que $V^C(0, AV_0, G_0^W) = AV_0$, nous en déduisons la relation suivante :

$$e^{-\alpha_g^{PP} \cdot T} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[\left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha_g^{PP} \cdot u} du \right)^+ | \mathcal{F}_0 \right] + \frac{1 - e^{-rT}}{rT} = 1 \quad [6-16]$$

Le problème de tarification de la garantie GMWB revient donc à calculer la valeur d'une option asiatique. Il n'existe pas de formule fermée pour résoudre ce problème mais des méthodes d'approximations ou des approches numériques ont été développées pour résoudre l'équation (voir partie 5.2). **Peng et al (2009)** propose notamment des bornes dans le cas de taux stochastiques suivant un modèle de Vasicek¹.

En fixant les paramètres financiers, nous pouvons calculer la valeur de la rente et en déduire le coût de l'option. Par exemple, si $r = 3\%$ et $G = 5\%$, nous cherchons α_g^{PP} tel que :

$$e^{-\alpha_g^{PP} \cdot T} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_S} \left[\left(1 - \frac{AV_0}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} \cdot e^{\alpha_g^{PP} \cdot u} du \right)^+ | \mathcal{F}_0 \right] = 0.248$$

6.4 Pricing sous comportement dynamique de l'assuré

Les outils mathématiques (programmation dynamique) utilisés dans cette partie sont complexes à manipuler et nous ne justifierons pas l'intégralité des résultats.

Le *pricing* sous comportement rationnel donne un majorant du coût de la garantie dans la mesure où l'assuré cherche à optimiser la valeur de son contrat au travers de sa stratégie de retrait. Cela revient à résoudre un problème de borne libre sur le taux de retrait (analogie avec les options américaines²).

Nous avons vu dans la revue de littérature du chapitre 5 que deux méthodes avaient été proposées pour résoudre ce problème. Nous les explicitons dans les parties 6.4.1 et 6.4.2.

¹ L'équation [6-16] est alors trop restrictive car elle suppose que r soit constant

² Une borne libre est une borne dont on ne connaît pas l'emplacement mais dont on connaît la caractérisation. Dans le cas d'une option américaine, la borne libre délimite 2 zones :

- Une région dans laquelle l'exercice prématuré de l'option est optimal : équation de Black & Scholes négative strictement ;
- Une région dans laquelle il est préférable de ne pas exercer l'option prématurément : équation de Black & Scholes nulle, de la même manière que pour les options de vente européennes.

6.4.1 Approximation de pénalité

Nous supposons que l'assuré cherche à optimiser la valeur de son contrat en jouant sur le taux de retrait G_t ($0 \leq G_t \leq \lambda$).

Le montant maximum pouvant être retiré suit l'équation suivante :

$$G_t^W = G_0^W - \int_0^t G_u du = AV_0 - \int_0^t G_u du \quad [6-17]$$

Sous l'approximation de pénalité proposée par **Dai et al. (2008)**, nous imposons $\lambda < +\infty$. La variable G_t^W est alors continue et ses dérivées sont bornées. En cas de rachat partiel, l'équation [6-17] n'intègre pas d'abattement du montant garanti, contrairement aux produits actuellement commercialisés.

Les auteurs supposent que le produit prévoit une pénalité de rachat qui s'applique sur le montant de retrait supérieur au revenu garanti. Cette pénalité de rachat a pour but de réduire l'aléa moral de l'assuré. La somme effectivement perçus par l'assuré en cas de retrait à la date u s'écrit alors :

$$f(G_u) = \begin{cases} G_u & \text{si } 0 \leq G_u \leq G \\ G + (1 - k)(G_u - G), & \text{si } G_u > G \end{cases} \quad [6-18]$$

L'assuré choisit sa stratégie de retrait $(G_u)_u$, avec $u \in [t, T]$ de manière à optimiser¹ la valeur de son contrat à la date t :

$$V^C(t, AV_t, G_t^W) = \max_{(G_u)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} \max(AV_T, 0) + \int_t^T e^{-r(u-t)} f(G_u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad [6-19]$$

Remarque : dans **Huang et Forsyth (2010)**, le terme $\max(AV_T, 0)$ est remplacé par l'expression $\max[(1 - k) \cdot G_T^W, AV_T]$ pour traduire le fait que l'assuré effectue un rachat partiel au delà du montant de revenus garantis si l'épargne est positive (puisque'il a effectué le dernier retrait de revenus garantis à la date T). Nous pensons que la formulation proposée par **Dai et al. (2008)** correspond mieux à la modélisation de la garantie.

Les auteurs déduisent de l'équation [6-19] une équation d'Hamilton Jacobi Bellman :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 AV_t^2 \frac{\partial^2 V^C}{\partial AV_t^2} + (r - \alpha_g) AV_t \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - rV^C + \sup_{G_t} h(G_t) = 0 \quad [6-20]$$

En définissant la fonction $h(G_t)$ suivante :

$$h(G_t) = f(G_t) - G_t \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - G_t \frac{\partial V^C}{\partial G_t^W} = \begin{cases} \left[1 - \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - \frac{\partial V^C}{\partial G_t^W} \right] G_t & \text{si } 0 \leq G_t < G \\ kG + \left[1 - k - \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - \frac{\partial V^C}{\partial G_t^W} \right] G_t & \text{si } G_t \geq G \end{cases} \quad [6-21]$$

¹ En suivant cette stratégie, les choix de l'assuré resteront optimaux pour $u > t$ (principe de programmation dynamique)

En introduisant les notations $\mathcal{L}V_t^C$ et $\mathcal{F}V^C$, nous pouvons simplifier l'écriture des équations [6-20] et [6-21] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V^C &= \frac{1}{2}\sigma_S^2 AV_t^2 \frac{\partial^2 V^C}{\partial AV_t^2} + (r - \alpha_g)AV_t \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - rV^C \\ \mathcal{F}V^C &= 1 - \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - \frac{\partial V^C}{\partial G_t^W}\end{aligned}$$

Nous obtenons alors les équations équivalentes [6-22] et [6-24]

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \sup_{G_t} h(G_t) = 0 \quad [6-22]$$

$$h(G_t) = \begin{cases} [\mathcal{F}V^C]G_t & \text{si } 0 \leq G_t < G \\ kG + [\mathcal{F}V^C - k]G_t & \text{si } G_t \geq G \end{cases} \quad [6-23]$$

Remarque : en l'absence de garantie ($G_u = 0$ et $\alpha_g = 0$), l'équation [6-22] correspond à l'équation différentielle de Black & Scholes, ce qui est cohérent avec la dynamique de l'épargne :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 AV_t^2 \frac{\partial^2 V^C}{\partial AV_t^2} + rAV_t \frac{\partial V^C}{\partial AV_t} - rV^C = 0$$

La fonction $h(G_t)$ étant linéaire par morceaux, son maximum est atteint pour $G_t \in \{0, G, \lambda\}$. Nous pouvons donc réécrire [6-23] :

$$\sup_{G_t} h(G_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } G_t = 0 \\ \mathcal{F}V^C \cdot G & \text{si } G_t = G \\ kG + \lambda \cdot [\mathcal{F}V^C - k] & \text{si } G_t = \lambda \end{cases} \quad [6-24]$$

En utilisant le résultat [6-24], nous pouvons développer l'équation [6-22] :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \sup_{G_t} h(G_t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C \leq 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \mathcal{F}V^C \cdot G \leq 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + kG + \lambda \cdot [\mathcal{F}V^C - k] \leq 0 \end{cases} \quad [6-25]$$

Lorsque $G_t \notin \{0, G, \lambda\}$, les inégalités sont strictement négatives. L'égalité est vérifiée dans au moins 1 des 3 cas. Les deux premières équations de [6-25] peuvent être fusionnées sous la forme suivante, pour $G_t \in [0, G]$:

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \sup_{G_t} (\mathcal{F}V^C \cdot G_t) \leq 0 \quad [6-26]$$

Puisque le sup est atteint pour $G_t \in \{0, G\}$, l'équation [6-26] est équivalente à :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + G \cdot \max(\mathcal{F}V^C, 0) \leq 0 \quad [6-27]$$

Le système d'équation [6-25] peut alors se réécrire¹ :

$$\begin{cases} -\frac{\partial V^C}{\partial t} - \mathcal{L}V^C - G \cdot \max(\mathcal{F}V^C, 0) \geq 0 \\ \text{ou} \\ -\frac{\partial V^C}{\partial t} - \mathcal{L}V^C - kG - \lambda \cdot [\mathcal{F}V^C - k] \geq 0 \end{cases} \quad [6-28]$$

Dai et al. (2008) condense ce système d'équation sous la forme suivante, qui constitue l'approximation du cas général dans le cadre de la méthode de pénalité :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + G \cdot \min[\max(\mathcal{F}V^C, 0), k] + \lambda \cdot \max(\mathcal{F}V^C - k, 0) = 0 \quad [6-29]$$

L'équation [6-29] est l'approximation du cas général où G_t^W peut être discontinue (c'est à dire que λ peut être infini). L'équation du cas général peut être obtenu en prenant la limite² du système d'équations [6-28] quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\min \left[-\frac{\partial V^C}{\partial t} - \mathcal{L}V^C - \max(\mathcal{F}V^C, 0) G, k - \mathcal{F}V^C \right] = 0 \quad [6-30]$$

L'équation [6-30] est aussi présentée dans **Huang et Forsyth (2010)**, **Chen et Forsyth (2008)** et **Chen et al. (2008)** en faisant le changement de variable $\tau = T - t$.

Dai et al. (2008) résolvent l'équation [6-29] en utilisant une méthode des différences finies. Ils construisent un θ schéma pour $(t, AV_t, G_t^W) \in \Omega = [0, T] \times [0, AV_{max}] \times [0, AV_0]$, avec les conditions aux limites suivantes :

- Lorsque $AV_t = 0$, nous pouvons écrire que $V^C(t, 0, G_t^W) = V_0(t, G_t^W)$. Cette quantité peut être évaluée par une formule fermée :

$$V_0(t, G_t^W) = (1 - k) \cdot \max(G_t^W - G\tau^*, 0) + \frac{G}{r} \left[1 - e^{-r \cdot \min\left(\frac{G_t^W}{G}, \tau^*\right)} \right]$$

$$\text{En posant } \tau^* = \min \left[\ln \left(\frac{1-k}{r} \right), T - t \right]$$

- lorsque $AV_t \rightarrow +\infty$, la garantie n'a plus de valeur. La valeur du contrat est alors égale à la valeur terminale de l'épargne diminuée des frais à payer au titre de la garantie :

$$\lim_{AV_t \rightarrow \infty} V^C(t, AV_t, G_t^W) = e^{-\alpha(T-t)} AV_T \simeq V^C(t, AV_{max}, G_t^W)$$

- Lorsque $G_t^W = 0$, nous sommes dans le même cas que précédemment ($AV_t \rightarrow +\infty$) :

$$V^C(t, AV_t, 0) = e^{-\alpha(T-t)} AV_T$$

- A la date $t = T$ (maturité de la garantie), la valeur du contrat est égale à la valeur résiduelle de l'épargne : $V^C(T, AV_T, G_T^W) = AV_T$

La résolution du problème est complexe car les équations [6-29] et [6-30] régissant le problème ne sont pas linéaires. Deux sources d'erreurs existent dans cette méthode : la

¹ Le changement de signe dans les équations permet de faire apparaître des inégalités positives ou nulles ainsi que de faire le changement d'échelle de temps permettant d'utiliser la maturité résiduelle $\tau = T - t$

² La seconde équation de [6-28] se réécrit $-\mathcal{F}V^C + k \geq 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$

première concerne la discrétisation des équations différentielles en utilisant le θ schéma, la seconde provient de l'approximation par pénalité (résolution de [6-29] au lieu de [6-30]).

6.4.2 Contrôle impulsif

Cette seconde méthode de résolution est présentée dans **Chen et Forsyth (2008)** et dans **Chen et al. (2008)**. Elle autorise le cas $\lambda = +\infty$, c'est à dire que l'assuré peut effectuer un retrait instantané d'un montant fini. Les auteurs supposent que retirer avec $\lambda = +\infty$ est optimal à certains instants.

La méthode consiste à reformuler l'équation [6-30] du cas général afin de résoudre une formulation de contrôle impulsif du problème. Les auteurs supposent qu'un retrait fini supérieur au montant de revenus garantis génèrent des frais proportionnels k et un coût fixe c . L'introduction d'un coût fixe¹ permet de distinguer le cas du retrait continu et le cas du retrait fini ($\lambda = +\infty$) si le montant retiré est faible. Nous notons \widehat{G}_t le montant du retrait fini pour le distinguer de G_t (qui désigne le taux de retrait continu).

L'assuré a intérêt à effectuer un retrait continu inférieur à G si :

$$-\frac{\partial V^C}{\partial t} - \mathcal{L}V^C - \sup_{G_t \in [0, G]} (\mathcal{F}V^C \cdot G_t) = 0$$

$$V^C - \sup_{\widehat{G}_t \in]0, G_t^W]} [V^C(t, \max(AV_t - \widehat{G}_t, 0), G_t^W - \widehat{G}_t) + (1 - k)\widehat{G}_t - c] \geq 0$$

La 1^{ère} équation correspond au cas où $G_t \in \{0, G\}$ tandis que la 2^{ème} indique que la valeur du contrat est toujours supérieure à la valeur obtenue en effectuant un retrait d'un montant fini.

L'assuré aura intérêt à effectuer un retrait fini dans le cas où :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \sup_{G_t \in [0, G]} (\mathcal{F}V^C \cdot G_t) \leq 0$$

$$V^C - \sup_{\widehat{G}_t \in]0, G_t^W]} [V^C(t, \max(AV_t - \widehat{G}_t, 0), G_t^W - \widehat{G}_t) + (1 - k)\widehat{G}_t - c] = 0$$

Ces deux conditions peuvent s'écrire au sein d'une seule équation afin d'obtenir la formulation de contrôle impulsif du problème :

$$\min \left[\begin{array}{l} \frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \sup_{G_t \in [0, G]} (\mathcal{F}V^C \cdot G_t), \\ V^C - \sup_{\widehat{G}_t \in]0, AV_t]} [V^C(t, \max(AV_t - \widehat{G}_t, 0), G_t^W - \widehat{G}_t) + (1 - k)\widehat{G}_t - c] \end{array} \right] = 0 \quad [6-31]$$

De la même manière que précédemment (équation [6-27]), nous pouvons réécrire :

$$\frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + \sup_{G_t \in [0, G]} (\mathcal{F}V^C \cdot G_t) = \frac{\partial V^C}{\partial t} + \mathcal{L}V^C + G \cdot \max(\mathcal{F}V^C, 0)$$

L'ensemble des conditions aux limites restent inchangées exceptées celle correspondant au cas $AV_t = 0$.

¹ La valeur du coût fixe c est égale à 10^{-8} dans **Chen et Forsyth (2008)**

6.5 Prise en compte de la mortalité

Les précédentes modélisations ne prennent pas en compte la mortalité. Une extension des résultats semble possible en supposant que la mortalité est indépendante des risques financiers. Le plus simple consiste à considérer la mortalité instantanée afin de pouvoir intégrer le taux de mortalité dans les intégrales donnant la formule du prix des garanties. **Huang et al. (2009)** utilise cette approche avec une loi de Gompertz.

Nous ne développons pas cette piste dans la suite du mémoire étant donné que l'introduction des décès a peu d'impact sur les résultats obtenus pour la garantie GMWB. Cette piste pourrait être creusée afin de développer des modèles analytiques pour la garantie GLWB.

Bien qu'il n'existe pas de formules fermées pour le prix des garanties GMWB / GLWB, nous avons pu mettre en évidence des résultats analytiques dans des conditions particulières (formulation simple des garanties, absence de décès et de rachat, processus lognormaux pour l'épargne...). Les approximations faites pour aboutir à ces résultats n'ont pas toutes le même impact. L'hypothèse consistant à négliger la mortalité modifie peu le tarif de la GMWB tandis que celle prévoyant de négliger les rachats ou les frais de gestion impacte plus fortement le coût de la garantie (voir chapitres 9 et 10).

Les développements présentés au chapitre 6 sont utiles pour comprendre la nature des risques des garanties et pour disposer de résultats préliminaires lorsque nous aurons à valider un modèle plus complexe (incluant des garanties de revalorisation de la benefit base, des modèles de diffusion plus complexes, des garanties en cas de décès ...). Elles ne suffisent cependant pas dans un contexte opérationnel nécessitant de pouvoir déterminer le tarif, provisionner, couvrir les engagements et calculer les exigences de marge de solvabilité.

Nous sommes donc amenés à proposer un modèle de valorisation par simulations et avons retenus dans la suite un modèle de Monte-Carlo d'une portée plus générale que ceux identifiés dans la revue de littérature. Ces travaux se limitent en effet à la détermination de la prime pure et effectuent très peu de sensibilités aux paramètres ou aux modèles utilisés.

Notre modèle est original dans la mesure où il permet d'intégrer les éléments suivants :

- *Traduire le fait que les frais prélevés au titre des frais de gestion ou de la garantie impactent le déclenchement de la garantie et donc le coût de celle-ci (problème circulaire). La plupart des articles supposent que les frais sont prélevés intégralement au moment de la souscription et se limitent au calcul de la valeur actualisée des engagements de l'assureur à la date $t = 0$;*
- *Proposer une méthode de tarification en prime commerciale par une approche de stress tests et évaluer des nappes de tarif fonction de l'âge, du différé et de la pondération en actions ;*
- *Mener des analyses de sensibilité (valeur du coût de la garantie, variation des indicateurs de risque...) à l'ensemble des paramètres et au modèle d'actifs utilisé¹. En particulier, le modèle permet de prendre en compte différentes compositions de*

¹ Nous avons choisi de modéliser les actions et les taux par des processus de diffusion simple afin de ne pas multiplier les sources d'incertitude, tout en traduisant les risques liés au choix du modèle. La lecture de **Kling et al. (2010)** et **Shah et Bertsimas (2008)** nous a conforté dans ce choix puisque les deux articles concluent que l'introduction d'un modèle à volatilité stochastique a peu d'impact sur le coût de la garantie (voir chapitre 8).

l'épargne (1 seul sous-jacent, 2 sous-jacents corrélés permettant de traduire le cas où l'épargne est investie à la fois sur un support obligataire et sur un support action...) ;

- *Modéliser les évènements survenant sur le contrat comme des évènements discrets (prélèvement des frais, décès, rachat...). Le pas de temps utilisé dans la modélisation est modifiable, ce qui permettrait d'étendre ce modèle aux problématiques de provisionnement et de couverture ;*
- *Prendre en compte le comportement de rachat dynamique. Les équations proposées dans le modèle de passif (chapitre 7) permettent de prendre aussi en compte le rachat partiel (non implémenté dans le mémoire) ;*
- *Modéliser la plupart des variantes des garanties commercialisées en France ou à l'étranger (intégration d'une garantie GMDB, garantie cliquet ou TMG en phase d'accumulation, garantie cliquet en phase de distribution...).*

Par ailleurs, conscients que le travail de valorisation ne peut être conduit de manière indépendante de la gestion du risque de la garantie, nous proposons dans les chapitres 11 à 13 quelques conclusions sur la manière dont ces garanties pourraient être couvertes, provisionnées et intégrées dans le référentiel Solvabilité 2.

Partie III : Modèle de tarification des GMWB et GLWB

Chapitre 7 : Modélisation du passif

En l'absence de formules fermées, nous nous orientons vers des simulations pour déterminer le coût des garanties de revenus. Deux méthodes sont généralement mises en œuvre : la méthode des arbres et la méthode de Monte Carlo.

La méthode des arbres permet de modéliser la garantie en prenant en compte le comportement de l'assuré (rachat total, rachat partiel, absence de retrait...) à chaque nœud de l'arbre. La méthode de détermination du comportement optimal est semblable à celle utilisée pour le *pricing* des options américaines (construction ascendante puis tests descendants). Cette approche pose cependant des problèmes de calcul puisque les arbres ne sont pas recombinants pour les garanties GMWB et GLWB. Pour un arbre binomial par exemple¹, l'arbre posséderait 2^n branches au bout de n pas de temps, ce qui conduirait à des temps de calcul élevés si l'on souhaite utiliser un pas de discrétisation faible dans la diffusion des processus d'actifs.

La méthode de Monte Carlo présente l'avantage d'être applicable à l'ensemble des variantes de la garantie et permet de mesurer l'impact des modèles d'actifs sur la tarification et la gestion du risque. Elle devrait par ailleurs se révéler plus rapide en termes de mise en œuvre informatique. Nous utiliserons cette approche dans la suite du mémoire.

7.1 Cadre de modélisation

Les événements (retraits, prélèvement des frais...) surviennent en temps discret. Nous définissons l'échelle de temps, pour $k \in [0; N.T]$ et N la périodicité² des événements :

$$t_k = \frac{k}{N}$$

Le pas de temps de la simulation sera égal à $\Delta t = t_{k+1} - t_k = 1/N$.

La garantie GMWB est caractérisée par un vecteur d'état, c'est-à-dire un ensemble de variables aléatoires permettant de décrire les flux de la garantie. On note X_t ce vecteur d'état :

$$X_t = (AV_t, BB_t, G_t, G_t^W, C_t^W, F_t, G_t^D, C_t^D)$$

Notation	Définition
AV_t	Valeur de l'épargne à la date t
BB_t	Base de calcul des retraits garantis à la date t (Benefit Base)
G_t	Retrait réalisé à la date t par l'assuré
G_t^W	Montant total de revenus garantis restant à effectuer à la date t
C_t^W	Prestations payées par l'assureur à la date t au titre de la garantie GMWB
F_t	Frais payés à la date t par l'assuré au titre des frais de gestion et des garanties
G_t^D	Montant annuel garanti à la date t en cas de décès dans le cadre de la GMDB
C_t^D	Prestations payées à la date t par l'assureur au titre de la GMDB

¹ Si l'assuré a le choix à chaque pas de temps entre retirer le montant de revenu garanti ou de racheter le contrat

² Le cas $N = 1$ correspond à des événements annuels, le cas $N = 2$ correspond à des événements semestriels... La variable N est désigné par N_{model} dans le programme Matlab en annexe.

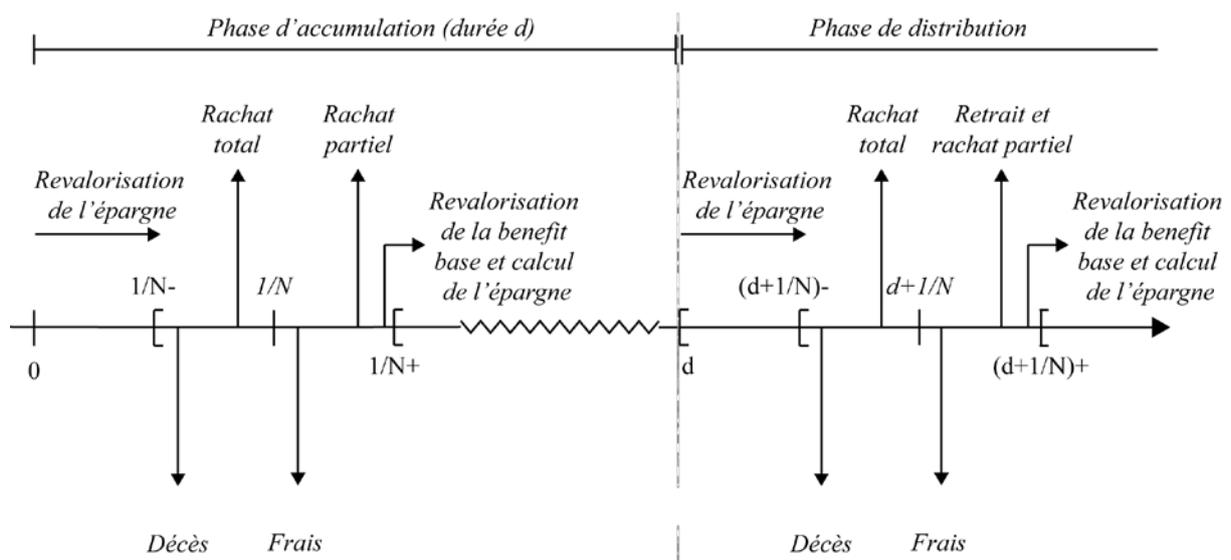
Le vecteur d'état des garanties GLWB se simplifie par rapport à celui de la GMWB puisque la variable G_t^W n'apporte pas d'information ($G_t^{W+} = +\infty$ pour tout t par définition). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 10.

La valeur des variables d'état dépend de l'évolution des marchés financiers, de la stratégie de retrait et de la date de sortie de l'assuré. Elles sont discontinues (par exemple à l'occasion d'un retrait à la date t_k), ce qui nécessite de distinguer leurs valeurs en t_k^- et en t_k^+ .

Nous définissons la chronique des flux de la garantie qui contient 2 périodes distinctes : $t_k \in [0; d[$ et $t_k \in [d; T + d[$:

- Une période de constitution de l'épargne de durée d (aussi appelée différé). Cette période est dénommée phase d'accumulation. Au cours de cette période, les retraits éventuels ne sont pas garantis et s'apparentent à des rachats partiels. Selon la formulation du produit, l'assuré peut avoir l'option de choisir un différé nul ;
- Une période de mise à disposition des revenus garantis. Cette période est appelée phase de distribution. L'assuré peut effectuer son premier retrait à la fin de la période $[d, d + 1[$ ². Lorsque l'épargne devient nulle, la garantie s'active.

Figure 7-1 : Chronique des flux de la garantie



Cette chronique des flux reste valable lorsque le différé est nul ($d = 0$). La revalorisation de la base n'a lieu que si la date t_k correspond à une date où la garantie cliquet / TMG peut se déclencher (voir partie 7.3).

Nous supposons dans la suite que le risque de mortalité est indépendant des risques financiers et négligeons le délai de rétractation de 30 jours. Nous supposons que l'épargne est immédiatement investie selon l'allocation d'actifs cible choisie à la souscription³.

Le modèle utilise un pas de temps mensuel $\Delta t = 1/N$ pour simuler les scénarios d'actifs. Dans le programme Matlab, nous prendrons $N = 12$. Nous supposons par ailleurs que :

¹ Les tables de mortalité finissent à l'âge ω . La borne supérieure de la période de distribution est donc $\omega - x$.

² Pour être cohérent avec le cas $d=0$. L'assuré peut, dans certaines variantes du produit, renoncer à effectuer son retrait en contrepartie d'un bonus d'attente. Nous n'étudions pas cette variante de la garantie.

³ Dans la réalité, l'épargne serait investie sur un fonds monétaire pendant les 30 premiers jours

- Les rachats et les décès surviennent à chaque pas de temps du modèle ($1/N$) et sont comptabilisés en fin de période ;
- Les retraits des revenus garantis, les rachats et le prélèvement des frais sont opérés selon une autre échelle ($1/N_{even}$). N_{even} et N sont tels que que $N_{even} \leq N$;
- Les garanties cliquets et TMG ont leur échelle de temps spécifique (voir le programme Matlab en annexe).

L'utilisation de $N \neq 1$ ne nous permet pas d'utiliser immédiatement les tables de mortalité TGF-THF 00-05 qui sont fournies pour des dates entières ($t_k \in \mathbb{N}$). De même, les probabilités de rachat sont souvent estimées sur la base de données annuelles. Nous proposons dans la partie 7.1.1 de modéliser la mortalité et les rachats pour des dates non entières.

Dans la suite du mémoire, nous utilisons la notation $[x]$ pour désigner la partie entière de x (c'est à dire que $[x] \leq x < [x] + 1$).

7.1.1 Modélisation de la mortalité et des rachats totaux

Nous supposons que les décès sont mutualisés au sein du portefeuille et qu'ils suivent une table de mortalité. En l'absence de rachat, la probabilité de constater un flux de la garantie en cas de vie de l'assuré à la date t_k est alors fixe et égale à ${}_{t_k}p_x$.

Cette hypothèse permet de simplifier la modélisation informatique et de gagner en temps de calcul. Deux améliorations pourraient être introduites afin de rendre le modèle plus réaliste :

- La survie de l'assuré pourrait être aléatoire. A chaque pas de temps t_{k+1}^- , nous pourrions effectuer un tirage pour déterminer si l'assuré décède sur l'intervalle $[t_k; t_{k+1}[$. D'un point de vue pratique¹, cela revient à considérer la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de moyenne ${}_{t_k|} \frac{1}{N} q_x$;
- La table de mortalité pourrait par ailleurs être supposée stochastique : chaque scénario serait alors évaluée en fonction de sa propre table de mortalité.

Ces approches sont plus réalistes, en particulier lorsque l'on étudie un seul contrat ou lors du lancement du produit puisque le portefeuille est alors de taille insuffisante pour assurer une mutualisation convenable de la mortalité. L'inconvénient de ces méthodes réside dans le fait qu'il est nécessaire d'augmenter le nombre de scénarios financiers utilisés afin de saisir les événements extrêmes. Les effets d'un scénario d'actifs particulièrement adverse peuvent en effet être compensés par une mortalité précoce de l'assuré.

La même problématique de modélisation se pose pour les rachats. Nous adopterons la même approche que pour les décès et raisonnerons en probabilité, sans effectuer de tirage.

7.1.1.1 Modélisation de la mortalité

La mortalité est supposée suivre une table dont les valeurs ne sont connues que pour $t_k \in \mathbb{N}$. Pour calculer le nombre de survivants à toutes les dates, nous supposons que la mortalité est répartie uniformément entre 2 dates entières, ce qui permet d'écrire :

¹ soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[t_k; t_{k+1}[$. Si le tirage de U est supérieur à ${}_{t_k|} \frac{1}{N} q_x$, alors l'assuré est en vie en t_{k+1}^- . Dans le cas contraire, l'assuré décède sur $[t_k; t_{k+1}[$;

$$l_{x+t_k} = l_{x+[t_k]} + (t_k - [t_k]) \times (l_{x+[t_k]+1} - l_{x+[t_k]})$$

Par exemple, pour $t_k = 7/12$, $l_{x+t_k} = l_{x+7/12} = l_x + (7/12) \times (l_{x+1} - l_x)$

Soit ${}_{[t_k]}p_x$ la probabilité d'être en vie à la date $[t_k]$. Cette valeur est lue sur la table de mortalité. Nous pouvons alors déduire la probabilité ${}_{t_k}p_x$ d'être en vie à la date t_k :

$$\begin{aligned} {}_{t_k}p_x &= \frac{l_{x+t_k}}{l_x} = \frac{l_{x+[t_k]} + (t_k - [t_k]) \times (l_{x+[t_k]+1} - l_{x+[t_k]})}{l_x} \\ &= {}_{[t_k]}p_x + (t_k - [t_k]) \times ({}_{[t_k]+1}p_x - {}_{[t_k]}p_x) \end{aligned} \quad [7-1]$$

Nous construisons symétriquement la probabilité de décès sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$:

$${}_{t_k|\frac{1}{N}}q_x = \frac{l_{x+t_k} - l_{x+t_{k+1}}}{l_x} = {}_{t_k}p_x - {}_{t_{k+1}}p_x \quad [7-2]$$

7.1.1.2 Modélisation des rachats totaux

Nous notons dans la suite ${}_{t_k|\frac{1}{N}}R_x$ la probabilité de rachat sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$.

Les rachats peuvent être statiques ou dynamiques (cf. partie 3.3.2.1) pour traduire le fait que l'assuré cherche à optimiser la valeur de son contrat¹. Nous choisissons un modèle additif adapté des propositions faites par l'ACP dans l'annexe des Orientations Nationales Complémentaires aux spécifications techniques du QIS4².

Nos introduisons par ailleurs un coefficient d'abattement supplémentaire α_{t_k} afin de traduire le fait que l'assuré ne rachète plus son contrat lorsque la garantie de revenus est activée :

$$\alpha_{t_k} = \begin{cases} 0, & \text{si } AV_{t_k}^+ = 0 \\ 1, & \text{si } AV_{t_k}^+ > 0 \end{cases}$$

La probabilité de rachat prendra donc la forme suivante dans notre modèle :

$${}_{t_k|\frac{1}{N}}R_x = \alpha_{t_k} \cdot \left({}_{t_k|\frac{1}{N}}R_x^{Stat} + {}_{t_k|\frac{1}{N}}R_x^{Dyn} \cdot \mathbf{1}_{\{\text{si rachats dynamiques}\}} \right) \quad [7-3]$$

Le choix du modèle additif est arbitraire et certains assureurs semblent utiliser des modèles multiplicatifs pour décrire les rachats. Par exemple, dans le document *Managing Variable Annuity risks* publié par Axa fin 2008, les rachats sont évalués par :

$${}_{t_k|\frac{1}{N}}R_x = {}_{t_k|\frac{1}{N}}R_x^{Stat} \times \alpha_{t_k}^{Dyn}$$

où le facteur dynamique $\alpha_{t_k}^{Dyn}$ dépend de la grandeur intitulée « In the Moneyness » de la garantie (notée ITM dans la suite du mémoire).

¹ Dans le pricing, on supposera que $x\%$ des assurés sont irrationnels (par exemple 50%) et étudierons l'impact de ce comportement sur le prix de la garantie.

² La fonction proposée comporte 5 segments, en fonction de l'écart entre le taux servi et le TME.

De la même manière que pour les rachats, nous construirons les probabilités de rachat pour les temps non entiers. Nous calculons le nombre de contrats en cours en utilisant les probabilités de rachat annuelles et en déduisons les probabilités de rachat pour les dates non entières :

$${}_{t_k|N}R_x = \frac{N_{rachat}[t_k, t_{k+1}[}{N_{contrat}(t_k)} = \frac{(N_{rachat}^{Stat} + N_{rachat}^{Dyn} \cdot 1_{\{si\ rachats\ dynamiques\}})}{N_{contrat}(t_k)} [t_k, t_{k+1}[$$

7.1.1.2.1 Modélisation statique des rachats totaux

Dans ce cas, nous posons ${}_{t_k|N}R_x^{Dyn} = 0$. La probabilité de rachat s'écrit alors :

$${}_{t_k|N}R_x = \alpha_{t_k} \cdot {}_{t_k|N}R_x^{Stat}$$

Avant le déclenchement de la garantie ($\alpha_{t_k} = 1$), le taux de rachat est égal au taux de rachat structurel d'un produit d'épargne multisupport. Ce paramètre peut être déterminé en se basant sur l'historique des contrats en portefeuille au moment du lancement et peut être majoré/minoré, à dire d'experts, pour rendre compte de l'existence de la garantie. Il sera étalonné dans un second temps sur le portefeuille de contrats vendus avec des garanties GMWB / GLWB lorsqu'un historique suffisant sera disponible. Lorsque la garantie est activée (épargne nulle), l'assuré n'a plus aucun intérêt à racheter son contrat et le taux de rachat devient nul.

7.1.1.2.2 Modélisation dynamique des rachats totaux

La littérature propose 2 catégories de modèles pour décrire les rachats dynamiques :

- La 1^{ère} catégorie regroupe des modèles dépendant de l'écart entre la performance du contrat et celle du benchmark. L'assuré compare le rendement de son placement au rendement qu'il pourrait avoir en investissant le montant racheté sur un autre contrat. Ce type de modélisation a été proposé par l'ACP dans le cadre du QIS4 pour les contrats en euros rachetables. Nous n'utiliserons pas ce type de modèle car nous considérons que l'écart de revalorisation n'est pas le facteur dominant dans le cas des garanties GMWB / GLWB ;
- La 2^{ème} catégorie de modèle est construite sur la valeur de la garantie, par analogie avec le critère d'exercice d'une option américaine. Nous retiendrons cette approche. Cette hypothèse devra être validée a posteriori, lorsque le portefeuille sera suffisamment important pour effectuer des statistiques.

L'assuré ne dispose que de moyens techniques limités pour déterminer la valeur et l'évolution de ses garanties. Dans un souci de réalisme, nous faisons l'hypothèse dans la suite que le critère de décision de rachat dynamique doit être simple et construit sur la base d'informations qui sont directement accessibles à l'assuré.

La formulation qui suit concerne les probabilités de rachat annuelles. Pour déterminer les probabilités de rachat lorsque $N \neq 1$, nous ferons une approximation consistant à calculer la probabilité de rachat dynamique à chaque pas de temps entiers $[t_k]$ et de considérer que cette valeur s'appliquera sur l'ensemble de l'année¹ (voir programme Matlab en annexe).

¹ L'assuré ne sera donc rationnel qu'une fois par an.

Pour formuler les rachats dynamiques annuels, nous adapterons le modèle proposé par **Ledlie et al. (2008)** qui propose de calculer l'ITM de la garantie (« In the Moneyness ») comme le ratio entre la valeur de l'épargne et de la benefit base.

Pour les garanties GMWB, nous définissons donc l'ITM de la manière suivante :

$$ITM(t_k) = \frac{AV_{t_k}}{G_{t_k}^W}$$

Selon ce critère, la garantie est à la monnaie lors de la souscription¹. A la date $t = 0^+$, suite à un choc sur l'épargne, la garantie devient hors de la monnaie ($AV_0^+ > BB_0$) ou dans la monnaie ($AV_0^+ < BB_0$).

$$ITM(0^+) = \frac{AV_0^+}{G_0^W} = \frac{AV_0^+}{BB_0}$$

Pour les garanties GLWB, la variable $G_{t_k}^W$ n'est pas défini puisque $G_{t_k}^W = +\infty$. Nous proposons donc une autre définition de l'ITM pour ces garanties (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 10) :

$$ITM(t_k) = \frac{AV_{t_k}}{BB_{t_k}}$$

Le critère retenu pour évaluer l'ITM de la garantie peut être critiqué mais notre choix correspond à un indicateur construit à partir d'informations accessibles à l'assuré. Le critère le plus correct d'un point de vue théorique serait celui basé sur le signe de la valeur de la garantie $V^G(t_k, AV_{t_k})$.

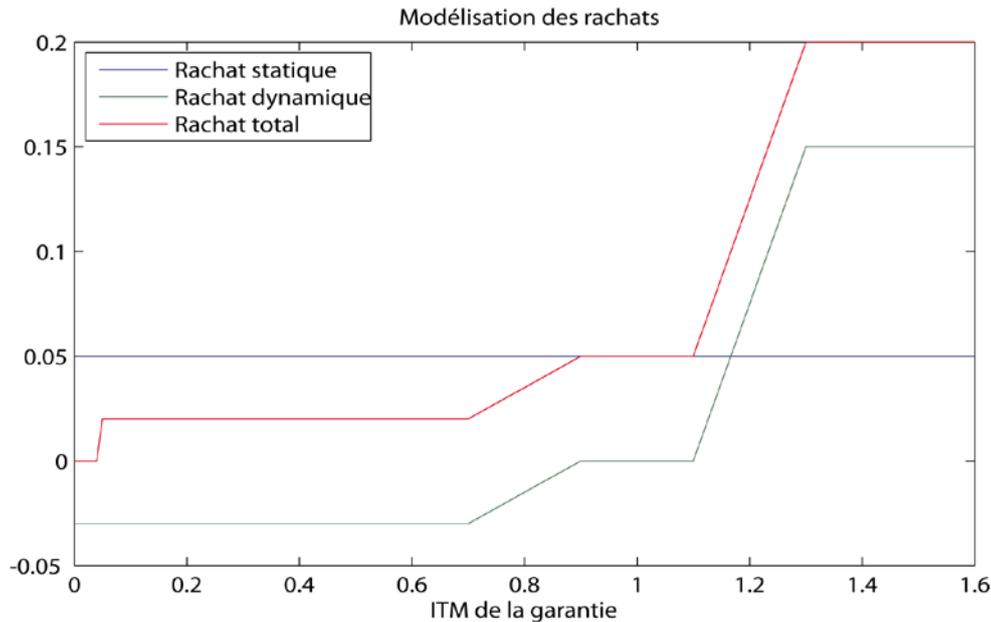
Par rapport au modèle de **Ledlie et al. (2008)** qui ne comprend que 3 segments, nous intégrons dans notre modèle une plage symétrique autour de $ITM = 100\%$ où ${}_{[t_k]|1}R_x^{Dyn} = 0$ afin de traduire l'inertie de l'assuré par rapport à sa décision (seuils d'indifférence). Nous supposons par ailleurs que les coefficients utilisés dans la formulation de R^{Dyn} ne dépendant pas du temps. La structure de R^{Dyn} que nous proposons est la suivante :

$${}_{[t_k]|1}R_x^{Dyn} = \begin{cases} R_{min}^{Dyn} \cdot \frac{R_{min}^{Dyn}}{I_2 - ITM_{[t_k]}} & , ITM_{[t_k]} \leq I_1 \\ R_{min}^{Dyn} \cdot \frac{I_2 - ITM_{[t_k]}}{I_2 - I_1} & , I_1 < ITM_{[t_k]} \leq I_2 \\ 0 & , I_2 < ITM_{[t_k]} \leq I_3 \\ R_{max}^{Dyn} \cdot \frac{ITM_{[t_k]} - I_3}{I_4 - I_3} & , I_3 < ITM_{[t_k]} \leq I_4 \\ R_{max}^{Dyn} & , ITM_{[t_k]} > I_4 \end{cases}$$

Des études sur le portefeuille de contrats devront être menées pour tester a posteriori la vraisemblance de notre modèle et pour calibrer les paramètres. Nous illustrons la modélisation proposée avec les valeurs de paramètres suivantes :

- $R_{min}^{Dyn} = -3\%$, $R_{max}^{Dyn} = 15\%$, $R_{t_k}^{Stat} = 5\%$ (taux annuels de rachats)
- $I_1 = 70\%$, $I_2 = 90\%$, $I_3 = 110\%$, $I_4 = 130\%$

¹ L'option peut être considérée à la monnaie car l'assuré n'a pas d'autre repère que le prix demandé par l'assureur (qu'il considère ainsi que le juste prix de la garantie). En réalité, les options sont hors de la monnaie à la souscription puisque l'assureur fixe un tarif supérieur au coût économique de la garantie. Voir la partie 7.4.4.

Figure 7-2 : Probabilité de rachat total en fonction de l'ITM de la garantie – Cas où $N = 1$ 

La modélisation des rachats permet de transcrire la capacité de l'assuré à être rationnel. Nous pourrions améliorer cette modélisation en considérant que le taux de rachat statique n'est pas constant en raison des dispositions fiscales (fonction de l'âge de l'assuré et de l'antériorité du contrat). Les rachats au delà de 8 ans devraient en effet être supérieurs à ceux avant 8 ans.

7.1.2 Ecriture des probabilités dans le modèle

Nous évaluons dans cette partie le nombre de contrats en cours $N_{t_k}^{ec}$ à la date t_k , le nombre de décès $N_{t_k}^d$ et le nombre de rachats totaux $N_{t_k}^r$ survenus sur $[t_k, t_{k+1}]$ ¹.

7.1.2.1 Nombre de contrats en cours $N_{t_k}^{ec}$ à la date t_k

A partir des notations de la partie 7.1, nous pouvons écrire que :

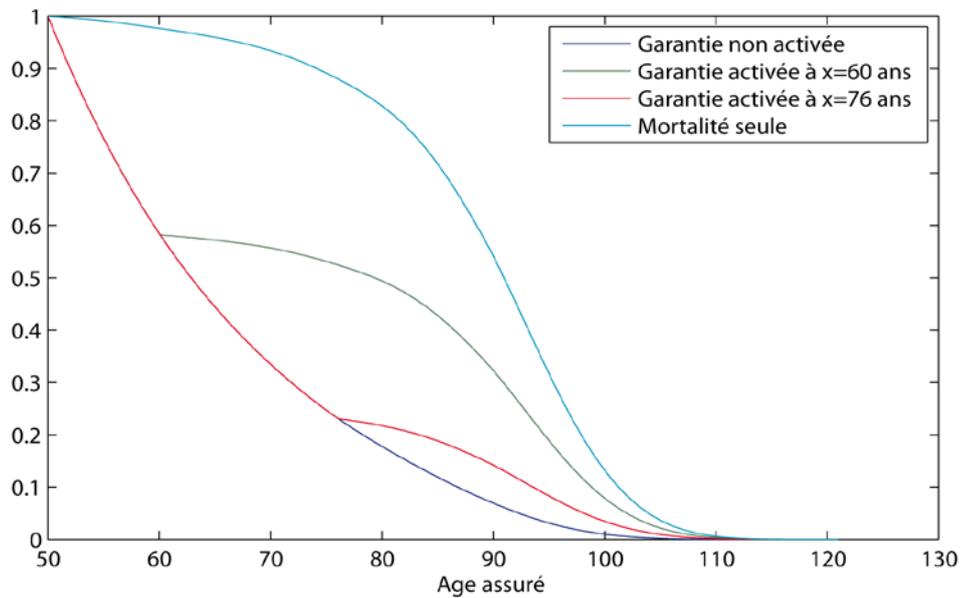
$$N_{t_k}^{ec} = l_{x+t_k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) = l_x \cdot \left[{}_{t_k}p_x \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) \right] \quad [7-4]$$

Nous constatons que la décroissance du nombre de contrats en cours est d'autant plus forte que la garantie n'est pas activée.

Au moment du déclenchement de la garantie, le nombre de contrats en cours change de dynamique pour suivre celle des décès seuls (rôle de α_{t_k} dans la formule des rachats).

¹ En divisant ces expressions par l_x , nous en déduisons la probabilité de ces évènements.

Figure 7-3 : Illustration du nombre de contrats en cours pour 3 simulations d’une garantie GLWB souscrite par un assuré âgé de 50 ans – Rachat statique

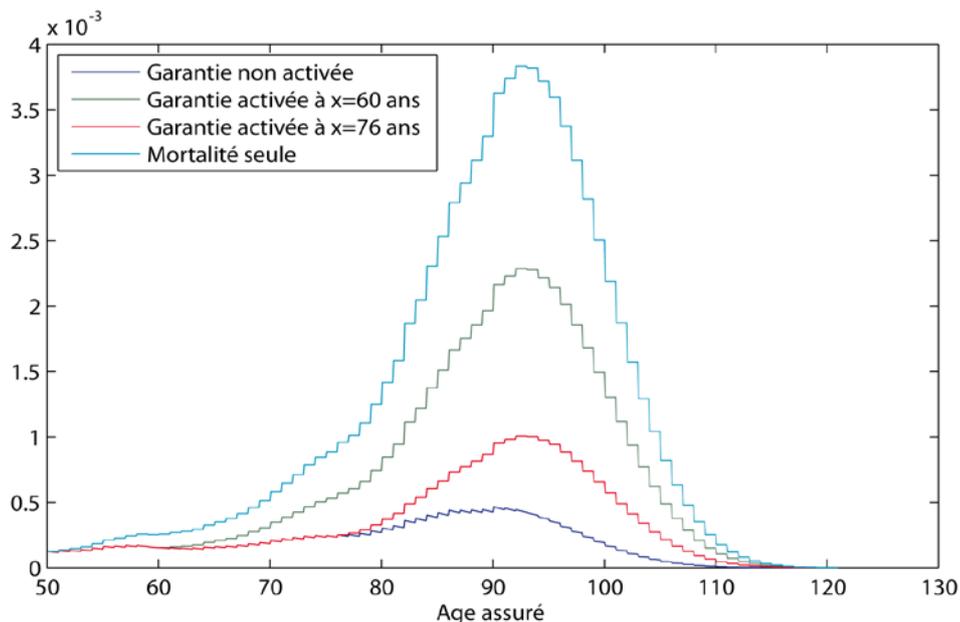


7.1.2.2 Nombre de décès $N_{t_k}^d$ survenus sur $[t_k, t_{k+1}[$ et comptabilisés en fin de période

A partir des notations de la partie 7.1, nous pouvons écrire que :

$$N_{t_k}^d = (l_{x+t_k} - l_{x+t_{k+1}}) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - t_i \frac{1}{N} R_x\right) = l_x \cdot \left[t_k \frac{1}{N} q_x \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - t_i \frac{1}{N} R_x\right) \right] \quad [7-5]$$

Figure 7-4 : Illustration du nombre de décès sur les intervalles $[t_k, t_{k+1}[$ pour 3 simulations d’une garantie GLWB souscrite par un assuré âgé de 50 ans – Rachat statique



De la même manière que pour le nombre de contrats en cours, nous voyons que la dynamique des décès change lorsque la garantie s’active. Les rachats intervenants sur $[t_k, t_{k+1}[$ se calculent en appliquant la probabilité de décès de cette période au nombre de contrats en cours

à la date t_k . La relation [7-4] montre que la décroissance du nombre de contrats en cours est d'autant plus rapide que la garantie se déclenche tardivement. Par conséquent, pour une date t_k donnée, plus la garantie se déclenche rapidement et plus le nombre de décès sera élevé.

7.1.2.3 Nombre de rachats totaux $N_{t_k}^r$ sur $[t_k, t_{k+1}[$ et comptabilisés en fin de période

De la même manière que précédemment, nous pouvons écrire que :

$$N_{t_k}^r = l_{x+t_{k+1}} \cdot {}_{t_k| \frac{1}{N}} R_x \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i| \frac{1}{N}} R_x \right) = l_x \cdot \left[{}_{t_{k+1}} p_x \cdot {}_{t_k| \frac{1}{N}} R_x \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i| \frac{1}{N}} R_x \right) \right] \quad [7-6]$$

Remarque : nous vérifions que l'on retrouve la relation $N_{t_k}^{ec} = N_{t_{k+1}}^{ec} + N_{t_k}^{chute}$ en calculant le nombre de contrats chutés sur $[t_k, t_{k+1}[$:

$$\begin{aligned} N_{t_k}^{chute} &= \overbrace{(l_{x+t_k} - l_{x+t_{k+1}}) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i| \frac{1}{N}} R_x \right)}^{\text{Décès sur } [t_k, t_{k+1}[} + \overbrace{l_{x+t_{k+1}} \cdot {}_{t_k| \frac{1}{N}} R_x \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i| \frac{1}{N}} R_x \right)}^{\text{Rachats sur } [t_k, t_{k+1}[} \\ &= l_{x+t_k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i| \frac{1}{N}} R_x \right) - l_{x+t_{k+1}} \cdot \prod_{i=0}^k \left(1 - {}_{t_i| \frac{1}{N}} R_x \right) = N_{t_k}^{ec} - N_{t_{k+1}}^{ec} \end{aligned}$$

7.1.3 Modélisation des revenus garantis, des rachats partiels et des frais

Nous supposons que les frais et les retraits viennent en déduction de la valeur de l'épargne¹.

Si l'assuré retire davantage que le revenu garanti, nous considérons l'excédent comme étant un rachat partiel. A l'opposé, l'assuré peut renoncer à un revenu garanti (éventuellement en contrepartie d'un bonus d'attente, c'est à dire une revalorisation des revenus garantis à venir et du montant total de revenus garantis dont l'assuré peut disposer).

La revue de littérature (chapitres 5 et 6) fournit quelques résultats sur le comportement optimal de l'assuré dans le cas particulier d'une GMWB ne prévoyant pas de mécanisme de revalorisation du montant de revenus garantis. Le comportement optimal de l'assuré sera probablement très différent en présence de garantie de revalorisation.

Dans la suite du mémoire, nous négligeons les rachats partiels et supposons que l'assuré a le choix entre racheter totalement son contrat (rachat statique et dynamique) et retirer le montant de revenus garantis. Le modèle de passif développé dans ce chapitre montre cependant la manière dont les rachats partiels pourraient être pris en compte.

Les frais F_{t_k} peuvent être formulés en fonction de différentes assiettes : l'épargne du contrat AV_{t_k} , la prime investie à la souscription AV_0 ou bien la benefit base BB_{t_k} . Dans la partie 7.2, nous écrivons les formules avec des frais fonction de l'épargne.

¹ Nous ne retiendrons pas la formulation habituellement implémentée dans les SI qui prévoit que les frais et les retraits viennent en déduction du nombre d'unités de compte

7.2 Modélisation du vecteur d'état

Dans cette partie, nous modélisons le passif de la garantie GMWB pour un assuré souscrivant le contrat à l'âge x . Ce modèle est valable pour les garanties GLWB ($G_{t_k}^W = +\infty$). Nous nous appuyons dans ce qui suit sur la Figure 7-1.

Nous écrivons, dans un premier temps, les équations pour le produit suivant :

- Absence de revalorisation de la benefit base en phases d'accumulation et de distribution. Le traitement de ces options sera développé dans la partie 7.3.1;
- Absence de revalorisation de la benefit base en l'absence de retrait effectué (bonus d'attente). *Nous ne traiterons pas cette option dans la suite du mémoire ;*
- Existence d'une garantie complémentaire décès qui prévoit le versement du maximum entre la prime investie et la valeur de l'épargne, sans limite d'âge de l'assuré. Nous n'envisagerons pas de variante de cette garantie (cliquet, TMG...).

La fréquence de mise à disposition des revenus garantis et de prélèvement des frais est variable et contrôlée par la variable N_{even} .

Certaines équations doivent être adaptées pour calculer les valeurs au premier pas de temps ($t_1 = 1/N$). Nous renvoyons le lecteur souhaitant davantage de détails sur ce traitement vers le programme Matlab en annexe pour davantage d'éléments sur ce traitement.

7.2.1 Valeur du vecteur d'état à la souscription ($t = 0$)

Par définition de la garantie, la benefit base est généralement égale à l'épargne investie nette :

$$BB_0 = AV_0 = P_0(1 - f_{acq})$$

Le montant (minimum¹) total de revenus garantis et le montant garanti en cas de décès sont égaux à l'épargne investie : $G_0^W = AV_0$ et $G_0^D = AV_0$

L'ensemble des variables décrivant les prestations et les frais sont nulles à la date de souscription : $C_0^W = C_0^D = F_0 = 0$

7.2.2 Evolution entre t_{k-1}^+ et t_k^- ($k > 1$)

L'épargne est revalorisée suivant le rendement I_{t_k} sur $[t_k, t_{k+1}[$ (voir partie 8.3) :

$$AV_{t_k}^- = AV_{t_{k-1}}^+ \cdot (1 + I_{t_k})$$

Conformément à la Figure 7-1, aucune prestation, aucun frais et aucune sortie n'est possible entre t_{k-1}^+ et t_k^- . Aucune autre variable d'état n'est par conséquent modifiée.

7.2.3 Evolution entre t_k^- et t_k^+

A la date t_k^- , nous évaluons l'ITM de la garantie avec les formules de la partie 7.1.1.2.2. L'évolution des variables d'état dépend du montant de retrait effectué par l'assuré.

¹ En cas de revalorisation de la benefit base (voir partie 7.3.1)

7.2.3.1 Evolution du vecteur d'état en cas de retrait inférieur ou égal au revenu garanti

Nous supposons que le contrat est en cours en t_k et que l'assuré effectue un retrait inférieur ou égal au montant de revenu garanti (lorsque le contrat est en phase d'accumulation, cela signifie que l'assuré n'effectue pas de rachat partiel de son épargne).

Les composantes du vecteur d'état évoluent alors de la manière suivante (Tableau 7-1) :

Tableau 7-1 : Evolution du vecteur d'état en cas de retrait inférieur ou égal au montant de revenu garanti

Phase d'accumulation [0; d[Phase de distribution [d; T + d[
$G_{t_k} = 0$	$G_{t_k} \leq h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^- \cdot 1_{\{even=1\}}$
$C_{t_k}^D = \max(G_{t_k}^{D-} - AV_{t_k}^-, 0)$	
$F_{t_k} = AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) \cdot \alpha_g^W \cdot 1_{\{even=1\}}$	
$AV_{t_k}^+ = AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k}$	$AV_{t_k}^+ = \max(AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}, 0)$
$C_{t_k}^W = 0$	$C_{t_k}^W = \max(G_{t_k} - AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) + F_{t_k}, 0)$
$G_{t_k}^{D+} = G_{t_k}^{D-} - G_{t_k}$	
$BB_{t_k}^+ = BB_{t_k}^- (= BB_{t_{k-1}}^+)$	
$G_{t_k}^{W+} = G_{t_k}^{W-} - G_{t_k}$	
$G_{t_k}^{D+} = G_{t_k}^{D-} - G_{t_k}$	
$h_W(x, t_k^+) = h_W(x, t_k^-) = 0$	$h_W(x, t_k^+) = h_W(x, t_k^-)$

En supplément des frais prélevés au titre de la garantie, l'assureur prélève aussi des frais de gestion $F_{t_k}^{Gestion} = AV_{t_k}^- \cdot \alpha_m \cdot 1_{\{even=1\}}$ qui ne seront pas pris en compte dans le calcul de la valeur de la garantie.

A la date t_k^+ , nous évaluons la valeur du paramètre α_{t_k} pour chaque scénario. Ce coefficient modulera la probabilité de rachat sur le prochain intervalle $[t_k, t_{k+1}[$.

7.2.3.2 Evolution du vecteur d'état en cas de retrait supérieur au revenu garanti

En phase de distribution, nous considérons que le rachat partiel désigne l'épargne rachetée au-delà du montant de revenu garanti (c'est à dire que $G_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^- > 0$). Les équations sont différentes selon que le contrat prévoit une pénalité de rachat ou non lorsque l'assuré effectue un rachat partiel.

7.2.3.2.1 Absence de pénalité de rachat

Nous supposons que le contrat prévoit, en cas de rachat partiel, un abattement proportionnel du niveau des garanties. Cette formulation permet de rendre compte de la majeure partie des produits commercialisés¹.

Chronologiquement, l'assuré effectue un retrait égal au montant de revenu garanti $h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-$ puis rachète son épargne à hauteur de $G_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-$. Nous en déduisons l'évolution des composantes du vecteur d'état (Tableau 7-2) :

¹ Par exemple, sur Axa Accumulator Retraite, il est précisé que : « tout rachat partiel de l'épargne a pour effet de diminuer immédiatement l'assiette dans les proportions identiques à celle de la diminution d'épargne constatée au moment du rachat sur ce compartiment ». D'autres mécanismes d'abattement sont envisageables, par

exemple : $BB_{t_k}^+ = \min \left(BB_{t_k}^- \cdot \frac{AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}}{AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-}, AV_{t_k}^+ \right)$

Tableau 7-2 : Evolution du vecteur d'état en cas de retrait supérieur au revenu garanti

Phase d'accumulation [0; d[Phase de distribution [d; T + d[
$G_{t_k} = 0$	$G_{t_k} \geq h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^- \cdot 1_{\{even=1\}}$
$C_{t_k}^D = \max(G_{t_k}^{D-} - AV_{t_k}^-, 0)$	
$F_{t_k} = AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) \cdot \alpha_g^W \cdot 1_{\{even=1\}}$	
$AV_{t_k}^+ = AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k}$	
$h_W(x, t_k^+) = h_W(x, t_k^-) = 0$	$h_W(x, t_k^+) = h_W(x, t_k^-)$
$C_{t_k}^W = 0$	
$G_{t_k}^{D+} = G_{t_k}^{D-} - G_{t_k}$	
$BB_{t_k}^+ = BB_{t_k}^- \cdot \frac{AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}}{AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-}$	
$G_{t_k}^{W+} = [G_{t_k}^{W-} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^- \cdot 1_{\{echelle_{even}=1\}}] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$	
$G_{t_k}^{D+} = [G_{t_k}^{D-} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^- \cdot 1_{\{echelle_{even}=1\}}] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$	
$h_W(x, t_k^+) = h_W(x, t_k^-) = 0$	$h_W(x, t_k^+) = h_W(x, t_k^-)$

L'expression de l'épargne en phase de distribution ne contient pas de max puisque par définition, l'épargne est suffisante pour réaliser le rachat partiel. Cette remarque permet d'écrire que $G_{t_k} \leq AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k}$. Par conséquent :

$$AV_{t_k}^+ = \max(AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}, 0) = AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}$$

Nous en déduisons par symétrie que la prestation payée au titre de la garantie GMWB est nulle : $C_{t_k}^W = 0$.

Si $G_{t_k} = h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-$, le Tableau 7-2 coïncide avec le Tableau 7-1 car le coefficient d'abattement de la benefit base est alors égal à 1.

Si l'assuré rachète son contrat sur $[t_{k-1}, t_k[$, le rachat est comptabilisé à la date t_k et met fin au contrat. Le vecteur d'état devient alors nul :

$$AV_{t_k}^+ = BB_{t_k}^+ = G_{t_k} = G_{t_k}^{W+} = C_{t_k}^W = F_{t_k} = G_{t_k}^{W+} = 0 \quad [7-7]$$

Si nous prenons le cas limite $G_{t_k} = AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) - F_{t_k}$ dans le Tableau 7-2, nous retrouvons l'ensemble des égalités de l'équation [7-7] hormis pour la variable décrivant les frais F_{t_k} . Cette différence provient de la chronologie retenue pour les flux. Le rachat total réalisé sur $[t_{k-1}, t_k[$ est comptabilisé en t_k^- tandis que le rachat partiel intervient en t_k^+ (en même temps que les retraits) et conduit alors à prélever des frais entre t_k^- et t_k^+ .

7.2.3.2.2 Introduction d'une pénalité de rachat

Il est possible de limiter l'optimisation de la valeur de la garantie par l'assuré en introduisant une pénalité de rachat s_{t_k} , dans le cadre des 5% prévus par le Code des Assurances (articles L132-22-1 et R331-5).

En cas de retrait G_{t_k} supérieur au revenu garanti, l'assuré perçoit un montant net égal à :

$$[G_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-] \cdot (1 - s_{t_k}) + h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-$$

L'assuré dégage donc une marge $s_{t_k} \cdot [G_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-]$ sur le rachat partiel de l'assuré, ce qui lui permettra de compenser une partie du manque à gagner sur le contrat. Les frais prélevés à la date t_k au titre de la garantie s'écrivent alors :

$$F_{t_k} = (AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) \cdot \alpha_g^W + s_{t_k} \cdot [G_{t_k} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-]) \cdot 1_{\{even=1\}}$$

Dans la suite, nous supposons pour simplifier que l'assuré rachète son contrat ou effectue un retrait égal au montant de revenus garantis au cours de la phase de distribution. Pendant la phase d'accumulation, l'assuré n'effectue pas de rachat partiel. La dynamique du vecteur d'état est donc donnée, en cas de retrait égal au montant de revenus garantis, par les équations du Tableau 7-1 avec $G_{t_k} = h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-$ ou par l'équation [7-7] en cas de rachat total du contrat.

7.3 Impact des variantes de la garantie

Nous nous intéressons dans cette partie à l'évolution du vecteur d'état pour des formulations plus complexes du produit : existence de garanties de revalorisation de la benefit base, frais prélevés en fonction de la prime investie ou de la benefit base...

Nous définissons N_a (respectivement N_d) le nombre d'activation annuelle éventuelle du cliquet pendant la phase d'accumulation (respectivement la phase de distribution). Ces deux variables permettent de définir les ensembles de dates auxquelles la benefit base est susceptible d'être revalorisée pendant chacune des deux phases ($echelle_{cliquet_A}$ et $echelle_{clique_{t_D}}$).

7.3.1 TMG et cliquet de la benefit base

La garantie TMG prévoit qu'à la fin du différé, la benefit base soit égale à la benefit base de souscription revalorisée au taux i_{TMG} (défini contractuellement et généralement fixe).

La garantie cliquet permet de revaloriser, à des dates fixés à l'avance, la valeur de la benefit base si celle-ci est inférieure à la valeur de l'épargne.

Ces deux garanties modifient la dynamique de 3 variables du vecteur d'état : la benefit base, le montant de revenus garantis restant à retirer et le montant du capital en cas de décès. Nous proposons des formulations permettant de traiter l'ensemble des garanties de revalorisation possibles.

7.3.1.1 Revalorisation en phase d'accumulation

La *benefit base* est égale au maximum entre les calculs effectués pour chaque garantie :

$$BB_{t_k}^+ = \max \left(BB_{t_k}^-, BB_0 (1 + i_{TMG})^d \cdot 1_{\{echelle_{TMG}=1\}}, AV_{t_k}^+ \cdot 1_{\{echelle_{clique_{t_A}}=1\}} \right) \quad [7-8]$$

Cette revalorisation de la benefit base modifie le montant de revenus garantis et le montant du capital en cas de décès :

$$G_{t_k}^{W+} = [G_{t_k}^{W-} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

$$G_{t_k}^{D+} = [G_{t_k}^{W-} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

7.3.1.2 Revalorisation en phase de distribution

En phase de distribution, la seule garantie possible est un cliquet. Nous déduisons les formules de celles qui ont été établies pour la phase d'accumulation :

$$BB_{t_k}^+ = \max \left(BB_{t_k}^- ; AV_{t_k}^+ \cdot 1_{\{echelle_{cliquet} = 1\}} \right) \quad [7-9]$$

Le montant de revenus garantis et le montant du capital en cas de décès sont augmentés selon les équations suivantes :

$$G_{t_k}^{W+} = [G_{t_k}^{W-} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

$$G_{t_k}^{D+} = [G_{t_k}^{W-} - h_W(x, t_k^-) \cdot BB_{t_k}^-] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

7.3.2 Modification de l'assiette de prélèvement des frais

Si les frais sont prélevés en fonction de la prime initiale, nous pouvons alors écrire :

$$F_{t_k} = \left[\alpha_g \cdot AV_0 - \left(\alpha_g \cdot AV_0 - AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) \right)^+ \right] \cdot 1_{\{even=1\}} \quad [7-10]$$

Si les frais sont formulés en fonction de la benefit base, ceux-ci s'écrivent alors :

$$F_{t_k} = \left[\alpha_g \cdot BB_{t_k}^- - \left(\alpha_g \cdot BB_{t_k}^- - AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m) \right)^+ \right] \cdot 1_{\{even=1\}} \quad [7-11]$$

La formule [7-11] diffère de la formule [7-10] uniquement lorsque la garantie intègre une revalorisation de la benefit base (TMG ou cliquet). La valeur des frais prélevés en fonction de l'épargne, de la benefit base et de la prime initiale peuvent, dans certains cas, être proportionnels (voir chapitres 9 et 10).

7.4 Evaluation du tarif de la garantie seule

Nous choisissons d'étudier dans la suite du mémoire la garantie seule¹. A partir des résultats obtenus précédemment dans ce chapitre, nous pouvons écrire la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et de l'assuré et en déduire la valeur de la garantie.

7.4.1 Modélisation de la valeur de la garantie GMWB seule

Nous introduisons 2 nouvelles notations dans cette partie :

$H_{t_k}^{vie}$	Valeur actualisée de la garantie à la date t_k
$v^{t_k} = e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} = P(0, t_k)$	Coefficient d'actualisation à la date t_k (prix du zéro coupon)

¹ Il serait aussi possible, à partir des résultats obtenus précédemment, d'écrire la valeur de l'ensemble « contrat + garantie » en fonction des probabilités de décès. Nous ne développons pas les expressions correspondantes.

En utilisant les probabilités définies dans la partie 7.1.2, nous écrivons l'expression de $H_{t_k}^{vie}$:

$$H_{t_k}^{vie} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_x \geq t_k\}} \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{N_{t_k}^{ec}}{l_x} \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k} \right]$$

Cette formule permet de prendre en compte les différentes modélisations de la mortalité que nous avons exposées dans la partie 7.1.1. Dans le mémoire, la mortalité est supposée indépendante du risque financier et déterministe¹, nous pouvons donc simplifier l'expression² :

$$H_{t_k}^{vie} = {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k} \right]$$

Nous en déduisons l'expression de la valeur de la garantie à la date $t = 0$:

$$V_O^G = \sum_{k=1}^{N.T} H_{t_k}^{vie} = \sum_{k=1}^{N.T} {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k} \right] \quad [7-12]$$

Remarque : T désigne la somme de la maturité de la garantie proprement dite et du différé. Par exemple pour une garantie GMWB de durée 15 ans et prévoyant un différé de 4 ans, nous aurons $T = 19$ ans.

En développant l'équation [7-12], nous mettons en évidence la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et de l'assuré :

$$V_O^G = \underbrace{\sum_{k=1}^{N.T} {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) C_{t_k}^W v^{t_k} \right]}_{VAP(\text{Prestations})} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N.T} {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) F_{t_k} v^{t_k} \right]}_{VAP(\text{Frais})}$$

En utilisant la méthode de Monte Carlo, nous pouvons transformer les espérances en somme³ afin de déterminer la valeur de la garantie pour un scénario d'actifs donné (j) et de calculer ensuite la moyenne sur l'ensemble des scénarios :

$$V_O^G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^{N.T} \underbrace{{}_{t_k}p_x \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x^{(j)} \right) (C_{t_k}^{W,(j)} - F_{t_k}^{(j)}) v^{t_k,(j)}}_{\text{Valeur actualisée du flux de la garantie pour le scénario d'actifs (j)}} \right]$$

7.4.2 Prise en compte de la garantie GMDB

Les garanties GMWB / GLWB incluent souvent une garantie décès complémentaire. La valeur actualisée des flux $H_{t_k}^{vie}$ devient alors H_{t_k} et s'écrit :

¹ Si nous avons choisi d'effectuer des tirages sur la mortalité, nous ne pourrions pas sortir $N_{t_k}^{ec}$ de l'espérance.

² Les rachats peuvent être dynamiques (dépendant de la trajectoire de l'épargne), nous ne pouvons donc pas les sortir de l'espérance

³ Dans notre cas, il aurait aussi été possible d'inverser les sommes pour calculer l'espérance à chaque date t_k puis pondérer par le nombre d'assurés vivants à cette date

$$H_{t_k} = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_x \geq t_k\}} \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} \right]}_{\text{Flux de la GMWB (vie)}=H_{t_k}^{Vie}} + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{t_{k-1} \leq T_x < t_k\}} \cdot C_{t_k}^D \cdot e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} \right]}_{\text{Flux de la GMDB (décès)}=H_{t_k}^{D\acute{e}c\acute{e}s}} \quad [7-13]$$

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe précédent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} H_{t_k} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{N_{t_k}^{ec}}{l_x} \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k} \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{N_{t_{k-1}}^d}{l_x} \cdot \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) \cdot C_{t_k}^D \cdot v^{t_k} \right] \\ &= {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k} \right] + {}_{t_{k-1}}q_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) \cdot C_{t_k}^D \cdot v^{t_k} \right] \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors la valeur de la garantie à la date $t = 0$:

$$\begin{aligned} V_0^G &= \sum_{k=1}^{N.T} {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) (C_{t_k}^W - F_{t_k}) v^{t_k} \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N.T} {}_{t_{k-1}}q_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) C_{t_k}^D v^{t_k} \right] \end{aligned} \quad [7-14]$$

Remarque : si nous supposons que le contrat ne comprend qu'une garantie GMDB ($G_{t_k} = 0$ et $C_{t_k}^W = 0$), nous pouvons écrire que :

$$C_{t_k}^D = G_{t_k}^{D-} - AV_{t_k}^- = AV_0 - AV_{t_k}^-$$

Nous retrouvons alors la valeur d'une garantie plancher simple (en supposant que les rachats sont statiques et que le coefficient $\alpha_{t_k} = 1$) :

$$V_0^G = \sum_{k=1}^{N.T} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|1/N}R_x \right) \left({}_{t_{k-1}}q_x \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(AV_0 - AV_{t_k}^-)^+ v^{t_k} \right] - {}_{t_k}p_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[F_{t_k} v^{t_k} \right] \right)$$

7.4.3 Evaluation des frais correspondant à la prime pure

Nous notons α_g^{PP} le tarif en prime pure de la garantie. Ce niveau de frais est fixé de manière à égaliser la valeur actuelle probable de la différence entre les engagements de l'assureur et ceux de l'assuré à la souscription. La valeur ainsi déterminée contient une marge implicite provenant de l'évaluation prudente des paramètres financiers et actuariels (best estimate).

Ces frais ne permettent pas à l'assureur de faire face à l'ensemble de ses coûts. La mise en place d'une stratégie de couverture engendre par exemple des frais de structure h de la plateforme de couverture. L'assureur ne disposerait alors plus que de $\alpha_g^{PP} - h$ pour honorer ses engagements au titre de la garantie.

Nous indexons les quantités *Prestation* et *Frais* de la garantie par le niveau de frais qui sera utilisé pour projeter l'évolution de l'épargne. La valeur de α_g^{PP} est telle que :

$$V_0^G = VAP \left(\text{Prestation}_{\alpha_g^{PP}} \right) - VAP \left(\text{Frais}_{\alpha_g^{PP}} \right) = 0$$

Si $V_0^G > 0$, cela signifie qu'en moyenne les prestations payées par l'assureur sont supérieures aux frais prélevés. Le tarif en prime pure α_g^{PP} doit donc être revu à la hausse.

Nous obtenons par cette méthode un tarif en prime pure fonction de l'âge de souscription, du sexe, du différé et de l'allocation d'actifs de l'assuré. Il est possible de proposer un tarif dépendant uniquement de l'allocation d'actifs et de l'âge au début de la phase de distribution¹. Dans ce cas, l'assureur doit faire une hypothèse sur la structure du portefeuille cible (âge, sexe...) et rechercher ensuite la valeur de α_g^{PP} qui permet d'annuler la valeur de la garantie à la souscription.

7.4.4 Evaluation de la prime commerciale

Plusieurs sources d'incertitudes demeurent lorsque nous fixons la valeur du tarif en prime pure α_g^{PP} :

- Les paramètres financiers peuvent différer de ceux qui ont servi à calculer α_g^{PP} (en raison d'un tarif qui n'aurait pas été mis à jour² suffisamment vite);
- La composition du portefeuille dans le cas d'un tarif agrégé et le comportement des assurés peuvent diverger par rapport aux hypothèses faites pour déterminer le tarif ;
- Le programme de couverture mis en place peut se révéler moins efficace que prévu (écart entre la couverture théorique et la couverture réelle pour un notionnel donné).

L'assureur doit donc inclure une marge de sécurité pour compenser ces déviations ainsi que pour couvrir le coût du capital immobilisé par l'assureur au titre des exigences de solvabilité³. Cette marge de sécurité devrait aussi permettre à l'assureur de dégager du profit.

La difficulté pour passer de la prime pure à la prime commerciale réside dans le fait qu'il n'est pas possible d'ajouter un chargement de sécurité a posteriori (comme on le fait par exemple pour les produits de prévoyance). En effet, ce chargement a un impact sur la trajectoire de l'épargne pour un scénario d'actifs donné, et provoquera un déclenchement anticipé de la garantie. Ainsi, plus le chargement de sécurité sera important et plus les prestations augmenteront. Ce point est vérifié dans les applications numériques des chapitres 9 et 10.

Pour déterminer le chargement de sécurité à appliquer, nous proposons la méthode suivante :

- Nous déterminons la prime pure sous différents stress tests⁴ portant sur les paramètres financiers et actuariels. Au stress test (i) correspond un niveau de frais $\alpha_g^{PP,(i)}$;
- Nous définissons le tarif commercial comme étant le maximum de ces primes pures :

$$\alpha_g^{PC} = \max_i (\alpha_g^{PP,(i)}; \alpha_g^{PP}) \quad [7-15]$$

En utilisant cette méthode, nous intégrons une marge explicite dans la tarification. L'assureur prélèvera donc, à la souscription, un chargement supérieur au coût réel de la garantie dans la majorité des cas⁵ :

¹ C'est le cas par exemple d'Accumulator Retraite et de Terre d'Avenir

² A $t = \epsilon$, les conditions de marché ont changé. Le coût économique de la garantie à la souscription aura varié alors que l'assureur n'aura pas modifié son tarif. L'assureur s'engage en effet pour une durée déterminée (exemple de la Mondiale Partenaire) ou indéterminée (Allianz et Axa). La marge permet de réduire par ailleurs la fréquence de changement des tarifs qui provoque une augmentation des coûts et de la complexité de gestion suite à la mise en place de nouvelles générations de contrats.

³ Nous ne faisons pas figurer de chargement explicite au titre de la marge de solvabilité dans la suite du mémoire

⁴ Ces stress test seront définis pour chaque type de garanties

⁵ En cas de tarif agrégé, l'assuré peut différer de l'assuré moyen qui a été utilisé pour déterminer la prime commerciale. De même le coût économique de la garantie varie en fonction de la date de souscription.

$$\underbrace{\alpha_g^{PC}}_{\text{Tarif de la garantie}} = \max_t \left(\alpha_g^{PP,(i)}; \alpha_g^{PP} \right) = \underbrace{\alpha_g^{PP}}_{\text{Coût économique de la garantie}} + \underbrace{\max_t \left(\alpha_g^{PP,(i)} - \alpha_g^{PP}; 0 \right)}_{\text{Marge de sécurité}}$$

Nous noterons dans la suite α_g le tarif en prime commerciale α_g^{PC} .

Remarque : d'autres méthodes pour déterminer α_g^{PC} auraient pu être retenues. Par exemple :

- Choisir α_g^{PC} de manière à ce que l'engagement de l'assureur à la souscription de la garantie soit égal à un pourcentage ν ($\nu < 1$) de l'engagement de l'assuré sous les hypothèses best estimate ;
- Choisir α_g^{PC} de manière à ce que l'engagement de l'assureur à la souscription de la garantie soit inférieur à l'engagement de l'assuré dans $x\%$ des cas (calcul d'une VaR avec $x > 50\%$ par exemple) sous les hypothèses best estimate.

7.4.5 Vérification du tarif commercial

Une fois le tarif α_g fixé, nous pouvons déterminer la marge de la garantie à la souscription pour chaque versement j . Nous pouvons décomposer le tarif de la manière suivante :

$$\alpha_g = CE^j + M^j \quad [7-16]$$

CE^j désigne le coût économique de la garantie, c'est à dire le tarif en prime pure pour le versement j au moment de la souscription :

- Ce coût est évalué en valeur de marché au moment de la souscription ;
- Il correspond au coût de mise en place du portefeuille de couverture¹ (autofinancée) à la souscription sous les hypothèses de marché parfait. Il serait différent si l'assureur cherchait à couvrir le portefeuille à une date ultérieure ;
- Il est calculé, pour un assuré donné et par versement. C'est-à-dire que, du point de vue de l'assureur, deux versements effectués par le même assuré à quelques jours d'intervalle n'auront pas nécessairement le même coût économique CE^j puisque les conditions de marché ne seront pas les mêmes.

La marge attendue M^j est variable pour chaque versement j :

- La marge sera généralement positive à la souscription. Dans le cas contraire, une perte sera réalisée sur la garantie par l'assureur puisque cela signifie que le chargement prélevé au titre de la garantie est insuffisant par rapport à son coût réel.
- La marge est constatée en résultat au fur et à mesure de la vie du contrat et peut servir à compenser l'impact d'une déviation du comportement de l'assuré ou d'un dysfonctionnement du programme de couverture (voir chapitre 12).

Les paramètres CE^j et M^j sont, par construction, constants au cours de la vie de la garantie.

Nous définissons la valeur de l'option à la date t_k :

$$OV_{t_k}^j = VAP_{t_k} \left(\text{Prestation}_{\alpha_g}^j \right) - \min \left(1, \frac{CE^j}{\alpha_g} \right) \cdot VAP_{t_k} \left(\text{Frais}_{\alpha_g}^j \right) \quad [7-17]$$

¹ Les frais étant prélevés au fur et à mesure de la vie du contrat, la mise en place du portefeuille de couverture (par exemple achat d'options) à $t = 0$ est effectuée sur la trésorerie de l'assureur. L'entrée dans des contrats futures (Δ) et des swaps (ρ) ne provoque pas de décaissement. La mise en place de portefeuilles d'options impactera la trésorerie de l'assureur.

Nous définirons par la suite la provision mathématique comme étant égale à la valeur de la garantie (voir chapitre 12).

Dans le cas où $CE^j \leq \alpha_g$, la marge du versement est positive ou nulle ($M^j \geq 0$) et l'équation [7-17] s'écrit alors :

$$OV_{t_k}^j = VAP_{t_k} \left(Prestation_{\alpha_g}^j \right) - \frac{CE^j}{\alpha_g} \cdot VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) \quad [7-18]$$

La valeur de l'option ne prend en compte que la partie des frais correspond au coût économique de la garantie (définie au moment du versement).

Dans le cas où $CE^j > \alpha_g$, la marge du versement est négative ($M^j < 0$) et l'équation [7-17] s'écrit alors :

$$OV_{t_k}^j = VAP_{t_k} \left(Prestation_{\alpha_g}^j \right) - VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right)$$

L'intégralité des frais est prise en compte dans le calcul de la valeur de l'option. Cette expression permet de ne pas minimiser la valeur de l'option. En effet, en l'absence du minimum en facteur de la valeur actuelle probable des frais, la valeur de l'option serait donnée par l'équation [7-18], laissant sous-entendre que l'assureur perçoit des frais qui n'existent pas en réalité.

La marge attendue sur le contrat peut alors s'écrire :

$$M_{t_k}^j = \frac{M^j}{\alpha_g} VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) = \left(1 - \frac{CE^j}{\alpha_g} \right) VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) \quad [7-19]$$

Dans la mesure où $VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) > 0$, nous pouvons réécrire l'équation [7-17] pour faire apparaître la marge contenue dans le tarif en prime :

$$OV_{t_k}^j = VAP_{t_k} \left(Prestation_{\alpha_g}^j \right) - VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) + \max(M_{t_k}^j, 0) \quad [7-20]$$

Remarque : les calculs de ce chapitre pourraient donner lieu à l'estimation d'intervalles de confiance. Nous utiliserions alors la méthode du bootstrap sur l'ensemble des $N_{scenario}$ valeurs de PM dont nous disposons : constitution de N_b échantillons de $N_{bootstrap}$ éléments en effectuant pour chacun de ces échantillons des tirages avec remise parmi les $N_{scenario}$ valeurs de PM, calcul de la moyenne et des quantiles de la distribution obtenues à partir des N_b échantillons... *Nous ne mènerons pas ces calculs dans la suite du mémoire.*

Le modèle de passif étant défini, nous étudions dans le chapitre suivant le modèle de génération d'actifs.

Chapitre 8 : Modélisation de l'actif

La modélisation des actifs est un enjeu important, notamment en raison de l'impact sur les queues de distribution et sur l'estimation des quantiles dans le cadre de Solvabilité 2.

Ce chapitre détaille les modèles qui seront utilisés dans la suite du mémoire. La plupart des assureurs dispose de générateurs de scénarios économiques (type Barrie et Hibbert...) mais nous avons fait le choix d'explicitier les modèles retenus afin de mieux comprendre l'impact de la modélisation sur les résultats. Notre objet n'est pas, dans ce chapitre, d'effectuer une revue exhaustive et une analyse comparée des différents modèles utilisés par les assureurs.

Chaque classe d'actif sera modélisée séparément. Les modèles globaux¹ et économétriques ne seront pas abordés dans le mémoire. Il s'agit d'une piste de développement pour des travaux ultérieurs, notamment pour mesurer l'impact de l'inflation sur les résultats obtenus².

En nous appuyant sur **Kling et al. (2010)** et sur **Shah et Bertsimas (2008)** qui démontrent que l'ajout d'un modèle à volatilité stochastique a peu d'impact sur le prix de la garantie, nous avons choisi d'exclure ce genre de modèle. Nous nous limiterons donc dans la suite à un modèle lognormal prenant en compte une courbe des taux déterministe (dans ce cas, il s'agira du cadre de Black & Scholes) ou un processus de taux stochastique. Nous pensons par ailleurs qu'il est nécessaire dans un premier temps d'utiliser des modèles simples pour saisir l'effet et l'interaction des différents risques sur le coût de la garantie. Une étude plus détaillée, prenant en compte d'autres modèles d'actifs³, devra être menée dans un second temps afin de mieux mesurer le risque induit par le modèle (queues épaisses, asymétrie de la distribution...).

Le modèle de passif que nous avons développé dans le chapitre précédent prévoit d'utiliser un pas mensuel ($N = 12$) pour les trajectoires d'actifs afin de rendre possible une variation de la fréquence des revenus garantis ($N_{even} \in \{1,12\}$). Nous calibrerons les modèles d'actifs pour générer des données mensuelles.

8.1 Modélisation des actions

Nous utilisons un modèle lognormal à volatilité constante pour les actions. Ce type de modèle sous-estime l'occurrence des cas extrêmes et conduit à minimiser la fréquence de déclenchement (ainsi que le coût) de la garantie. Pour le *pricing*, cette propriété a peu d'impact car nous raisonnons en moyenne mais elle pourrait poser problème lorsque nous nous intéresserons aux queues de distribution dans le chapitre 11 (couverture) et le chapitre 13 (exigences de solvabilité).

¹ Il s'agit notamment des modèles de Wilkie (1985), de Brennan & Xia (2000), d'Ahlgrim (2005)... Le modèle de Wilkie par exemple est construit à partir de l'indice des prix à la consommation (assimilée à l'inflation), modélisé comme un processus auto régressif d'ordre 1. Il permet de déduire la dynamique des autres variables (rendement et dividende des actions, rendement obligataire...) en se basant sur les données historiques

² Les modèles doivent alors être cohérents avec les équilibres économiques de long terme (inflation, croissance du PIB, niveau des taux d'intérêt réels...) afin d'améliorer la capacité prédictive aux dates lointaines

³ Notamment les modèles à changement de régimes et à sauts, les modèles à volatilité stochastique pour la modélisation des actions ainsi que des modèles de taux plus complexes.

8.1.1 Modèle et discrétisation

La dynamique du sous-jacent S_t sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} est donnée par le processus stochastique suivant :

$$dS_t = r_{t-1}S_t dt + \sigma_S S_t dZ_t^1 \quad [8-1]$$

Dans ce modèle, le taux sans risque peut :

- Etre supposé constant, il s'agit alors du modèle de Black & Scholes ;
- S'écrire comme une fonction déterministe du temps : le taux sans risque suit alors la courbe des taux zéro coupon. Dans l'intervalle $[t, t + dt[$, le taux sans risque considéré sera égal au taux forward $f(t, t + dt)$;
- Suivre un processus stochastique. Le taux sans risque appliqué sur l'intervalle $[t, t + dt[$ sera alors égal à r_{t-1} , conformément aux conventions¹ retenues et aux notations du programme Matlab. Nous envisageons ce cas (voir la partie 8.2).

L'équation différentielle [8-1] admettant une solution explicite², il est préférable de travailler sur la discrétisation de cette solution :

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(r_{t-1} - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) t + \sigma_S Z_t^1 \right]$$

Nous posons $t_k = k/N$ (voir partie 7.1) et introduisons $\epsilon_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ une loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} S_{t_{k+1}} &= S_{t_k} \cdot \exp \left[\left(r_{t-1} - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) (t_{k+1} - t_k) + \sigma_S (Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}) \right] \\ &= S_{t_k} \cdot \exp \left[\left(r_{t-1} - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \cdot \Delta t + \sigma_S \sqrt{\Delta t} \cdot \epsilon_1 \right] \end{aligned} \quad [8-2]$$

8.1.2 Etalonnage du modèle

Nous supposons que le sous-jacent est un fonds indiciel répliquant le CAC 40 ou l'Eurostoxx50 (dividendes réinvestis) afin d'éviter la problématique du risque de base (voir chapitre 3). Nous abordons dans cette partie la volatilité et la prime de risque. Nous traiterons l'évaluation du taux sans risque dans la partie 8.2.

8.1.2.1 Estimation de la volatilité

En nous basant sur un historique mensuel de ces indices (total return), il est possible de déduire le rendement et la volatilité historique par le maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_S - \frac{\widehat{\sigma}_S^2}{2} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} \right) \\ \widehat{\sigma}_S^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\ln \left(\frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} \right) - \widehat{\mu}_S \right]^2 \end{aligned}$$

¹ Sur l'intervalle $[0,1[$, nous utiliserons ainsi le taux r_0

² En l'absence de formule explicite, il serait nécessaire de discrétiser l'équation différentielle partielle en utilisant un schéma d'Euler ou de Milstein

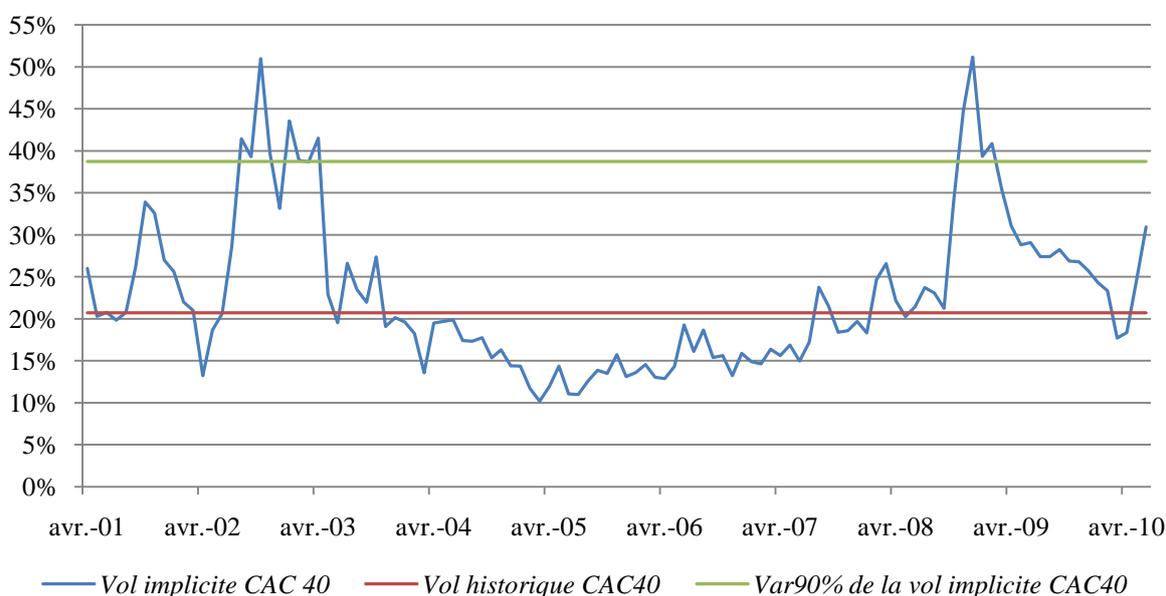
Tableau 8-1 : Paramètres estimés pour le CAC 40 et l'Eurostoxx50

	μ mensuelle	σ mensuelle	σ annuelle ¹
CAC 40 du 01/01/1988 au 01/06/2010	0.895%	6.00%	20.80%
CAC 40 du 01/02/01 au 01/06/2010	-0.013%	5.98%	20.72%
Eurostoxx50 du 01/02/01 au 01/06/2010	-0.045%	6.30%	21.83%

Le choix de l'historique est important en raison des biais contenus dans les statistiques longues (par exemple le rendement est supérieur pour le CAC40 lorsque l'on considère la série débutant le 01/01/1988 au lieu du 01/02/01 car cela correspond au fait que l'indice a été créé à un moment de point bas des marchés). Il est donc nécessaire de s'appuyer sur des avis d'experts dans cette étape de calibrage.

La nature de la volatilité (historique ou implicite) utilisée est importante. Nous traçons sur le graphique suivant la volatilité implicite du CAC 40 inscrite dans les options d'achat européennes de durée 3 mois.

Figure 8-1 : Volatilité implicite du CAC 40 calculée à partir des options européennes de maturité 3 mois



La volatilité implicite mesure l'anticipation par le marché de la variation future du cours du sous-jacent, telle qu'elle est contenue dans les options. Plus elle est élevée, plus le marché anticipe une forte variation des cours du sous-jacent et plus les options seront chères.

La volatilité implicite présente un effet de *smile* pour les maturités courtes, qui s'estompe pour les maturités plus longues (la courbe devient plate). Elle est, par définition, calculable uniquement pour les maturités des options cotées sur le marché (non disponible au-delà de 5 ou 10 ans). En finance de marché, le *pricing* et la couverture d'une option sont effectuées en calibrant le processus de Black & Scholes avec la volatilité implicite correspondant à la maturité de cette option. Nous privilégierons l'utilisation de la volatilité implicite, lorsqu'elle est disponible, pour mettre en place la couverture des engagements dans la mesure où il s'agit généralement d'opération sur des instruments liquides et disponibles sur le marché.

¹ Il s'agit de la volatilité annuelle équivalente, calculée à partir de la volatilité mensuelle.

Pour effectuer le *pricing* de la garantie, nous nous appuyerons sur la volatilité historique. Cependant, sachant que la couverture est réalisée avec la volatilité implicite et que le prix des garanties augmente avec la volatilité¹, il est nécessaire de prendre une marge de prudence pour la volatilité retenue pour le *pricing*². En nous basant sur la Figure 8-1 et sur le Tableau 8-2, nous retenons $\sigma_S = 25\%$ ³ comme valeur centrale pour la volatilité du CAC40 et de l'Eurostoxx50. Nous mesurerons dans les chapitres 9 et 10 l'influence de ce paramètre sur le prix de l'option.

Tableau 8-2 : Quantile de la volatilité implicite du CAC40 et de l'Eurostoxx50

	<i>VaR</i> _{90%}	<i>VaR</i> _{75%}
CAC 40 du 01/04/2001 au 01/06/2010	38.72%	26.79%
Eurostoxx50 du 01/04/2001 au 01/06/2010	37.48%	25.77%
CAC 40 du 01/04/2001 au 01/06/2008	33.14%	22.88%

8.1.2.2 Evaluation de la prime de risque

L'évaluation sous probabilité risque neutre \mathbb{Q} ⁴ signifie que tous les actifs ont pour rendement le taux sans risque. Lorsque nous nous intéresserons à la distribution réelle des paiements futurs (ALM, gestion du capital économique, backtesting...), nous utiliserons des projections des actifs sous la probabilité historique \mathbb{P} . Dans le cadre Solvabilité 2, il sera de même nécessaire d'effectuer des simulations sous probabilité risque neutre du passif pour chacune des simulations centrales effectuées sous probabilité historique (voir chapitre 13.2.2) afin de déterminer le besoin de fonds propres.

Le changement de probabilité de \mathbb{Q} à \mathbb{P} ne modifie pas la structure du processus proposée au paragraphe 8.1 mais nécessite d'introduire une prime de risque pour rendre compte du rendement réel sous \mathbb{P} (mesure de l'excès de rendement par rapport au taux sans risque).

La prime de risque action est calculée comme le quotient de l'écart entre la tendance et le taux sans risque par la volatilité (ratio de Sharpe). Sur la période allant du 01/12/98 au 01/06/10, elle est de l'ordre de 7.5%. L'estimation de la prime de risque devra faire l'objet d'un travail plus développé car il s'agit d'un élément fondamental dans l'équilibre économique de la garantie.

8.2 Modélisation du taux sans risque

Nous choisissons d'utiliser le modèle de taux court de Vasicek pour modéliser le taux sans risque. Malgré ses défauts⁵, ce modèle à un facteur⁶ est souvent utilisé en première approche pour mesurer l'impact de l'introduction d'un modèle de taux stochastique sur les résultats

¹ Voir chapitre 3.1 sur les options européennes pour un rappel de ces 2 résultats

² Par exemple que la valeur retenue corresponde à un quantile élevé de la distribution de la volatilité historique

³ Correspond approximativement à la *VaR*_{75%} de la volatilité implicite (supérieure à la volatilité historique du CAC40 qui est égale à 21%).

⁴ Il serait aussi possible de calibrer l'ensemble des modèles sous la probabilité historique et d'utiliser des déflateurs pour estimer les prix sous la probabilité risque neutre. Les prix déflatés sont alors des martingales sous la probabilité historique. Les déflateurs sont uniques si l'on considère que le marché est complet.

⁵ Le modèle de Vasicek ne permet pas de reproduire l'ensemble des courbes des taux et les prix des produits dérivés de taux côtés. Par ailleurs, il fournit des taux négatifs avec une probabilité non nulle

⁶ Un modèle à un facteur signifie que le taux court dépend d'une seule source d'incertitude.

obtenus dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes. Il possède en effet l'avantage de fournir des formules fermées pour le prix des zéro coupons, ce qui facilite le calibrage. D'autres modèles de taux pourraient être utilisés, nous renvoyons le lecteur vers **Priault et Mrad (2005)** et **Roncalli (1998)** pour une analyse complète de cette problématique.

8.2.1 Modèle et discrétisation

Le processus de taux court¹ s'écrit sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dZ_t \quad [8-3]$$

La constante a ($a > 0$) désigne la vitesse de retour vers la tendance² de long terme b du taux court. Plus la valeur de a est élevée et plus le phénomène de retour à la moyenne est marqué. La volatilité σ_r désigne la volatilité du taux court et est indépendante du niveau des taux.

Le brownien Z_t figurant dans la dynamique de r_t est corrélé avec le brownien Z_t^1 présent dans le processus d'évolution de l'actif risqué.

En notant ϕ la corrélation entre l'actif risqué et le taux sans risque, nous pouvons écrire $Z_t = \phi \cdot Z_t^1 + \sqrt{1 - \phi^2} \cdot Z_t^2$ avec Z_t^1 et Z_t^2 indépendants.

En posant $t_k = k/N$, il est possible de discrétiser l'expression [8-3] selon un schéma d'Euler. Nous utiliserons cette formule dans le programme :

$$r_{t_{k+1}} = r_{t_k} + \frac{a(b - r_{t_k})}{N} + \sigma_r \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} \cdot (\phi \cdot \epsilon_1 + \sqrt{1 - \phi^2} \cdot \epsilon_2) \quad [8-4]$$

L'équation [8-3] possède par ailleurs une solution explicite :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma_r e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

En utilisant la propriété de l'intégrale stochastique, nous savons que :

$$\int_0^t e^{as} dW_s \sim \mathcal{N} \left(0; \int_0^t (e^{as})^2 ds = \frac{e^{2at} - 1}{2a} \right)$$

Nous en déduisons que le taux court est gaussien de moyenne $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t)$ et de variance $Var(r_t)$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

$$Var(r_t) = \frac{\sigma_r^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Remarque : ces moments permettraient de calibrer le modèle sur un historique de taux.

Nous pouvons alors réécrire le modèle de Vasicek de la manière suivante (ce qui fournirait une autre façon d'implémenter le modèle de taux dans le programme informatique) :

$$r_{t_{k+1}} = r_{t_k} e^{-a/N} + b(1 - e^{-a/N}) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2a/N}}{2a}} \cdot (\phi \cdot \epsilon_1 + \sqrt{1 - \phi^2} \cdot \epsilon_2)$$

¹ Le taux court est le taux d'un placement effectué sur la période $[t, t + dt]$

² b correspond à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de l'espérance de r_t

La transformée de Laplace nous permet alors de déterminer une formule fermée pour le prix des zéro coupons (en supposant que les taux d'intérêts sont continus). En effet, pour une variable aléatoire gaussienne $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, nous avons la relation suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\lambda X}) = e^{\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2}$$

En appliquant ce résultat à $X = \int_t^T r_u du$ et $\lambda = -1$, nous obtenons le prix en t d'un zéro coupon d'échéance T (versant 1 euro en T) :

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{-m(t, T) + \frac{1}{2}V(t, T)} \quad [8-5]$$

Avec :

$$m(t, T) = b(T - t) + (r_0 - b) \cdot \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)$$

$$V(t, T) = -\frac{\sigma_r^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma_r^2}{a^2} \left((T - t) - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)$$

Nous en déduisons le taux¹ zéro-coupon équivalent $R(t, T)$ à la date t , pour une durée $T - t$:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln(P(t, T)) = \frac{1}{T - t} \left(m(t, T) - \frac{1}{2}V(t, T) \right) \quad [8-6]$$

En développant l'expression, nous obtenons la fonctionnelle de Vasicek :

$$R(t, T) = \left(b - \frac{\sigma_r^2}{2a^2} \right) - \left(b - \frac{\sigma_r^2}{2a^2} - r_t \right) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) + \frac{\sigma_r^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2$$

$$= R_{\infty} - (R_{\infty} - r_t) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) + \frac{\sigma_r^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2$$

Ainsi, dès que la dynamique de r_t est connue, la courbe des taux zéro coupons l'est aussi. L'expression de la fonctionnelle permet en effet d'obtenir, à toute date t_k , la structure par terme des taux à partir de la valeur de r_{t_k} .

La courbe des taux peut être croissante, décroissante ou présenter une légère bosse. On parle de modèle affine pour qualifier cette famille de modèle.

8.2.2 Etalonnage du modèle

Nous calibrons notre modèle de taux court sur la courbe de taux zéro coupon au 30/04/10 fournie par l'IAF². D'autres méthodes de calibration auraient pu être utilisées, par exemple en travaillant sur une série historique ou sur les prix des swaptions³ disponibles sur le marché (cette dernière méthode permettrait alors de déterminer la volatilité implicite des taux).

¹ Le taux sans risque correspond à la limite du taux zéro coupon lorsque T tend vers t .

² D'autres méthodes auraient pu être utilisées pour calibrer le modèle de taux, par exemple en utilisant un historique de l'Euribor ou du TME (voir remarque de la partie 8.2.1)

³ Un swaption est une option dont le sous-jacent est un swap de taux. L'acheteur du swaption a le droit d'entrer, à une date donnée, dans un swap de taux dont les caractéristiques ont été fixées à l'avance. En contrepartie, l'acheteur du swaption verse une prime au vendeur. Le swaption peut donner lieu à la mise en place effective du swap (swap settlement) ou au versement par le vendeur d'une soulte (cash settlement).

Les taux zéro coupons fournis par l'IAF sont des taux discrets. Pour simplifier nos calculs, nous faisons l'hypothèse dans la suite que les taux sont continus et que les prix des zéro coupons s'obtiennent par la formule de la partie 8.2.1. Ces deux modes de calcul du prix des obligations zéro coupon donnent des résultats très proches (l'écart maximal est de 0.393%).

En utilisant la fonctionnelle du taux zéro-coupon continu évaluée à la date $t = 0$, nous déduisons le prix des zéro coupons $P(0, T) = \exp(-R(0, T) \times T)$. En poursuivant la courbe des taux, nous posons $r_0 = 0.2\%$. Cette valeur est cohérente avec l'ordre de grandeur de l'EONIA à cette date..

Nous pouvons alors chercher les paramètres¹ (a, b, σ_B) du modèle qui permettent de minimiser l'écart quadratique entre les prix des zéro coupons fournis par la courbe des taux spot au 30/04/10 et les prix calculés à partir du modèle de Vasicek. Nous utilisons le critère sur les prix afin d'avoir le maximum de précision pour les taux d'actualisation.

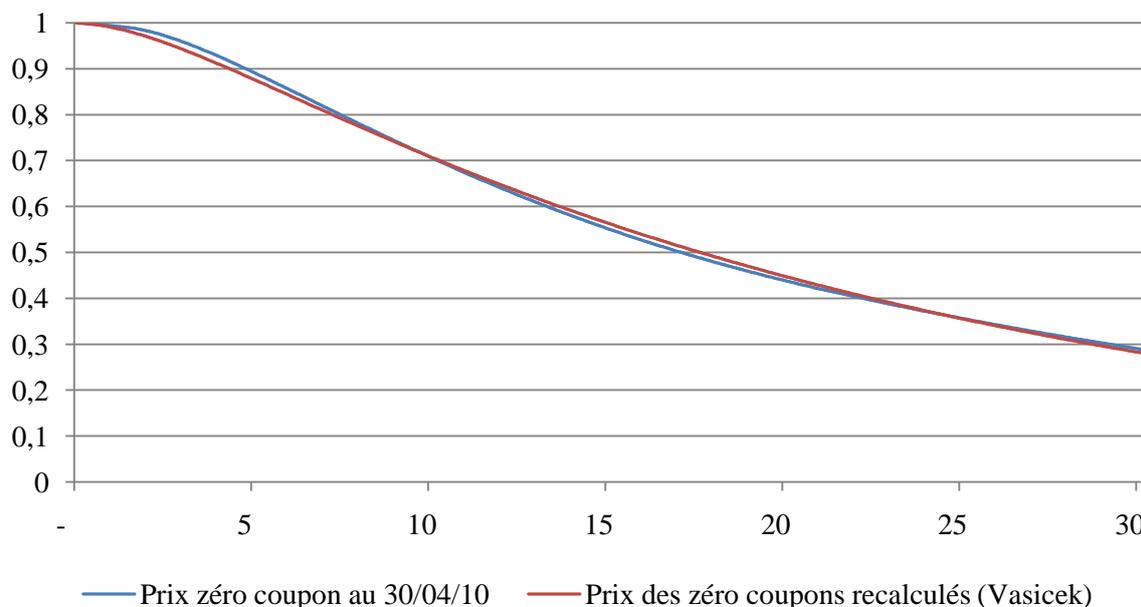
$$D(a, b, \sigma_B) = \min_{(a, b, \sigma_B)} \sqrt{\sum_{t_k=1}^{648} (P_{\text{courbe au 30/04/10}}(0, t_k) - P_{\text{calculés}}(0, t_k))^2}$$

Nous utilisons les taux mensuels pour des maturités allant de 1 mois à 30 ans pour étalonner notre modèle. L'utilisation du solveur d'Excel sans analyse des résultats conduit par exemple à trouver un $b = 13.5\%$, ce qui ne correspond pas à la valeur des taux sans risque usuels. Nous retraits manuellement ces résultats et proposons les paramètres suivants :

Tableau 8-3 : Paramètres estimés du modèle de Vasicek

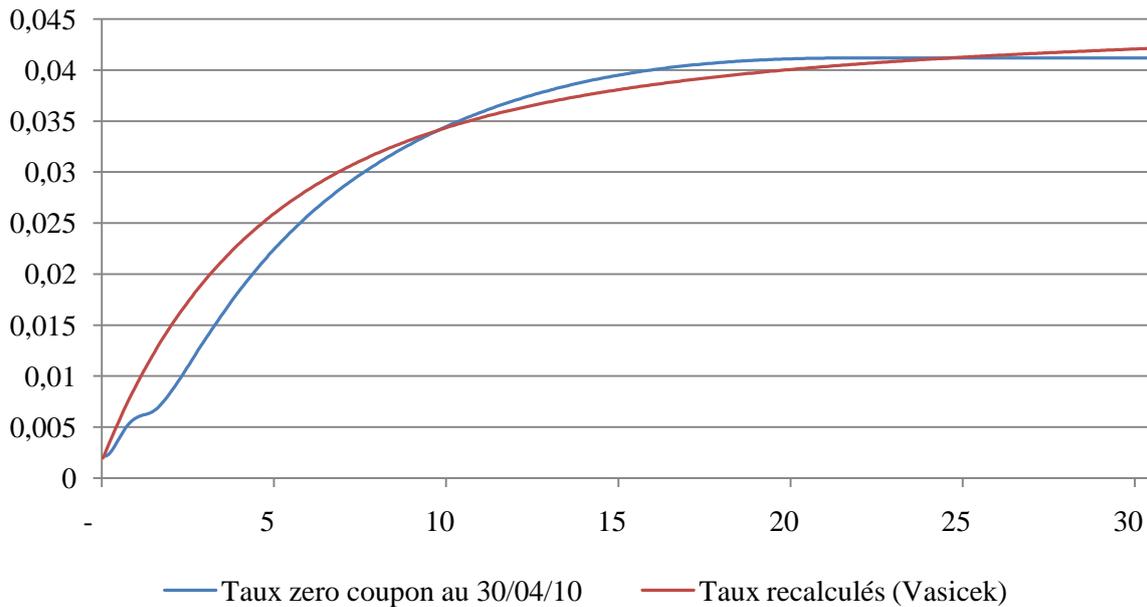
a	35%
b	5%
σ_r	3.10%

Figure 8-2 : Prix des zéro coupon au 30/04/10 et prix reconstitués (Vasicek)



¹ Le paramètre b correspond à la valeur du paramètre sous la probabilité historique \mathbb{P} . La valeur sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , notée $b^{\mathbb{Q}}$, fait intervenir une prime de risque λ : $b^{\mathbb{Q}} = b - \lambda \cdot \sigma_r / a$

Figure 8-3 : Taux zéro coupon au 30/04/10 et taux reconstitués (Vasicek)



Dans le cas où nous translatons la courbe des taux de manière uniforme, seuls les paramètres b et r_0 du modèle seront modifiés : $b_{choc} = b - choc$ et $r_{0,choc} = r_0 - choc$. Nous nous limitons aux chocs par translation mais l'étude du risque de taux nécessiterait de tester des scénarios de taux stressés pour une partie seulement des maturités.

8.2.3 Utilisation des taux sans risque dans la modélisation

Si le taux sans risque est supposé constant, nous effectuons les diffusions et l'actualisation des flux en utilisant cette valeur. Nous prenons $r = 4\%$ dans le scénario central (voir Figure 8-3).

Si le taux sans risque suit un modèle de Vasicek, nous simulons N trajectoires de taux courts pour $t \in [0, T]$. Pour chaque trajectoire j , le modèle permet de calculer la courbe des taux associée à ce scénario :

$$P^j(0, t_k) = \exp\left(-\int_0^{t_k} r_u du\right) = \exp\left(-\Delta t \times \sum_{i=1}^k r_{t_{i-1}}\right) \quad [8-7]$$

Remarque : le modèle de Black & Scholes utilisé ne prend pas en compte la structure par terme des taux. Une amélioration consisterait à considérer le taux forward $R(t_k, t_{k+1})$ pour projeter l'actif sur $[t_k, t_{k+1}[$. Le pas de temps du modèle de projection étant mensuel, nous serions amené à considérer les taux forward 1 mois ($\Delta t = 1/12$). Ceux-ci peuvent se déduire de la courbe des taux zéro coupons spot puisqu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$P(t_k, t_{k+1}) = \frac{P(0, t_{k+1})}{P(0, t_k)}$$

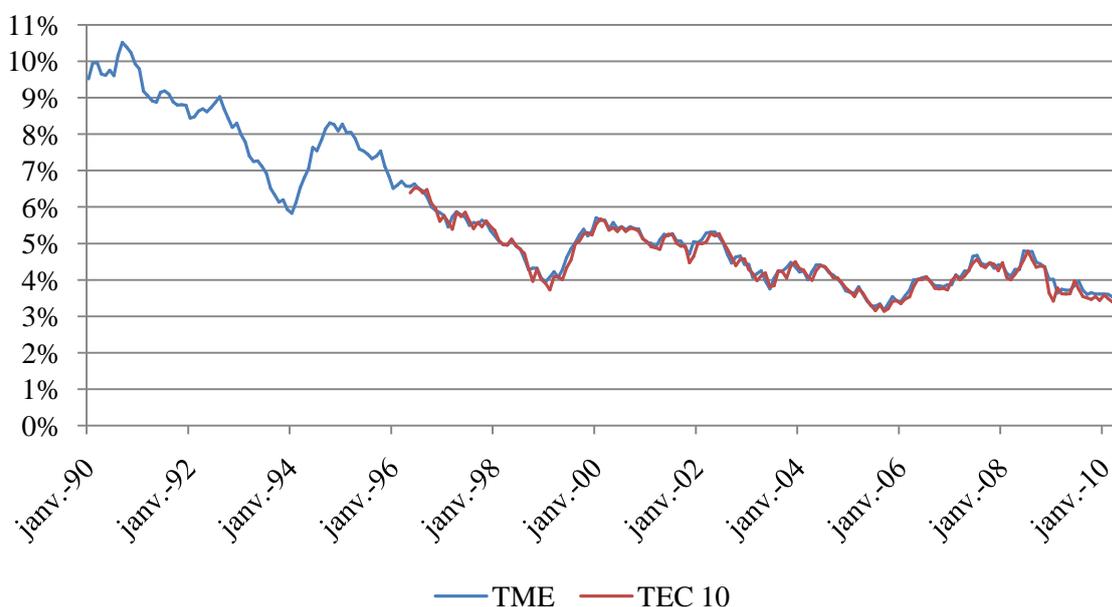
En utilisant la définition du prix des zéro coupons $P(0, t_k) = \exp(-R(0, t_k) \times t_k)$, nous pouvons développer cette relation. Nous obtenons alors la relation suivante :

$$R(t_k, t_{k+1}) = R(0, t_{k+1}) + \frac{R(0, t_{k+1}) - R(0, t_k)}{\Delta t} \times t_k$$

Nous n'envisageons pas ce développement dans la suite du mémoire.

Remarque : le TME est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'Etat à taux fixe supérieurs à 7 ans¹. Le TME est généralement proche du CNO-TEC10 et peut par conséquent être approximé par la valeur du zéro coupon d'échéance 10 ans.

Figure 8-4 : Historique du TME et du TEC 10



D'autres méthodes de simulation existent, par exemple considérer le processus lognormal décrivant le zéro coupon 10 ans. Il est nécessaire de veiller à la taille de l'historique retenu pour calibrer le modèle étant donné le changement de régime qui est intervenu entre les années 90 et les années 2000 (voir Figure 8-4).

Le TME est utilisé pour calculer les provisions dans le cadre de la réglementation et des normes comptables françaises (voir chapitre 4.2). *Nous adopterons dans la suite du mémoire une approche économique des éléments de bilan et du compte du résultat, ce qui permettra de négliger les contraintes reposant sur les taux d'actualisation à utiliser.*

Dans la suite du mémoire, nous négligeons l'inflation et raisonnons sur la valeur réelle des engagements. Il s'agit d'une hypothèse forte étant donné le contexte économique actuel et la réglementation Solvabilité 2 qui prévoit de prendre en compte l'inflation :

- Contrairement aux branches IARD ou santé, l'inflation n'a pas d'impact sur les primes versées ni sur la revalorisation des prestations à payer. Le pourcentage de retrait et le niveau de frais sont dans notre cas fixés à la souscription du contrat ;
- L'inflation aura un impact indirect sur la valorisation des actifs² et pourrait influencer sur la date de déclenchement de la garantie ;
- L'inflation augmentera les taux d'actualisation entrant dans le calcul des provisions mathématiques. En cas de hausse de l'inflation, les engagements de long terme seront atténués par cet effet puisque les engagements ne sont pas indexés (sauf en cas de garantie cliquet...). Cet effet joue en notre faveur et l'approximation de négliger l'inflation apparaît prudente en première approche.

Nous retiendrons ce point dans le chapitre 14 comme piste de développement ultérieur.

¹ Le CNO-TEC10 correspond au Taux de l'Echéance Constante 10 ans, c'est à dire au taux de rendement actuariel d'une valeur du Trésor fictive dont la durée de vie serait à chaque instant égale à 10 ans

² La forte part d'actions dans les allocations d'actifs devant permettre de compenser une partie de l'inflation

8.3 Modélisation de l'épargne

8.3.1 Modélisation du support obligataire

Nous supposons que l'épargne est investie sur un indice action (CAC 40 par exemple) et sur un indice obligataire (EuroMTS).

Dans les parties précédentes, nous avons modélisé les actions et le taux sans risque :

$$\begin{aligned} dS_t &= r_{t-1}S_t dt + \sigma_S S_t dZ_t^1 \\ dr_t &= a(b - r_t)dt + \sigma_r(\phi \cdot dZ_t^1 + \sqrt{1 - \phi^2} \cdot dZ_t^2) \end{aligned}$$

Nous supposons que l'évolution du support obligataire suit un processus lognormal et n'est pas corrélé avec celle des taux courts. En supposant que l'indice EuroMTS¹ est corrélé avec un facteur ϕ_1 avec le sous-jacent action, la dynamique de l'indice est donnée par sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$dB_t = r_t B_t dt + \sigma_B B_t \cdot (\phi_1 \cdot dZ_t^1 + \sqrt{1 - \phi_1^2} \cdot dZ_t^3) \quad [8-8]$$

Cette modélisation permet par ailleurs, en supposant $\sigma_B = 0$, de modéliser le cas où la partie non exposée en actions serait investie en actifs sans risque².

Figure 8-5 : Performance du CAC 40 et de l'Euro MTS

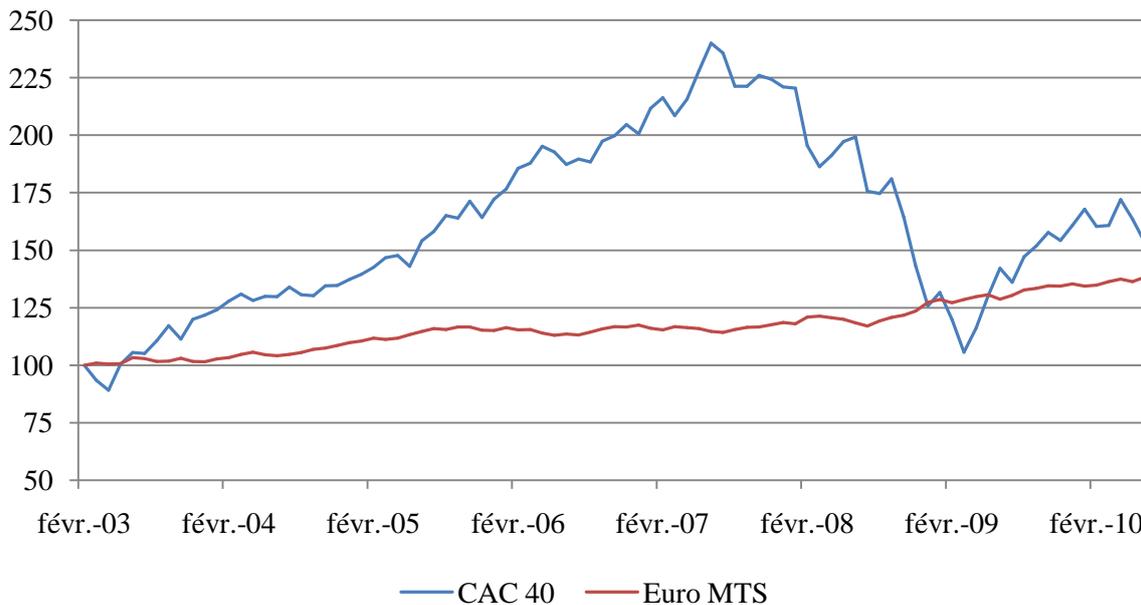


Tableau 8-4 : Paramètres estimés pour l'indice Euro MTS

	μ mensuelle	σ mensuelle	σ annuelle
Euro MTS du 01/02/03 au 01/06/10	0.368%	0.977%	3.384%

Nous supposons que la corrélation entre les indices est constante et indépendante du temps. Cette approximation limite la portée du modèle puisque l'intensité de la dépendance entre les

¹ Généralement les supports obligataires sont construits de manière à maintenir une durée constante. C'est pourquoi le support obligataire est souvent modélisé par un zéro coupon de maturité 10 ans.

² En ignorant le rôle de la politique commerciale (option cachée) et des réserves dans le taux servi sur le fonds euro, l'utilisation d'un support investi en actifs sans risque permet de donner une idée de ce que serait l'impact d'une allocation construite à partir d'actions et d'un fonds euro.

actifs varie en fonction des situations des marchés et de la durée d'observation. Nous effectuerons des analyses de sensibilité par rapport à la valeur de ce paramètre dans les chapitres 9 et 10. Nous proposerons des pistes de développements ultérieurs sur ce point dans le chapitre 14.

Nous étalonnons la corrélation par rapport à l'historique des indices. Par définition de la covariance, en notant $\phi_{X,Y}$ la corrélation entre les variables aléatoires X et Y :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(X - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)) (Y - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y)) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \cdot Y) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y) = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \phi_{X,Y}$$

A partir des estimateurs de la moyenne écrits dans la partie 8.1.2, nous pouvons donc en déduire un estimateur de la corrélation entre l'indice action et l'indice obligataire.

$$\hat{\phi}_{X,Y} = \frac{1}{\hat{\sigma}_X \cdot \hat{\sigma}_Y} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} \right) \ln \left(\frac{S'_{t_{n+1}}}{S'_{t_n}} \right) - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} \right) \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\frac{S'_{t_{n+1}}}{S'_{t_n}} \right) \right) \right]$$

Tableau 8-5 ; Corrélation entre les indices actions et obligataires

	Corrélation
<i>CAC 40 et EuroMTS du 01/02/03 au 01/06/10</i>	-14.42%
<i>Eurostoxx50 et EuroMTS du 01/02/03 au 01/06/10</i>	-13.48%

8.3.2 Modélisation de l'épargne

Dans ces contrats, l'assuré peut généralement choisir entre 2 stratégies de gestion :

- Laisser dériver les poids de chaque sous-jacent ;
- Arbitrer entre les différents actifs, à une fréquence prédéfinie (généralement annuelle), de manière à maintenir la proportion dans l'épargne de chaque actif constante.

Dans la suite, nous supposons pour simplifier les notations que la valeur initiale de chaque support est égale à 100 (correspondant à la valeur de la prime nette investie) :

$$S_0 = B_0 = 100 = AV_0$$

8.3.3 Modélisation en l'absence de rebalancement

Soit $w_{eq}^{t=0}$ la proportion d'actions de l'épargne au moment de la souscription. Par définition :

$$AV_0 = w_{eq}^{t=0} \cdot S_0 + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_0$$

En l'absence de rebalancement, nous en déduisons l'évolution de l'épargne AV_t :

$$AV_t = w_{eq}^{t=0} \cdot S_t + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_t$$

Le rendement de l'épargne entre t_k et t_{k+1} s'écrit alors :

$$\rho(t_k, t_{k+1}) = \frac{AV_{t_{k+1}}}{AV_{t_k}} - 1 = \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{t_{k+1}} + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_{t_{k+1}}}{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{t_k} + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_{t_k}} - 1$$

8.3.4 Modélisation en cas de rebalancement annuel

Nous supposons que les poids des actifs au sein de l'épargne sont rebalancés lorsque $t_k \in \mathbb{N}$. En utilisant la partie entière $[x]$ de x , nous pouvons écrire que :

$$AV_{t_k} = w_{eq}^{[t_k]} \cdot S_{t_k} + (1 - w_{eq}^{[t_k]}) \cdot B_{t_k}$$

Avec :

- Pour $t_k < 1$, $w_{eq}^{[t_k]} = w_{eq}^{t=0}$
- Pour $t_k \geq 1$:

$$\begin{aligned} w_{eq}^{[t_k]} &= w_{eq}^{[t_k]-1} \cdot \frac{S_{[t_k]-1}}{S_{[t_k]}} \cdot \frac{AV_{[t_k]}}{AV_{[t_k]-1}} \\ &= w_{eq}^{[t_k]-1} \cdot \frac{S_{[t_k]-1}}{S_{[t_k]}} \cdot \frac{w_{eq}^{[t_k]-1} \cdot S_{[t_k]} + (1 - w_{eq}^{[t_k]-1}) \cdot B_{[t_k]}}{w_{eq}^{[t_k]-1} \cdot S_{[t_k]-1} + (1 - w_{eq}^{[t_k]-1}) \cdot B_{[t_k]-1}} \end{aligned} \quad [8-9]$$

Le rendement de l'épargne entre t_k et t_{k+1} s'écrit alors :

$$\rho(t_k, t_{k+1}) = \frac{AV_{t_{k+1}}}{AV_{t_k}} - 1 = \frac{w_{eq}^{[t_{k+1}]} \cdot S_{t_{k+1}} + (1 - w_{eq}^{[t_{k+1}]}) \cdot B_{t_{k+1}}}{w_{eq}^{[t_k]} \cdot S_{t_k} + (1 - w_{eq}^{[t_k]}) \cdot B_{t_k}} - 1$$

Supposons pour illustrer ces formules que le pas des simulations soit mensuel ($N = 12$) et que l'évolution des supports soient les suivantes :

Tableau 8-6 : Illustration du mécanisme de rebalancement du poids des actifs

	$t_k = 0$	$t_k = 11/12$	$t_k = 1^-$	$t_k = 1^+$
S_{t_k}	100	85	80	80
B_{t_k}	100	103	105	105
Nb parts actions	0.6	0.6	0.6	0.675
Nb parts obligations	0.4	0.4	0.4	0.343
AV_{t_k}	100	92.2	90	90
Proportion d'actions	60%	55.3%	53.3%	60%

L'épargne à $t = 11/12$ vaut $AV_{11/12} = w_{eq}^{t=0} \cdot S_{11/12} + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_{11/12} = 92.2$

La proportion d'actions $\alpha_{eq}^{11/12}$ en $t = 11/12$ est donnée par :

$$\alpha_{eq}^{11/12} = \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{11/12}}{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{11/12} + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_{11/12}} = \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{11/12}}{AV_{11/12}} = \frac{0.6 \times 85}{92.2} = 55.3\% < 60\%$$

Il n'y a pas de rebalancement à cette date et nous constatons que la proportion d'actions dans l'épargne a baissé suite à la revalorisation du support obligataire et à la chute du marché actions.

L'épargne à $t = 1$ (date de rebalancement) vaut $AV_1 = w_{eq}^{t=0} \cdot S_1 + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_1 = 90$

Avant rebalancement, la proportion d'actions dans l'épargne α_{eq}^{1-} est alors égal à :

$$\alpha_{eq}^{1-} = \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_1}{w_{eq}^{t=0} \cdot S_1 + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_1} = \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_1}{AV_1} = \frac{0.6 \times 80}{90} = 53.3\%$$

L'équation [8-9] permet de recalculer le nouveau nombre de parts du support actions (suite au rebalancement) :

$$w_{eq}^1 = w_{eq}^{t=0} \cdot \frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_1 + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_1}{w_{eq}^{t=0} \cdot S_0 + (1 - w_{eq}^{t=0}) \cdot B_0} = w_{eq}^{t=0} \cdot \frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{AV_1}{AV_0} = 62.2\%$$

La nouvelle proportion d'actions est alors :

$$\alpha_{eq}^{1+} = \frac{w_{eq}^1 \cdot S_1}{w_{eq}^1 \cdot S_1 + (1 - w_{eq}^1) \cdot B_1} = \frac{w_{eq}^1 \cdot S_1}{AV_1} = \frac{0.622 \times 80}{90} = 53.33\%$$

8.4 Test des propriétés des modèles

Le modèle d'actifs doit permettre de reproduire numériquement les propriétés des actifs sous les hypothèses usuelles des marchés financiers et de la probabilité risque neutre \mathbb{Q} .

8.4.1 Propriété de martingale

La valeur actualisée des actifs sont des martingales sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} . En se basant sur la Figure 8-6, nous voyons que cette propriété est validée pour les projections de courtes durées ($T \leq 30$ ans), quel que soit le nombre de simulations considérées.

Pour les échéances plus longues, la convergence du résultat nécessite davantage de simulations mais dépend aussi du tirage effectué. L'augmentation seule du nombre de tirages ne permet pas d'assurer la propriété de martingale. Nous devons par conséquent arbitrer entre la précision gagnée par l'augmentation du nombre de tirages et le temps d'exécution du programme. La convergence du modèle sera accélérée lorsque l'épargne sera investie dans un actif action et dans un actif obligataire.

Pour un nombre de simulations données, la sensibilité de la propriété de martingale au jeu de scénarios simulés peut provenir de l'instabilité résultante de l'utilisation dans le programme des variables aléatoires générée par défaut dans Matlab.

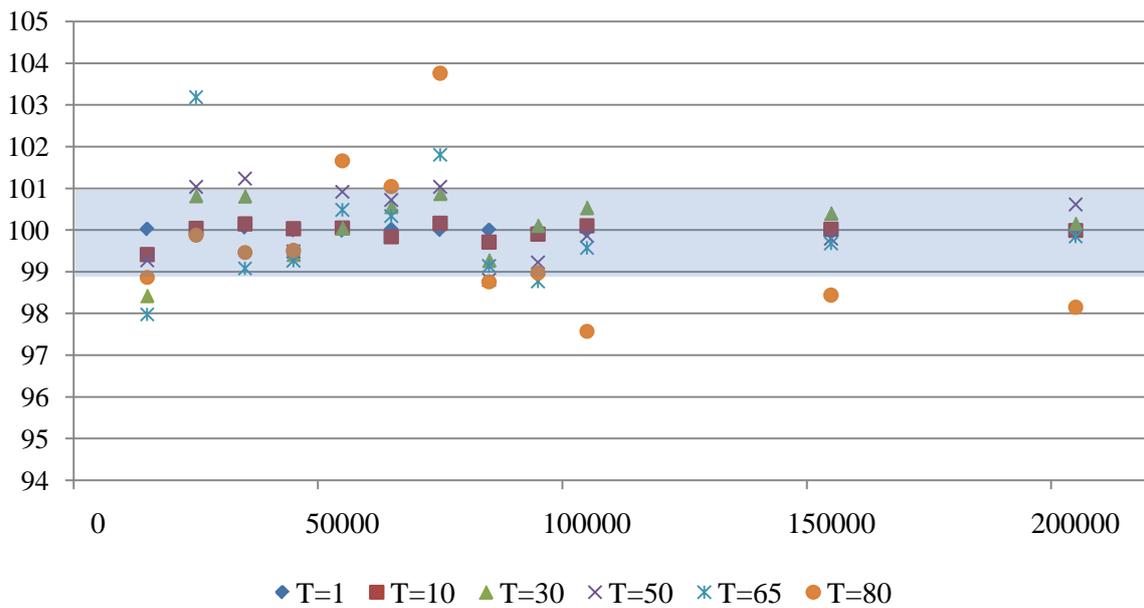
*Il serait intéressant de considérer dans des développements ultérieurs d'autres algorithmes de génération ainsi que l'utilisation de la méthode Quasi Monte Carlo (utilisation de suites « low discrepancy »). Nous renvoyons le lecteur vers **Planchet et Jacquemin (2003)** et **Huynh et al. (2006)** pour la mise en œuvre de ces algorithmes.*

Pour les garanties GMWB, la durée de projection est inférieure à 30 ans. Nous choisissons d'utiliser 10 000 scénarios antithétiques dans le cadre de l'étude de la GMWB et nous vérifierons que le résultat converge pour ce nombre de scénarios (voir partie 9.1)

Pour les garanties GLWB, la durée de projection sera au maximum d'environ 80 ans (en se basant sur la table de mortalité TGH-TGF 00-05, cela correspond à un âge de souscription voisin des 40 ans). Le nombre d'assurés en vie pour les âges élevés étant faible et les flux à ces âges étant actualisés avec des coefficients élevés, l'impact des erreurs de modélisation sera limité. Par ailleurs, la précision des estimations de la mortalité aux âges élevés est discutable puisque ces valeurs sont construites sur la base d'un échantillon de taille réduite.

Nous utiliserons 10 000 scénarios antithétiques dans le cadre de l'étude de la GLWB et vérifierons que le résultat converge pour ce nombre de scénarios (voir partie 10.1)

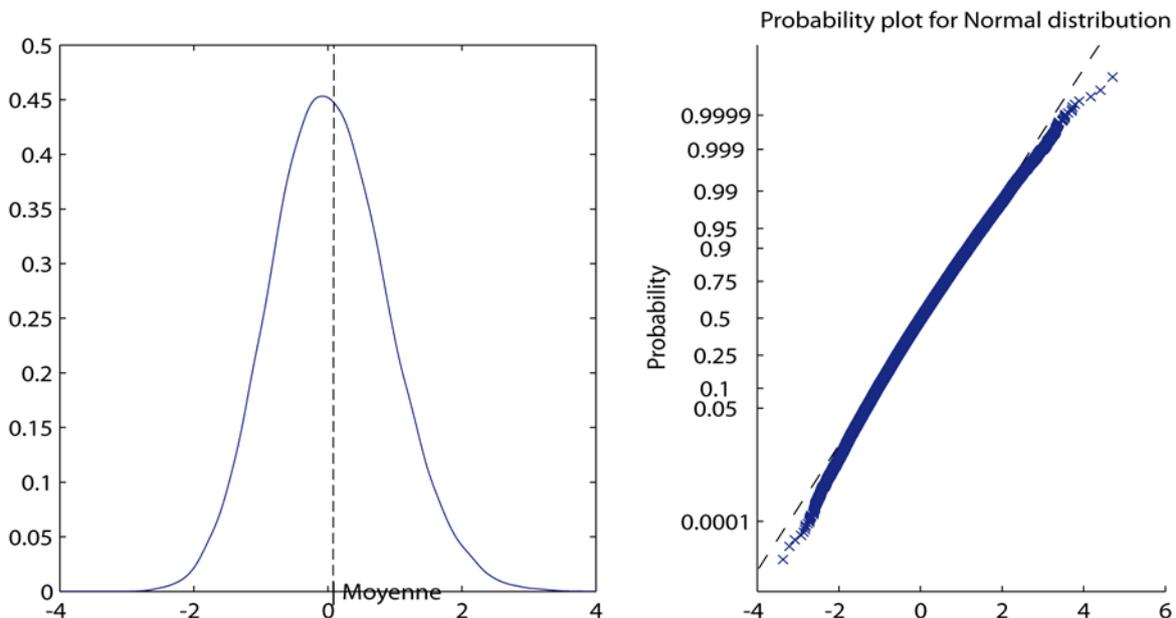
Figure 8-6 : Capacité du modèle (r constant) à reproduire la propriété de martingale ($w_{eq}^{t=0} = 100\%$)



8.4.2 Normalité des rendements des actifs

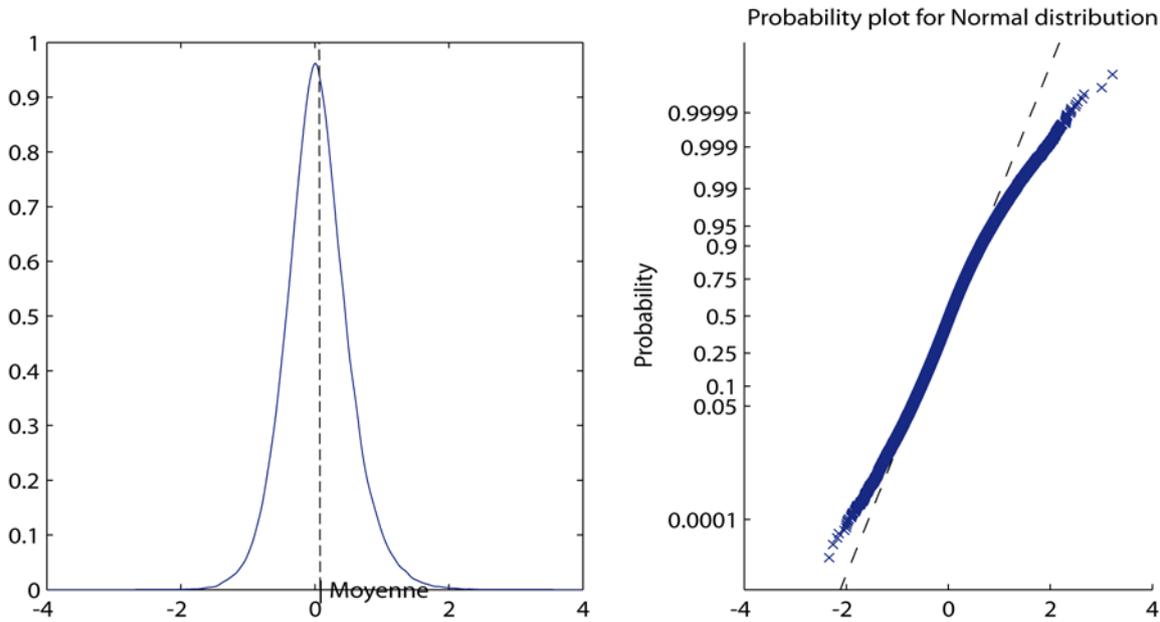
Nous vérifions, pour chaque date t_k , que le rendement d'un actif pris individuellement est distribué selon une loi normale (Figure 8-7).

Figure 8-7 : Densité du sous-jacent action ($\sigma_S = 25\%$, $r = 0.04\%$) pour $N = 100\ 000$ tirages et $T = 5$ ans



Remarque : le comportement de l'épargne constituée au moment de la souscription de $w_{eq}^{t=0} = 60\%$ d'actions reste globalement gaussien, même si les queues de distribution s'éloignent de celles de la loi normale (voir Figure 8-8).

Figure 8-8 : Densité du sous-jacent composé de 60% d'actions et de 40% en obligations à la souscription, sans rebalancement ($\phi_1 = -50\%$) pour $N = 100\ 000$ tirages et $T = 5$ ans



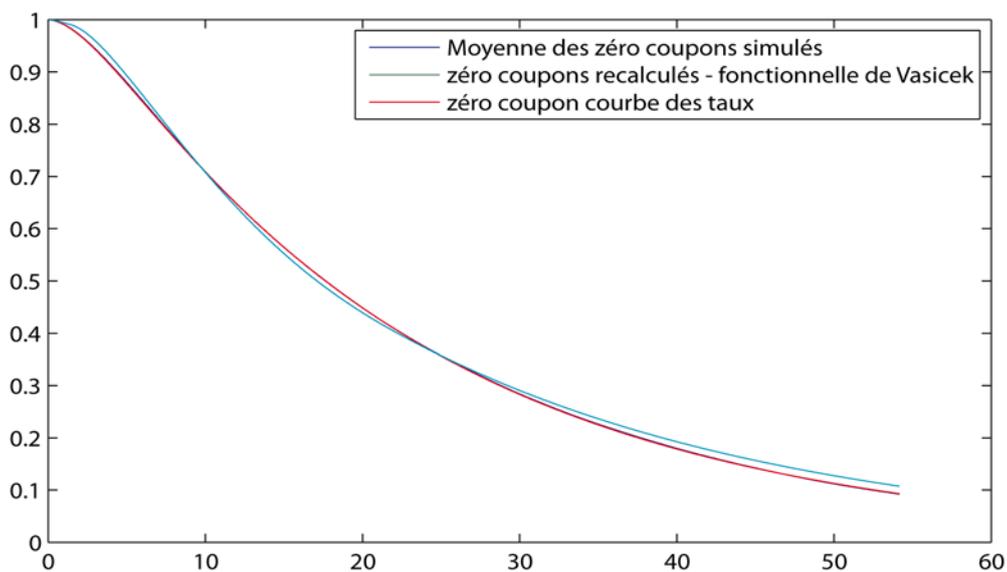
Lorsque l'épargne est constituée de deux actifs corrélés négativement, le comportement de celle-ci s'écarte du modèle gaussien.

8.4.3 Reconstitution de la courbe des taux

La projection de N trajectoires de taux courts permet de recalculer N courbes de taux en utilisant la relation [8-7].

La moyenne des taux zéro coupon de ces N courbes de taux permet de retrouver la courbe des taux sur laquelle le modèle de Vasicek a été calibré (voir Figure 8-9).

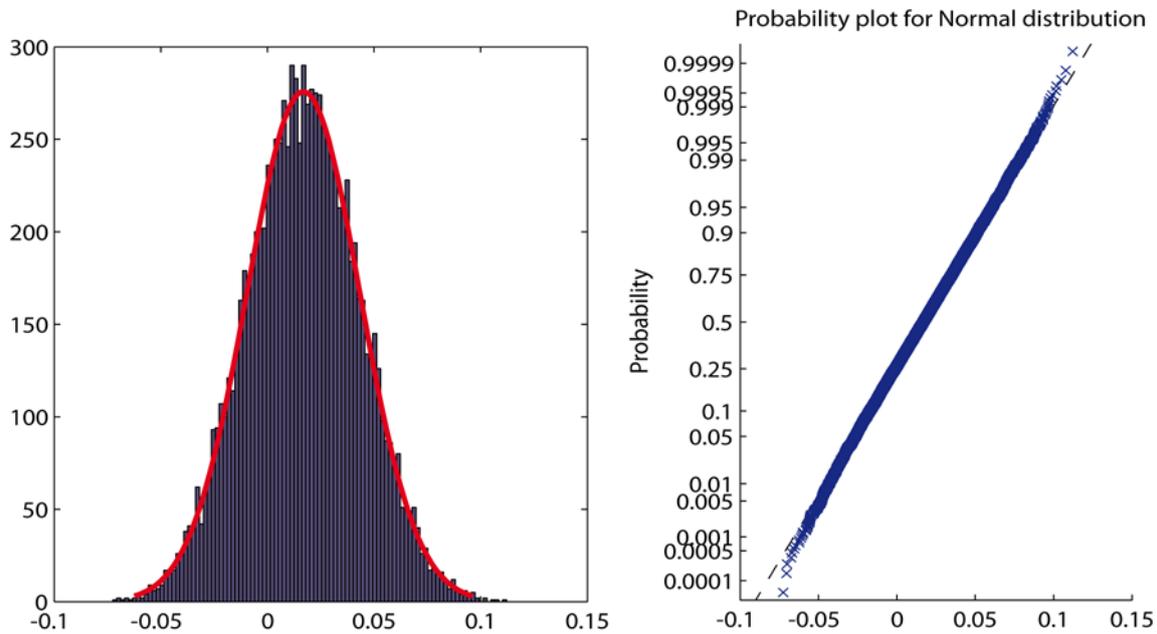
Figure 8-9 : Courbe des taux recalculés – $N_{scenario} = 10\ 000$



8.4.4 Normalité de la distribution du taux court

La relation [8-4] par exemple nous indique que le taux court est distribué normalement pour toutes les dates t_k . Nous le vérifions sur la Figure 8-10.

Figure 8-10 : Distribution pour $t_k = 12$ (1 an) des taux courts – $N_{scenario} = 10\ 000$



Nous voyons sur le graphique de gauche que le taux court prend souvent des valeurs négatives, ce qui aura un impact sur les applications numériques menées aux chapitres 9 et 10.

Remarque : d'autres tests permettent de vérifier la robustesse des modèles, par exemple retrouver le prix de certains produits dérivés sur taux ou sur actions. *Nous n'effectuerons pas ces tests dans la suite du mémoire.*

Nous disposons désormais du modèle de passif et du modèle d'actifs. Les deux prochains chapitres proposent des applications numériques et des études de sensibilité pour les garanties GMWB et GLWB.

Chapitre 9 : Sensibilité de la garantie GMWB

Dans ce chapitre, nous effectuons les applications numériques du modèle présenté aux chapitres 7 et 8. Le programme utilisé dans cette partie figure en annexe. Une analyse des sensibilités aux différents risques identifiés dans le chapitre 3 sera proposée.

9.1 Estimation de la prime pure

9.1.1 Définition du scénario central

Nous considérons un contrat GMWB de durée 15 ans, sans phase d'accumulation, souscrit par un homme de 50 ans. La mortalité est supposé suivre la table TGH 00-05. L'épargne est investie à 60% en action (CAC 40) et à 40% en actifs obligataires (EuroMTS). Aucun rebalancement du poids des actifs n'est prévu dans la gestion. Le taux de revenu annuel est égal à 6.67% ($1/T$). Nous supposons que l'assuré investit 100 euros et qu'aucun frais d'acquisition n'est prélevé¹. Le taux de rachat est de 5% par an dans le scénario central.

Paramètres	Notation	Valeur
Frais de gestion annuels	α_m	0.96%
Sexe assuré	<i>sexe</i>	M
Age à la souscription	x	50 ans

Le scénario central pour les actifs financiers a été défini dans le chapitre 8. Nous utilisons un modèle de Black & Scholes pour générer les scénarios d'actifs avec les paramètres suivants :

Paramètres	Notation	Valeur
Taux sans risque	r	4%
Volatilité du CAC 40	σ_S	25%
Volatilité de l'EuroMTS	σ_B	4%
Corrélation CAC 40 / EuroMTS	ϕ_1	-15%
Part action à la souscription	$w_{eq}^{t=0}$	60%

Le scénario central figure dans les tableaux de sensibilités en gras en italique.

9.1.2 Estimation du tarif en prime pure dans le scénario central

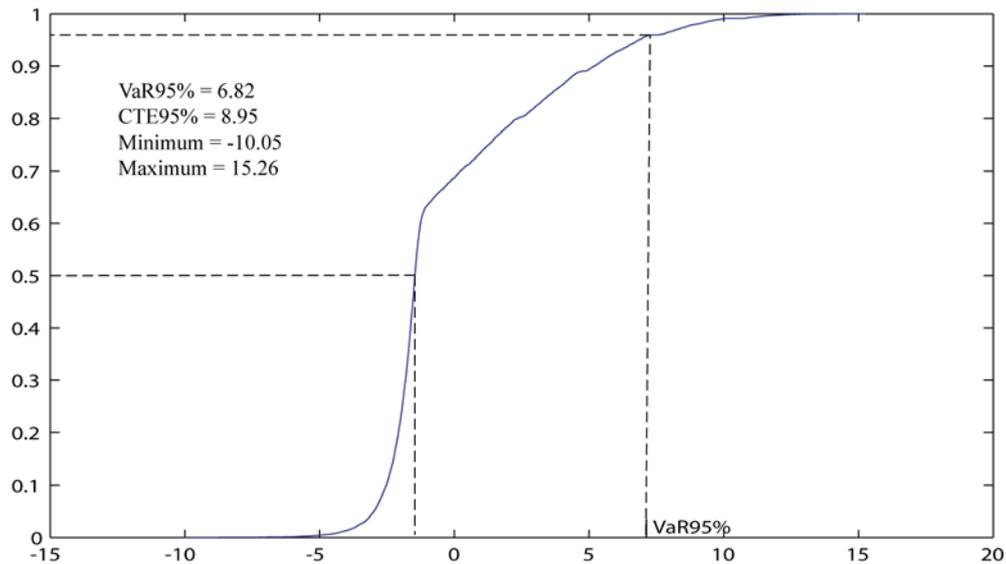
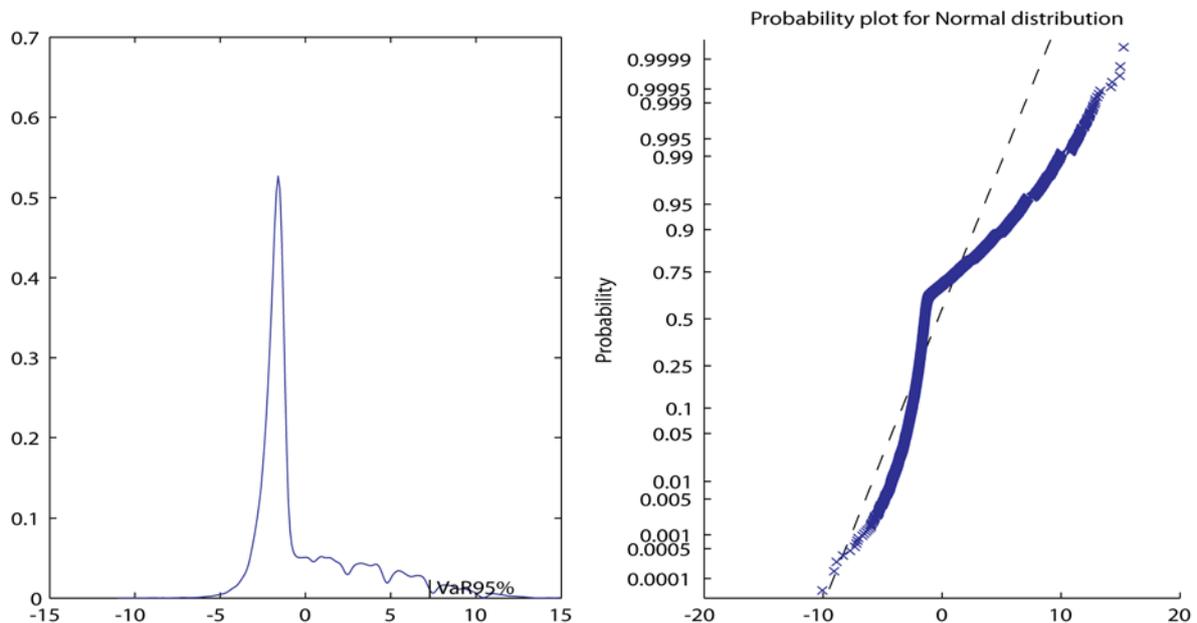
Nous utilisons notre modèle pour déterminer la prime pure dans le scénario central. Conformément aux analyses de la partie 8.4, le tarif converge très rapidement. Cette vérification confirme le choix d'utiliser 10 000 scénarios antithétiques pour déterminer le tarif de la garantie GMWB. Elle devrait être généralisée lorsque les paramètres financiers varient. Nous constatons que les valeurs extrêmes sont excentrées mais à très faible occurrence puisque le $CTE_{95\%}$ ² est proche de la $VaR_{95\%}$ (Figure 9-1). La densité de la valeur de la garantie n'est pas gaussienne (Figure 9-2).

¹ Les frais d'acquisition ne modifie pas la provision mathématique et la détermination de la prime pure de la garantie. En effet, les prestations et les frais sont calculées sur l'épargne ou sur la prime investie. Les frais d'acquisition interviennent uniquement dans le compte de résultat.

² Le $CTE_{x\%}$ mesure la perte moyenne pour les scénarios dont le résultat est supérieure à $VaR_{x\%}$.

Tableau 9-1 : Sensibilité du tarif de la garantie au nombre de simulation

Nombre de simulations	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
10 000	0.27%	6.82	8.95
20 000	0.27%	6.95	9.08
30 000	0.27%	6.86	9.01
40 000	0.27%	6.88	9.09
50 000	0.27%	6.98	9.10
100 000	0.27%	6.89	9.04

Figure 9-1 : Fonction de répartition du résultat de la garantie dans le cas central ($N_{scenario} = 10\ 000$)Figure 9-2 : Densité du résultat de la garantie GMWB dans le cas central ($N_{scenario} = 10\ 000$)

Nous étudions dans la suite de ce chapitre la sensibilité de la prime pure suite à une modification des paramètres du scénario central et du modèle d'actif utilisé.

9.1.3 Sensibilité à la proportion d'actions dans l'épargne

Nous testons la sensibilité du coût de la garantie à la proportion d'actions contenue dans l'épargne en l'absence de rebalancement.

Tableau 9-2 : Sensibilité du tarif à la part d'actions lors de la souscription - Sans rebalancement annuel

Part action ($w_{eq}^{t=0}$)	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0%	0.01%	-0.05	0.04
20%	0.01%	-0.05	0.32
40%	0.06%	2.27	3.58
60%	0.27%	6.82	8.95
80%	0.66%	13.52	16.66
100%	1.17%	21.33	25.39

Figure 9-3 : Densité de la valeur de la garantie en fonction de $w_{eq}^{t=0}$ à $t = 0$

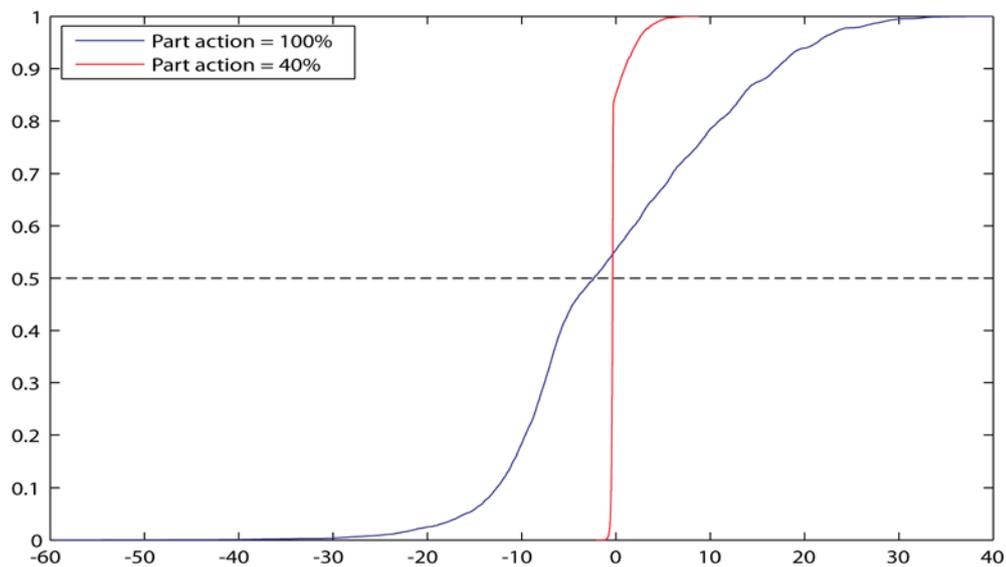
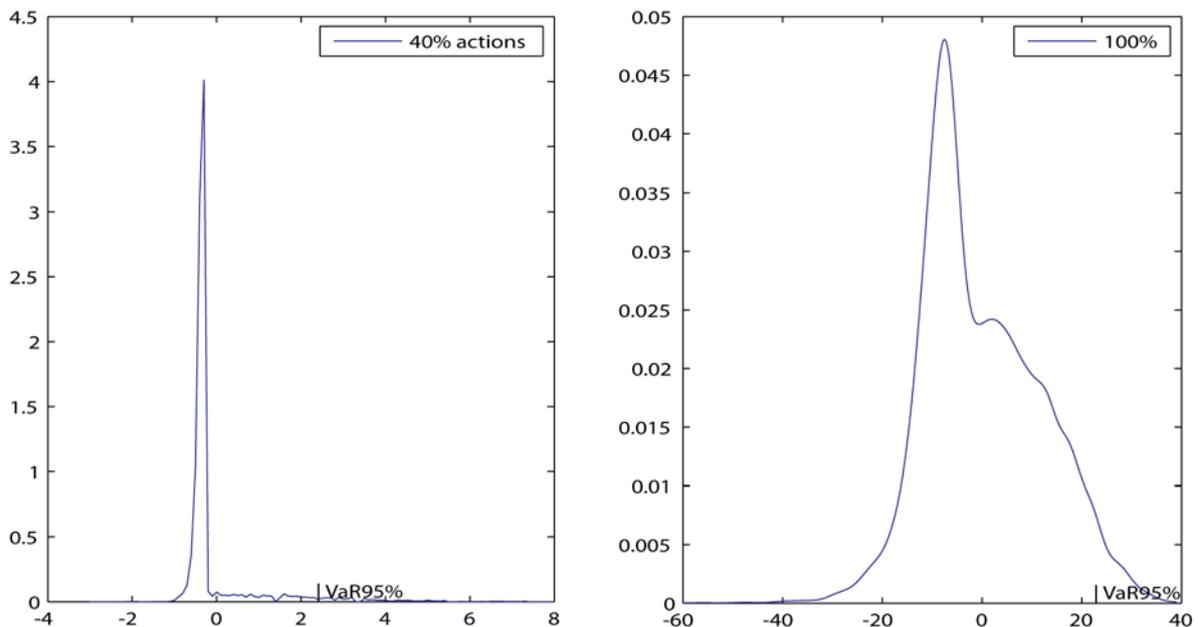


Figure 9-4 : densité du résultat de la garantie en fonction de $w_{eq}^{t=0}$ à $t = 0$



Le coût de la garantie et les indicateurs de risque augmentent fortement lorsque la part actions dépassent un certain seuil. Dans le scénario central, la valeur totale des frais ($\alpha_m + \alpha_g^{PP}$) dépasse 2% lorsque l'épargne est investie totalement en actions. Nous serons amené à limiter la proportion maximale d'actions dans l'allocation d'actifs de l'assuré pour des raisons d'affichage commercial, d'autant plus que le niveau des frais à prélever au titre de la garantie dépend des paramètres financiers lorsque la part actions augmente (voir Tableau 9-22).

La distribution de la valeur de la garantie est plus concentrée lorsque la proportion d'actions dans l'épargne à la souscription diminue. Les Figure 9-3 et Figure 9-4 illustrent la déformation des fonctions de répartition et des densités. Nous remarquons par ailleurs que les pertes maximales sur la garantie (c'est à dire lorsque la valeur de la garantie est positive) sont inférieures, en valeur absolue, aux gains maximaux.

Le tarif calculé pour la garantie est toujours plus élevé lorsque le produit prévoit des rebalancements annuels de l'épargne.

9.1.4 Sensibilité à la définition de la garantie

Nous nous intéressons dans cette partie à l'impact des variantes sur le coût de la garantie.

9.1.4.1 Sensibilité à la fréquence des revenus garantis

La notation $\{N_{even} = k\}$ signifie que les retraits s'effectuent k fois par an. Le Tableau 9-4 nous indique que la fréquence des événements n'a pas d'impact sur le coût de la garantie dans le cadre du scénario de référence.

Tableau 9-3 : Sensibilité du tarif à la fréquence de retrait des revenus garantis (scénario central)

N_{even}	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
1	0.27%	6.82	8.95
2	0.27%	6.96	8.95
4	0.28%	6.94	8.93
12	0.28%	6.93	8.92

Ce résultat reste valable sous un scénario financier plus volatil (voir Tableau 9-7).

Tableau 9-4 : Sensibilité du tarif à la fréquence de retrait des revenus garantis ($r = 3\%$, $\sigma_S = 35\%$)

N_{even}	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
1	1.01%	14.31	16.32
2	1.01%	13.64	16.09
4	1.01%	13.72	15.99
12	1.01%	13.66	15.92

L'assureur peut donc offrir la possibilité à l'assuré de choisir la fréquence de la mise à disposition des revenus garantis.

9.1.4.2 Sensibilité au montant des frais de gestion

La somme des frais prélevés ($\alpha_m + \alpha_g^{PP}$) augmente fortement lorsque l'on augmente la valeur des frais de gestion. Cette circularité du problème nous empêche d'ajouter *ex post* une marge de prudence sur le tarif de la garantie en prime pure et justifie l'approche proposée dans la

partie 7.4.4. L'augmentation des frais de gestion revient intuitivement à diminuer la valeur du taux sans risque.

Ainsi passer de $\alpha_m = 0.96\%$ à $\alpha_m = 0$ correspond approximativement à une augmentation du taux sans risque de 100bp. Le Tableau 9-22 nous indique alors que $\alpha_g^{PP} = 0.13\%$. La différence de valeur provient du fait que la modification de la valeur de α_m ne change pas les taux d'actualisation contrairement au fait de baisser l'hypothèse de taux sans risque.

Tableau 9-5 : Sensibilité du tarif au niveau des frais de gestion (scénario central)

α_m	α_g^{PP}	$\alpha_m + \alpha_g^{PP}$	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0%	0.15%	0.15%	5.52	7.53
0.60%	0.22%	0.82%	6.40	8.54
0.80%	0.25%	1.05%	6.68	8.88
0.96%	0.27%	1.23%	6.82	8.95
1.20%	0.32%	1.52%	7.64	9.55

9.1.4.3 Sensibilité à la maturité de la garantie

Le coût de la garantie diminue lorsque la maturité de la garantie augmente dans la mesure où les retraits sont plus souvent compensés par la revalorisation de l'épargne.

Tableau 9-6 : Sensibilité du scénario central à la maturité du produit

Maturité T	G	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
10 ans	10%	0.61%	9.98	12.42
15 ans	6.67%	0.27%	6.82	8.95
20 ans	5%	0.13%	4.49	6.21

Par ailleurs, nous constatons que plus la maturité augmente et moins le coût de la garantie est sensible à une variation des paramètres financiers (voir Tableau 9-24 et Tableau 9-25).

9.1.4.4 Sensibilité à l'assiette de la garantie

Les frais peuvent être formulés sur la base de l'épargne ou de la prime nette investie. Dans le scénario central, le ratio des frais entre les 2 formulations varie, tout en restant proche de 0.9.

Le calcul de ce ratio permet d'évaluer l'impact du passage à une formulation en fonction de l'épargne à une formulation en fonction de la prime initiale¹. L'écart obtenu lorsque la part actions est inférieure ou égale à 40% provient des arrondis à 2 décimales des frais calculés. Nous constatons que ce rapport est quasi-constant lorsque la part actions est supérieure ou égale à 60% mais il faudrait vérifier que ce rapport reste bien constant sous des scénarios économiques plus adverses. Ce n'est par exemple pas le cas pour les garanties GLWB (voir Tableau 10-11), ce qui empêche de comparer les produits dont les frais sont formulés en fonction de l'épargne avec ceux qui utilisent la benefit base comme assiette de frais.

Tableau 9-7 : Sensibilité du scénario central à l'assiette des frais prélevés au titre de la garantie

Assiette	$w_{eq}^{t=0}$	α_g^{PP}	Ratio	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Epargne	0%	0.01%	100%	-0.05	0.04
Prime		0.01%		-0.08	0.02
Epargne	20%	0.01%	100%	-0.05	0.32
Prime		0.01%		-0.08	0.31

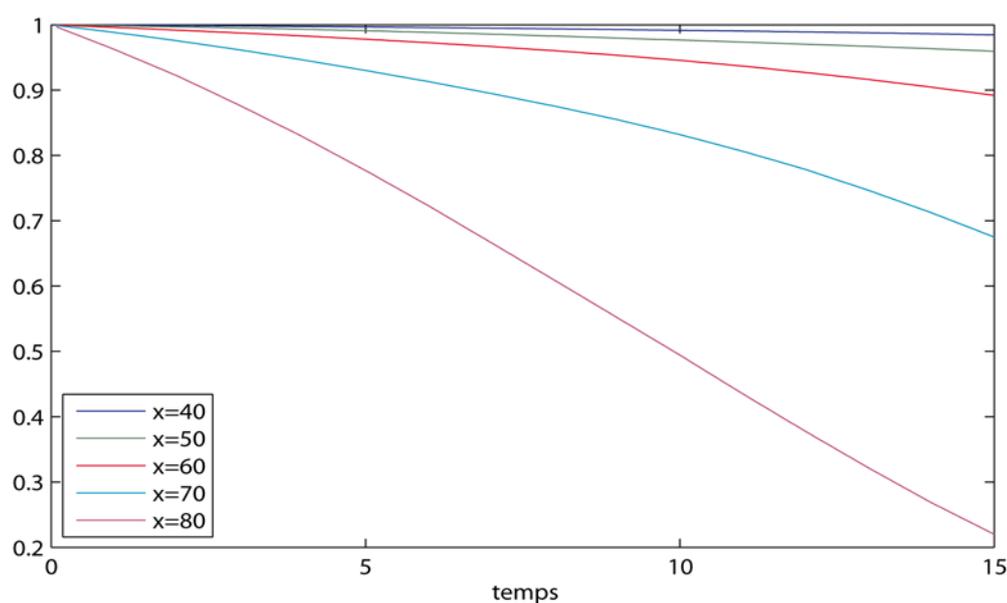
¹ Equivalente à une formulation en fonction de la benefit base dans ce cas puisque l'hypothèse centrale est celle d'un produit sans cliquet ni garantie TMG.

Assiette	$w_{eq}^{t=0}$	α_g^{PP}	Ratio	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Epargne	40%	0.06%	83.3%	2.27	3.58
Prime		0.05%		2.19	3.52
Epargne	60%	0.27%	88.9%	6.82	8.95
Prime		0.24%		6.86	8.75
Epargne	80%	0.66%	89.4%	13.52	16.66
Prime		0.59%		11.80	14.80
Epargne	100%	1.17%	88.9%	21.33	25.39
Prime		1.04%		17.03	20.86

9.1.4.5 Sensibilité à l'introduction d'une garantie GMDB

La couverture offerte par la garantie GMDB n'a pas de limite d'âge et s'applique tant que la garantie en cas de retrait ne s'est pas activée. Dans beaucoup de produits commercialisés, les garanties planchers arrêtent de couvrir l'assuré lorsque celui atteint son 80 ou 85^{ème} anniversaire. Pour les assurés souscrivant avant 60 ans, la garantie décès ne représente pas de surcoût important pour l'assureur puisque les probabilités de décès restent faibles (le risque actuariel dominant est le risque de rachat¹). Le coût de la garantie est quasi-constant lorsque $x \in [40,60]$ et augmente fortement après, ce qui est cohérent avec la dynamique des décès représentée sur la Figure 9-5.

Figure 9-5 : Nombre d'assurés en vie en fonction de l'âge de souscription – Scénario central



L'assureur devra donc limiter l'âge maximum de souscription de la garantie GMDB ou bien limiter la durée effective de la garantie décès pour les assurés souscrivant à des âges avancés.

Tableau 9-8: Tarif dans le scénario central en présence d'une garantie GMDB

Age	Garantie GMDB	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
40	Sans	0.27%	7.00	9.16
	Avec	0.29%	7.18	9.53
50	Sans	0.27%	6.82	8.95
	Avec	0.29%	7.28	9.62

¹ Ce point est vérifié dans le Tableau 9-10 où les rachats sont négligés

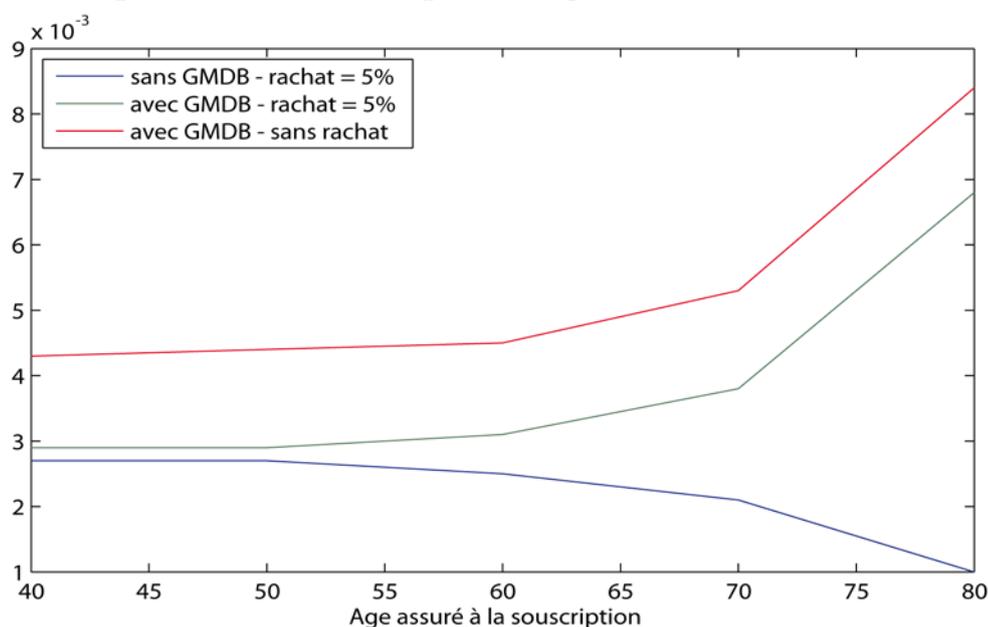
Age	Garantie GMDB	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
60	Sans	0.25%	6.43	8.45
	Avec	0.31%	7.44	9.77
70	Sans	0.21%	5.09	6.78
	Avec	0.38%	8.07	10.39
80	Sans	0.10%	1.98	2.08
	Avec	0.68%	9.75	12.30

En l'absence de garantie décès, le coût de la garantie décroît avec l'âge de souscription car le phénomène de décès permet à l'assureur de diminuer le nombre de contrats sur lequel il est susceptible de verser des prestations à l'assuré. Ce n'est pas le cas en présence d'une garantie décès et le coût total des frais augmente avec l'âge de souscription. Négliger les rachats revient à translater la courbe de tarification. L'absence de rachat renchérit le coût des garanties car davantage d'assurés décéderont alors que le contrat sera en cours.

Tableau 9-9 : Tarif dans le scénario central en présence d'une garantie GMDB + absence de rachat

Age	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
40	0.43%	13.71	16.87
50	0.44%	13.79	16.91
60	0.45%	13.88	17.03
70	0.53%	14.16	17.41
80	0.84%	15.20	18.60

Figure 9-6: Tarif des garanties en fonction de l'âge de souscription à l'assuré - Scénario central



9.1.5 Sensibilités aux paramètres clients

Nous étudions dans cette partie la sensibilité du tarif aux caractéristiques de l'assuré. Les résultats obtenus dans cette partie montrent l'impact d'une erreur commise sur les lois de comportement de l'assuré (risques actuariels).

9.1.5.1 Sensibilités à la mortalité

En l'absence de décès, le tarif de la garantie dépend uniquement de la probabilité de rachat (statique et constante pour tous les âges). Par conséquent, le tarif est le même quel que soit l'âge de l'assuré.

Le Tableau 9-11 nous indique que les garanties GMWB sont peu sensibles à la mortalité pour $x \in [40,60]$. Ce n'est plus le cas pour les âges à la souscription plus élevés pour les mêmes raisons que celles évoquées dans l'analyse de l'ajout d'une garantie GMDB.

Tableau 9-10 : Sensibilité du tarif à la table de mortalité – Scénario central ($T = 15$)

Age	α_g^{PP}			VaR _{95%}			CTE _{95%}		
	TGH	TGF	sans	TGH	TGF	sans	TGH	TGF	sans
40	0.27%	0.27%	0.28%	7.00	6.99	7.08	9.16	9.15	9.28
50	0.27%	0.27%	0.28%	6.82	6.86	7.08	8.95	9.00	9.28
60	0.25%	0.26%	0.28%	6.43	6.66	7.08	8.45	8.74	9.28
70	0.21%	0.23%	0.28%	5.09	5.81	7.08	6.78	7.68	9.28
80	0.10%	0.13%	0.28%	1.98	3.00	7.08	2.8	4.15	9.28

L'assureur pourrait proposer un tarif indépendant de l'âge et du sexe de l'assuré, pour une allocation d'actifs donnée.

Ces résultats nous conduisent à ne pas effectuer d'étude de sensibilité du coût de la garantie à la mortalité dans la suite du mémoire. Ils permettent par ailleurs de justifier l'hypothèse de négliger les décès qui a été faite au chapitre 6 dans l'étude analytique de la garantie GMWB.

9.1.5.2 Sensibilités au comportement de rachat (statique et dynamique)

Nous supposons que la mortalité suit la table TGH 00-05 et faisons varier la probabilité de rachat. La diminution du tarif lorsque la probabilité de rachat augmente provient du fait que le nombre d'options de longue maturité, ayant la plus forte probabilité d'être dans la monnaie, est alors très faible. La proximité du résultat pour les deux premières lignes du Tableau 9-12 confirment les conclusions obtenus dans la partie 9.1.5.1.

Tableau 9-11 : Sensibilité du tarif à la probabilité de rachat statique – Scénario central (Homme, $T = 15$)

Taux rachat	α_g^{PP}	VaR _{95%}	CTE _{95%}
Sans rachat et décès	0.42%	13.52	16.56
0%	0.40%	13.04	15.99
3%	0.32%	8.87	11.33
5%	0.27%	6.82	8.95
7%	0.23%	5.23	7.03

L'assuré peut adopter un comportement dynamique, c'est à dire racheter son contrat lorsque la garantie n'a plus assez de valeur. La trajectoire de rachat devient alors propre à chaque scénario économique. Nous constatons dans le Tableau 9-13 que le coût de la garantie double, sans pour autant modifier notablement les indicateurs de risque.

Tableau 9-12 : Sensibilité du tarif au rachat dynamique – Scénario central (Homme, $T = 15$)

Rachat	α_g^{PP}	VaR _{95%}	CTE _{95%}
Statique 5%	0.27%	6.82	8.95
Statique 5% + dynamique	0.52%	9.15	11.88

Nous testons ensuite l'impact des rachats dynamiques lorsque les paramètres financiers sont modifiés. Le premier cas ($\sigma_S = 35\%$) provoque une augmentation de la valeur de la garantie tandis que le second cas testé ($r = 5\%$) correspond à une baisse du coût de la garantie. Le coût reste doublé dans les deux scénarios testés.

Tableau 9-13 : Sensibilité du tarif au rachat dynamique – Scénario central - $\sigma_S = 35\%$

Rachat	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Statique 5%	0.60%	11.03	13.00
Statique 5% + dynamique	1.27%	14.30	16.93

Tableau 9-14 : Sensibilité du tarif au rachat dynamique – Scénario central – $r = 5\%$

Rachat	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Statique 5%	0.13%	4.81	6.62
Statique 5% + dynamique	0.26%	6.34	8.87

9.1.6 Sensibilités aux garanties de revalorisation de la benefit base

Nous nous intéressons dans cette partie à l'impact des mécanismes de revalorisation de la benefit base pendant la phase d'accumulation (cliquet et TMG) et de distribution (cliquet).

Nous supposons que le produit prévoit un différé de 4 ans. Le scénario de référence sera modifié dans cette partie afin de prendre en compte ce différé (contrat d'une durée de 19 ans et non plus de 15 ans comme dans le scénario central défini dans la partie 9.1.

9.1.6.1 Sensibilités aux garanties de revalorisation de la benefit base

L'intégration d'un cliquet annuel en phase d'accumulation augmente fortement le coût de la garantie (Tableau 9-16). La hausse de la fréquence du cliquet accroît par ailleurs le coût et les indicateurs de risque de la garantie dans le scénario central. Plus la fréquence du cliquet est importante, plus la sensibilité du coût de la garantie à une modification des paramètres financiers sera élevée (Tableau 9-17).

Tableau 9-15 : Sensibilité à la fréquence du cliquet en phase d'accumulation

Fréquence du cliquet N_a	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Absence de cliquet	0.14%	5.31	6.89
$N_a = 1$	0.41%	8.74	12.84
$N_a = 2$	0.48%	9.48	14.00
$N_a = 4$	0.54%	10.20	14.86

Tableau 9-16 : Sensibilité à la fréquence du cliquet en phase d'accumulation – Stress : $\sigma_S = 35\%$

Fréquence du cliquet N_a	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$N_a = 1$	1.01%	14.82	24.61
$N_a = 4$	1.40%	17.95	28.53

Nous mesurons l'impact sur le coût de la garantie de la mise en place d'une garantie cliquet en phase de distribution et faisons varier la fréquence du cliquet. Le Tableau 9-18 est construit en supposant que la garantie prévoit un cliquet annuel en phase d'accumulation.

Ce cas de figure constitue le scénario de référence du tableau. Le coût de la garantie et les indicateurs de risque augmentent peu en fonction de la fréquence du cliquet en phase de distribution.

Tableau 9-17 : Sensibilité du scénario central à l'existence d'un cliquet annuel en phase de distribution

Cliquet phase distribution	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Sans	0.41%	8.74	12.84
Avec – $N_d = 1$	0.47%	8.94	13.26
Avec – $N_d = 1/3$	0.43%	8.78	12.94
Avec – $N_d = 1/5$	0.42%	8.70	12.80

En l'absence de cliquet en phase d'accumulation, l'introduction d'un cliquet en phase de distribution conduit à augmenter le tarif de la garantie de 0.13% à 0.27%.

9.1.6.2 Taux minimum garanti (TMG) en phase d'accumulation

Un autre mécanisme de revalorisation de la benefit base en phase d'accumulation consiste à prévoir un taux garanti i_{TMG} . La mise en place d'une garantie TMG devient plus onéreuse qu'un cliquet annuel dès lors que le taux garanti $i_{TMG} > r$ (voir Tableau 9-19).

Tableau 9-18 : Impact sur le coût de la garantie de l'introduction d'une garantie de TMG

TMG i_{TMG}	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Sans	0.14%	5.31	6.89
$i_{TMG} = 2\%$	0.24%	7.60	9.39
$i_{TMG} = 4\%$	0.41%	10.01	11.97
$i_{TMG} = 6\%$	0.66%	12.11	14.77

Le surcoût lié à l'introduction d'une garantie TMG est très sensible à une modification des paramètres financiers (voir Tableau 9-21). L'ajout d'un cliquet annuel en phase de distribution augmente d'environ 10bp le coût de la garantie.

Tableau 9-19 : Impact sur le coût de la garantie de l'introduction d'une garantie de TMG

TMG i_{TMG}	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$i_{TMG} = 0\% + \text{Cliquet phase D } (N_d = 1)$	0.36%	8.31	11.28
$i_{TMG} = 2\% + \text{Cliquet phase D } (N_d = 1)$	0.38%	8.04	10.89
$i_{TMG} = 4\% + \text{Cliquet phase D } (N_d = 1)$	0.55%	10.09	12.52
$i_{TMG} = 6\% + \text{Cliquet phase D } (N_d = 1)$	0.82%	12.63	14.79

Un choc de 10% sur l'épargne à la date $t = 0$ ($S_0 = 90$) conduit à multiplier par 2 le coût de la garantie TMG à 4%. Les indicateurs de risque sont moins impactés par cette modification de la valeur du taux sans risque.

Tableau 9-20 : Impact sur le coût de la garantie d'une garantie TMG sous un scénario financier stressé

$i_{TMG} = 4\%$	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Scénario central	0.41%	10.01	11.97
Choc de -10% sur l'épargne à $t = 0$	0.80%	12.39	14.30

Il serait nécessaire de compléter l'étude de ces garanties en testant le comportement du coût et des indicateurs de risque à d'autres modifications des paramètres financiers.

9.1.7 Sensibilités aux paramètres de marché

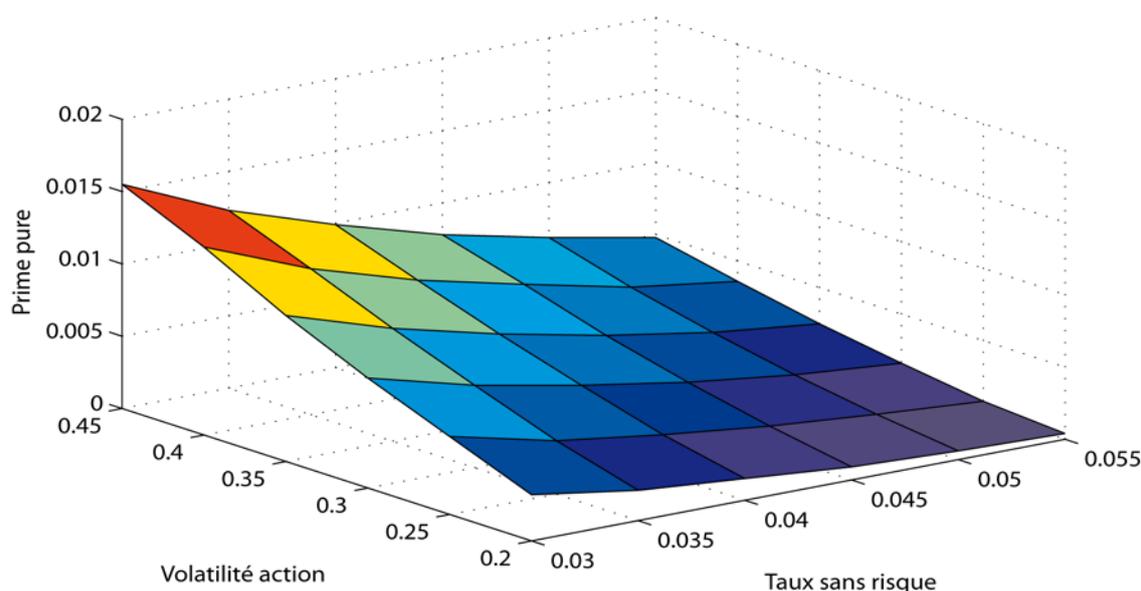
Nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes pour étudier les sensibilités de la garantie à la valeur du taux sans risque et de la volatilité des actions.

Nous nous intéressons à l'impact du changement des paramètres financiers sur la valeur du tarif en prime pure α_g^{PP} (Tableau 9-22) et de la $VaR_{95\%}$ (Tableau 9-23). Les valeurs du taux sans risque figurent dans la 1^{ère} ligne, celles de la volatilité action dans la 1^{ère} colonne.

Tableau 9-21 : Prime pure en fonction du taux sans risque et du niveau de volatilité (Black & Scholes)

α_g^{PP}	3%	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
20%	0.32%	0.21%	0.15%	0.09%	0.06%	0.04%
25%	0.54%	0.37%	0.27%	0.19%	0.13%	0.08%
30%	0.76%	0.57%	0.43%	0.31%	0.22%	0.16%
35%	1.01%	0.78%	0.60%	0.45%	0.33%	0.25%
40%	1.30%	1.01%	0.79%	0.62%	0.46%	0.36%
45%	1.55%	1.23%	0.99%	0.78%	0.62%	0.48%

Figure 9-7 : Surface représentant la prime pure en fonction du taux sans risque et de la volatilité action



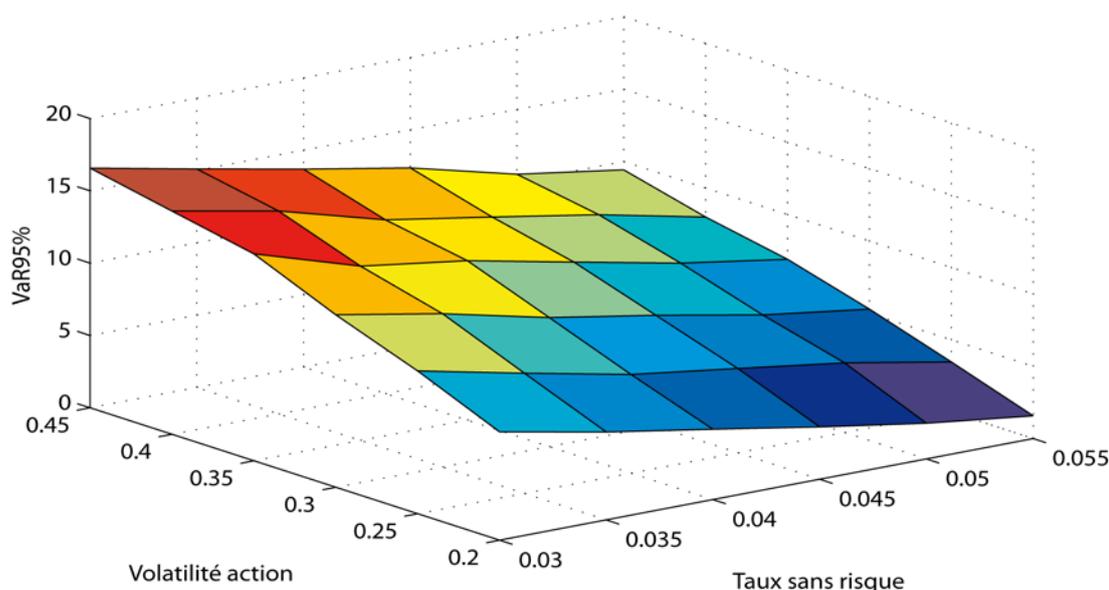
La surface de prime pure en fonction des paramètres de taux et de volatilité est convexe. Une augmentation de 5 points de la volatilité a plus d'impact qu'une baisse des taux de 50bp mais les résultats restent néanmoins du même ordre de grandeur. Le coût de la garantie augmente lorsque les taux baissent ($\rho < 0$) ou lorsque la volatilité augmente ($vega > 0$), ce qui est cohérent avec les résultats de l'étude qualitative du chapitre 3.

Tableau 9-22 : $VaR_{95\%}$ en fonction du taux sans risque et du niveau de volatilité (Black & Scholes)

$VaR_{95\%}$	3%	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
20%	7.49	6.08	4.86	3.62	2.47	1.57
25%	9.87	8.31	6.82	5.83	4.81	3.47
30%	11.93	10.60	8.92	7.67	6.29	5.29
35%	14.31	12.05	11.02	9.52	8.04	6.90
40%	15.44	14.03	12.02	10.80	9.56	7.99
45%	16.57	15.11	13.69	12.37	10.53	9.42

La $VaR_{95\%}$ augmente davantage suite à une augmentation de la volatilité de 5% (par rapport à une variation des taux de 50bp).

Figure 9-8: Surface représentant la VaR en fonction du taux sans risque et de la volatilité



Nous étudions dans la suite l'influence de la maturité sur la modification du niveau de prime pure liée à une variation des taux d'intérêt (Tableau 9-24) et de volatilité (Tableau 9-25).

Tableau 9-23 : Sensibilité au niveau de taux lorsque l'échéance du produit augmente

Maturité T	$r = 3\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$
10	1.05%	0.61%	0.36%
15	0.54%	0.27%	0.13%
20	0.30%	0.13%	0.05%

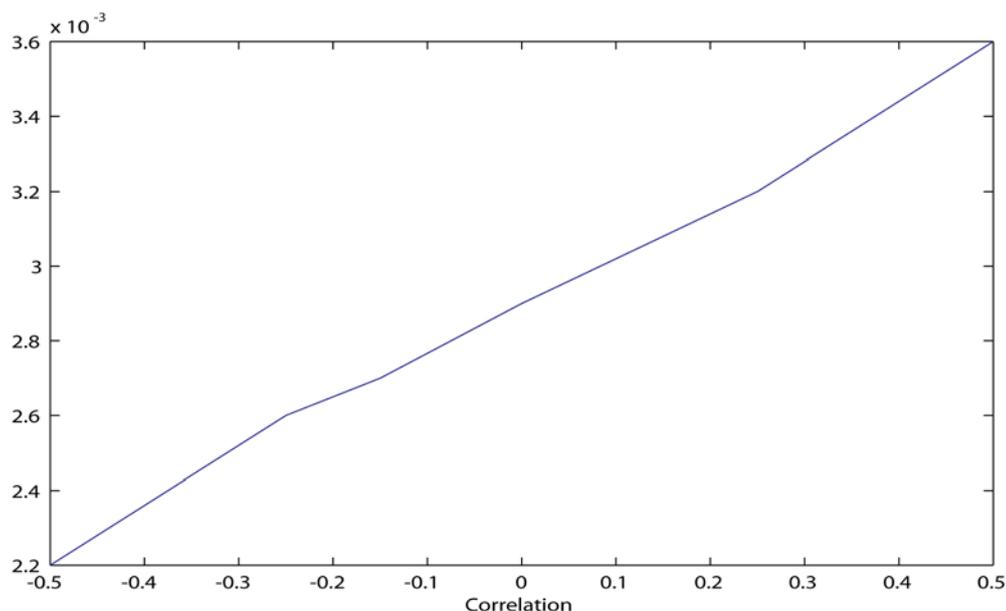
Tableau 9-24 : Sensibilité à la volatilité action lorsque l'échéance du produit augmente

Maturité T	$\sigma_S = 20\%$	$\sigma_S = 25\%$	$\sigma_S = 30\%$
10	0.37%	0.61%	0.92%
15	0.15%	0.27%	0.43%
20	0.07%	0.13%	0.21%

Le coût de la garantie augmente lorsque la corrélation entre les sous-jacents augmente. Ce résultat s'explique par le fait que le support obligataire suivra davantage la tendance du sous-jacent action. Lorsque ϕ_1 devient de plus en plus négative, le comportement du fonds obligataire compense la trajectoire défavorable du support actions, ce qui limite ainsi le déclenchement de la garantie (voir Tableau 9-26). La variation du coût de la garantie en fonction de la corrélation entre les actions et les obligations est quasiment linéaire.

Tableau 9-25 : Sensibilité de la prime pure à la corrélation entre les sous-jacents (Black & Scholes)

Corrélation ϕ_1	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
-50%	0.22%	5.97	7.59
-25%	0.26%	6.57	8.56
-15%	0.27%	6.82	8.95
0%	0.29%	7.67	9.61
25%	0.32%	8.11	10.40
50%	0.36%	8.88	11.34

Figure 9-9: Coût de la garantie en fonction de la corrélation ϕ_1 entre les sous-jacents

9.1.8 Sensibilités au modèle utilisé

Nous mesurons dans cette partie la sensibilité au du modèle de taux utilisé. Le tarif obtenu avec le modèle de Vasicek est supérieur à celui calculé avec un modèle de Black & Scholes en raison de l'impact sur les taux d'actualisation (ainsi que des taux négatifs). Nous renvoyons le lecteur vers la partie 10.1.8 pour une analyse des facteurs explicatifs des écarts constatés.

Tableau 9-26 : prime pure en fonction du modèle – scénario central

Modèle de taux	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 4\%$	0.27%	6.82	8.95
Vasicek	0.55%	12.60	17.52

Tableau 9-27 : prime pure en fonction du modèle – $r = 3\%$

Modèle de taux	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 3\%$	0.54%	9.87	12.14
Vasicek	0.98%	16.85	22.39

Tableau 9-28 : prime pure en fonction du modèle – $r = 5\%$

Modèle de taux	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 5\%$	0.13%	4.81	6.62
Vasicek	0.32%	9.44	13.95

Tableau 9-29 : prime pure en fonction du modèle – $T = 20$

Modèle de taux	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 4\%$	0.13%	4.49	6.21
Vasicek	0.28%	9.29	14.49

Tableau 9-30 : prime pure en fonction du modèle – $\sigma_s = 35\%$

Modèle de taux	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 4\%$	0.60%	11.02	13.00
Vasicek	0.98%	17.09	22.74

Nous ne mesurons pas dans cette partie la sensibilité du coût de la garantie à la volatilité du modèle de Vasicek. Dans la partie 9.2.3, la volatilité du taux court est modifiée a posteriori (sans changer les autres paramètres du modèle, ce qui revient à déformer la courbe des taux initiale).

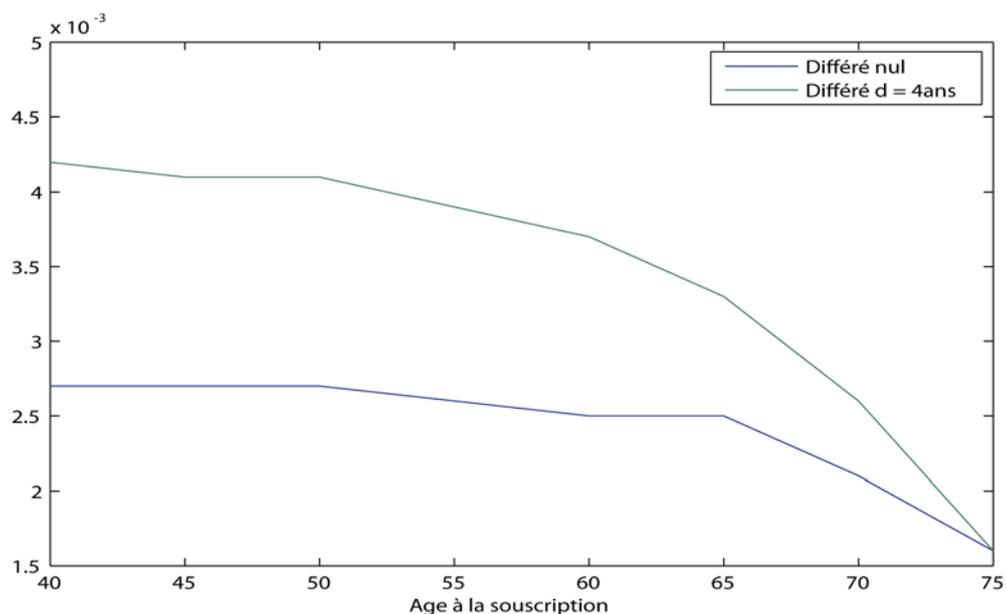
9.2 Conclusions sur la prime pure

9.2.1 Fonction de prime pure - $T = 15$

Nous nous intéressons dans cette partie à la fonction de tarif en prime pure dans le scénario central (paramètres financiers du produit et définition de la garantie). Nous faisons varier l'âge de souscription et la durée du différé. Nous supposons que dans le cas $d = 4$ le contrat prévoit un cliquet annuel en phase d'accumulation ($N_a = 1$).

	$d = 0$	$d = 4$
$x = 40$	0.27%	0.42%
$x = 45$	0.27%	0.41%
$x = 50$	0.27%	0.41%
$x = 55$	0.26%	0.39%
$x = 60$	0.25%	0.37%
$x = 65$	0.25%	0.33%
$x = 70$	0.21%	0.26%
$x = 75$	0.16%	0.16%

Figure 9-10: Tarif en prime pure de la garantie en fonction de l'âge à la souscription - scénario central

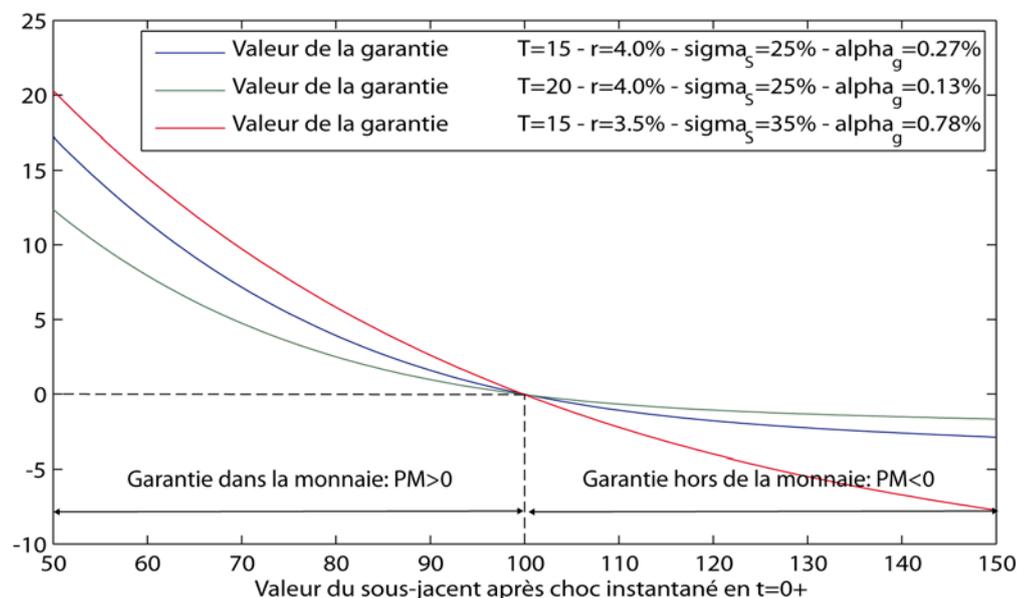


9.2.2 Convexité de la provision mathématique

Nous représentons la convexité de la valeur de l'option en supposant qu'un choc sur la valeur de l'épargne a lieu juste après la souscription (à la date $t = 0^+$).

Le phénomène de convexité joue un rôle important dans le référentiel Solvabilité 2 car il conditionne l'impact d'un choc instantané sur la valeur du sous-jacent lorsque les autres paramètres financiers sont inchangés.

Figure 9-11 : Convexité de la valeur de la garantie suite à un choc après la souscription (à la date $t = 0^+$).



La comparaison de la courbe bleue et de la courbe rouge montre l'impact de la dégradation des paramètres financiers. La convexité de la valeur de la garantie augmente lorsque les paramètres financiers se dégradent.

La courbe bleue et la courbe verte permettent de retrouver l'observation de la Figure 3-3 (droite): lorsque T augmente, la valeur de la garantie diminue lorsque celle-ci est dans la monnaie et inversement lorsqu'elle devient hors de la monnaie. La modification de T conduit à changer mécaniquement le taux de revenus garantis (et donc le strike des options entrant dans la décomposition de la garantie GMWB), ce qui atténue les effets du paramètre maturité.

9.2.3 Comparaison avec les résultats de la littérature

Nous comparons par exemple les résultats de notre modèle avec ceux de **Peng et al. (2009)**. Les auteurs considèrent un modèle de Vasicek avec les paramètres $a = 0.0349$ et $b = 0.05$ (correspondant aux paramètres de notre modèle, voir chapitre 8). L'épargne est investie uniquement sur un sous-jacent actions de volatilité $\sigma_S = 20\%$ ($\sigma_S = 25\%$ dans notre scénario central) et corrélés selon un coefficient $\phi_1 = +20\%$ avec le taux sans risque. Cet article ignore la mortalité, les rachats et le différé. L'auteur effectue des applications numériques pour différentes valeurs de la volatilité du taux court (rappel: $\sigma_r = 3.1\%$ dans notre modèle).

Nous ne retrouvons pas les résultats de **Peng et al. (2009)**. Par exemple pour $\sigma_r = 0\%$ et $T = 15$, notre modèle nous donne un résultat de l'ordre de 3.3% contre 0.5% dans l'article.

Il serait intéressant de poursuivre ce travail pour les autres articles identifiés dans la revue de littérature (chapitre 5) afin de mesurer l'impact des différents cadres de modélisation.

9.3 Evaluation de la prime commerciale

Nous avons déterminé dans la partie 9.2.1 les fonctions de tarif en prime pure pour des garanties GMWB de maturité $T = 15$ ans. Dans le scénario central, nous avons calculé $\alpha_g^{PP} = 0.27\%$ et nous souhaitons déterminer dans cette partie le tarif en prime commerciale.

Nous utilisons la méthode développée dans le chapitre 7 et calculons la prime pure $\alpha_g^{PP,(i)}$ pour différents stress tests numérotés (i). Au scénario central correspond $\alpha_g^{PP,(0)}$. La prime commerciale est alors donnée par:

$$\alpha_g^{PC} = \max_i(\alpha_g^{PP,(i)}; \alpha_g^{PP})$$

La marge de sécurité correspondante se déduit de cette formulation : $\max_i(\alpha_g^{PP,(i)} - \alpha_g^{PP}; 0)$

Nous calculons le tarif en prime commerciale pour un homme de 50 ans investissant 60% de son épargne en actions ($w_{eq}^{t=0} = 60\%$).

Tableau 9-31 : Prime pure en fonction des différents stress tests

	Stress test	$\alpha_g^{PP,(i)}$	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0	Scénario central	0.27%	6.82	8.95
1	Volatilité actions = 35% ¹	0.60%	11.03	13.00
2	Baisse du taux sans risque de 100bp	0.54%	9.87	12.14
3	Baisse du taux sans risque de 50bp et hausse de la volatilité de 5%	0.57%	10.60	12.67
4	50% des assurés = rachat dynamique	0.39%	7.99	10.42
5	Probabilité de rachat = 3%	0.32%	8.87	11.33

Nous en déduisons $\alpha_g^{PC} = 0.60\%$. La marge de sécurité correspondante est alors de 0.33%.

De la même manière, nous pourrions construire la table du tarif en prime commerciale pour la garantie GMWB simple en faisant varier l'âge de souscription, la durée du différé et la part d'actions dans l'allocation d'actifs. Cette méthode peut s'appliquer à toutes les variantes de la garantie. Nous ne proposons pas les applications numériques complètes dans la suite et mènerons entièrement le calcul pour la garantie GLWB dans le chapitre 10.

9.4 Duration et fréquence de déclenchement de la garantie

Le contrat prévoit une maturité de T années mais la maturité effective de la garantie est inférieure en raison des probabilités de rachat et de décès et des taux d'intérêts.

La maturité effective des garanties est un paramètre important pour déterminer les stratégies de couverture. Elle permet de savoir si le risque correspond à une maturité disponible pour les instruments de couverture.

Nous fournissons quelques pistes de réflexion sur cette problématique sans développer les calculs associés.

¹ Le scénario 1 « Volatilité actions = 35% » revient à prendre une valeur proche de la $VaR_{90\%}$ de la volatilité implicite sur longue période (voir la partie 8.1.2.1).

9.4.1 Duration de la garantie

La maturité effective de la garantie peut être définie comme la duration des flux futurs de la garantie. A partir de l'équation [7-12] donnant l'expression de V_0^G , nous pouvons estimer pour un scénario donné cette duration à la date $t = 0$, en supposant que les taux d'intérêt sont constants.

Le flux de la garantie à la date t_k s'écrit:

$$F_{t_k}^{flux} = t_k p_x \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|N}R_x\right) \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k}$$

La duration s'écrit alors:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{N.T} t_k p_x \times t_k \times \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|N}R_x\right) \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{N.T} t_k p_x \times \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - {}_{t_i|N}R_x\right) \cdot (C_{t_k}^W - F_{t_k}) \cdot v^{t_k}} \quad [9-1]$$

La formule [9-1] permet de construire la distribution de la duration. Le passage à l'espérance donne la duration moyenne de la garantie à la date $t = 0$. Lorsque α_g^{PC} a été fixé, la duration dépend des paramètres financiers utilisés. Il serait intéressant d'étudier l'évolution de la duration lorsque ceux-ci varient, par exemple en évaluant la duration dans le scénario central ($r = 4\%$, $\sigma_S = 25\%$) puis sous un scénario de stress (par exemple $r = 3\%$, $\sigma_S = 35\%$).

Un autre indicateur utile pour la gestion du risque est la date de déclenchement de la garantie.

9.4.2 Date de déclenchement de la garantie

Ce paramètre peut être calculé en modifiant légèrement les programmes qui figurent en annexe. Nous définissons pour cela une variable de comptable c_{t_k} telle que :

$$c_{t_k} = \begin{cases} 0, & \text{si } C_{t_k}^W = 0 \\ 1, & \text{si } C_{t_k}^W > 0 \end{cases}$$

La date T_d de déclenchement de la garantie est alors donnée pour un scénario fixé par la relation suivante :

$$T_d = N.T - \sum_{i=1}^{N.T} c_{t_i} + 1$$

Cette égalité permet de construire la distribution de la variable aléatoire décrivant la date de déclenchement de la garantie. La date de déclenchement moyenne est alors obtenue en calculant l'espérance de cette variable aléatoire.

Les calculs proposés dans les parties 9.4.1 et 9.4.2 s'étendent aux garanties GLWB. Ils permettent de définir la duration de ces garanties qui ne possèdent pas contractuellement de maturité.

Nous avons étudié dans ce chapitre la sensibilité des garanties GMWB à l'ensemble des paramètres financiers et actuariels, ainsi qu'à la formulation du produit et au modèle d'actifs utilisé.

Une fois la tarification du produit arrêtée, il serait intéressant de chercher à construire des model points afin de réduire le nombre de contrats dont on projetera les cash-flows et faciliter ainsi le suivi des risques, la gestion du programme de couverture, le provisionnement, la marge de solvabilité... La recherche de model points est compliquée par l'existence d'aléa sur le notionnel du au comportement de l'assuré (un put de maturité résiduelle 2 ans et courant depuis 1 an a la même valeur qu'un put de même strike de maturité 2 ans écrit aujourd'hui, ce qui n'est pas le cas des garanties en raison des risques actuariels). Les model points pourraient être cherchés en utilisant les variables suivantes : âge, sexe, montant de l'épargne AV_t , montant de la benefit base BB_t , durée du différé, pourcentage d'actions dans l'allocation d'actifs, ITM de la garantie, duration estimée, maturité résiduelle...

Nous étudions dans le chapitre suivant le comportement des garanties GLWB, en reprenant en partie la structure d'analyse développée dans ce chapitre.

Chapitre 10 : Extension aux garanties GLWB

La modélisation développée au chapitre 7 est généralisable aux garanties GLWB en supposant que $G_t^W = +\infty$ ¹. Le vecteur d'état X_t décrivant la garantie GLWB contient donc moins d'information que celui de la GMWB, ce qui permet de simplifier l'écriture de la dynamique des variables pour les variantes de la garantie (bonus d'attente, cliquet...).

$$X_t = (AV_t, BB_t, G_t, C_t^W, F_t, G_t^D, C_t^D)$$

Nous modifions, comme annoncé dans le chapitre 7.1.1.2.2, le critère de calcul des rachats dynamiques. L'ITM de la garantie est définie de la manière suivante puisque la variable G_t^W n'est plus pertinente :

$$ITM(t_k) = \frac{AV_{t_k}}{BB_{t_k}}$$

Nous étudions dans ce chapitre la tarification et les sensibilités de la garantie GLWB à différents paramètres, de manière analogue au chapitre 9.

10.1 Estimation de la prime pure

10.1.1 Définition du scénario central

Nous considérons un contrat GLWB souscrit par un homme de 55 ans avec un différé de 10 ans. La mortalité est supposée suivre la table TGH 00-05. L'épargne est investie à 60% en action (CAC 40) et à 40% en actifs obligataires (EuroMTS). Aucun rebalancement du poids des actifs n'est prévu dans la gestion. Une garantie de cliquet annuelle pendant la phase de distribution est prévue.

Le taux de revenu garanti est égal à 4%. Nous supposons que l'assuré investit 100 euros et qu'aucun frais de gestion n'est prélevé. Ce scénario central est repéré dans tous les tableaux de sensibilités par un marquage en gras italique.

Paramètre	Notation	Valeur
Frais de gestion annuels	α_m	0.96% ²
Sexe assuré	<i>sexe</i>	M
Age à la souscription	<i>x</i>	55 ans
Différé	<i>d</i>	10 ans
Taux de revenu annuel garanti	<i>h_{WL}</i>	4%
Cliquet accumulation	<i>N_a</i>	1
Taux de rachat annuel	<i>${}_{ t_k }R_x$</i>	1%

Nous utilisons le même scénario central que dans le chapitre 9 et nous plaçons dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes pour générer les scénarios d'actifs avec les paramètres suivants :

¹ La garantie de retrait étant viagère, la notion de montant maximum total pouvant être retiré n'a pas de sens. En pratique, on prendra par exemple dans le programme $G_t^W = 100\,000$ lorsque $AV_0 = 100$.

² Voir Tableau 2-1 et Tableau 2-2.

Paramètre	Notation	Valeur
Taux sans risque	r	4%
Volatilité du CAC 40	σ_S	25%
Volatilité de l'EuroMTS	σ_B	4%
Corrélation CAC 40 / EuroMTS	ϕ_1	-15%
Part action à la souscription	$w_{eq}^{t=0}$	60%

10.1.2 Estimation du tarif en prime pure dans le scénario central

Nous utilisons notre modèle pour déterminer la prime pure dans le scénario central. Conformément aux analyses menées dans la partie 8.4, nous constatons que le tarif converge rapidement. Cette vérification permet de confirmer le choix d'utiliser 10 000 scénarios antithétiques pour déterminer le tarif de la garantie GLWB. Elle devrait être généralisée à d'autres valeurs du taux sans risque et de la volatilité.

Tableau 10-1 : Sensibilité du tarif de la garantie au nombre de simulation

Nombre de simulations	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
1 000	0.29%	11.83	20.25
5 000	0.30%	13.42	22.10
10 000	0.30%	13.22	22.30
30 000	0.30%	13.23	22.81
50 000	0.30%	13.09	22.68
100 000	0.30%	12.87	22.26

La durée de projection théorique pour déterminer le tarif de ces garanties est très élevée. Elle correspond à l'âge de fin de la table de mortalité utilisée (extinction totale du portefeuille) moins l'âge de l'assuré à la souscription. Dans le cas central, nous devons donc projeter le contrat sur 66 ans. Les flux d'horizon très éloignés étant gommés en raison des faibles coefficients d'actualisation associés, nous pourrions réduire l'horizon de projection afin d'accélérer les calculs.

Selon le Tableau 10-2, cette réduction pourrait atteindre 15 ans sans modifier les résultats. Ce point devrait être vérifié dans des cas plus adverses pour l'assureur. Cette approximation, utile pour les calculs effectués sur un portefeuille de contrats et recommandée par l'ACP¹, pourrait notamment être mise en œuvre dans les calculs de SCR à effectuer (Solvabilité 2). *Dans notre mémoire, nous raisonnons sur un seul contrat, ce qui nous permet d'effectuer les projections sur la durée anticipée d'extinction du portefeuille.*

Tableau 10-2 : Sensibilité du prix de la garantie à la durée de projection – scénario central

Durée de projection	Age maximum	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$	$CTE_{99\%}$
66	121	0.30%	13.42	13.22	22.30
61	116	0.30%	13.42	23.17	42.22
56	111	0.30%	13.42	23.17	42.22
51	106	0.30%	13.40	23.13	42.16
46	101	0.29%	13.31	23.02	42.00
41	96	0.27%	12.74	22.22	40.76
36	91	0.20%	11.24	20.20	37.63

¹ ONC ACAM version finale mai 2008, page 6 : « le choix de l'horizon de simulation doit être propre au portefeuille modélisé. Il doit être suffisamment long pour que la différence entre les provisions calculées avec cet horizon et celles calculées jusqu'à extinction totale du portefeuille soit négligeable. L'horizon de simulation est volontairement inférieur à la liquidation totale du portefeuille pour limiter les temps de calcul (...) ».

Nous constatons que les valeurs extrêmes sont excentrées mais à très faible occurrence puisque le $CTE_{95\%}$ est proche de la $VaR_{95\%}$ (voir Figure 10-1). Dans le cas central, la densité de la valeur de la garantie n'est plus gaussienne (voir Figure 10-2).

Figure 10-1 : Fonction de répartition du résultat de la garantie dans le cas central – $N_{scenario} = 10\ 000$)

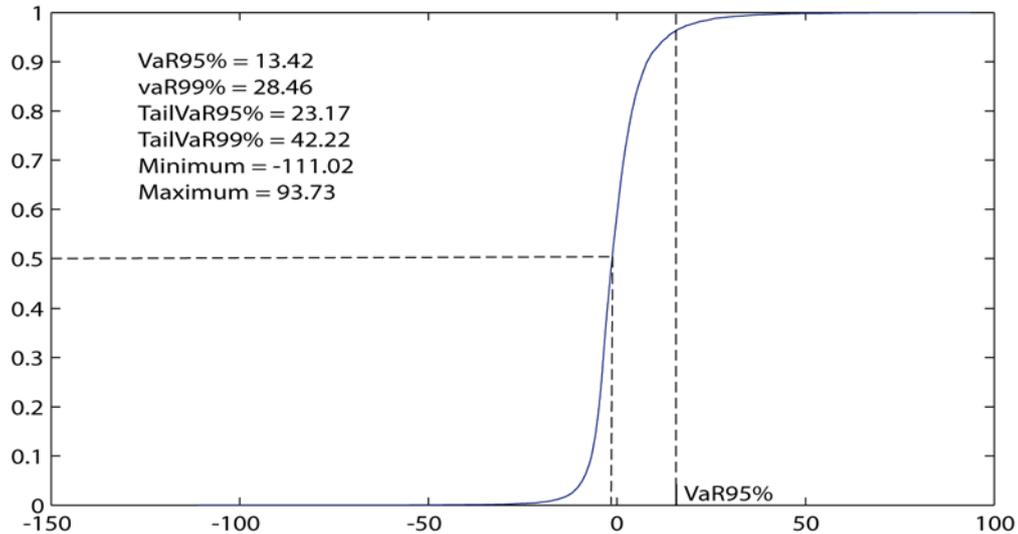
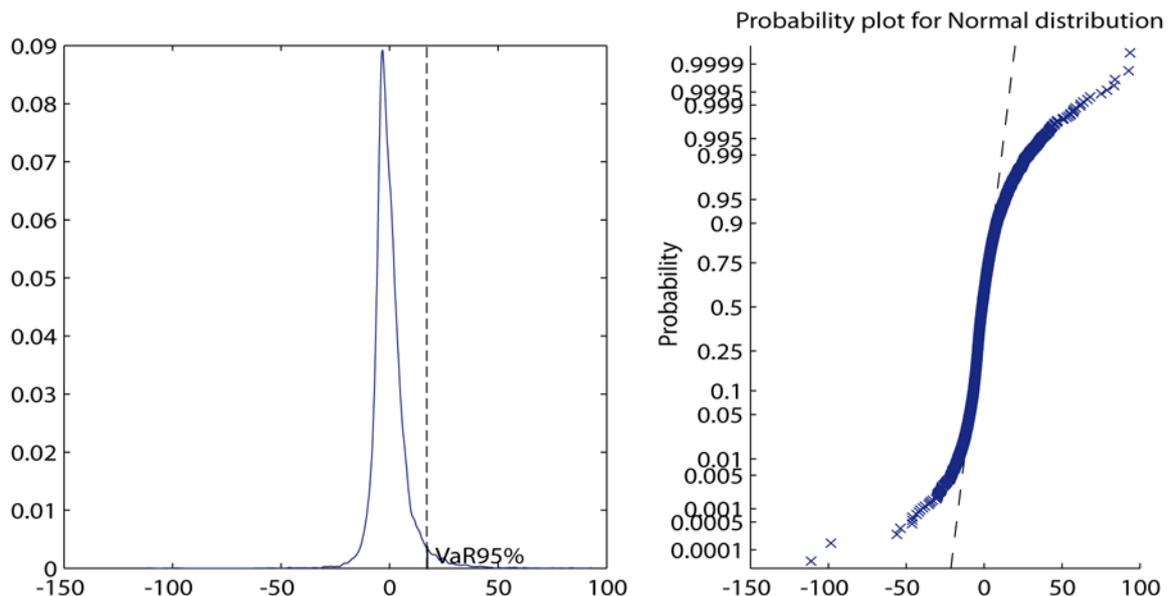


Figure 10-2 : Densité du résultat de la garantie GLWB dans le cas central – $N_{scenario} = 10\ 000$)



Nous étudions dans la suite de ce chapitre la sensibilité de la prime pure suite à une modification des paramètres du scénario central et du modèle d'actif utilisé.

10.1.3 Sensibilité à la proportion d'actions dans l'épargne

Le coût de la garantie et les indicateurs de risque augmentent fortement lorsque la part actions devient plus importantes. Dans le scénario central¹, la valeur totale des frais ($\alpha_m + \alpha_g^{PP}$) dépasse 2% lorsque l'épargne est investie totalement en actions. Nous serons donc amené à

¹ Le scénario central correspond aux paramètres Best Estimate à la date $t = 0$ et n'est donc pas particulièrement averse.

limiter la proportion maximale d'actions dans l'allocation d'actifs de l'assuré pour des raisons d'affichage commercial, d'autant plus que le niveau des frais à prélever au titre de la garantie dépend des paramètres financiers lorsque la part actions augmente (voir Tableau 10-27).

Tableau 10-3 : Sensibilité du tarif à la part d'actions lors de la souscription - Sans rebalancement annuel

Part action ($w_{eq}^{t=0}$)	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
20%	0.02%	1.35	3.64
40%	0.10%	6.27	12.09
60%	0.30%	13.22	22.30
80%	0.66%	19.77	30.11
100%	1.13%	26.61	37.36

Figure 10-3 : Fonction de répartition du résultat de la garantie en fonction de $w_{eq}^{t=0}$ à $t = 0$

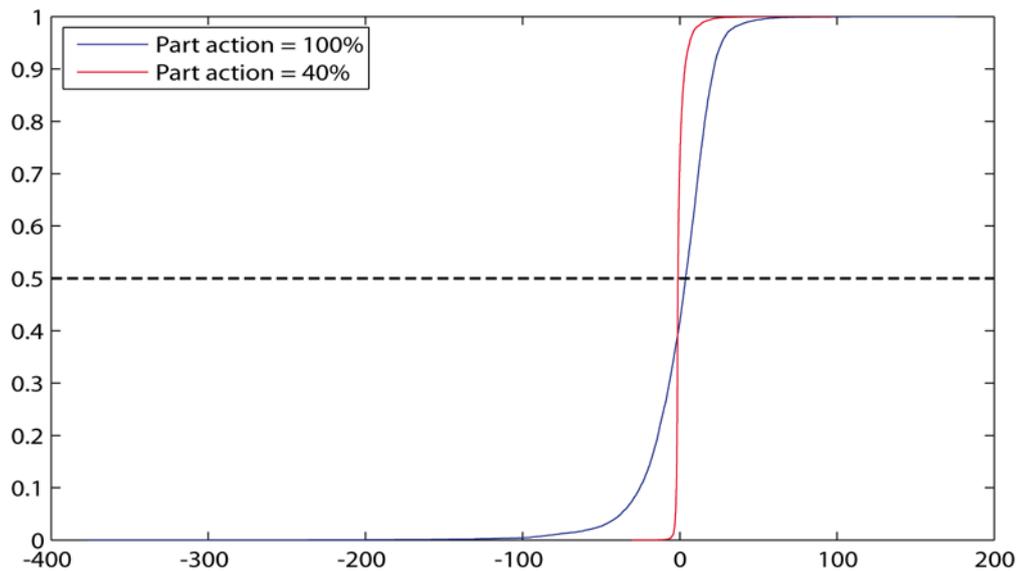
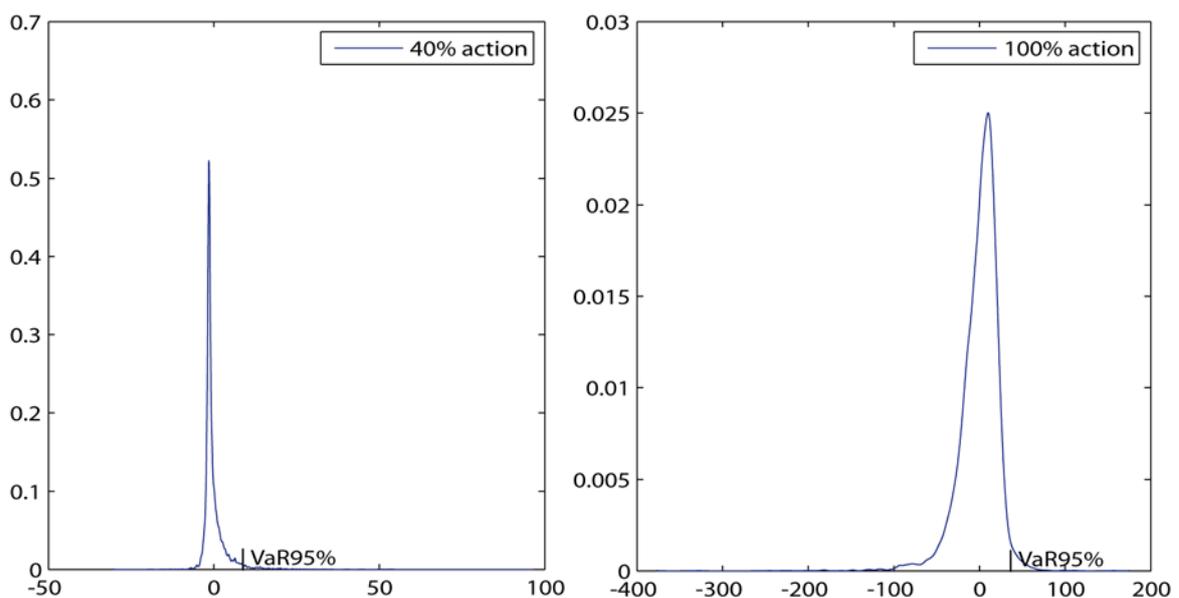


Figure 10-4 : densité du résultat de la garantie en fonction de $w_{eq}^{t=0}$ à $t = 0$



La distribution de la valeur de la garantie est plus concentrée lorsque la proportion d'actions dans l'épargne à la souscription diminue. Les Figure 10-3 et Figure 10-4 illustrent la déformation des fonctions de répartition et des densités. Nous remarquons par ailleurs que les pertes maximales sur la garantie (c'est à dire lorsque la valeur de la garantie est positive) sont inférieures, en valeur absolue, aux gains maximaux.

10.1.4 Sensibilité à la définition de la garantie

Nous nous intéressons dans cette partie à l'impact des variantes sur le coût de la garantie.

10.1.4.1 Sensibilité au taux de revenus garantis

Le tarif est très sensible au pourcentage de revenus garantis (voir Tableau 10-4). L'écart de tarif correspondant à une augmentation de 0.5% du taux de revenus garantis augmente lorsque h_{WL} croît, tandis que la croissance des indicateurs de risque diminue au fur et à mesure. Les valeurs trouvées sont d'autant plus sensibles à une modification des paramètres financiers que h_{WL} est élevée (voir Tableau 10-5).

Tableau 10-4 : Sensibilité du scénario central au pourcentage de revenus garantis

h_{WL}	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
4%	0.30%	13.22	22.30
4.5%	0.53%	16.92	28.20
5%	0.85%	19.82	32.24
5.5%	1.27%	21.62	35.05
6%	1.80%	23.05	36.47

Figure 10-5 : Tarif en prime pure en fonction du taux de revenus garantis annuels – Scénario central

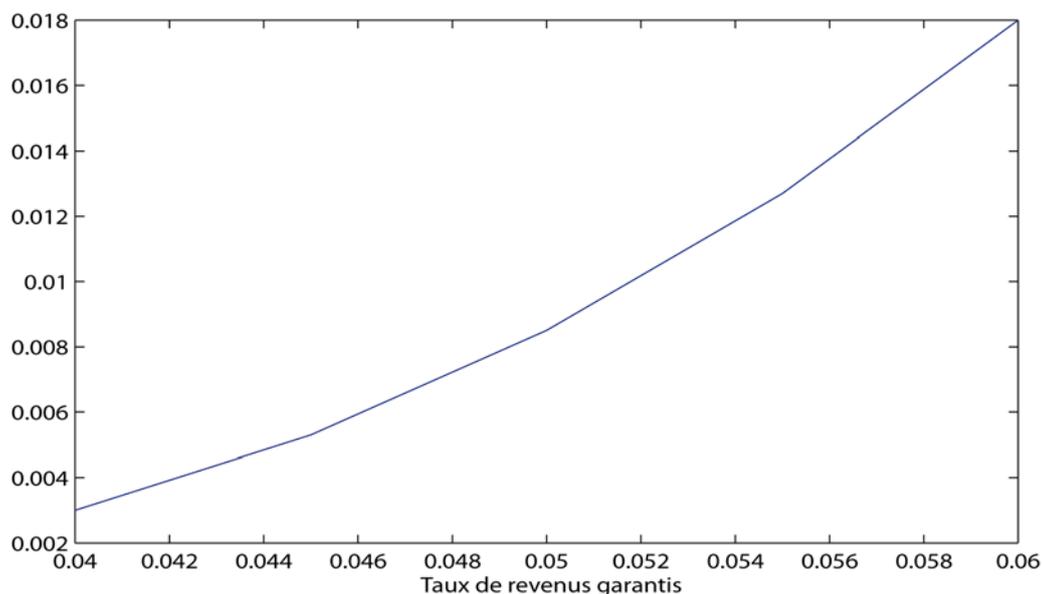


Tableau 10-5 : Sensibilité aux paramètres financiers lorsque h_{WL} augmente

	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$h_{WL} = 4\%$ - Scénario central	0.30%	13.22	22.30
$h_{WL} = 4\%$ - $r = 3\%$	0.70%	17.87	29.21
$h_{WL} = 5\%$ - Scénario central	0.85%	19.82	32.24
$h_{WL} = 5\%$ - $r = 3\%$	1.76%	22.07	34.80

Tableau 10-6 : Taux de revenus garantis dépendant de l'âge au début de la distribution ($x = 55$)

$x = 55$	h_{WL}	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$d = 5$	3.5%	0.23%	10.15	16.00
$d = 10$	4%	0.30%	13.22	22.30
$d = 15$	4.5%	0.27%	30.73	12.84

La formulation des retraits variables permet de diminuer le coût de la garantie et la valeur des pertes en réduisant le taux de revenus garantis dans les situations les plus adverses pour l'assureur (âge de souscription et différé faibles). Par exemple, si $h_{WL} = 4\%$ et $d = 5$, le Tableau 10-19 nous indique que le coût de la garantie serait de 0.49% pour une $VaR_{95\%}$ de 14.43.

A l'inverse, pour les cas moins défavorables, le coût de la garantie est plus élevée puisque le niveau de revenus garantis est supérieur à celui proposé dans le cas d'un taux fixe. Pour $d = 15$, le coût de la garantie serait de 0.16% pour un taux fixe (avec une $VaR_{95\%}$ de 6.61).

10.1.4.2 Sensibilité à la fréquence de retraits des revenus garantis

La notation $\{N_{even} = k\}$ signifie que les retraits s'effectuent k fois par an. Le Tableau 10-7 nous indique que la fréquence des évènements n'a pas d'impact sur le coût de la garantie dans le cadre du scénario de référence.

Tableau 10-7 : Sensibilité du tarif à la fréquence de retrait des revenus garantis (scénario central)

N_{even}	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
1	0.30%	13.22	22.30
2	0.32%	13.52	23.40
4	0.32%	13.70	23.67
12	0.33%	13.69	23.70

Nous testons la robustesse de ce résultat sous un scénario de stress des paramètres financiers en rendant l'épargne plus volatile afin d'augmenter la probabilité que l'épargne soit modifiée entre deux retraits (voir Tableau 10-8). La modification devient plus importante, en particulier lorsque nous passons d'une mise à disposition des revenus garantis annuelle à semestrielle, mais reste peu significative.

Tableau 10-8 : Sensibilité du tarif à la fréquence de retrait des revenus garantis ($r = 3\%$, $\sigma_s = 35\%$)

N_{even}	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
1	1.38%	26.85	50.31
2	1.43%	27.16	50.65
4	1.46%	27.23	50.66
12	1.47%	27.43	50.90

L'assureur peut donc offrir la possibilité à l'assuré de choisir la fréquence de la mise à disposition des revenus garantis.

10.1.4.3 Sensibilité au montant des frais de gestion

La somme des frais prélevés ($\alpha_m + \alpha_g^{PP}$) augmente fortement lorsque l'on augmente la valeur des frais de gestion. Cette circularité du problème nous empêche d'ajouter *ex post* une marge de prudence sur le tarif de la garantie en prime pure et justifie l'approche proposée dans la partie 7.4.4. L'augmentation des frais de gestion revient intuitivement à diminuer la valeur du taux sans risque.

Ainsi passer de $\alpha_m = 0.96\%$ à $\alpha_m = 0$ correspond approximativement à une augmentation du taux sans risque de 100 bp. Le Tableau 10-27 nous indique alors que $\alpha_g^{PP} = 0.13\%$. La différence de valeur provient du fait que la modification de la valeur de α_m ne change pas les taux d'actualisation contrairement au fait de baisser l'hypothèse de taux sans risque.

Tableau 10-9 : Sensibilité du tarif au niveau des frais de gestion (scénario central)

α_m	α_g^{PP}	$\alpha_m + \alpha_g^{PP}$	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0%	0.16%	0.16%	11.99	22.10
0.60%	0.24%	0.84%	12.84	22.39
0.80%	0.27%	1.07%	13.09	22.41
0.96%	0.30%	1.26%	13.22	22.30
1.20%	0.34%	1.54%	13.33	22.23

10.1.4.4 Sensibilité à l'assiette des frais retenue

Les frais peuvent être formulés sur la base de l'épargne ou de la prime nette investie. Si les paramètres financiers sont favorables par rapport au pourcentage de revenus garantis h_{WL} , l'épargne a de forte chance d'être supérieure à la prime investie au début de la vie de la garantie. Le pourcentage de frais en fonction de la prime investie est alors supérieur à celui calculé sur la base de l'épargne. Le ratio des frais entre les 2 formulations varie, tout en restant proche de 1.2 (voir Tableau 10-10). Nous voyons dans le Tableau 10-12 que cette conclusion est inversée si le scénario financier devient plus défavorable. Le ratio dépend alors davantage de la part actions contenue dans l'épargne. Ces conclusions ne permettent pas de comparer les tarifs pratiqués sur les 3 produits commercialisés sur le marché français.

Tableau 10-10 : Sensibilité du scénario central à l'assiette des frais prélevés au titre de la garantie

Assiette	Part actions	α_g^{PP}	Ratio	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Epargne	20%	0.02%	1.5	1.35	3.64
Prime Investie		0.03%		1.27	3.57
Epargne	40%	0.10%	1.2	6.27	12.09
Prime Investie		0.12%		6.24	12.32
Epargne	60%	0.30%	1.2	13.22	22.30
Prime Investie		0.37%		13.16	23.96
Epargne	80%	0.66%	1.2	19.77	30.11
Prime Investie		0.78%		18.92	32.07
Epargne	100%	1.13%	1.1	26.61	37.36
Prime Investie		1.25%		24.05	40.71

Tableau 10-11 : Sensibilité du tarif à l'assiette des frais ($r = 3\%$, $\sigma_S = 35\%$)

Assiette	Part actions	α_g^{PP}	Ratio	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Epargne	20%	0.19%	1.0	7.87	17.52
Prime Investie		0.19%		8.04	18.04
Epargne	40%	0.63%	1.0	20.01	40.84
Prime Investie		0.64%		21.18	44.75
Epargne	60%	1.38%	0.9	26.85	50.31
Prime Investie		1.29%		29.26	61.39
Epargne	80%	2.37%	0.8	32.48	57.03
Prime Investie		1.95%		38.75	83.67
Epargne	100%	3.51%	0.7	39.16	59.88
Prime Investie		2.54%		53.89	108.21

10.1.4.5 Sensibilité à l'introduction d'une garantie GMDB

La couverture procurée par la garantie GMDB n'a pas de limite d'âge et s'applique tant que la rente viagère n'est pas activée. Dans beaucoup de produits commercialisés, les garanties planchers arrêtent de couvrir l'assuré lorsque celui atteint son 80 ou 85^{ème} anniversaire.

Nous constatons que le tarif du contrat comprenant une garantie GLWB et une garantie GMDB est supérieur (de peu) à la somme du tarif des deux garanties considérées séparément. Nous ne retrouvons pas les conclusions de **Sun (2006)** dans notre scénario central.

L'intégration systématique d'une garantie GMDB dans le produit augmente fortement le niveau de frais à prélever au titre des garanties ainsi que le niveau des pertes maximales. L'assureur pourrait proposer cette garantie en option à l'assuré.

Tableau 10-12 : Tarif dans le scénario central en présence d'une garantie GMDB + absence de rachat

Garanties	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
GMDB seule	0.14%	7.44	14.58
GLWB sans GMDB	0.30%	13.22	22.30
GLWB avec GMDB	0.48%	18.65	31.06

10.1.5 Sensibilités aux paramètres clients

Nous étudions dans cette partie la sensibilité du tarif aux caractéristiques de l'assuré. Les résultats obtenus dans cette partie montrent l'impact d'une erreur commise sur les lois de comportement de l'assuré (risques actuariels).

10.1.5.1 Sensibilité à la mortalité

Comme attendu et contrairement aux garanties GMWB, nous observons que le coût de la garantie dépend de la table de mortalité utilisée. Le tarif pour une femme est supérieur à celui pour un homme puisque l'espérance de vie moyenne est plus élevée.

Tableau 10-13 : Sensibilité du tarif au sexe de l'assuré – Scénario central

Sexe	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Homme	0.30%	13.22	22.30
Femme	0.42%	16.39	27.66

Nous étudions pour un assuré moyen donné la sensibilité du coût de la garantie en construisant une table de mortalité abattue, sur le modèle de celle utilisée dans le calcul du $Life_{mort}$ de Solvabilité 2. Le stress test prévu porte sur une diminution uniforme et permanente de $\lambda\%$ du taux de mortalité pour tous les âges, c'est à dire que :

$${}_t\widehat{q}_x = (1 - \lambda) \times {}_tq_x$$

En développant l'équation et en supposant que $\widehat{l}_x = l_x$, nous en déduisons la relation entre \widehat{l}_{x+t} et l_{x+t} pour tout $t \in [0, \omega - x]$:

$$\widehat{l}_{x+t} = \lambda \times l_x + (1 - \lambda) \times l_{x+t} \quad [10-1]$$

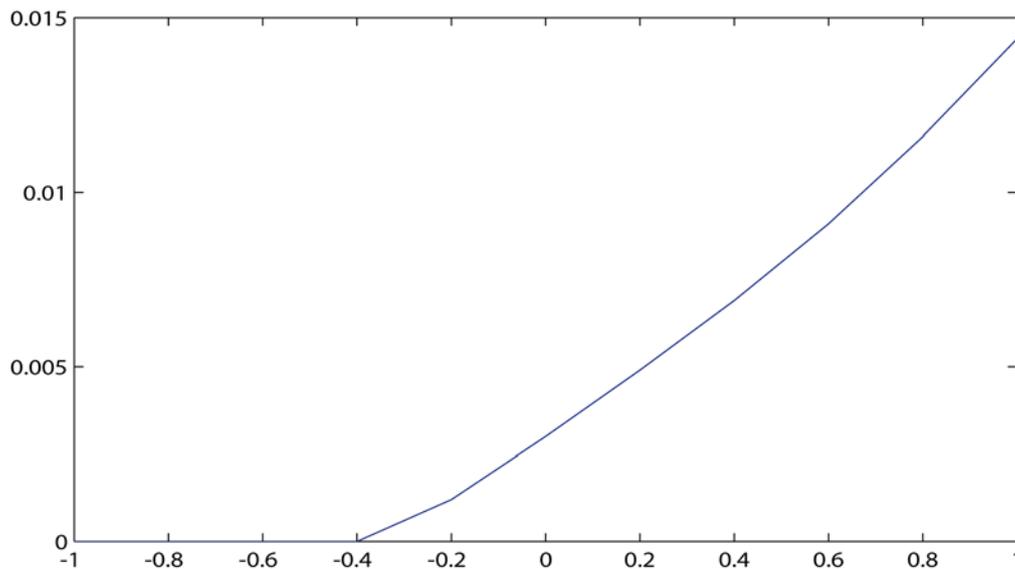
Dans le scénario central, nous posons $x = 55$ et construisons le Tableau 10-14.

Pour $\lambda \in [-20\%, 60\%]$, la variation du tarif de la garantie est linéaire avec le coefficient d'abattement. Cette variation augmente davantage pour les valeurs plus élevées de λ . Si $\lambda \leq -40\%$, le coût de la garantie est nul (négatif en réalité mais nous le supposons écrêté). Nous étudierons l'évolution du tarif en prime pure en fonction de l'âge de souscription et de la durée du différé pour une table abattue de $\lambda = 20\%$ dans la partie 10.3.

Tableau 10-14 : Sensibilité à la table de mortalité – Scénario central (Homme de 55 ans)

Coefficient d'abattement	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
-20%	0.12%	9.43	17.20
0%	0.30%	13.22	22.30
+20%	0.49%	16.60	27.24
+40%	0.69%	19.94	31.95
+60%	0.91%	22.99	36.23
+80%	1.16%	25.43	39.89
+100%	1.44%	27.69	42.94

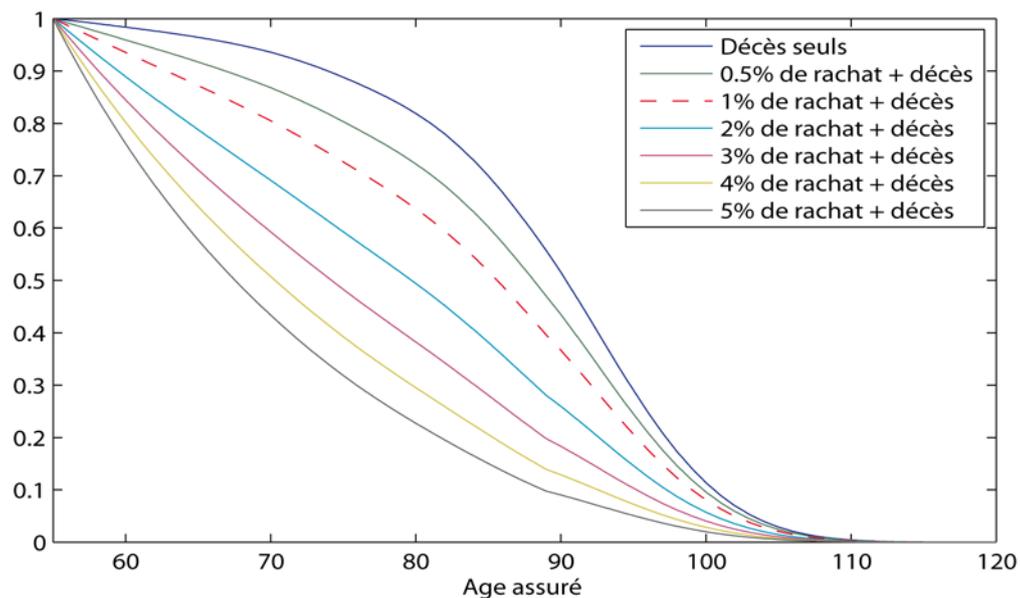
Figure 10-6 : Tarif en prime pure en fonction du coefficient d'abattement de la TGH 00-05



10.1.5.2 Sensibilité au comportement de rachat (statique et dynamique)

Nous supposons que la mortalité suit la table TGH 00-05 et faisons varier le taux de rachat.

Figure 10-7 : Nombre de contrats en fonction de la probabilité de rachat annuelle



La diminution du tarif lorsque le taux de rachat augmente provient du fait que le nombre d'options de longue maturité, ayant la plus forte probabilité d'être dans la monnaie par construction de la garantie, est alors plus faible (voir Figure 10-7). La probabilité de rachat statique que nous utilisons dans le scénario central figure en rouge pointillé (1%).

L'impact d'une modification de la probabilité de rachat sur le coût de la garantie est beaucoup plus important pour les garanties GLWB que pour les GMWB puisque la maturité de ces garanties est supérieure (voir Tableau 9-12). Lorsque la probabilité de rachat augmente, le nombre de contrats en cours pour les maturités les plus importantes diminue alors que ce sont les options de longues maturités qui expliquent la majeure partie des prestations payées au titre de la garantie par l'assureur.

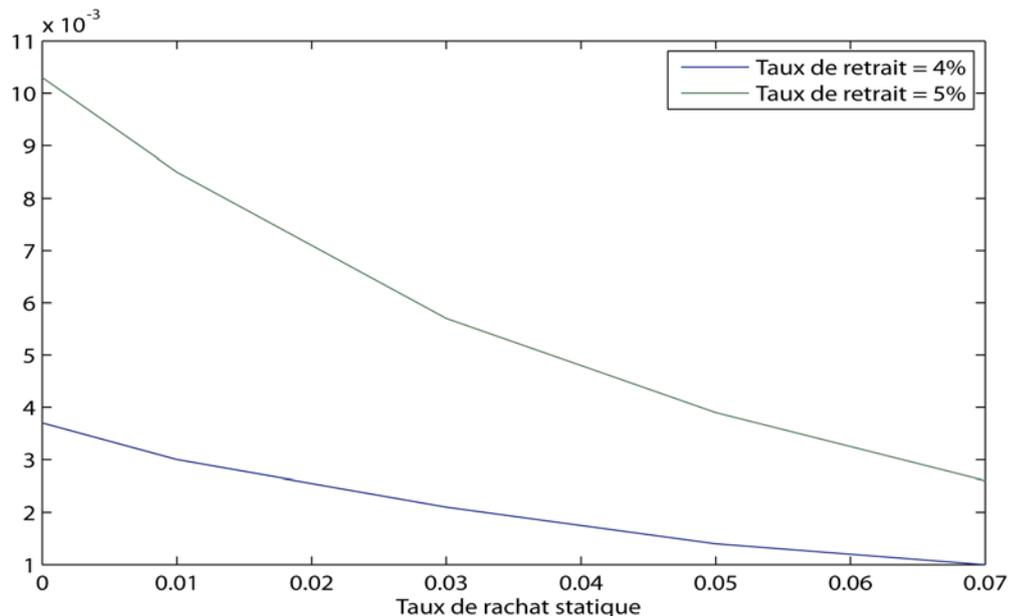
Tableau 10-15 : Sensibilité du tarif à la probabilité de rachat statique – Scénario central (taux retrait=4%)

Taux rachat	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0%	0.37%	17.19	29.04
1%	0.30%	13.22	22.30
3%	0.21%	7.86	14.40
5%	0.14%	4.62	8.94
7%	0.10%	2.61	5.41

Tableau 10-16 : Sensibilité du tarif à la probabilité de rachat statique – Taux retrait = 5%

Taux rachat	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0%	1.03%	24.21	38.78
1%	0.85%	19.82	32.24
3%	0.57%	13.12	22.00
5%	0.39%	8.33	14.56
7%	0.26%	5.24	9.53

Figure 10-8 : Tarif en prime pure en fonction du taux de rachat statique



L'assuré peut adopter un comportement dynamique, c'est à dire racheter son contrat lorsque la garantie n'a plus suffisamment de valeur. La trajectoire de rachat devient alors propre à

chaque scénario économique. Nous constatons dans le Tableau 10-17 que le coût de la garantie double sans modifier notablement les indicateurs de risque.

Tableau 10-17 : Sensibilité du tarif au rachat dynamique – Scénario central

Rachat	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
<i>Statique 1%</i>	0.30%	13.22	22.30
Statique 1% + dynamique	0.57%	15.22	21.21

Nous ne testons pas dans la suite les effets croisés d'une variation du notionnel lié à un changement des paramètres actuariels et à une modification des paramètres financiers.

10.1.5.3 Sensibilité à l'âge de souscription et à la durée du différé

Nous étudions dans cette partie la sensibilité du tarif de la garantie en fonction de l'âge de souscription et de la durée du différé. Nous faisons 3 jeux de calcul :

- Le premier concerne la sensibilité à l'âge de souscription en conservant la durée du différé égale à 10 ans (Tableau 10-18) ;
- Le second concerne la sensibilité à la durée du différé pour un assuré souscrivant à l'âge de 55 ans (Tableau 10-19) ;
- Le dernier concerne la sensibilité à l'âge de souscription en supposant que la phase de distribution débute lorsque l'assuré atteint 65 ans (Tableau 10-20) ;

Plus l'âge de souscription est élevé, pour un différé donné, plus le coût de la garantie et les pertes maximales sont faibles. Ce résultat s'explique par une diminution de la durée de la garantie (voir Tableau 10-18).

Tableau 10-18 : Sensibilité à l'âge de souscription – Scénario central (différé = 10 ans)

Age	Age début phase distribution	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
45	55	0.66%	21.12	33.69
50	60	0.47%	17.53	28.64
55	65	0.30%	13.22	22.30
60	70	0.16%	8.29	15.23

En augmentant la durée du différé (voir Tableau 10-19), nous augmentons la probabilité de déclencher la garantie cliquet au cours de la phase d'accumulation en contrepartie d'une diminution du montant de revenus garantis pour l'assuré. Les effets de la garantie GLWB sont plus importants que ceux de la garantie cliquet, ce qui se traduit par une augmentation du coût et du niveau des indicateurs de risque. Le cas du différé nul ($d = 0$) est particulier dans la mesure où seule la garantie GLWB joue dans ce cas. Le tarif lorsque $d = 0$ est généralement inférieur ou égal à celui obtenu pour $d = 5$ (voir partie 10.3).

Tableau 10-19 : Sensibilité du tarif à la durée du différé – Scénario central ($x = 55$ ans)

Différé d	Age début phase distribution	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
0	55	0.49%	13.96	16.18
5	60	0.49%	14.43	21.52
10	65	0.30%	13.22	22.30
15	70	0.16%	6.61	20.02
20	75	0.08%	6.24	15.35

Dans le Tableau 10-20, la phase de distribution débute toujours à 65 ans. La durée du différé est modifiée lorsque l'on fait varier l'âge de souscription de manière à maintenir la relation $x + d = 65$. Nous constatons que le coût de la garantie est maximal lorsque $x = 55$ et $d = 10$ (scénario central) mais les variations restent néanmoins faibles tant que $d > 0$. Deux phénomènes peuvent expliquer les écarts obtenus :

- La mortalité et les rachats ont une conséquence sur le nombre de contrats en cours au début de la phase de distribution. Plus l'âge de souscription est faible et moins le nombre de contrats en cours au début de la phase de distribution sera élevé, ce qui diminue le coût moyen de la garantie (voir Figure 10-6) ;
- La garantie cliquet se déclenche d'autant plus que le différé est long, c'est à dire que l'âge de souscription est faible. Ce phénomène va dans le sens contraire du précédent et conduira à augmenter le coût de la garantie lorsque l'âge de souscription diminue.

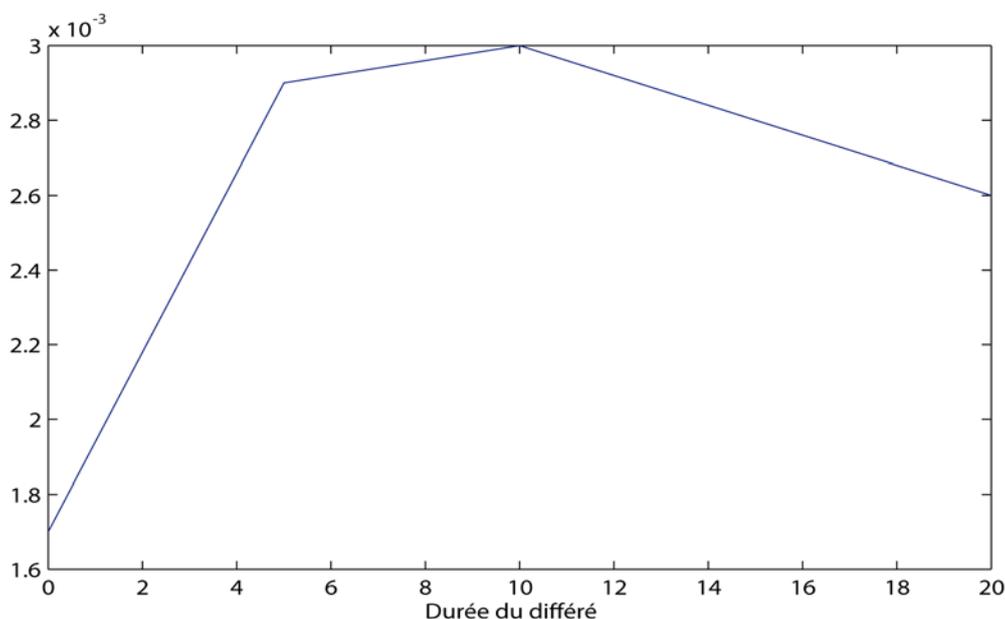
Lorsque l'âge de souscription est inférieur à 55 ans, le coût de la garantie diminue avec l'âge au moment de la souscription. Le phénomène de rachat/mortalité semble prédominer.

A l'inverse, lorsque l'âge de souscription est supérieur à 55 ans, le coût de la garantie diminue avec la durée du différé. Dans ce cas de figure, le phénomène de cliquet domine celui lié à la mortalité et au rachat. En particulier, lorsque $d = 0$, il n'y a plus de garantie cliquet et la valeur de la benefit base est alors inférieure ou égale à la benefit base des 4 autres scénarios testés. Le montant total pouvant être mis à disposition de l'assuré sera par conséquent inférieur pour un contrat en cours au début de la phase de distribution, ce qui diminuera le coût de la garantie.

Tableau 10-20 : Sensibilité à l'âge de souscription – Début de la phase de distribution à 65 ans

Age	Différé d	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
45	20	0.26%	15.80	33.72
50	15	0.28%	14.32	28.03
55	10	0.30%	13.22	22.30
60	5	0.29%	10.20	16.00
65	0	0.17%	6.43	8.01

Figure 10-9 : Tarif en prime pure en fonction de la durée du différé



10.1.6 Sensibilités aux garanties de revalorisation de la benefit base

Nous nous intéressons dans cette partie à l'impact des mécanismes de revalorisation de la benefit base pendant les phases d'accumulation (cliquet et TMG) et de distribution (cliquet)

10.1.6.1 Garanties cliquet en phase d'accumulation et de distribution

L'intégration d'un cliquet annuel en phase d'accumulation augmente fortement le coût de la garantie (Tableau 10-21). La hausse de la fréquence du cliquet accroît par ailleurs le coût et les indicateurs de risque de la garantie dans le scénario central. Plus la fréquence du cliquet est importante, plus la sensibilité du coût de la garantie à une modification des paramètres financiers sera élevée (Tableau 10-22).

Tableau 10-21 : Sensibilité à la fréquence du cliquet en phase d'accumulation

Fréquence du cliquet N_a	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Absence de cliquet	0.04%	3.44	4.75
$N_a = 1$	0.30%	13.22	22.30
$N_a = 2$	0.34%	14.08	24.10
$N_a = 4$	0.38%	15.06	25.12

Tableau 10-22 : Sensibilité à la fréquence du cliquet en phase d'accumulation – Stress : $\sigma_S = 35\%$

Fréquence du cliquet N_a	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$N_a = 1$	0.76%	25.01	49.94
$N_a = 4$	1.00%	28.48	56.77

Nous mesurons l'impact sur le coût de la garantie de la mise en place d'une garantie cliquet en phase de distribution et faisons varier la fréquence du cliquet pour rendre compte actuellement des produits commercialisés sur le marché français. Le Tableau 10-23 est construit en supposant que la garantie prévoit un cliquet annuel en phase d'accumulation. Ce cas de figure constitue le scénario de référence du tableau. Dans le scénario central, le coût de la garantie augmente avec la fréquence du cliquet en phase de distribution mais les indicateurs de risque restent du même ordre de grandeur.

Tableau 10-23 : Sensibilité du à la fréquence du cliquet en phase de distribution - Scénario central

Cliquet phase distribution	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
<i>Sans</i>	0.30%	13.22	22.30
Avec – $N_d = 1$	0.41%	13.66	24.39
Avec – $N_d = 1/3$	0.36%	13.46	22.97
Avec – $N_d = 1/5$	0.34%	13.20	22.78

10.1.6.2 Taux minimum garanti (TMG) en phase d'accumulation

Un autre mécanisme de revalorisation de la benefit base en phase d'accumulation consiste à prévoir un taux garanti i_{TMG} . La mise en place d'une garantie TMG devient plus onéreuse qu'un cliquet annuel dès lors que le taux garanti $i_{TMG} > r$ (voir Tableau 10-24).

Tableau 10-24 : Impact sur le coût de la garantie de l'introduction d'une garantie de TMG

Cliquet $N_a = 1$	α_g^{PP}	$Var_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Sans	0.04%	3.44	4.75
<i>Sans</i> – $i_{TMG} = 2\%$	0.13%	7.78	9.47
<i>Sans</i> – $i_{TMG} = 4\%$	0.36%	13.54	15.59
<i>Sans</i> – $i_{TMG} = 6\%$	0.89%	20.56	22.96

Dans le Tableau 10-25, nous testons une formulation de la garantie prévoyant en phase d'accumulation une garantie cliquet annuel et un taux de revalorisation garanti i_{TMG} . Lorsque $i_{TMG} = 0$, la garantie TMG n'a pas d'impact puisque la benefit base ne peut pas, par définition, être inférieure à la valeur de la benefit base à la souscription (BB_0)¹.

Lorsque le taux i_{TMG} augmente, le coût de la garantie augmente. L'évolution des indicateurs de risque n'est pas monotone.

Tableau 10-25 : Impact sur le coût de la garantie d'une garantie TMG en complément d'un cliquet annuel

TMG i_{TMG}	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
<i>Sans garantie en phase d'accumulation</i>	0.04%	3.44	4.75
<i>Cliquet annuel - $N_a = 1$</i>	0.30%	13.22	22.30
<i>Cliquet annuel - $N_a = 1 - i_{TMG} = 0\%$</i>	0.30%	13.23	22.31
<i>Cliquet annuel - $N_a = 1 - i_{TMG} = 2\%$</i>	0.36%	12.41	21.34
<i>Cliquet annuel - $N_a = 1 - i_{TMG} = 4\%$</i>	0.57%	14.31	20.13
<i>Cliquet annuel - $N_a = 1 - i_{TMG} = 6\%$</i>	1.09%	20.31	23.53

Le surcoût lié à l'introduction d'une garantie TMG est très sensible à une modification des paramètres financiers (voir Tableau 10-26). Une diminution de 100bp du taux sans risque multiplie le coût de la garantie par 2.6 dans le cas où $i_{TMG} = 4\%$ par rapport au scénario central. Les indicateurs de risque sont moins impactés par cette modification de la valeur du taux sans risque.

Tableau 10-26 : Impact sur le coût de la garantie d'une garantie TMG sous un scénario financier stressé

$i_{TMG} = 4\%$	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
Scénario central	0.57%	14.31	20.13
$r = 3\%$	1.48%	21.15	26.00

Il serait nécessaire de compléter l'étude de ces garanties en testant le comportement du coût et des indicateurs de risque à d'autres modifications des paramètres financiers.

10.1.7 Sensibilités aux paramètres de marché

Nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes pour étudier les sensibilités de la garantie à la valeur du taux sans risque et de la volatilité des actions.

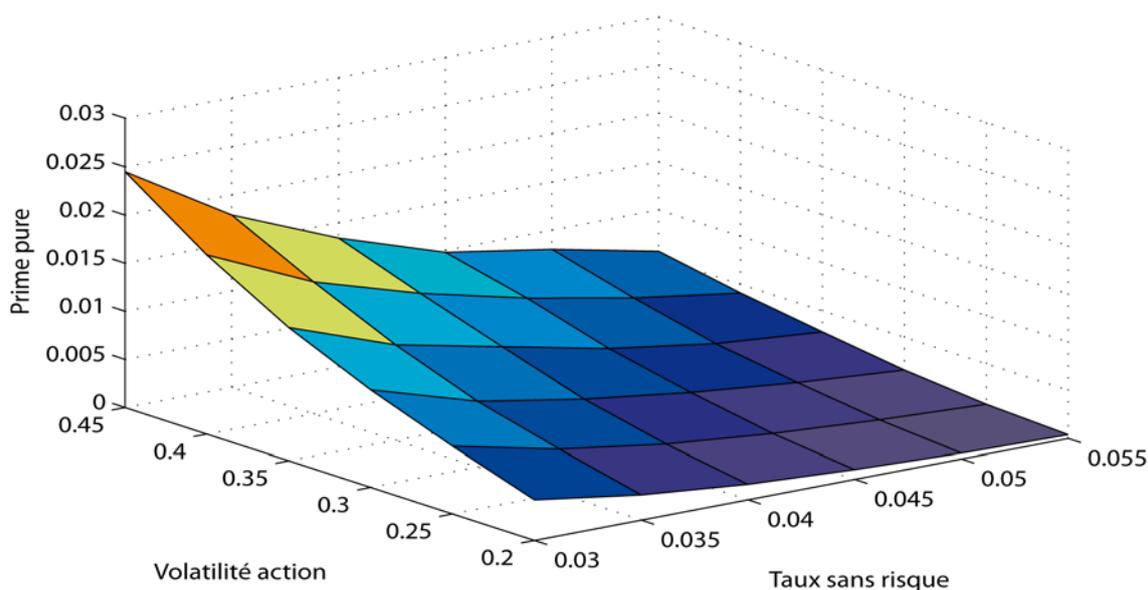
Nous nous intéressons à l'impact du changement de ces paramètres financiers sur la valeur du tarif en prime pure α_g^{PP} (Tableau 10-27) et de la $VaR_{95\%}$ (Tableau 10-28). Les valeurs du taux sans risque figurent dans la 1^{ère} ligne, celles de la volatilité action dans la 1^{ère} colonne.

Tableau 10-27 : Prime pure en fonction du taux sans risque et du niveau de volatilité (Black & Scholes)

α_g^{PP}	3%	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
20%	0.42%	0.26%	0.16%	0.10%	0.06%	0.04%
25%	0.70%	0.46%	0.30%	0.20%	0.13%	0.08%
30%	1.01%	0.68%	0.49%	0.35%	0.24%	0.16%
35%	1.38%	0.99%	0.76%	0.53%	0.37%	0.28%
40%	1.86%	1.37%	1.04%	0.78%	0.57%	0.41%
45%	2.45%	1.79%	1.34%	0.98%	0.80%	0.57%

¹ Le produit prévoit donc implicitement une garantie TMG à taux nul

Figure 10-10 : Surface représentant la prime pure en fonction du taux sans risque et de la volatilité action

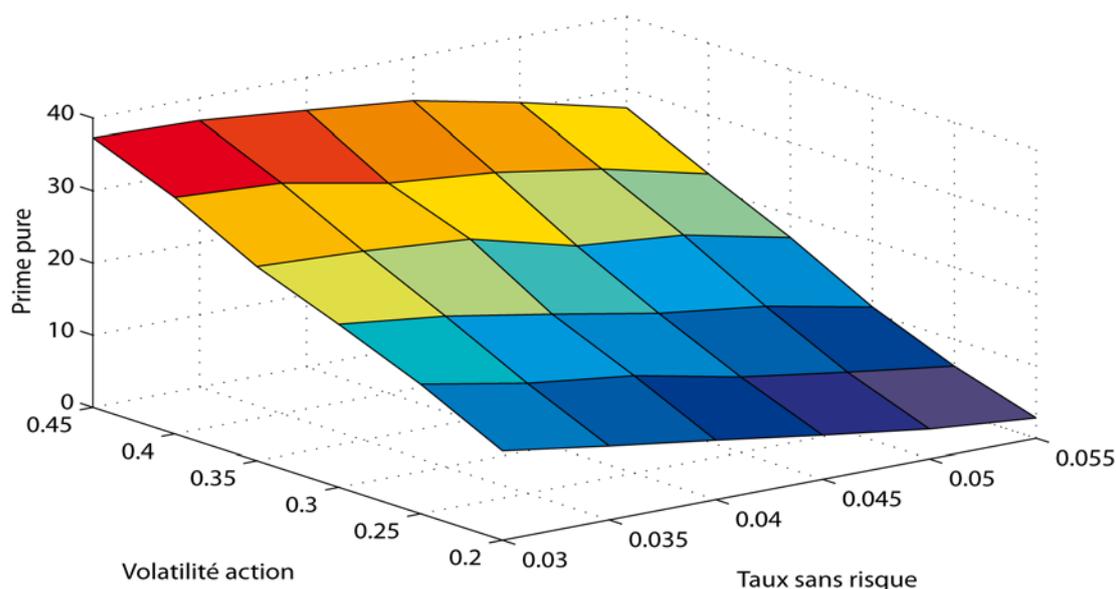


Une augmentation de 5 points de la volatilité a plus d'impact qu'une baisse des taux de 50bp mais les résultats restent néanmoins du même ordre de grandeur. Le coût de la garantie augmente lorsque les taux baissent ($\rho < 0$) ou lorsque la volatilité augmente ($vega > 0$), ce qui est cohérent avec les résultats de l'étude qualitative du chapitre 3.

Tableau 10-28 : $Var_{95\%}$ en fonction du taux sans risque et du niveau de volatilité (Black & Scholes)

$Var_{95\%}$	3%	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
20%	12.31	10.16	8.16	6.06	4.10	2.80
25%	17.87	15.20	13.22	10.45	8.28	6.30
30%	22.51	20.82	18.28	15.60	13.75	10.84
35%	26.85	26.18	25.01	21.27	19.96	16.80
40%	32.77	31.92	29.12	27.78	25.44	21.94
45%	37.32	36.89	35.46	33.97	30.92	27.37

Figure 10-11 : Surface représentant la VaR en fonction du taux sans risque et de la volatilité action



La $VaR_{95\%}$ augmente davantage suite à une augmentation de la volatilité de 5% (par rapport à une variation des taux de 50bp).

La convexité de la surface de coût est plus forte que celle trouvée pour la GMWB, c'est à dire que la garantie GLWB est plus sensible à une modification des paramètres financiers. Ce résultat se retrouve aussi lorsque l'on s'intéresse aux surfaces représentant les $VaR_{95\%}$ des deux garanties.

Le coût de la garantie augmente lorsque la corrélation entre les sous-jacents augmente. Ce résultat s'explique par le fait que le support obligataire suivra davantage la tendance du sous-jacent action. Lorsque ϕ_1 devient de plus en plus négative, le comportement du fonds obligataire compense la trajectoire défavorable du support actions, ce qui limite ainsi le déclenchement de la garantie (voir Tableau 10-29).

La relation entre le coût et le coefficient de corrélation ϕ_1 n'est plus linéaire comme pour les garanties GMDB.

Tableau 10-29 : Sensibilité de la prime pure à la corrélation entre les sous-jacents (Black & Scholes)

Corrélation ϕ_1	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
-50%	0.27%	12.29	21.96
-25%	0.30%	13.13	23.00
-15%	0.30%	13.22	22.30
0%	0.31%	12.99	22.65
25%	0.34%	13.50	22.66
50%	0.37%	14.58	23.56

10.1.8 Sensibilités au modèle utilisé

Le coût des garanties est généralement plus élevé lorsque nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de Vasicek. Par ailleurs, nous remarquons que les indicateurs de risque diffèrent largement.

L'écart entre le modèle avec taux déterministe et celui avec des taux stochastiques provient principalement de la revalorisation au taux sans risque :

- Le taux déterministe est supérieur à la courbe des taux zéro coupon qui a servi à étalonner le modèle de Vasicek pour les maturités inférieures à 15 ans. Pendant la phase d'accumulation ($d = 10$ pour le contrat du scénario central), l'épargne sera en moyenne moins bien revalorisée dans le cadre d'un modèle de Vasicek et la garantie se déclenchera alors plus rapidement. En contrepartie, le cliquet en phase d'accumulation va moins jouer pour le modèle de Vasicek mais cela semble être un phénomène de second ordre ;
- L'effet de la revalorisation est accentué par l'existence de taux négatifs (Figure 8-10) pour un nombre non négligeable de trajectoires économiques (distribution gaussienne du taux sans risque à une date donnée pour le modèle de Vasicek) ;
- Enfin, le fait que le taux déterministe soit supérieur en moyenne à la courbe des taux zéro coupon a un impact sur les coefficients d'actualisation. Ceux-ci seront plus faibles et cela conduira mécaniquement à écraser les options de maturités comprises entre 10 et 15 ans (après le différé). Etant donné que ces options ont peu de chance d'être dans la monnaie, la part de l'écart sur les coûts expliqué par les coefficients d'actualisation semble faible.

Ce raisonnement permet d'expliquer les Tableau 10-30, Tableau 10-32 et Tableau 10-33.

Les conclusions sont inversées pour le Tableau 10-31 où par construction les taux obtenus dans le cadre du modèle de Vasicek ont tendance à être plus souvent négatifs.

Tableau 10-30 : prime pure en fonction du modèle – scénario central

Modèle de taux	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 4\%$	0.30%	13.22	22.30
Vasicek	0.45%	25.63	41.30

Tableau 10-31 : prime pure en fonction du modèle – scénario central avec choc à la baisse des taux

Modèle de taux	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 3\%$	0.70%	17.87	29.21
Vasicek	0.62%	26.93	42.06

Tableau 10-32 : prime pure en fonction du modèle – scénario central avec choc à la hausse sur les taux

Modèle de taux	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 5\%$	0.13%	8.28	16.00
Vasicek	0.14%	11.57	22.12

Tableau 10-33 : prime pure en fonction du modèle – Taux de retrait = 5%

Modèle de taux	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 4\%$	0.85%	19.82	32.24
Vasicek	1.11%	37.43	56.75

Les résultats du Tableau 10-34 sont expliqués par le fait que les options sont de longue maturité en raison du différé ($d = 25$). Dans les deux cas de figure, ces options ont de fortes chances d'être dans la monnaie. Le léger surcoût dans le cadre du modèle de Vasicek provient des coefficients d'actualisation et de la probabilité plus forte des options d'être dans la monnaie.

Tableau 10-34 : prime pure en fonction du modèle – Taux de retrait = 4% - $x = 55$ et $d = 25$

Modèle de taux	α_g^{PP}	$VaR_{95\%}$	$CTE_{95\%}$
$r = 4\%$	0.04%	2.89	9.86
Vasicek	0.05%	3.55	11.01

10.2 Conclusions sur la prime pure

Nous nous intéressons dans cette partie aux surfaces de tarif en prime pure dans le scénario central (pour les paramètres financiers et la définition de la garantie). Nous faisons varier l'âge de souscription, la durée du différé et le sexe de l'assuré.

Les parties grisées dans le Tableau 10-35 et le Tableau 10-36 représentent les cas qui ne sont généralement pas ouverts à la souscription, conformément à l'étude de marché menée dans la partie 2.3.1 (l'assuré devant être âgé d'au plus 75 ans au début de la phase de distribution).

10.2.1 Surface de prime pure – $h_{WL} = 4\%$

Nous remarquons que le coût de la garantie :

- Augmente pour un âge de souscription donné lorsque la durée du différé diminue, ce qui traduit que le nombre total de revenus garantis pilote le coût de la garantie par rapport à la durée de la phase d'accumulation (garantie cliquet) ;

- Augmente pour un différé donné lorsque l'âge de souscription diminue. Cette conclusion est conforme avec l'effet de la mortalité identifié dans le Tableau 10-18.

Le coût de la garantie est quasiment constant le long des diagonales tant que $x + d \geq 65$ ans. Ce n'est notamment plus le cas pour les valeurs à l'extrémité supérieure gauche du tableau (âge à la souscription et différé faibles). Le coût de la garantie dépend fortement des paramètres financiers et actuariels (voir partie 10.3) sauf pour la partie inférieure droite du tableau (durée du différé élevée, âge à la souscription modéré ou élevé).

Lorsque le différé est nul ($d = 0$), le comportement du coût de la garantie est différent de celui des autres couples (x, d) testés. En effet, pour un âge de souscription donné, le coût de la garantie ne diminue plus nécessairement avec le différé. Cette propriété reste vraie si l'âge de souscription x est supérieur à 55 ans. Lorsque le différé est nul, deux phénomènes opposés existent :

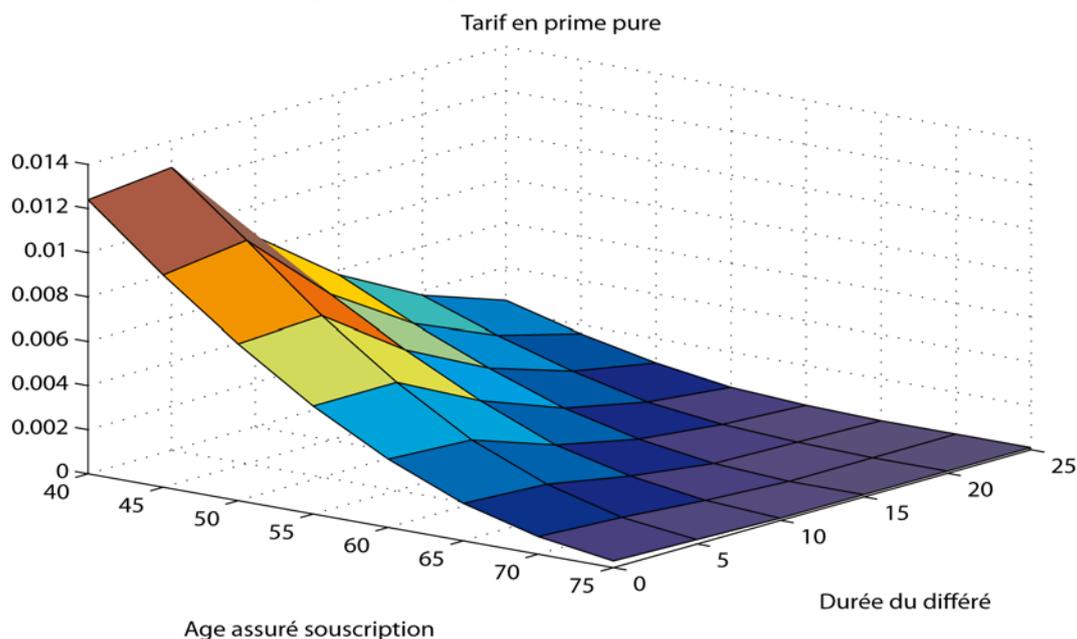
- Il n'y a plus de phase d'accumulation et donc plus de garantie cliquet ;
- Il y a davantage de revenus garantis pouvant être mis à la disposition de l'assuré alors que le taux garanti reste constant.

La mortalité modifie la proportion jouée par chacun de ces deux phénomènes, ce qui explique la distinction fonction de l'âge mise en évidence.

Tableau 10-35 : Tarif en prime pure pour un homme –scénario central

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	1.24%	1.28%	0.86%	0.58%	0.38%	0.25%
$x = 45$	0.96%	1.01%	0.66%	0.42%	0.26%	0.16%
$x = 50$	0.71%	0.73%	0.47%	0.28%	0.16%	0.09%
$x = 55$	0.49%	0.49%	0.30%	0.16%	0.08%	0.04%
$x = 60$	0.31%	0.29%	0.16%	0.08%	0.04%	0.02%
$x = 65$	0.17%	0.15%	0.08%	0.03%	0.02%	0.01%
$x = 70$	0.08%	0.06%	0.03%	0.01%	0.01%	0.01%
$x = 75$	0.03%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%

Figure 10-12 : Surface de tarif en prime pure pour un homme dans le scénario central



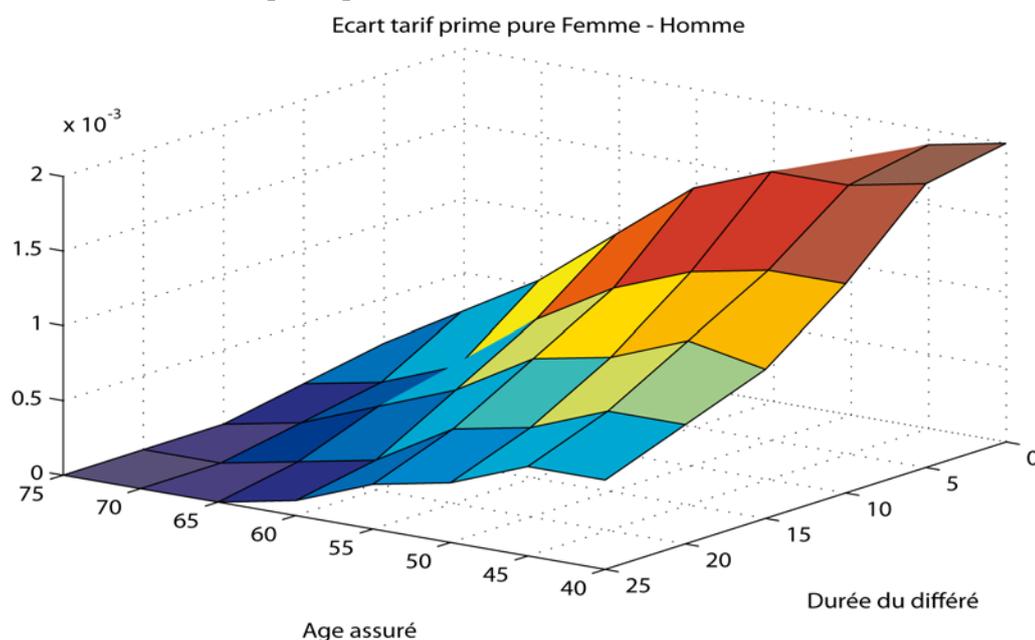
Ces conclusions restent valables si l'assuré est une femme. Le tarif est plus élevé dans ce cas néanmoins en raison de l'espérance de vie plus importante pour un âge de souscription donné.

Tableau 10-36 : Tarif en prime pure pour une femme – scénario central

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	1.44%	1.47%	1.00%	0.68%	0.46%	0.31%
$x = 45$	1.15%	1.19%	0.80%	0.53%	0.34%	0.22%
$x = 50$	0.88%	0.91%	0.60%	0.37%	0.22%	0.13%
$x = 55$	0.64%	0.65%	0.41%	0.24%	0.13%	0.07%
$x = 60$	0.43%	0.41%	0.24%	0.13%	0.06%	0.03%
$x = 65$	0.25%	0.23%	0.12%	0.06%	0.03%	0.01%
$x = 70$	0.13%	0.11%	0.05%	0.02%	0.01%	0.01%
$x = 75$	0.05%	0.04%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%

D'après la Figure 10-13, l'écart de tarif est d'autant plus grand que la durée de vie attendue du contrat est élevée (différé faible et âge à la souscription peu élevé)

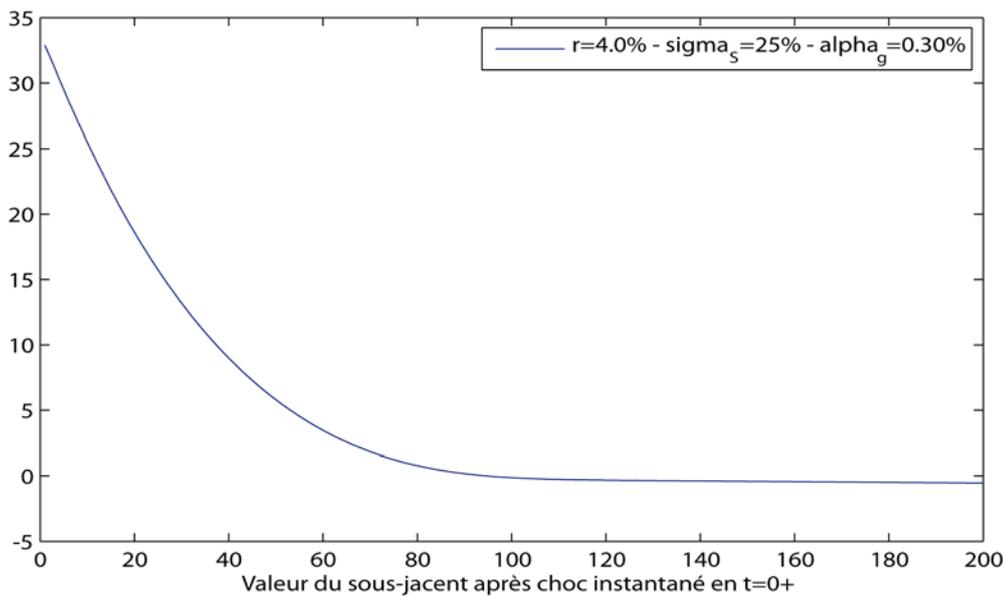
Figure 10-13 : Ecart du tarif en prime pure (Femme – Homme) dans le scénario central



10.2.2 Convexité de la valeur de la garantie

Nous traçons la valeur de la garantie à la date $t = 0^+$ en fonction de la valeur de l'épargne (choc instantané).

L'asymétrie de la garantie est constatée sur ce graphique. Si la valeur de l'épargne augmente, le résultat sur la garantie augmente lentement pour l'assureur. Dans le cas contraire, les pertes de l'assureur évoluent fortement lorsque la valeur de l'épargne en cas de choc à la baisse de la valeur de l'épargne.

Figure 10-14: Convexité de la valeur de la garantie à la date $t = 0^+$ 

10.2.3 Comparaison avec les résultats de la littérature

Les résultats que nous avons trouvés sont difficilement comparables avec ceux présentés dans la littérature, principalement pour deux raisons :

- La mortalité est supposée suivre la table réglementaire du pays de l'auteur ou bien est calculée à partir de la mortalité instantanée. **Holz et al. (2007)** utilise par exemple la table de mortalité réglementaire allemande pour effectuer leurs calculs ;
- Les auteurs déterminent généralement le coût de la garantie dont l'assuré doit s'acquitter, en une fois au moment de la souscription. Cette approche ne traduit pas la réalité et enlève une partie de la circularité du problème (les frais impactent l'épargne et donc la date d'activation de la garantie). La mortalité utilisée dans **Huang et al. (2010)** suit une loi de Gompertz et les rachats ne sont pas pris en compte. Ces auteurs calculent la valeur initiale des engagements actualisés de l'assureur. La comparaison de notre modèle nécessiterait d'identifier les lois de mortalité et de prendre dans notre modèle la valeur suivante des paramètres :

$$\alpha_g = \alpha_m = {}_{t_i|N}1R_x = 0$$

Nous pouvons comparer les valeurs obtenues par notre modèle avec le tarif des produits commercialisés sur le marché français.

10.2.3.1 Accumulator Retraite

Nous utilisons les paramètres suivants dans notre modèle :

- Absence de garantie GMDB et frais exprimés en fonction de la prime initiale ;
- Garantie cliquet quinquennal en phase de distribution : $N_d = 1/5$;
- Garantie TMG en phase d'accumulation : $i_{TMG} = 2\%$;

Nous supposons que l'allocation d'actifs peut être approchée par une combinaison de $w_{eq}^{t=0}$ actions et du complément en fonds euro. Nous supposons que le fonds euro fournit une revalorisation égale au taux sans risque (voir chapitre 8.2), c'est à dire que $\sigma_B = 0$. L'assuré

souscrit la garantie à l'âge de 55 ans ($x = 55$) et opte pour un différé de 10 ans ($d = 10$). Le taux de revenus garantis est alors égal à $h_{WL} = 4.5\%$.

Nous supposons enfin, en nous appuyant sur les résultats de la partie suivante, que le tarif en prime commerciale est obtenue en effectuant une baisse du taux sans risque de 100bp.

Tableau 10-37 : Reconstitution du tarif du produit Accumulator Retraite

Part action $w_{eq}^{t=0}$	α_g^{PP}	α_g^{PC}	Tarif du produit
50%	0.29%	0.73%	1.40%
60%	0.47%	0.92%	1.90%

Le tarif obtenu à partir du modèle est largement inférieur à celui proposé sur le produit d'Axa commercialisé pour un assuré âgé de 55 ans et ayant choisi un différé de 10 ans. Le tarif proposé ne dépend que de la part actions de l'allocation d'actifs et le cas que nous avons considéré n'est pas le pire scénario auquel l'assureur doit pouvoir faire face (le différé pourrait être égal à 2 ans, l'assuré pourrait être une femme...).

10.2.3.2 Terre d'Avenir

Nous utilisons les paramètres suivants dans notre modèle :

- Garantie G MDB et frais exprimés en fonction de la valeur de l'épargne ;
- Garantie cliquet triennal en phase de distribution : $N_d = 1/3$;
- Garantie cliquet quinquennal en phase d'accumulation : $N_a = 1$;

L'allocation d'actifs est égale à $w_{eq}^{t=0}$ d'actions et au complément investi en EuroMTS. Le taux de revenus garantis est égal à $h_{WL} = 4.50\%$.

Tableau 10-38 : Reconstitution du tarif du produit Terre d'Avenir ($x = 50, d = 10$)

Part action $w_{eq}^{t=0}$	α_g^{PP}	α_g^{PC}	Tarif du produit
40%	0.51%	1.35%	1.25%

Tableau 10-39 : Reconstitution du tarif du produit Terre d'Avenir ($x = 55, d = 10$)

Part action $w_{eq}^{t=0}$	α_g^{PP}	α_g^{PC}	Tarif du produit
40%	0.33%	0.87%	0.75%
60%	0.87%	1.76%	1.25%

Les résultats obtenus montrent que le produit Terre d'Avenir semble bien contenir une marge de sécurité. Cependant, par rapport à notre méthodologie, le tarif des garanties ne semble pas suffisant. Cette sous-tarifcation pourrait être expliquée par la portée importante de la garantie décès (voir parties précédentes)

10.3 Evaluation de la prime commerciale

10.3.1 Tarif en prime pure pour les scénarios de stress

Nous avons déterminé dans la partie 10.2.1 les surfaces de primes pures pour des garanties GLWB proposant un taux de revenus garantis h_{WL} égal à 4% et souscrit par un assuré de sexe masculin. Tous les autres paramètres sont égaux à ceux du scénario central.

Pour établir les primes commerciales, nous reprenons la même méthode proposée dans le chapitre 9. Les scénarios de stress sont enrichis d'un test supplémentaire dans la mesure où le tarif des garanties GLWB est fortement sensible à une baisse de la mortalité. Nous supposons par ailleurs que l'assuré adopte un comportement statique mais la sensibilité à ce paramètre devrait aussi être testée, sur le modèle de ce qui a été fait dans le chapitre 9.

Nous déterminons dans la suite la tarification commerciale de la garantie GLWB pour un assuré souscrivant à 55 ans avec un différé de 10 ans. L'épargne est investie à 60% en actions.

Dans les 4 scénarios testés, le coût obtenu pour la garantie est toujours supérieur au tarif en prime pure. Excepté pour le scénario n°2 (Tableau 10-41), le coût lorsque $d = 5$ est supérieur au coût de la garantie obtenue avec un différé nul en raison de la garantie cliquet.

A la suite d'une modification des paramètres financiers, nous constatons que l'augmentation du coût de la garantie par rapport au tarif en prime pure devient plus importante lorsque l'âge de souscription et le différé diminuent (pour $d \geq 5$). Le résultat en fonction de l'âge de souscription (pour un différé donné) provient de la variation du nombre d'options entrant dans l'écriture de la valeur de la garantie. Etant donné que les options de longue maturité (hors de la monnaie) ont un ρ élevé et une faible sensibilité à la volatilité (voir chapitre 3.1), cela explique que la variation du coût par rapport au tarif en prime pure augmente plus rapidement dans le scénario 2 (baisse du taux sans risque de 100bp) que dans le scénario 1 (augmentation de la volatilité) lorsque l'âge de souscription diminue pour un différé fixé. Cette analyse reste valable lorsque l'âge à la souscription est fixé et que le différé varie.

Lorsque $d = 0$, la baisse du taux sans risque a un impact considérable sur le coût de la garantie pour les âges faibles à la souscription ($x = 40$ et $x = 45$).

Lorsque la mortalité est abaissée de 20% (Tableau 10-43), l'augmentation du coût devient plus importante lorsque le différé diminue. Pour un différé donné, l'augmentation du coût est indépendante de l'âge à la souscription. Ce résultat est lié à l'expression de la valeur de la garantie et à la nature du choc démographique considéré (proportionnel pour toutes les maturités). Dans le scénario 4, la mortalité a le plus d'impact pour les différés et les âges à la souscription élevés.

Pour $x = 55$ et $d = 10$ par exemple, une diminution uniforme de la mortalité de 40% par rapport à la TGH 00-05 a le même impact sur le coût de la garantie qu'une diminution de 100bp du taux sans risque ou qu'une augmentation de 10 points de la volatilité du sous-jacent action utilisés dans le scénario central.

Tableau 10-40 : Scénario 1 – Volatilité actions = 35%

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	1.71%	2.34%	1.78%	1.23%	0.84%	0.56%
$x = 45$	1.39%	1.89%	1.43%	0.95%	0.63%	0.40%
$x = 50$	1.08%	1.45%	1.09%	0.70%	0.43%	0.26%
$x = 55$	0.80%	1.05%	0.76%	0.46%	0.27%	0.14%
$x = 60$	0.54%	0.69%	0.47%	0.27%	0.14%	0.07%
$x = 65$	0.33%	0.40%	0.26%	0.13%	0.06%	0.02%
$x = 70$	0.17%	0.20%	0.12%	0.05%	0.02%	0%
$x = 75$	0.07%	0.08%	0.04%	0.02%	0.01%	0%

Tableau 10-41 : Scénario 2 – Baisse du taux sans risque de 100bp

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	12.15%	4.17%	2.28%	1.38%	0.86%	0.53%
$x = 45$	4.25%	2.89%	1.67%	0.99%	0.58%	0.33%
$x = 50$	2.33%	1.91%	1.13%	0.65%	0.35%	0.18%
$x = 55$	1.37%	1.19%	0.70%	0.37%	0.18%	0.08%
$x = 60$	0.79%	0.68%	0.38%	0.18%	0.08%	0.03%
$x = 65$	0.45%	0.34%	0.17%	0.07%	0.03%	0.01%
$x = 70$	0.19%	0.14%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%
$x = 75$	0.07%	0.05%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%

Tableau 10-42 : Scénario 3 – Baisse du taux sans risque de 50bp et hausse de la volatilité de 5%

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	2.77%	2.81%	1.87%	1.24%	0.84%	0.58%
$x = 45$	2.00%	2.13%	1.44%	0.93%	0.60%	0.39%
$x = 50$	1.44%	1.55%	1.04%	0.64%	0.39%	0.23%
$x = 55$	0.99%	1.05%	0.68%	0.40%	0.22%	0.12%
$x = 60$	0.64%	0.66%	0.40%	0.21%	0.10%	0.05%
$x = 65$	0.37%	0.36%	0.20%	0.09%	0.04%	0.02%
$x = 70$	0.18%	0.16%	0.08%	0.03%	0.01%	0.01%
$x = 75$	0.07%	0.06%	0.03%	0.01%	0.01%	0.01%

Tableau 10-43 : Scénario 4 – Baisse de la mortalité de 20% ($\lambda = 20\%$)

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	1.47%	1.51%	1.03%	0.71%	0.49%	0.34%
$x = 45$	1.19%	1.23%	0.84%	0.56%	0.38%	0.26%
$x = 50$	0.94%	0.97%	0.65%	0.43%	0.28%	0.20%
$x = 55$	0.71%	0.73%	0.49%	0.32%	0.21%	0.14%
$x = 60$	0.53%	0.53%	0.35%	0.23%	0.16%	0.11%
$x = 65$	0.38%	0.39%	0.26%	0.18%	0.12%	0.09%
$x = 70$	0.29%	0.29%	0.21%	0.15%	0.10%	0.07%
$x = 75$	0.23%	0.24%	0.18%	0.12%	0.08%	0.04%

Nous ne testons pas l'impact sur le tarif en prime pure de la garantie de l'annulation de la probabilité de rachat car nous avons déjà considéré dans le scénario central un taux de rachat annuel statique faible (1%). Par ailleurs, il serait nécessaire de regarder les effets croisés (par exemple la baisse de 50bp du taux sans risque couplé à un abattement de 20% de la mortalité).

10.3.2 Surface de prime commerciale et marge explicite

Nous déduisons des calculs précédents la prime commerciale :

$$\alpha_g^{PC} = \max_i(\alpha_g^{PP,(i)}, \alpha_g^{PP})$$

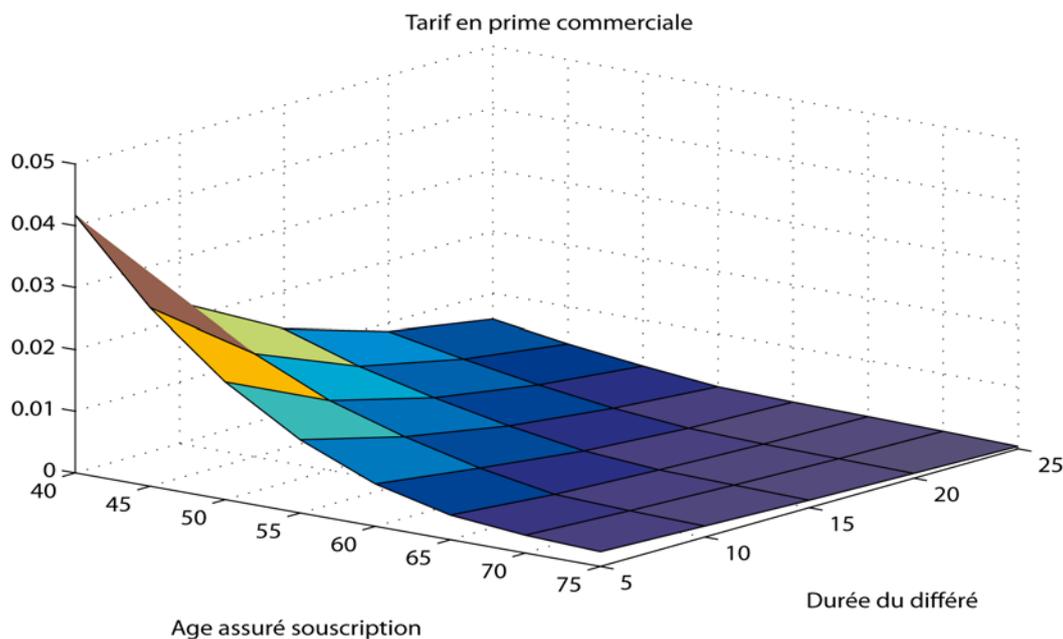
La marge de sécurité correspondante est alors égale à $\max_i(\alpha_g^{PP,(i)} - \alpha_g^{PP}, 0)$

Tableau 10-44 : Estimation du tarif en prime commerciale – Scénario central

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	12,15%	4,17%	2,28%	1,38%	0,86%	0,58%
$x = 45$	4,25%	2,89%	1,67%	0,99%	0,63%	0,40%
$x = 50$	2,33%	1,91%	1,13%	0,70%	0,43%	0,26%
$x = 55$	1,37%	1,19%	0,76%	0,46%	0,27%	0,14%
$x = 60$	0,79%	0,69%	0,47%	0,27%	0,16%	0,11%
$x = 65$	0,45%	0,40%	0,26%	0,18%	0,12%	0,09%
$x = 70$	0,29%	0,29%	0,21%	0,15%	0,10%	0,07%
$x = 75$	0,23%	0,24%	0,18%	0,12%	0,08%	0,04%

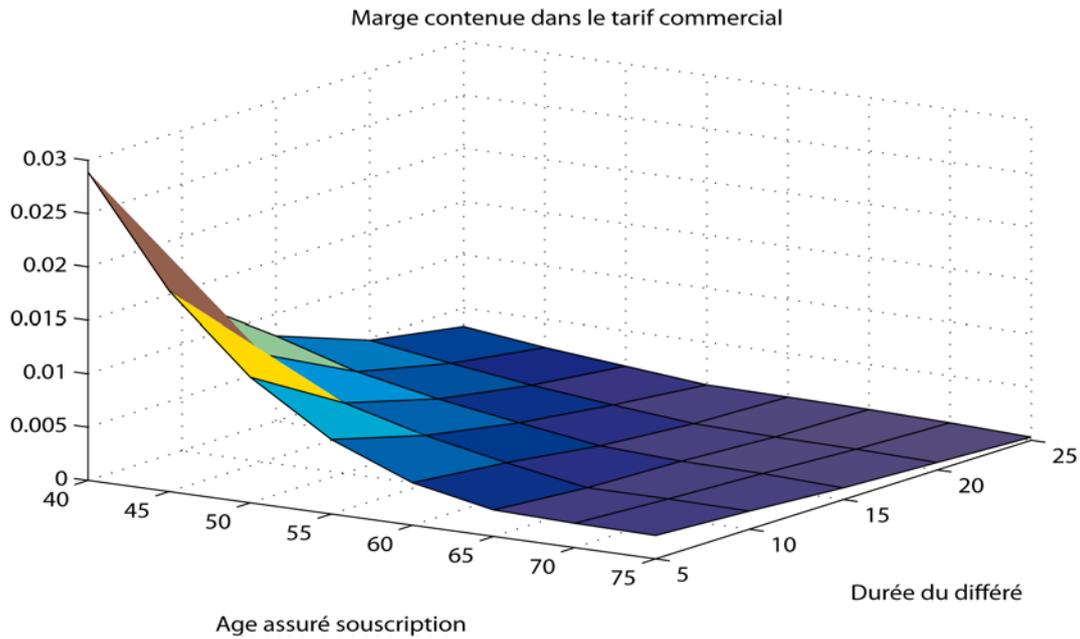
Tableau 10-45 : Estimation du chargement de sécurité

α_g^{PP}	$d = 0$	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$	$d = 25$
$x = 40$	10,91%	2,89%	1,42%	0,80%	0,48%	0,33%
$x = 45$	3,29%	1,88%	1,01%	0,57%	0,37%	0,24%
$x = 50$	1,62%	1,18%	0,66%	0,42%	0,27%	0,17%
$x = 55$	0,88%	0,70%	0,46%	0,30%	0,19%	0,10%
$x = 60$	0,48%	0,40%	0,31%	0,19%	0,12%	0,09%
$x = 65$	0,28%	0,25%	0,18%	0,15%	0,10%	0,08%
$x = 70$	0,21%	0,23%	0,18%	0,14%	0,09%	0,06%
$x = 75$	0,20%	0,22%	0,17%	0,11%	0,07%	0,03%

Figure 10-15 : Surface de tarif en prime commerciale ($x = 55$, $d = 10$, $w_{eq}^{t=0} = 60\%$)

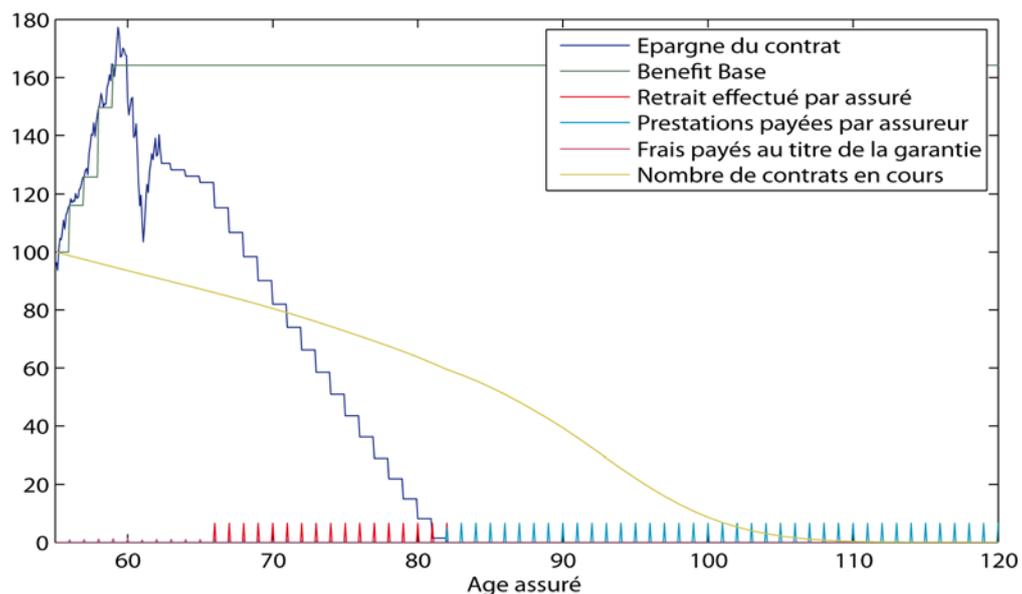
Pour une pondération actions donnée dans l'allocation d'actifs, il semble possible de proposer un tarif unique en fixant des conditions sur l'âge de souscription et le différé afin de se maintenir dans les zones violettes et bleues.

La marge est importante pour les durées de différé et les âges à la souscription faibles car ce sont les cas de figure où le coût de la garantie est le plus sensible à la valeur des paramètres financiers..

Figure 10-16 : Marge incluse dans le tarif en prime commerciale ($x = 55, d = 10, w_{eq}^{t=0} = 60\%$)

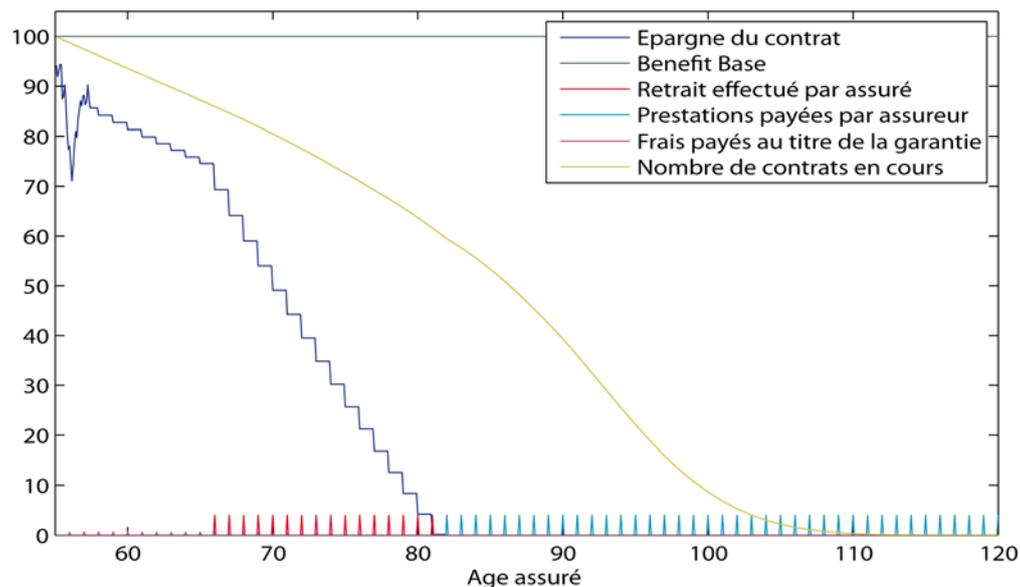
10.4 Backtestings

Nous testons, à titre d'illustration, le comportement en fonction du moment de souscription d'une garantie dont le tarif a été déterminé dans la partie précédente. Nous supposons que l'épargne est constituée à la souscription de $w_{eq}^{t=0} = 60\%$ de CAC 40 et de 40% d'EuroMTS. L'assuré a 55 ans à la souscription. Le différé est supposé égal à 10 ans, ce qui donne un tarif en prime commerciale $\alpha_g = 0.76\%$. Le rendement de l'épargne est supposée, de manière arbitraire, égale au taux sans risque (prenant dans notre exemple la valeur $r = 2\%$) lorsque les données historiques ne sont plus disponibles.

Figure 10-17 : Backtesting pour un souscription le 1^{er} février 2003 – $d = 10$ 

Sous ces hypothèses, la valeur de la garantie au moment de la souscription est égale à 9.66.

Figure 10-18 : Backtesting pour un souscription le 1^{er} janvier 2008 – $d = 10$



Sous ces hypothèses, la valeur de la garantie au moment de la souscription est égale à 6.24.

Avant le déclenchement de la garantie, l'assureur prélèvera davantage de frais dans le cas n°1 en raison de la forte revalorisation sur les premières années. En contrepartie, le niveau des revenus garantis sera supérieur suite à l'activation du cliquet au cours des premières années de la phase d'accumulation. La perte anticipée de l'assureur dans le cas n°1 est supérieure à celle du cas n°2 alors que les conditions financières au moment de la souscription sont bien meilleures dans le premier cas.

Les garanties GLWB sont sensibles aux paramètres financiers qui influent sur la trajectoire de l'épargne et aux lois actuarielles qui déterminent le notionnel. Les analyses de sensibilité conduisent à recommander à l'assureur de limiter les garanties de revalorisation de la benefit base et la proportion d'actions dans l'allocation d'actifs. Par ailleurs, nous avons vu que des contraintes sur l'âge de souscription minimum, en particulier pour des différés faibles, devraient être mises en place (le cas $d = 0$ devant être limité aux personnes souscrivant à plus de 70 ans).

Partie IV : Gestion des risques des garanties GMWB et GLWB

Chapitre 11 : Transfert de risques des garanties

Les résultats des analyses de sensibilité menées aux chapitres 9 et 10 traduisent l'influence du comportement de l'assuré et des paramètres de marché sur le coût économique des garanties. La tarification retenue permet de couvrir les prestations en moyenne et de constituer une marge de sécurité. Dans la réalité, un seul scénario économique se réalisera et le comportement de l'assuré différera certainement du comportement anticipé.

La mise en place d'un programme de transfert de risque permet à l'assureur de se préserver de ces cas les plus défavorables et de réduire la volatilité de son résultat. Par ailleurs, ces programmes peuvent aussi avoir un impact sur le capital au titre de la marge de solvabilité par rapport à une situation où l'assureur provisionnerait la totalité de l'engagement.

Nous nous limitons dans ce chapitre à expliciter les différents mécanismes possibles de transfert de risque et à proposer des pistes de réflexion sur la gestion d'une couverture financière. La recherche et la mise en œuvre opérationnelle de la couverture optimale¹ constitue un sujet complexe qui devra faire l'objet d'un travail séparé, en particulier pour mesurer les erreurs liées au comportement de l'assuré et l'évolution des stratégies de couverture en fonction du temps².

11.1 Méthodes existantes de transfert de risque

11.1.1 Evolution des méthodes de transfert de risque

Les études menées par des groupements professionnels montrent que la plupart des assureurs ont mis en place un programme de transfert de risque pour ces garanties. En l'absence de tel mécanisme, l'assureur constitue une provision permettant de faire face aux scénarios les plus défavorables, estimés sur la base d'une méthode déterministe ou stochastique. Cette provision est supposée garantir que l'assuré puisse honorer ses engagements mais ne permet pas de piloter le résultat de la garantie (voir chapitre 12).

Milliman³ estime que les programmes de couverture des assureurs américains ont été efficaces à 94% sur la période allant de novembre 2008 à mars 2009. Ce chiffre doit cependant être interprété avec prudence car il comprend uniquement les risques que l'assureur a choisi de couvrir et n'explique qu'une partie des pertes réalisées sur le dernier trimestre 2008 par les principaux assureurs⁴.

¹ La maturité des flux de la garantie est élevée, les options de vente européennes sont conditionnelles, possibilité de mutualisation au sein du portefeuille... Voir chapitre 5.5

² Nous avons vu dans le chapitre 3 que la sensibilité des options aux grecques variaient en fonction du temps. Les risques dominants ne devraient donc pas être les mêmes tout au long de la vie du contrat

³ Milliman (Juillet 2009), The VA industry : an analysis of recent activities

⁴ "Axa Group (...) variable annuity hedging losses projected at between €350 and €450 million for the fourth quarter of 2008" (source: Life and Pensions) / "In its report for the quarter ending September 30 2008, (...) Aegon announced a €48 million loss on US VA earnings" (source: Life and Pensions); / "Our pricing team had

Suite à la crise, les dispositifs de couverture dynamique ont été améliorés en augmentant le nombre de risques couverts. Ainsi, à la couverture des faibles variations de l'épargne (couverture en Δ), certains assureurs ont ajouté une couverture des autres sources de risque (variation des taux d'intérêt, convexité de l'épargne, volatilité des sous-jacents et des taux). Ces couvertures additionnelles sont coûteuses et ne sont généralement pas mises en œuvre en permanence¹. Les assureurs ont par ailleurs pris conscience de l'impact des risques de base et de corrélations :

- Une étude menée en mai 2008² indiquait que les assureurs opérant sur le marché américain se couvraient en ρ et en vega en fonction du coût et de la disponibilité des instruments OTC. Ce type de stratégie a conduit, par exemple, à diminuer la couverture en vega lorsque les conditions de marché se dégradèrent. Par ailleurs, les assureurs ne semblaient pas couvrir l'ensemble de leurs expositions et déclaraient vouloir augmenter leur couverture en ρ et en vega, ainsi que la fréquence de mise à jour de leur passif ;
- Une étude menée en juillet 2009 sur le même périmètre indique que les assureurs se couvrent plus systématiquement en ρ et plus fréquemment en vega. La couverture en vega étant difficile à mettre en œuvre, certains assureurs ne couvrent pas ce paramètre et utilisent un niveau élevé de volatilité pour déterminer le tarif de la garantie (exemple d'Axa qui ne semble pas couvrir la volatilité et utilise pour son tarif la $\text{VaR}_{95\%}$ de la volatilité historique³).

Les méthodes de transfert de risque comprennent les solutions de réassurance et les mécanismes de couverture financière. Elles sont explicitées dans les parties 11.1.2 et 11.1.3.

11.1.2 Réassurance

La réassurance permet d'externaliser le risque financier, sur la base d'un notionnel déterministe (calculée avec une mortalité intégrant une marge de sécurité et avec des rachats déterministes). Le réassureur engage donc sa responsabilité sur un nombre de contrats donné au cours de la période $[t_k, t_{k+1}]$. Ce nombre de contrats est réévalué à fréquence variable et l'assureur conserve ainsi le risque résiduel lié à une divergence entre les taux de rachat / mortalité estimés et constatés.

Il serait intéressant de réfléchir à la possibilité et au coût de la mise en place de produits ou de traités analogues à des caps écrits sur le taux de mortalité afin de se couvrir contre une hausse de ce paramètre (au lieu du taux d'intérêt).

Le mécanisme de réassurance à privilégier semble être une quote-part. Sur la partie cédée, l'assureur conserve alors la marge résultant de l'écart entre le prix de la réassurance et les frais prélevés au titre de la garantie. Par analogie avec la tarification du produit, le coût de la réassurance est fixe pour les versements déjà effectués et réévalué régulièrement pour les nouveaux versements / contrats.

modeled the markets and the correlations relating to these products and believed we could institute hedge programs to cover the guarantees. (...) these (...)programs (...)only provided on average about 60% protection against market falls" (source: Old Mutual, August 2008, Q&A Investors)

¹ Lorsque les marchés chutent fortement, il devient coûteux de se couvrir en gamma et en vega alors que c'est à ce moment là que ce type de couverture est le plus précieux

² Voir **Matterson et al. (2008)**

³ Voir **Healy et O'Malley (2008)**

La réassurance a un impact sur le bilan de l'assureur et est reconnue dans le cadre de Solvabilité 2 comme une méthode de réduction des risques. Elle permet à l'assureur d'avoir une garantie sur le niveau de P&L¹ de la garantie et sur les besoins de capitaux au titre de la marge de solvabilité (qui sont alors uniquement liés aux risques non couverts et à la quote-part des risques restant à la charge de l'assureur). L'assureur fait figurer à l'actif du bilan une provision cédée qui évolue comme le passif pour la partie risque de marché. Le risque de défaut du réassureur doit être inscrite dans le bilan.

La crise a provoqué une contraction des capacités de réassurance sur ces produits et une dégradation généralisée de la notation des réassureurs. Ce phénomène constitue une barrière à l'entrée pour les assureurs qui envisageaient de lancer des garanties GMWB / GLWB en s'appuyant sur un réassureur dont la notation est supérieure à un certain niveau.

Les risques financiers acceptés par les réassureurs ne sont pas mutualisables, ce qui les expose à un risque systémique qu'ils devront couvrir en mettant en place des couvertures financières. La réassurance décale donc le problème de la couverture financière de l'assureur vers le réassureur.

11.1.3 Couverture financière des risques

L'autre méthode de transfert de risque consiste à répliquer la valeur mark to market des passifs en constituant, directement ou au travers d'un prestataire financier, un portefeuille de couverture. Les couvertures financières sont généralement élaborées à partir de produits dérivés simples et liquides afin de ne pas s'exposer à des risques supplémentaires de liquidité. La maturité² des produits disponibles sur le marché n'étant pas suffisante pour répliquer l'ensemble des flux du passif, l'assureur sera contraint d'utiliser des actifs dont la maturité est inférieure à celle des flux du passif.

Nous avons vu dans le chapitre 5.5 que plusieurs méthodes de couverture existaient :

- Les couvertures statiques (approche voisine de celle des portefeuilles répliquants) consistent généralement à acheter au moment de la souscription de l'assuré des fonds structurés (OTC) répliquant les prestations liées à la garantie du contrat. Les positions prises ne sont théoriquement pas réajustées au cours de la vie du contrat. Si elles devaient être modifiées, l'assureur pourrait rencontrer un problème de liquidité et faire face à des coûts de transactions élevés. Les couvertures statiques permettent de connaître le coût a priori pour une hypothèse donnée sur l'évolution du notionnel. La mise en œuvre de cette approche n'est pas toujours simple ni possible ;
- Les couvertures semi-statique supposent généralement de construire des portefeuilles d'options de courte maturité. Une fois ces options arrivées à échéance, l'assureur constitue un nouveau portefeuille d'options de courte maturité ;
- Les couvertures dynamiques semblent constituer la solution privilégiée des assureurs³. La technique la plus utilisée est comparable à la couverture de produits dérivés de courte maturité en finance de marché. L'assureur constitue un portefeuille d'actifs répliquant en sens inverse les sensibilités du passif. L'efficacité et le coût de mise en œuvre dépendent de la fréquence de réajustement du portefeuille (coûts de transaction)

¹ La dépense est connue à l'avance et correspond à la prime fixe de réassurance

² Cette remarque montre l'importance d'étudier la durée réelle des passifs (voir chapitre 9) afin de savoir si le risque de la garantie correspond à une maturité disponible sur le marché.

³ Gilbert et al. (2007) ont montré que les assureurs américains ne recouraient pas aux réassureurs pour les garanties GMWB et utilisaient presque tous un système de couverture dynamique par la réplification des grecques.

et de la mise à jour du passif à couvrir. Ils sont donc inconnus a priori. Les couvertures dynamiques présentent l'avantage de pouvoir être modifiées rapidement lorsqu'il est nécessaire d'ajuster fréquemment les paramètres. C'est notamment le cas pour un produit en phase de lancement puisque les lois de rachat et la tendance de mortalité ne sont pas connues avec précision.

La mortalité et le comportement de l'assuré ne peuvent pas être couverts dans cette méthode¹. Toute déviation entre notionnel anticipé et notionnel réalisé occasionnera des gains ou des pertes, en fonction du niveau des marchés financiers et de l'exposition de l'assureur.

Les couvertures dynamiques ne sont pas reconnues dans Solvabilité 2 comme une méthode de réduction des risques, contrairement aux méthodes de couvertures statiques et semi-statiques².

Nous consacrons la suite de ce chapitre à la manière dont ces stratégies de couvertures dynamiques pourraient être mises en œuvre sur le plan opérationnel. Nous ne détaillerons pas le passif qui servira à calculer les grecques dans ce chapitre et renvoyons le lecteur au chapitre 12 pour le traitement de cette question.

11.2 Fonctionnement de la couverture dynamique

L'assureur qui commercialise des garanties GMWB / GLWB se retrouve en position de vendeur de puts européens. Il a donc, immédiatement après la souscription, des expositions nettes positives en Δ et en ρ . Ses expositions nettes en vega et en Γ sont quant à elles négatives. Ce résultat peut se retrouver en utilisant la formulation [7-12] donnant la valeur de la garantie. Cette remarque est à la base de la construction d'une couverture dynamique.

11.2.1 Risques pris en compte dans les couvertures dynamiques

Les programmes de couverture sont construits sur la base d'un notionnel défini à partir d'une table de mortalité et d'une loi de rachat³ (lois actuarielles de comportement de l'assuré). La loi de rachat considérée est le plus souvent statique.

Ces couvertures intègrent systématiquement une composante en Δ , peu coûteuse et relativement efficace en période de faible volatilité mais qui ne suffit pas pour se protéger de l'ensemble des risques liés aux garanties de revenus (voir les variations du coût de la garantie en fonction des paramètres de marché calculées aux chapitres 9 et 10).

Le gain d'efficacité d'une couverture en Δ/ρ ou en Δ/ρ /vega par rapport à une couverture en Δ neutre semble importante. **Favre-Bonvin (2010)** montre sur un exemple que la couverture en Δ/ρ permet de réduire fortement les risques de la garantie GLWB sur un horizon 1 an (calcul de P&L à 1 an dans le cadre d'un modèle d'Heston). Il indique par ailleurs qu'une couverture

¹ En cas de forte tensions sur les marchés, l'achat de protection complémentaire en cas de rachat moins fort qu'anticipé de la part des assurés est très coûteux voire impossible s'il existe des contraintes de liquidité

² Sous certaines contraintes, les couvertures basées sur une reconduction de la couverture initiale, de maturité définie à l'avance, sont reconnues dans le cadre de Solvabilité 2 comme des méthodes de réduction des risques. Les méthodes semi-statiques basées sur des portefeuilles d'options de courtes maturités semblent s'inscrire dans cette catégorie

³ Voir par exemple **Abbey et Henshall (2007)**

en vega seule, au travers d'une position statique longue sur un put à la monnaie 10 ans, aurait moins réduit la volatilité du P&L qu'une couverture en Δ/ρ en 2008.

Aucune publication ne traite de la composante en gamma alors qu'il s'agit d'un enjeu majeur lorsque la convexité du passif devient importante :

- La couverture en Δ fonctionne uniquement pour des faibles variations du cours du sous-jacent puisqu'elle est construite en utilisant la tangente de la courbe du passif (en fonction de la valeur de l'épargne) ;
- La valeur des paramètres de marché varie entre 2 dates d'ajustement du portefeuille. La couverture mise en place ne correspond alors plus à la réalité du marché.

Il n'est pas toujours optimal de couvrir systématiquement l'ensemble des grecques. L'assureur peut, par exemple :

- Déboucler les positions en ρ lorsque les taux sont très faibles et les remettre en place lorsque les taux atteignent un niveau prédéfini ;
- Ne pas couvrir totalement le passif au début de la période de différé ;
- Ne pas couvrir le Γ lorsque les marchés sont peu volatils (faibles variations du Δ).

L'assureur doit intégrer l'ensemble de ces problématiques afin de déterminer la couverture optimale en termes de coûts et d'efficacité de la protection.

Nous supposons dans la suite que l'assureur a défini l'objectif de sa couverture et en a déduit le passif à couvrir (voir le chapitre 12 sur cette question).

11.2.2 Mise en œuvre de la couverture dynamique

La mise en œuvre de la stratégie de couverture doit être précisément documentée afin de limiter les risques opérationnels : instruments financiers utilisés, paramètres de gestion (seuil de déclenchement des rebalancements, fréquence de réajustement...), gouvernance mise en place, fréquence et contenu du reporting des risques... L'efficacité et les limites de la stratégie doivent être testées et quantifiées a priori. Nous détaillons ces points dans les parties 11.2.2.1 à 11.2.2.3.

11.2.2.1 Instruments utilisés dans les portefeuilles de couverture

Nous savons que l'assureur doit constituer à la souscription, afin de compenser la sensibilité de son passif, un portefeuille de couverture présentant les caractéristiques suivantes :

$$\Delta > 0, \rho > 0, \Gamma < 0 \text{ et Vega} < 0$$

Pour constituer ce portefeuille, l'assureur utilise en priorité des instruments liquides sur lesquels les coûts de transaction sont faibles (voir Tableau 11-1). Les maturités de ces instruments ne coïncident pas avec celles des passifs, ce qui crée un risque supplémentaire.

Le Code des Assurances interdit à l'assureur de vendre une partie des unités de compte qu'il détient en représentation de ses engagements (voir chapitre 4). Pour se couvrir en Δ (Δ_{net} positif de l'assureur à la souscription en l'absence de couverture), l'assureur doit donc vendre des contrats futures ($\Delta_{futures}^{eq} > 0$) sur les sous-jacents constitutifs de l'épargne¹. Si les sous-jacents ne sont pas des indices, la couverture se basera sur les régressions linéaires des fonds sur les indices échangés sur les marchés et l'assureur sera alors exposé à un risque de base.

¹ Le marché des contrats à terme est très organisé et les coûts de transaction sont faibles

La couverture contre les variations de taux (ρ_{net} positif à la souscription en l'absence de couverture) se fera principalement en entrant dans des swaps receveurs¹ ($\rho_{swap}^{receveur} < 0$) ventilés sur les différentes tranches de maturités afin de se prémunir d'une déformation locale de la courbe des taux (par exemple une tension des taux courts comme en 2008).

L'utilisation de swaptions ou de cap² permet de se protéger en ρ mais introduit une composante en vega et en Γ supplémentaire. Dans la mesure du possible, nous n'utiliserons pas ces instruments.

L'assureur peut mettre en place un programme de couverture en Δ/ρ sans mobiliser de capital. En effet, l'entrée dans un contrat future ou sur un swap de taux ne nécessite pas de décaissement initial, ce qui est cohérent avec la structure des frais prélevés au titre de la garantie (les frais n'étant récupérés par l'assureur qu'au fur et à mesure de la vie du contrat). L'assureur devra cependant disposer d'une trésorerie suffisante pour honorer ses appels de marge s'il souhaite se couvrir en Γ ou en vega en cherchant à acheter des options de vente sur le marché. La couverture en Γ ne sera activée qu'à partir d'un niveau fixé a priori.

Remarque : les options peuvent aussi être utilisées pour se couvrir en Δ et en ρ mais elles apportent une composante en Γ et en vega dans le portefeuille qu'il faut alors piloter (voir la partie suivante).

11.2.2.2 Détermination de la composition du portefeuille de couverture

Nous supposons, pour écrire les relations suivantes, que le portefeuille de couverture est composé de futures sur actions, de swap de taux et d'options.

Tableau 11-1 : Instruments financiers pouvant être utilisés dans les programmes de couverture

Instruments financiers	Delta	Rho	Vega	Gamma
Future sur indices (actions, taux)	X			
Swap de taux		X		
Options (plus ou moins liquides selon la maturité)	X	X	X	X

Il est nécessaire de raisonner sur le nombre de degrés de libertés pour construire le portefeuille. Ainsi, pour créer un portefeuille en vega ou en gamma neutre, nous construisons d'abord le portefeuille d'options annulant ces grecques nettes. Nous ajustons ensuite le Δ et le ρ en utilisant des futures et des swaps.

L'exposition net de l'assureur aux variations de volatilité et de convexité du passif s'écrivent :

$$\Gamma_{net} = \Gamma_{actif} - \Gamma_{passif} = \Gamma_{options} - \Gamma_{passif}$$

$$Vega_{net} = Vega_{actif} - Vega_{passif} = Vega_{options} - Vega_{passif}$$

Si $\Gamma_{net} < 0$, l'assureur doit acheter des options de vente ($\Gamma_{puts} > 0$) sur le marché afin de revenir à l'équilibre. Il en est de même si $Vega_{net} > 0$.

¹ La convention pour les swaps est la suivante : le swap est payeur pour celui qui paie le taux fixe et reçoit le taux variable. Le swap inverse est dit receveur.

² Un cap est une option d'achat dont le sous-jacent est un taux d'intérêt (couverture contre une variation des hausses de taux). Si le niveau des taux dépasse un seuil fixé à l'avance, l'assureur recevra la différence entre le taux actuel et ce seuil. L'avantage des caps est de rester exposé sur les actifs obligataires, en se protégeant d'une détérioration trop importante de la valeur de ce portefeuille obligataire liée à une hausse des taux.

En contrepartie, puisque le delta d'une option est négatif, cette opération diminuera le Δ_{net} et le ρ_{net} . L'assureur devra ajuster ce paramètre en jouant sur les contrats futures puis sur les swaps. D'un point de vue opérationnel, le plus simple consiste à acheter des futures dont la date d'échéance correspond à la fréquence de réajustement du passif de couverture.

L'exposition net de l'assureur aux variations de la valeur de l'épargne s'écrit :

$$\Delta_{net} = \Delta_{actif} - \Delta_{passif} = \Delta_{options} + \Delta_{futures}^{eq} - \Delta_{passif}$$

Si $\Delta_{net} > 0$, l'assureur doit vendre des futures ($\Delta_{futures}^{eq} > 0$) pour revenir à $\Delta_{net} = 0$.

La couverture en taux s'effectue pour chaque tranche de maturité définie au préalable. A chaque tranche correspond un calcul de ρ_{net} correspondant aux chocs appliqués sur cette partie de la courbe des taux :

$$\rho_{net} = \rho_{actif} - \rho_{passif} = \rho_{options} + \rho_{futures}^{eq} + \rho_{swap}^{taux} - \rho_{passif}$$

Son calcul nécessite d'évaluer :

- Le $\rho_{options}$ et le $\rho_{futures}^{eq}$ qui sont non nuls sur le court terme (absence d'options disponibles sur le marché, utilisation de futures de courte maturité) et nuls sur le long terme ;
- Le ρ_{swap}^{taux} pour les différentes maturités de swap présentes dans le portefeuille de couverture ;
- Le ρ_{passif} pour les différentes maturités, en effectuant des chocs sur les différents segments de la courbe des taux ;

Si le ρ_{net} est positif, l'assureur entrera dans des swaps receveurs ($\rho_{swap}^{receveur} < 0$) afin d'annuler le ρ_{net} . Dans le cas contraire, il entrera dans des swaps payeurs.

L'assureur achètera les instruments de couverture les moins coûteux annulant les grecques.

11.2.2.3 Mise en œuvre pratique

La gestion de la couverture peut être schématisée par la Figure 11-1 sur laquelle nous faisons figurer les 6 étapes (maximum) à mettre en œuvre chaque jour (Tableau 11-2) :

Tableau 11-2 : Actions à effectuer dans le cadre de la couverture d'une garantie GMWB / GLWB

Etapes	Actions à effectuer
1	Générer les scénarios Best Estimate (BE_{t_k}) sous la probabilité risque neutre
2	Calculer le passif ¹ en utilisant les paramètres financiers et actuariels Best Estimate (BE_{t_k}). Nous déduisons les grecques du passif qui serviront de référence sur $[t_k, t_k + 1 \text{ semaine}]$. Le passif peut être ajusté manuellement par rapport à la dernière valeur calculée afin de tenir compte de l'impact de la valeur temps ($\Theta_{t_k}^{Passif}$)
3	Calculer la valeur du portefeuille de couverture à la fin de la journée et le P&L de la stratégie. Déterminer les grecques de ce portefeuille. Nous en déduisons les grecques nettes qui constituent la grille de trading
4	Calculer les grecques des actifs disponibles à l'achat / vente sur le marché
5	Déterminer le nombre d'actifs à acheter / vendre pour annuler les grecques nettes (ou utilisation d'une stratégie à seuils pour décider s'il faut rebalancer, voir l'exemple donné dans le Tableau 11-3)
6	Rebalancer le portefeuille

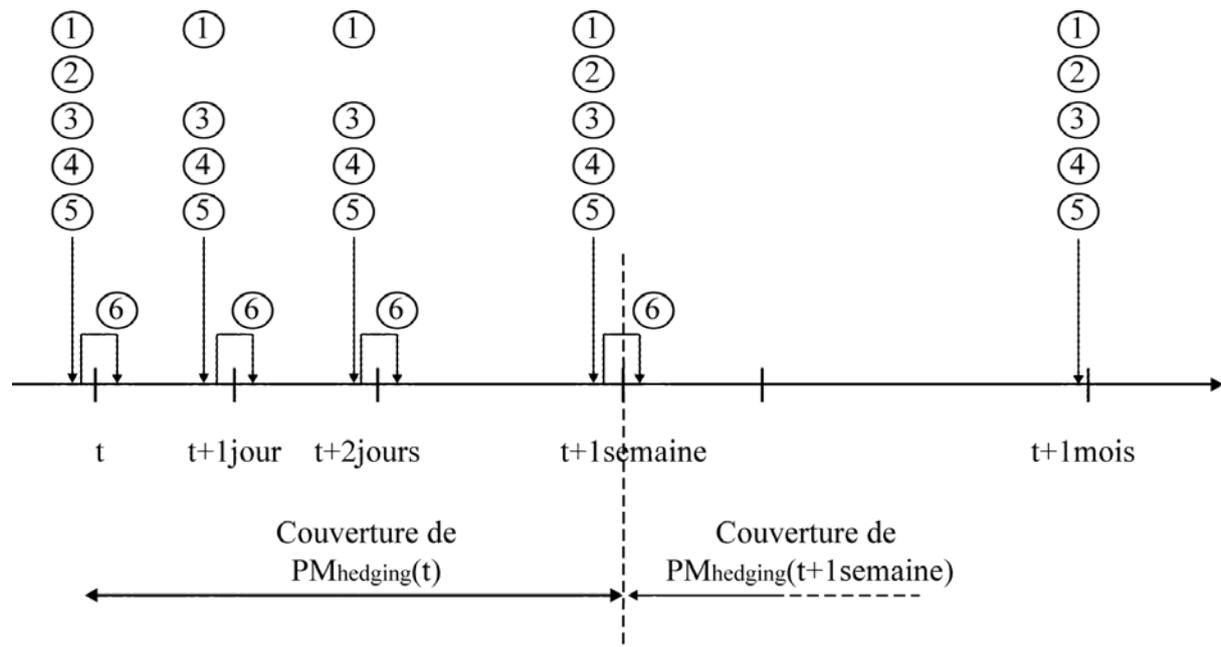
¹ Il s'agit de la provision mathématique $PM_{t_k}^{gar}$ ou de la valeur de la garantie $V_{t_k}^C$ (voir chapitre 12)

Le calcul du passif et des grecques associées doit être effectué avec les données les plus récentes (BE_{t_k} pour une estimation en t_k).

L'actualisation du passif peut cependant ne pas être effectuée chaque soir pour des raisons de temps de calcul ou de capacité à disposer de paramètres actualisés (par exemple actualisation en utilisant la volatilité hebdomadaire, lois de rachats mensuelles...). L'assureur utilisera alors pour l'ensemble de la semaine le passif de couverture calculée en début de semaine, ce qui créera un gap de passif à la date $t + 1$ semaine.

Nous supposons que la mise à jour du passif est hebdomadaire (Etape 2) sur la Figure 11-1 :

Figure 11-1 : Schéma de gestion d'une couverture dynamique



Dans la figure ci-dessus, nous avons supposé que le rebalancement était effectué une fois par jour (fréquence fixe). La fréquence de réajustement du portefeuille de couverture est un paramètre fondamental et doit être piloté en arbitrant entre l'efficacité et le coût de la couverture. Le programme de couverture peut aussi prévoir des seuils de déclenchement pour le rebalancement. Un tel mécanisme pourrait s'écrire, par exemple pour le gamma :

Tableau 11-3 : Illustration du rebalancement en fonction de l'atteinte de seuils prédéfinis

	$\Gamma_{net} < s_{bas} < 0$	$s_{bas} < \Gamma_{net} < s_{haut}$	$\Gamma_{net} > s_{haut} > 0$
Γ_{net}	Achat de nouveaux puts (pour augmenter et annuler le Γ_{net})	Ne rien faire	Vente puts du portefeuille (pour diminuer et annuler le Γ_{net})

Si la couverture est mise en place conformément à la Figure 11-1, le reporting pourrait indiquer le P&L anticipé sur la garantie, en comparant la valeur du portefeuille de couverture à la dernière valeur actualisée du passif.

Les étapes précédentes nécessitent de calculer les grecques des actifs et du passif à couvrir. Nous abordons cette question dans la partie suivante.

11.2.3 Calcul des grecques dans le modèle de Monte-Carlo

11.2.3.1 Calcul des grecques financières

Les grecques correspondent à la valeur du produit étudié suite à un choc effectué sur l'un des paramètres financiers. Cette valeur est obtenue en appliquant une méthode de simulations dans les simulations. Les browniens utilisés pour projeter les scénarios choqués doivent être les mêmes que ceux utilisés pour générer le scénario principal afin de limiter les écarts de projection.

Cette méthode¹ repose sur les développements de Taylor d'ordre 2 de la valeur de l'option :

$$OV(S_t + \epsilon) = OV(S_t) + \epsilon \cdot \frac{\partial OV_t}{\partial S_t}(S_t) + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 OV_t}{\partial S_t^2}(S_t) + o(\epsilon^2)$$

$$OV(S_t - \epsilon) = OV(S_t) - \epsilon \cdot \frac{\partial OV_t}{\partial S_t}(S_t) + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 OV_t}{\partial S_t^2}(S_t) + o(\epsilon^2)$$

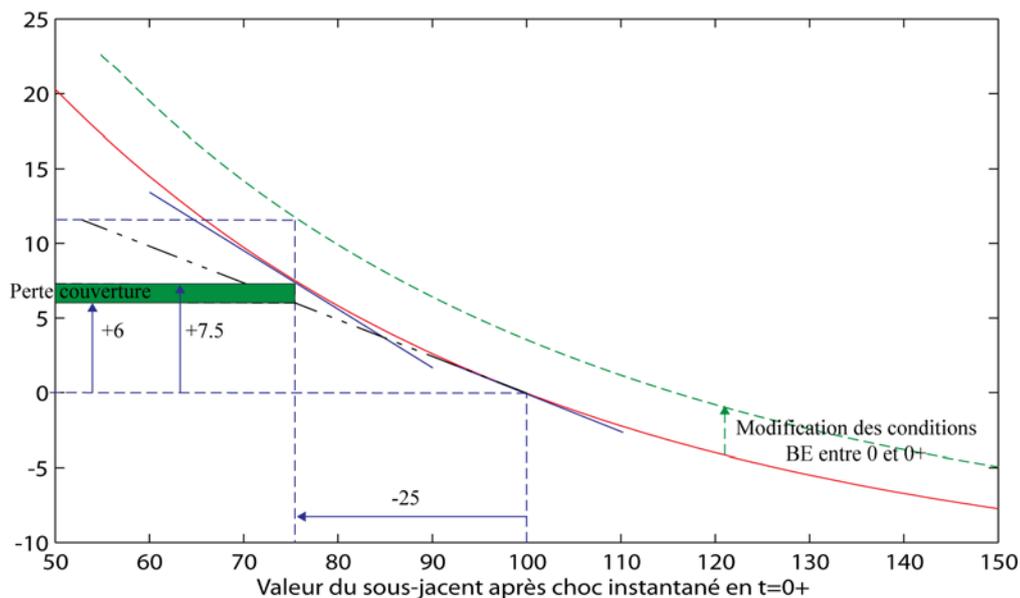
Nous pouvons alors en déduire les expressions suivantes pour le delta et le gamma :

$$\Delta_t = \frac{OV(S_t + \epsilon) - OV(S_t)}{\epsilon} = \frac{OV(S_t + \epsilon) - OV(S_t - \epsilon)}{2\epsilon}$$

$$\Gamma_t = \frac{\partial^2 OV_t}{\partial S_t^2} = \frac{OV(S_t + \epsilon) + OV(S_t - \epsilon) - 2 \cdot OV(S_t)}{\epsilon^2}$$

L'approximation centrée pour le delta (dernier terme de l'égalité) conduit à un biais moins important mais est plus coûteuse en temps de calcul. Sur le même modèle, nous pouvons construire ρ (par tranche de maturités) et vega. Le calcul des grecques s'effectue sous les hypothèses Best Estimate (dénommé BE_{t_k} dans la suite). Nous illustrons sur le graphique suivant le fonctionnement d'une couverture en delta :

Figure 11-2 : Couverture en delta de la garantie GMWB ($T = 15, r = 3.5\%, \sigma_s = 35\%, \alpha_g = 78\%$)



¹ Il existe d'autres méthodes. Par exemple, **Hobbs et al. (2009)** propose une autre solution consistant à dériver l'expression du payoff puis à appliquer une méthode de Monte Carlo sur ce nouveau payoff.

11.2.3.2 Calcul des grecques actuarielles

Dans les chapitres 9 et 10, nous avons montré que les garanties étaient très sensibles aux risques actuariels. De la même manière que pour les paramètres financiers, nous pouvons alors calculer des grecques actuarielles afin de mesurer la sensibilité du passif à un choc sur le comportement de rachat ou sur la mortalité. En cas de rachat dynamique, le notionnel dépendra alors de la trajectoire de l'épargne, c'est à dire de la valeur des paramètres financiers.

11.2.4 Test des programmes de couverture

L'assureur doit recourir à des simulations dans les simulations¹ pour estimer l'efficacité a priori de la stratégie de couverture proposée en $t_k > 0$ et pour évaluer les grecques à une date ultérieure.

Les projections devraient par ailleurs être effectuées en utilisant des modèles plus complexe que celui de Black & Scholes afin de rendre compte des sauts ou de la volatilité stochastique des actions (voir la partie 5.5 de la revue de littérature). L'assureur doit aussi effectuer des stress tests sur les paramètres financiers et sur les lois comportementales (modifiant le notionnel à couvrir) pour mesurer si l'efficacité de la couverture évaluée sous le scénario central est robuste.

Nous définissons dans le chapitre suivant la provision et le passif qui servira d'assiette de couverture.

¹ Par exemple, projection sous la probabilité historique des scénarios centraux et calcul à chaque pas de temps, en utilisant des scénarios risque neutre, des grecques et des décisions de rebalancements du portefeuille de couverture.

Chapitre 12 : Bilan et compte de résultat

Le modèle développé dans les chapitres précédents permet de calculer la provision mathématique best estimate et le compte de résultat de l'assureur. Nous ne nous intéresserons pas aux autres provisions techniques mentionnées à l'article R331-3 du Code des Assurances et utilisons une approche économique du bilan, conforme à l'esprit des futures normes IFRS et à la directive Solvabilité 2.

12.1 Vision économique du bilan

La provision mathématique (notée PM) doit permettre à l'assureur d'honorer les engagements qu'il a pris envers ses assurés. Elle est définie dans le Code des Assurances à l'article R331-3 comme étant égale à la différence entre la valeur actualisée probable des engagements de l'assureur et ceux de l'assuré. Dans le cas d'un contrat comportant des garanties GMWB / GLWB, la PM du contrat est égale à la somme de la PM épargne et de la PM de la garantie.

La Figure 12-1 donne le schéma du bilan d'un assureur qui n'aurait vendu que des garanties GMWB / GLWB, selon la méthode de transfert de risque utilisée.

Figure 12-1 : Schéma du bilan d'un assureur vendant des contrats avec garanties GMWB / GLWB

ACTIF (non couvert)	ACTIF (réassurance)	ACTIF (couverture)	PASSIF
Placements (<i>en mark to market</i>)	Placements (<i>en mark to market</i>)	Placements (<i>en mark to market</i>)	Fonds propres
	----- Provision cédée au réassureur		----- SCR
		Portefeuille de couverture (futures, swaps, options, cash)	Marge pour risque
Placements en représentation du contrat en Unités de Compte	Placements en représentation du contrat en Unités de Compte	Placements en représentation du contrat en Unités de Compte	Provision Best Estimate de la garantie
Autres actifs (créances...)	Autres actifs (créances...)	Autres actifs (créances...)	Provision du contrat en Unités de Compte
			Autres passifs (Dettes, impôts, commissions...)

La représentation de la PM de la garantie diffère à l'actif lorsque l'assureur a mis en place un mécanisme de couverture. La valeur du portefeuille de couverture ne sera pas toujours égal à la valeur de la provision mathématique Best Estimate en raison de l'inefficacité partielle de la couverture, de la non couverture de certains paramètres financiers et des écarts constatés sur les lois de comportement (voir partie 12.2.2). Par ailleurs, si la garantie est réassurée, une partie du portefeuille de couverture en représentation de la PM de la garantie est remplacée par une provision cédée (qui intègre le risque de défaut du réassureur).

Nous proposons une méthode pour provisionner la garantie.

12.2 Evaluation de la provision mathématique

12.2.1 Formulation de la provision mathématique

Le tarif de la garantie α_g est fixé contractuellement, au moment de la souscription, pour un versement j . Nous pouvons, en utilisant l'équation [7-16], écrire ce tarif comme étant la somme du coût économique¹ CE^j et de la marge M^j du versement j

$$\alpha_g = CE^j + M^j$$

Nous définissons la provision mathématique comme étant la valeur de la garantie à la date t_k , évaluée contrat par contrat. Dans le cas d'une prime unique (désignée par le versement j), la provision est donc donnée par la relation :

$$PM_{t_k}^j = VAP_{t_k} \left(Prestation_{\alpha_g}^j \right) - \min \left(1, \frac{CE^j}{\alpha_g} \right) \cdot VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) \quad [12-1]$$

Cette formulation de la provision tient uniquement compte de la partie des frais correspondant au coût économique de la garantie. De cette manière, la marge M^j prévue dans le tarif est dégagée progressivement au cours de la vie du contrat. Elle permet d'absorber² l'impact d'une inefficacité partielle de la couverture ou des paramètres financiers non couverts, d'une variation entre le comportement réel de l'assuré et les lois actuarielles qui ont servi à établir le tarif... Selon la politique de gestion des risques de l'assureur, celui-ci pourra choisir de constituer une réserve (à privilégier) ou de distribuer la marge en résultat.

Nous avons introduit dans la partie 7.4.5 la quantité $M_{t_k}^j$ qui désigne la valeur actuelle probable de la marge de prudence existante sur ce versement :

$$M_{t_k}^j = \frac{M^j}{\alpha_g} VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right)$$

Nous pouvons utiliser cette relation pour réécrire l'équation [12-1] en faisant apparaître la marge de prudence du contrat :

$$\begin{aligned} PM_{t_k}^j &= VAP_{t_k} \left(Prestation_{\alpha_g}^j \right) - VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) + \max(M_{t_k}^j, 0) \\ &= V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W) + \max(M_{t_k}^j, 0) \end{aligned} \quad [12-2]$$

¹ Le coût économique de la garantie correspond au coût réel de la garantie en $t = 0$, évaluée sous des hypothèses Best Estimate à cette date ($BE_{t=0}$).

² Si la marge n'est pas suffisante pour compenser les déviations des paramètres, l'assureur peut utiliser une partie des frais de gestion (en veillant à ne pas activer de PGG cependant)

Si $M^j = 0$, le tarif en prime commerciale est égal au coût économique de la garantie. Nous pouvons par conséquent écrire que $V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W) = 0 = PM_{t_k}^j$.

Si $M^j > 0$, la provision est égale à $PM_{t_k}^j = V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W) + M_{t_k}^j > V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W)$. La provision passée au titre de la garantie est alors supérieure à la valeur de la garantie. Le cas $M^j > 0$ est le plus probable dans la mesure où $V^G(0, AV_0, G_0^W) < 0$ si le tarif a été correctement fixé¹.

Si $M^j \leq 0$, la provision est égale à la valeur de la garantie : $PM_{t_k}^j = V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W) > 0$. La formulation proposée de la provision permet de ne pas réduire la provision à constituer lorsque la marge de prudence est négative à la souscription. Ce calcul ne semble pas assez prudent toutefois (voir Tableau 12-1).

Nous illustrons le calcul de la provision mathématique dans le Tableau 12-1 pour 4 scénarios Best Estimate à la date $t = 0$. Nous supposons que le tarif en prime commerciale est égal à $\alpha_g = 0.76\%$ (sous les hypothèses : $x = 55$, $d = 10$, TGH 00 – 05, $r = 4\%$ et $\sigma_S = 25\%$).

Tableau 12-1 : Illustration de la provision mathématique à la date $t = 0$

$BE_{t=0}$	CE^j	M^j	V_0^G	$VaR_{95\%}(V_0^G)$	M_0^j	PM_0^{gar}
$r = 4\%, \sigma_S = 20\%$ TGH	0.15%	0.61%	-8.52	1.76	9.80	1.28
$r = 3.5\%, \sigma_S = 35\%$ TGH	0.99%	-0.23%	2.57	29.66	-3.61	2.57
$r = 4\%, \sigma_S = 20\%$ TGH $\lambda = 20\%$	0.30%	0.46%	-6.28	5.99	7.57	1.29
$r = 3.5\%, \sigma_S = 35\%$ TGH $\lambda = 20\%$	1.42%	-0.66%	7.23	40.62	-10.85	7.23

Dans tous les cas de figure, l'assureur devra constituer une provision mathématique à la souscription du contrat, ce qui impactera négativement son compte de résultat.

Lorsque la marge à la souscription est positive (lignes 1 et 3 du Tableau 12-1), la valeur moyenne de la garantie est négative. L'assureur constitue néanmoins une provision dans ses comptes en raison de la formule [12-1] retenue pour le calcul. La somme de la provision mathématique constituée et de la marge anticipée contenue dans le tarif en prime commerciale dépasse largement la $VaR_{95\%}$ de la valeur de la garantie. Cela devrait permettre à l'assureur d'honorer ses engagements même si les conditions de marché et les paramètres actuariels se dégradaient.

Dans le cas où la marge de souscription est négative (lignes 2 et 4 du Tableau 12-1), le résultat espéré de l'assureur sur la garantie est négatif. La provision constituée permet seulement d'absorber la perte moyenne de la garantie. Ainsi toute détérioration des paramètres financiers et actuariels conduira l'assureur à passer un complément de provision. Par ailleurs, la $VaR_{95\%}$ de la garantie dépasse très largement la valeur de la provision constatée. L'assureur devrait donc calculer les provisions en utilisant des critères plus stricts (par exemple le $CTE_{75\%}$ ou le $CTE_{95\%}$).

¹ En utilisant la méthode proposée dans le mémoire pour déterminer le tarif en prime commerciale des garanties, les conditions économiques au moment de la souscription seront généralement plus favorable pour l'assureur que les paramètres utilisés pour la tarification

Lorsque la garantie est activée ($t_k > \tau_S$), la provision mathématique correspond à celle d'une rente viagère payant $h_W(x, \tau_S) \cdot BB_{\tau_S}$ à terme échu. La périodicité dépend de la fréquence choisie pour la mise à disposition des revenus garantis. Lorsque la garantie est activée, l'assureur porte un risque de taux et de longévité¹. Dans le cas annuel ($N_{even} = 1$), la provision mathématique s'écrit² :

$$PM_{t_k}^j = (h_W(x, \tau_S) \cdot BB_{\tau_S} - AV_{t_k})^+ \times a_{x+t_k} \simeq h_W(x, \tau_S) \cdot BB_{\tau_S} \times a_{x+t_k} \quad [12-3]$$

En écrivant l'équation [12-2] lorsque AV_{t_k} devient inférieur au montant de revenus garantis, nous retrouvons l'équation [12-3].

Le calcul des provisions proposé dans l'équation [12-1] permet à l'assureur de compenser les provisions positives par d'autres provisions négatives. Nous pouvons augmenter les exigences de provisionnement et considérer que la provision est nulle lorsque son calcul donne une valeur négative. De cette manière, la provision de l'ensemble « contrat + garantie » n'est jamais inférieure à la valeur de rachat (valeur de l'épargne).

Cette méthode pose problème lorsque l'assureur a mis en place un portefeuille de couverture. Par exemple, en cas de hausse des marchés (sans modification des lois actuarielles), la valeur de la provision mathématique diminue. Si celle-ci devient négative, sa valeur est alors forcée à 0 alors que les variations du portefeuille de couverture n'ont pas été écartées. Nous constaterons alors une perte sur le portefeuille de couverture non compensée au passif.

12.2.1.1 Evolution de la provision mathématique avec le temps

La provision $PM_{t_k}^j$ est évaluée en mark to market³, sous les hypothèses Best Estimate en t_k (notées BE_{t_k}). La fréquence d'ajustement des hypothèses best estimate peut différer selon les paramètres (voir chapitre 11).

L'ACP précise dans les ONC du QIS 5 que le « calibrage de la volatilité des actions dans les générateurs de scénarii économiques devra être réalisée sur des prix à date d'inventaire, afin d'assurer une certaine cohérence entre le calibrage et les prix de marché ». Par ailleurs, la volatilité, si celle-ci est supposée constante dans le modèle, doit être égale à la moyenne entre le prix bid et le prix ask du call de maturité un an à la monnaie écrit sur le sous-jacent considéré.

Par définition, CE^j et M^j sont fixées au moment de la souscription et ne sont pas modifiées par la suite.

L'évolution de la provision entre t_k et t_{k+1} dépend de 3 facteurs :

- Une diminution de la valeur temps de la garantie en raison du phénomène de Θ ;
- Une variations de la valeur de la garantie suite à l'évolution des paramètres financiers. Certains de ces paramètres sont couverts tandis que d'autres ne le sont pas ;
- Une variation des lois actuarielles (décès et rachat). A la date t_{k+1} , l'assureur n'actualise pas nécessairement ces lois par rapport aux données utilisées en t_k .

¹ Les solutions d'obligations liées à la longévité ne sont pas aujourd'hui suffisamment développées et liquides pour protéger un portefeuille de rente

² L'approximation provient du fait que pour $t = \tau_S$ la quantité $(h_W(x, \tau_S) \cdot BB_{\tau_S} - AV_{t_k})^+$ peut être différente de $h_W(x, \tau_S) \cdot BB_{\tau_S}$. Pour $t \geq \tau_S + dt$, l'égalité est vérifiée.

³ Dans le cadre de Solvabilité 2 et en anticipation des normes IFRS (phase 2)

Remarque : si $BE_{t_{k+1}} = BE_{t_k}$ (paramètres financiers et lois actuarielles constantes entre ces deux dates), la provision varie seulement en raison de la valeur temps des options ($\Theta_{garantie}$).

La variation de PM s'écrit :

$$\Delta PM^j = PM_{t_{k+1}}^j - PM_{t_k}^j = (V_{t_{k+1}}^G - V_{t_k}^G) + (M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j) = \Delta V^G + \Delta M^j \quad [12-4]$$

En développant la quantité ΔM^j , nous constatons que la marge est dégagée au cours de chaque exercice¹.

$$\begin{aligned} M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j &= \frac{M^j}{\alpha_g} VAP_{t_{k+1}} (Frais_{\alpha_g} | \mathcal{F}_{t_{k+1}}) - \frac{M^j}{\alpha_g} VAP_{t_k} (Frais_{\alpha_g} | \mathcal{F}_{t_k}) \\ &= \frac{M^j}{\alpha_g} \left[\underbrace{VAP_{t_{k+1}} (F | \mathcal{F}_{t_{k+1}}) - e^{-\frac{r}{N}} VAP_{t_{k+1}} (F | \mathcal{F}_{t_k})}_{\substack{\text{Variations liées au changement des conditions} \\ \text{Best Estimate } (BE_{t_k} \rightarrow BE_{t_{k+1}}) + \text{Valeur temps}}} \right] - \frac{M^j}{\alpha_g} \underbrace{e^{-\frac{r}{N}} \mathbb{E}[F(t_{k+1}) | \mathcal{F}_{t_k}]}_{\substack{\text{Dégagement de la marge} \\ \text{sur } [t_k, t_{k+1}]}} \end{aligned}$$

La mise en place d'une couverture financière ou d'un programme de réassurance ne modifient pas l'expression de la provision mathématique de la garantie. Nous décrivons la manière dont ces mécanismes de transfert de risque pourraient être traités dans les parties 12.2.2 et 12.2.3.

12.2.2 Traitement de la couverture financière

Nous notons EH l'efficacité de la couverture mise en place. Ce paramètre traduit notamment le fait que les rebalancements sont effectués à dates discrètes, que le passif n'est pas recalculé à la même fréquence que les grecques, que tous les paramètres financiers ne sont pas couverts, qu'il existe des écarts entre le comportement des assurés et les lois actuarielles utilisées pour mettre en place le portefeuille...

Ces écarts ne sont pas provisionnés et doivent être absorbés par la marge de prudence $M_{t_k}^j$.

La couverture doit être mise en œuvre en utilisant les paramètres Best Estimate à la date de l'évaluation. Soit $V_{t_k}^{hedging}$ la valeur du portefeuille de couverture évaluée à la date t_k :

$$V_{t_{k+1}}^{hedging} - V_{t_k}^{hedging} = EH \times (PM_{t_{k+1}}^{hedging} - PM_{t_k}^{hedging}) \quad [12-5]$$

En supposant que $V_{t_k}^{hedging} = PM_{t_k}^{hedging}$, nous pouvons réécrire l'égalité précédente :

$$V_{t_{k+1}}^{hedging} = EH \times PM_{t_{k+1}}^{hedging} + (1 - EH) \times PM_{t_k}^{hedging} \quad [12-6]$$

L'assureur doit définir les objectifs qu'il fixe à son programme de couverture : couverture de la valeur de la garantie (ce qui inclut la marge et permet de cristalliser le P&L), couverture de la provision mathématique, couverture uniquement des engagements... Ces objectifs dépendent de l'aversion au risque de l'assureur et des avantages retirés en termes de volatilité de P&L et d'économie de fonds propres.

L'assureur retiendra généralement l'un des 2 passifs de couverture suivants :

¹ Nous notons simplifions les notations dans les équations trop longues en réécrivant $Frais_{\alpha_g} = F$

$$PM_{t_k}^j = \underbrace{V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W)}_{PM_{t_k}^{j, hedgin g1}} + \max(M_{t_k}^j, 0) \quad [12-7]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{PM_{t_k}^{j, hedg in g2}}$$

Le choix d'utiliser $PM_{t_k}^{j, hedgin g1}$ permet à l'assureur de couvrir la valeur totale de la garantie (incluant la marge contenue dans le tarif en prime commerciale). Si la couverture était parfaite et en l'absence de modification des lois actuarielles anticipées au moment de la souscription, l'assureur ne porterait plus aucun risque. Couvrir la marge de la garantie peut être considérée comme excessif si les hypothèses de tarification sont suffisamment prudentes¹. Par ailleurs, en procédant de cette manière, l'assureur sera confronté à un désadossement comptable (sur le terme $M_{t_k}^j$ non couvert).

En supposant que $EH \neq 0$ et en utilisant les équations [12-4] et [12-5], nous pouvons écrire la part de la variation de la PM expliquée par les variations du portefeuille de couverture :

$$\Delta PM^j = (V_{t_{k+1}}^G - V_{t_k}^G) + (M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j) = \frac{(V_{t_{k+1}}^{hedging} - V_{t_k}^{hedging})}{EH} + \underbrace{(M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j)}_{\substack{\text{Non pris en compte} \\ \text{par la couverture}}}$$

Dans le second cas, utiliser $PM_{t_k}^{j, hedgin g2}$ permet de répliquer la provision mathématique de la garantie mais ne sécurise pas la marge contenue dans le tarif en prime commerciale (seule la partie des frais correspondant au coût économique sera protégée). De la même manière que précédemment, nous pouvons écrire que :

$$\Delta PM^j = (V_{t_{k+1}}^G - V_{t_k}^G) + (M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j) = \frac{(V_{t_{k+1}}^{hedging} - V_{t_k}^{hedging})}{EH}$$

Si $EH = 1$, la variation de la PM est intégralement compensée par la variation de la valeur du portefeuille de couverture. Le résultat de l'assureur n'est alors plus impactée par les variations des paramètres financiers.

Nous recommandons de construire le programme de couverture sur le passif $PM_{t_k}^{j, hedgin g2}$, c'est à dire sur la base de la provision de la garantie $PM_{t_k}^j$.

12.2.3 Impact de la réassurance

Nous supposons dans la suite que l'assureur a choisi de réassurer une quote-part Q de la garantie. Soit R^j le tarif de réassurance pour le versement j . Nous supposons que le traité de réassurance ne comprend pas de clause de participation aux bénéfices et nous écrivons les relations pour des évènements annuels ($N_{even} = 1$).

Nous supposons que le versement a été effectué avec une marge positive ($\alpha_g > CE^j$). Le réassureur acceptera une partie du risque en échange du versement par l'assureur à chaque date t_k d'une prime de réassurance égale à :

$$P_{t_k}^{j,R} = R^j \times AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m)$$

¹ Ce doit être le cas en l'absence de pression concurrentielle notamment

Dans le même temps, l'assureur encaisse des frais égal à $\alpha_g \times AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m)$. Il conserve donc une marge égale à $(\alpha_g - R^j) \times AV_{t_k}^- \cdot (1 - \alpha_m)$ sur la partie cédée de la provision. Si le tarif de réassurance est égale au tarif en prime commerciale, l'assureur ne réalise plus de marge sur la partie cédée de la prime.

La provision cédée peut s'écrire :

$$\begin{aligned} PM_{t_k}^{j,R} &= Q \times \left[VAP_{t_k} \left(Prestation_{\alpha_g}^j \right) - \frac{CE^j}{\alpha_g} \cdot VAP_{t_k} \left(Frais_{\alpha_g}^j \right) \right] \\ &= Q \times V^G(t_k, AV_{t_k}, G_{t_k}^W) + Q \times M_{t_k}^j \end{aligned}$$

La provision mathématique figurant au bilan au titre de la garantie est inchangée. Nous pouvons calculer l'exposition résiduelle nette de l'assureur :

$$PM_{t_k}^{j,nette} = PM_{t_k}^j - PM_{t_k}^{j,R} = (1 - Q) \times PM_{t_k}^j$$

Sous ces hypothèses, l'ensemble des coûts de gestion de la garantie est supportée par l'assureur puisque le réassureur laisse l'intégralité des frais de gestion (α_m) à l'assureur sur la partie cédée de la provision. La mise en place d'une commission de réassurance permet de compenser cette asymétrie.

12.3 Calcul du P&L et de rentabilité

Le modèle que nous proposons pourrait s'étendre au calcul du P&L et de la rentabilité¹ de la garantie. La marge directe de la garantie provient de la marge de prudence incorporée dans le tarif en prime commerciale ainsi qu'à la conséquence de trajectoires (économiques et comportementales) favorables à l'assureur (voir chapitre 2.1 pour une illustration de ce point pour les scénarios économiques). A chaque inventaire, il est possible d'établir une valeur actualisée de la marge de prudence intégrée dans le tarif en fonction des hypothèses Best Estimate à cette date. Les tableaux ci-dessous schématisent la formation du compte de résultat de la garantie pour une prime unique.

Tableau 12-2 : Compte de résultat en l'absence de mécanisme de transfert de risque

Reprise de PM à la date t_k	+
Frais prélevés au titre de la garantie	+
Frais de gestion prélevés sur le contrat	+
Prestations payées au titre de la garantie	-
Coût de gestion du contrat	-
Commissions versées au distributeur	-
Produits financiers sur les actifs en représentation de PM^j	+
Constitution de la PM à la date $t_k + 1 an$	-
= P&L en fin d'année	

¹ Evaluer la rentabilité de la garantie nécessite de prendre en compte l'ensemble des coûts (rémunération des distributeurs...), des recettes (rétrocessions sur les fonds commercialisés...) ainsi que des éléments de comptabilité analytiques propres à chaque assureur (cout de commercialisation et de gestion de la garantie, coût d'immobilisation du capital...)

Tableau 12-3 : Compte de résultat de l'année 1 si une couverture a été mise en place

Reprise de PM à la date t_k	+
Frais prélevés au titre de la garantie	+
Frais de gestion prélevés sur le contrat	+
Prestations payées au titre de la garantie	-
Coût de gestion du contrat	-
Commissions versées au distributeur	-
Résultat financier du portefeuille de couverture	+
Constitution de la PM à la date $t_k + 1 an$	-
= P&L en fin d'année	

Le résultat financier du portefeuille de couverture correspond aux gains réalisés sur les positions prises moins les frais de transaction. C'est à dire : P&L(swaps) + P&L(futures) + P&L(options) + intérêts sur la trésorerie – coûts de transaction

Tableau 12-4 : Compte de résultat de l'année 1 si un traité de réassurance a été mis en place

Reprise de PM à la date t_k (quote-part conservée)	+
Frais prélevés au titre de la garantie	+
Frais de gestion prélevés sur le contrat	+
Paiement de la prime de réassurance	-
Prestations payées au titre de la garantie	-
Prestations recouvrées auprès du réassureur	+
Commissions de réassurance	+
Coût de gestion du contrat	-
Commissions versées au distributeur	-
Produits financiers sur les actifs en représentation de la PM conservée	+
Constitution de la PM à la date $t_k + 1 an$ (quote-part conservée)	-
= P&L en fin d'année	

Les réflexions présentées ici sur la manière de provisionner la garantie devraient être testées en effectuant des tests de robustesse nécessitant au préalable d'avoir modélisé la couverture. Ces tests permettraient de déterminer si les provisions sont suffisantes (et les conditions dans lesquelles elles ne le sont plus). Par ailleurs, il serait utile d'envisager d'autres méthodes de provisionnement, par exemple retenir le CTE_{75%} du résultat de la garantie (au lieu de l'espérance), afin d'adopter un gestion du risque plus prudente lorsque la marge à la souscription devient négative

Chapitre 13: Traitement dans Solvabilité 2

Dans ce chapitre, nous nous basons sur les documents publiés dans le cadre du QIS 5 (disponibles sur le site du CEIOPS¹). Les articles désignés par « lettre + chiffres » font référence au document "*Technical specifications for QIS 5*" et ceux désignés uniquement par des chiffres au document provisoire "*QIS 5 Calibration paper*". Les spécifications définitives du QIS 5, publiées début juillet 2010, ont été intégrées dans ce chapitre et les écarts entre les versions provisoires et définitives sont mentionnées².

La première étape du calcul consiste à réécrire le bilan sous la norme Solvabilité 2. Les garanties GMWB / GLWB n'étant pas parfaitement répliquables, l'article TP1.51 prévoit que la provision technique soit définie comme la somme d'une provision best estimate et d'une marge pour risque. La provision best estimate permet de déterminer le besoin de fonds propres couvrant les pertes à horizon 1 an avec une probabilité de 99.5%.

Nous présentons dans la suite la manière dont les garanties GMWB et GLWB pourraient s'intégrer dans le référentiel Solvabilité 2, sur la base de la formule standard, en effectuant un certain nombre d'approximations. Nous n'effectuerons pas les applications numériques associées qui nécessitent d'adapter le modèle Matlab pour faire du stochastique dans le stochastique.

13.1 Calcul de la provision Best Estimate

La provision best estimate est égale à la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité de survenance des flux de trésorerie actualisés avec la courbe des taux sans risque (TP1.59). Elle doit être « market consistent » (TP1.36), c'est-à-dire évaluée avec des paramètres de marché. Son calcul s'effectue sur la base d'un portefeuille fermé, sans versement complémentaire et jusqu'à extinction³ (TP1.105). Le bénéfice de mutualisation entre les cohortes de contrats n'est ainsi pas reconnu et peut alors constituer une réserve masquée.

Dans les Orientations Nationales Complémentaires au QIS 5, l'ACP recommande d'utiliser la volatilité moyenne résultant du call de maturité 1 an à la monnaie portant sur les sous-jacents de l'épargne. Ce choix est fait par cohérence avec l'utilisation des taux de marché. Ce point semble néanmoins devoir être davantage étudiée dans le cas des options de longue maturité.

La provision best estimate est calculée brute de réassurance (TP1.51 et TP1.85). Le calcul est analogue à celui mené dans le chapitre 12 exceptions faites de certaines hypothèses :

¹ Disponibles sur http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/index_en.htm#consultation

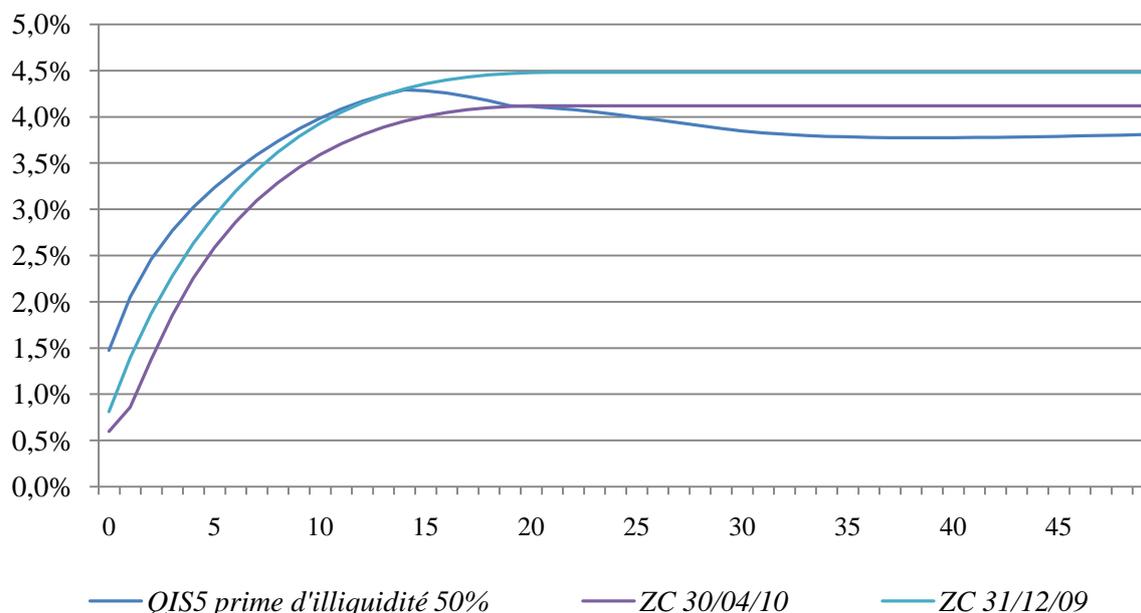
² Les numéros des articles de ces deux documents ont été modifiés entre la version provisoire et la version définitive. Sauf précision contraire, les références sont celles des documents provisoires publiés en avril 2010

³ L'assureur ne dispose pas de nouveaux contrats (ni de nouvelles primes) pour honorer ses engagements passés

- La provision best estimate est évaluée contrat par contrat et peut être négative (TP1.130). Nous avons proposé, dans le cadre d'une démarche prudente, de forcer les provisions à 0 lorsqu'elles étaient négatives ;
- La provision best estimate doit prendre en compte tous les décaissements liés aux frais (TP1.111) alors que la provision calculée au chapitre 12 ne comprend ni les frais ni les coûts de gestion¹ ;
- La courbe des taux sans risque utilisée dans le QIS 5 pour projeter et actualiser les flux est différente de la courbe des taux zéro coupons de l'IAF. Par ailleurs, en fonction de la nature des passifs, le QIS 5 permet de prendre en compte une « prime d'illiquidité », diminuant ainsi la valeur de la provision best estimate. Il semble que :
 - Les garanties GMWB / GLWB correspondent à l'article TP.3.7², ce qui implique d'introduire une « prime d'illiquidité » de 50% pour évaluer la provision best estimate ;
 - Lorsque les garanties sont déclenchées, le contrat s'apparente à une rente de durée fixe ou viagère et tombe alors dans les dispositions prévues à l'article TP.3.5² (prime d'illiquidité de 100%). *Nous pouvons supposer, pour être prudent, que tous les calculs sont effectués avec une prime d'illiquidité de 50%*

A partir des Figure 13-1 et Figure 13-2, nous voyons que la prime d'illiquidité augmente les taux pour les maturités inférieures à 19 ans (par rapport à la courbe des taux du QIS 5). Par ailleurs, la courbe des zéro coupons au 30/04/10 utilisée dans le chapitre 12 pour calculer la provision Best Estimate est en dessous de la courbe des taux du QIS 5 (tenant compte de la prime d'illiquidité de 50%) pour les maturités inférieures à 20 ans et au-dessus pour les maturités supérieures. L'impact sur les taux d'actualisation diminuera la valeur des provisions trouvées au chapitre 12 pour les garanties GMWB dont la maturité est inférieure à 20 ans (et la maturité effective plus faible encore).

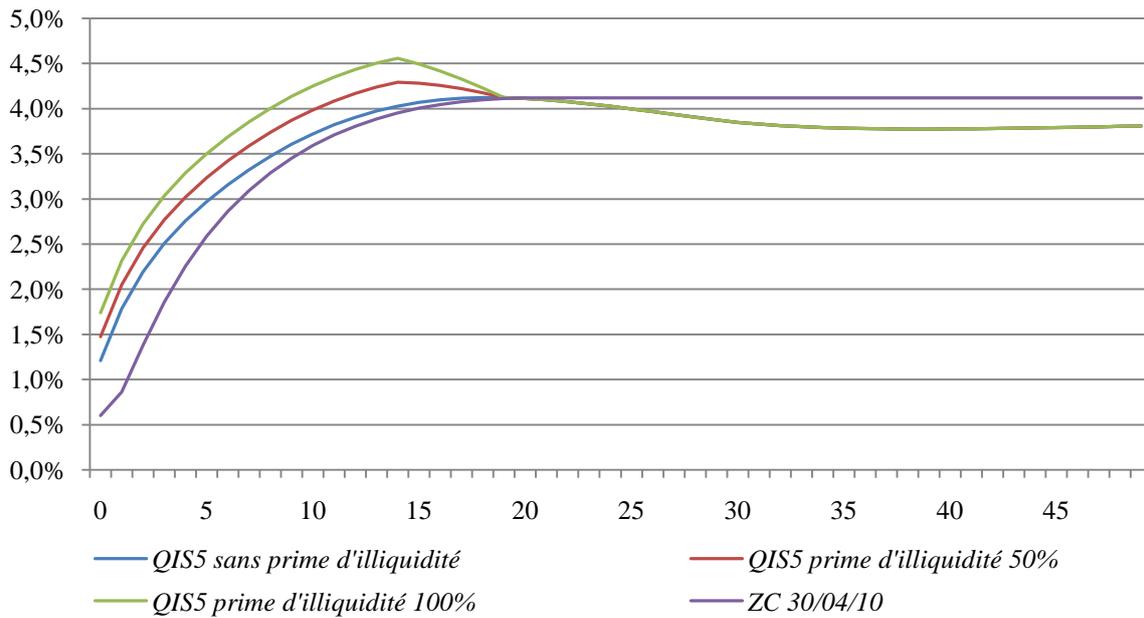
Figure 13-1 : Comparaison de la courbe de taux QIS 5 (prime illiquidité 50%) et des taux zéro coupons



¹ Ce chapitre ayant pour objectif d'illustrer la manière dont les garanties pourraient être considérées dans un cadre Solvabilité 2, ces approximations sont admissibles en première approche.

² Numérotation du document de juillet 2010

Figure 13-2 : Comparaison des courbes de taux QIS 5 et des taux zéro coupons utilisés dans le mémoire

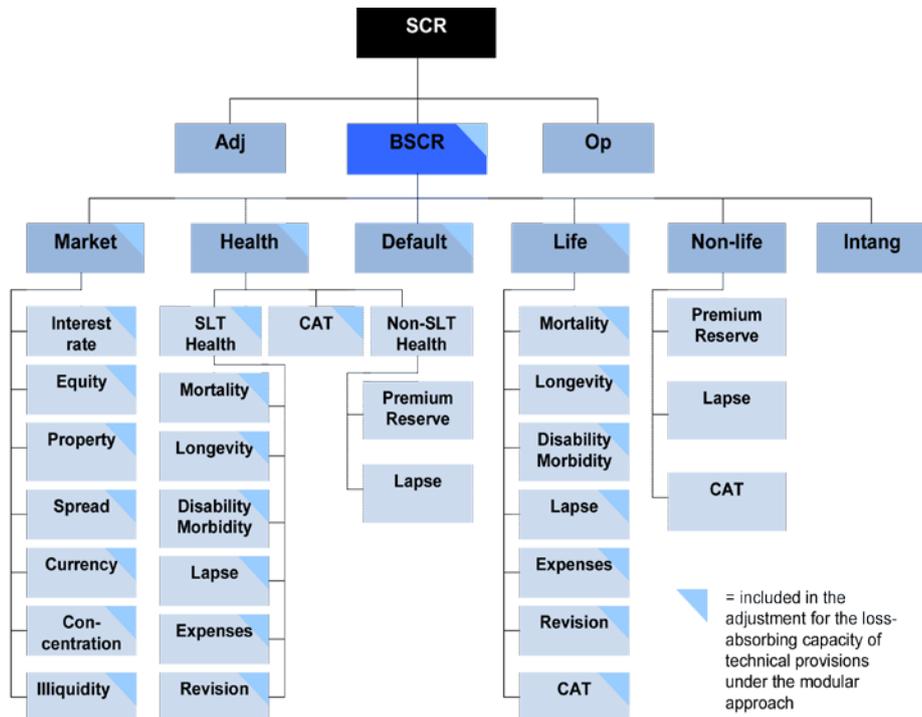


13.2 Evaluation du SCR (Solvency Capital Requirement)

13.2.1 Recensement des modules à estimer

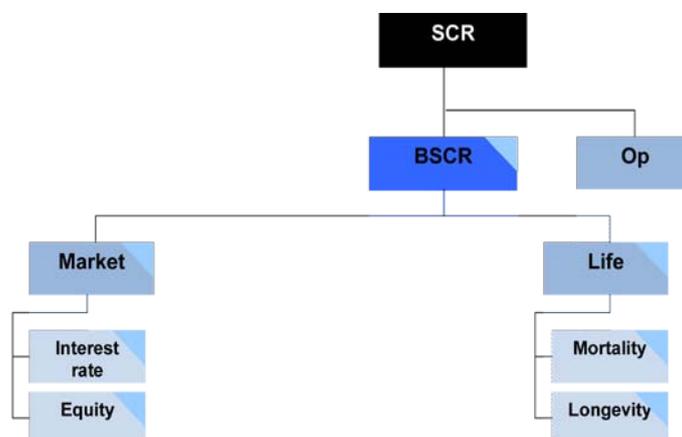
Les différents modules prévus dans le QIS 5 sont résumés sur la Figure 13-3:

Figure 13-3 : Modules de risques prévus dans le QIS 5



Sous réserve de nombreuses hypothèses que nous détaillerons ci-dessous, le nombre de modules de risque à estimer pour les garanties de revenus peut être réduit en 1^{ère} approximation. La Figure 13-4 détaille les modules que nous considérerons dans la suite :

Figure 13-4 : Modules de SCR retenus pour les garanties GMWB / GLWB



Les garanties que nous étudions sont des garanties en cas de vie, ce qui permet de ne pas considérer les modules de risque santé ($SCR_{health} = 0$) et de risque non-vie ($SCR_{n-life} = 0$).

Nous effectuons par ailleurs une série d'hypothèses afin de simplifier les calculs :

- Nous négligeons les risques portant sur les actifs immatériels ($SCR_{Intang} = 0$) qui sont propres au bilan de chaque assureur;
- Nous supposons que le risque de défaut est nul ($SCR_{def} = 0$). Il s'agit d'une hypothèse forte (en 1^{ère} approche) dans la mesure où ce risque s'est réalisé pendant la crise financière. Cette hypothèse reste réaliste si l'on suppose que les placements obligataires sont principalement faits sur des titres souverains de l'OCDE et si la politique de risque de l'assureur impose des contraintes fortes (utilisation de chambres de compensation, mise en place de collatéraux...¹);
- Nous supposons que le bilan ne comporte pas de marge dans les éléments techniques (provisions techniques, impôts différés...) permettant d'absorber une partie des pertes de l'assureur. Nous posons donc $Adj = 0$ et ne calculerons que les SCR bruts. Cette hypothèse conduit à surestimer le BSCR;
- Nous ignorons une partie des modules de risque entrant dans le calcul du SCR_{mkt} en faisant les hypothèses suivantes :
 - L'assureur n'investit pas l'immobilier ($Mkt_{property} = 0$), ce qui est cohérent avec la formulation des allocations d'actifs de ces garanties;
 - Nous ignorons le risque de spread, ce qui représente une hypothèse forte² étant donné la forte proportion du bilan de l'assureur investi dans des actifs obligataires ($Mkt_{spread} = 0$);
 - L'assureur investit dans la monnaie d'émission des garanties ($Mkt_{curr} = 0$), conformément aux recommandations émises dans le chapitre 3;

¹ Suite à la transposition dans le droit français de la directive européenne sur la réassurance, les réassureurs ne sont plus obligés de nantir. Ces nantissements appartiennent désormais au cadre contractuel (source : Groupe de travail Institut des Actuaire, 2009, Note sur l'état des lieux de la réglementation et du cadre comptable).

² Etant donné l'accroissement des déficits publics, le QIS 5 prend désormais en compte le risque de spread sur les obligations notées AAA.

- L'assureur diversifie suffisamment son portefeuille d'actifs pour négliger le risque de concentration ($Mkt_{conc} = 0$) ;
- L'assureur dispose de liquidités suffisantes pour honorer ses engagements et la valeur des provisions n'est pas impactée par une possible tension sur la liquidité des actifs¹ ($Mkt_{ip} = 0$) ;
- Nous ignorons enfin une partie des modules de risque entrant dans le calcul du SCR_{life} en faisant les hypothèses suivantes :
 - Les garanties étudiées ne tiennent pas compte de l'invalidité ($Life_{dis} = 0$) ;
 - Le module de rachat est basé sur l'écart entre la valeur de rachat et le montant des provisions mathématiques (« surrender strain »). Les garanties GMWB / GLWB ne possédant pas de valeur de rachat garanti², l'étude de ce module n'est pas pertinente ($Life_{lapse} = 0$) ;
 - Les variations des coûts de gestion des contrats sont négligées ($Life_{exp} = 0$). Cette hypothèse est forte en phase de lancement d'une nouvelle garantie ;
 - Les garanties prévoient contractuellement un taux de revenus garantis défini et ne sont donc soumises à aucun aléa réglementaire. L'arrérage de la rente en cas de déclenchement de la garantie est toujours égal au dernier montant de revenu garanti ($Life_{rev} = 0$) ;
 - Les garanties étudiées sont principalement des garanties en cas de vie, le module de catastrophe naturelle qui mesure l'impact d'un nombre important de décès instantanés ne s'applique pas ($Life_{CAT} = 0$).

Le $BSCR$ correspond à l'exigence de capital de base (Basic Solvency Capital Requirement). Son calcul repose sur une approche par module des risques en utilisant une matrice de corrélation. Chaque module identifié sur la Figure 13-4 donne ainsi lieu au calcul d'un SCR :

$$\begin{aligned}
 BSCR &= \sqrt{\sum_{i,j} corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j + SCR_{intang}} \\
 &= \sqrt{SCR_{mkt}^2 + 0.25 \times SCR_{mkt} \times SCR_{life} + SCR_{life}^2}
 \end{aligned}$$

Pour un module donné, le SCR correspond à la $Var_{99,5\%}$ de la distribution de la variation de l'actif net ΔNAV (différence entre la valeur des actifs et celle des passifs) après application des chocs définis dans ce module. Par convention, ΔNAV est positif lorsque le passif est supérieur à l'actif dans le calcul du SCR .

Les SCR correspondent donc au montant de fonds propres que l'assureur doit détenir pour ne pas être ruiné à l'horizon d'un an dans 99,5% des cas suite à un choc donné :

- Les SCR sont estimés jusqu'à extinction du portefeuille fermé ;
- Au passif, seule la provision Best Estimate doit être prise en compte pour estimer la variation de la valeur de l'actif net suite à un choc³. Cela suppose que la marge pour risque est inchangée suite à ce choc ;
- Si des mécanismes de transfert ou de réduction de risque ont été mis en place par l'assuré, ceux-ci doivent être pris en compte dans l'analyse des chocs (voir¹ les

¹ Ce module de risque est nouveau dans le QIS 5. Le risque de liquidité pèse sur un assureur qui a mis en place une couverture dynamique car le coût de la vente à découvert augmente en cas de choc sur la liquidité du marché

² Voir la partie 4.1.2 pour une analyse de la valeur de rachat des garanties

³ Cette hypothèse est faite pour éviter les références circulaires : la marge pour risque dépend des SCR qui dépendent des variations du passif (donc de la marge pour risque)

SCR.12 et SCR.13 qui explicitent les mécanismes éligibles et la manière de les prendre en compte). Les mécanismes de couverture dynamique par les grecques ont un effet limité dans l'approche standard puisque les chocs sont instantanés, ce qui ne permet pas d'effectuer les réajustements nécessaires. Les couvertures statiques ou semi-statiques paraissent mieux adaptées à ce cadre réglementaire. *Nous négligeons ce point dans la suite de ce chapitre ;*

- Si le SCR obtenu est négatif (c'est à dire que le besoin en capital est négatif), sa valeur est forcée à 0.

Le montant de capital à détenir est alors déduit de la formule suivante :

$$\begin{aligned} SCR &= BSCR + SCR_{op} \\ &= \sqrt{SCR_{mkt}^2 + 0.25 \times SCR_{mkt} \times SCR_{life} + SCR_{life}^2} + SCR_{op} \end{aligned} \quad [13-1]$$

13.2.2 Méthode de calcul

Le modèle standard prévoit d'effectuer les calculs dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes et nous devons alors utiliser la méthode développée dans la partie 8.2.3 pour tenir compte de la structure par terme des taux. Les développements ultérieurs sont indépendants de la stratégie de transfert de risque mis en place par l'assureur.

Nous calculons dans un premier temps les différents SCR. Les chocs sont supposés instantanés, c'est à dire qu'aucune décision ne peut être prise au cours de ce choc (changement de tarification, modification de la nature des actifs, mise en place ou modification d'un programme de couverture...).

Le calcul des SCR nécessite de mettre en œuvre des simulations dans les simulations. Par exemple pour calcul le SCR_{equity} à la date $t = 0$, il serait nécessaire de :

- Tout d'abord, réaliser un choc sur la valeur des actions à la date $t=0$ et générer des trajectoires d'actifs sous la probabilité historique \mathbb{P} pour $t \in [0,1]$ suite à ce choc ;
- Puis, pour chaque valeur d'actif obtenue à la date $t = 1$, nous devons :
 - Estimer la valeur du portefeuille d'actifs (actions, obligations, options, swaps...) figurant au bilan de l'assureur ;
 - Estimer la provision best estimate au passif en utilisant des scénarios économiques sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} ;
- Enfin, mesurer pour chaque scénario historique le ΔNAV et en déduire la $Var_{99.5\%}$ (qui correspondrait au SCR_{equity} à la date $t = 0$).

13.3 Estimation du SCR_{mkt} (risque de marché)

Dans le cadre de notre modèle et de nos hypothèses, le SCR_{mkt} n'est constitué que du module de taux d'intérêt (Mkt_{int}^{Up} et Mkt_{int}^{Down}) et du module actions (Mkt_{eq}). Nous en déduisons l'expression de SCR_{mkt} :

¹ Numérotation du document QIS 5 de juillet 2010

$$SCR_{mkt} = \max \left(\sqrt{\sum_{(r,c)} CorU_{r,c} \cdot Mkt_{U,r} \cdot Mkt_{U,c}}, \sqrt{\sum_{(r,c)} CorD_{r,c} \cdot Mkt_{D,r} \cdot Mkt_{D,c}} \right)$$

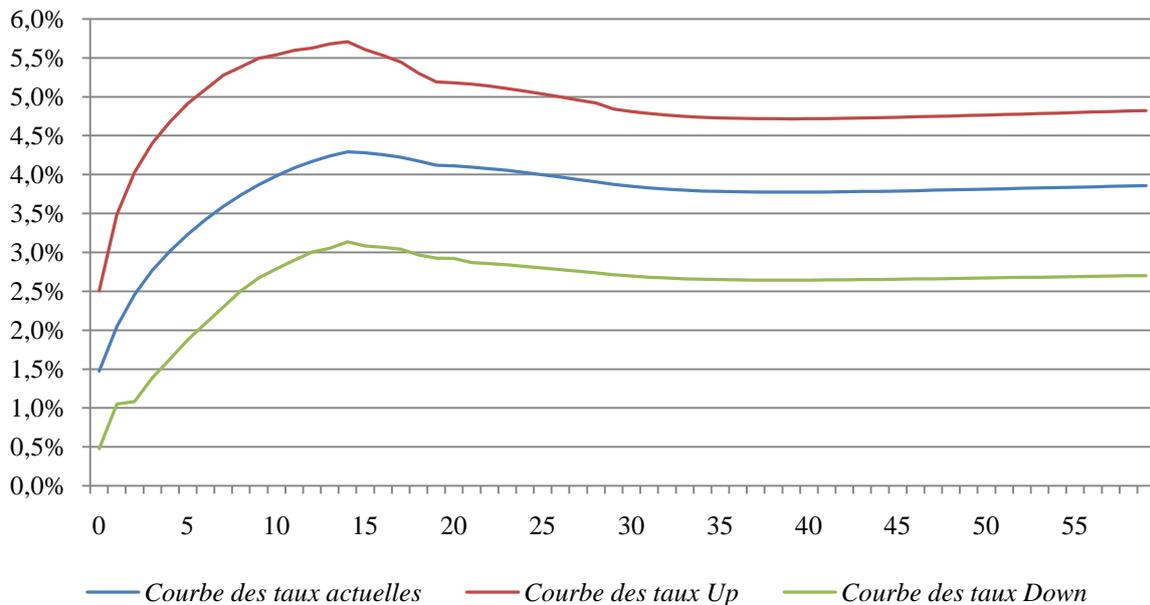
$$= \max \left(\sqrt{(Mkt_{int}^{Up})^2 + (Mkt_{eq})^2}, \sqrt{(Mkt_{int}^{Down})^2 + 0.5 \cdot Mkt_{int}^{Down} \cdot Mkt_{eq} + (Mkt_{eq})^2} \right)$$

13.3.1 Estimation de Mkt_{int}^{Up} et de Mkt_{int}^{Down} (Risque de taux)

Le risque de taux a un impact sur la valeur des actifs et sur les coefficients d'actualisation utilisés pour évaluer la provision Best Estimate.

Nous utilisons dans ce module deux chocs multiplicatifs de la courbe des taux actuelle, l'un à la baisse et l'autre à la hausse. Les courbes de taux stressées sont obtenues en multipliant la courbe des taux du QIS5 (avec une prime d'illiquidité de 50%) par $(1 + s_t^{up})$ et par $(1 + s_t^{down})$. Pour le scénario de stress baissier, les taux inférieurs à 1% doivent rester inchangés et le choc à la baisse doit provoquer une baisse d'au moins 1% par rapport au taux de référence.

Figure 13-5 : Courbes de taux stressées par rapport à la courbe des taux QIS 5 (prime illiquidité=50%)



Notre programme informatique utilise un pas mensuel (notamment pour les décès) alors que les chocs sont fournis uniquement pour les maturités multiples d'un an (sauf avant 1 an et après 25 ans). Nous supposons dans la mise en œuvre des formules que le choc est constant entre 2 maturités. Cette hypothèse est cohérente avec celle faite dans par le QIS 5 pour les maturités supérieures à 30 ans. Par exemple, le choc sur la maturité 2 ans étant de 70% et celui sur la maturité 3 ans étant de 64%, nous supposons que le choc pour toute maturité comprise entre 2 ans et 3 ans est égale au choc de la maturité 2 ans (70%).

Nous pouvons alors estimer les quantités $Mkt_{int}^{Up} = \Delta NAV|_{up}$ et $Mkt_{int}^{Down} = \Delta NAV|_{down}$.

Remarque : dans le document provisoire publié en avril 2010, des chocs additifs sur la volatilité étaient prévus (+12% et -3%). Quatre calculs séparés devaient alors être menés. La formulation définitive du QIS 5 est plus simple que la formulation provisoire.

13.3.2 Estimation du Mkt_{eq} (risque action)

Nous supposons que l'assureur investit uniquement dans des actions cotées. Cette hypothèse simplifie le calcul, sans trop s'éloigner de la réalité :

$$Mkt_{eq} = Mkt_{global} = \Delta NAV | choc_{equity}$$

Le choc lié aux actions « global » est un choc instantané multiplicatif à la baisse de 39%.

Un système d'ajustement, d'amplitude -9%, est prévu. Ainsi si le niveau des marchés est déjà inférieure à la moyenne des valeurs prises sur 1 an, le choc à la baisse est réduit de 39% à 30%. Nous supposons, pour être prudent, que ce dispositif contracyclique n'est pas mis en œuvre et appliquerons un choc sur les actions de 39%.

Remarque : le dispositif prévu pour le choc action était plus complexe dans la version provisoire. Le choc sur le niveau des actions (3.66) était en effet calibré à -45% et devait être combiné avec des chocs multiplicatifs sur la volatilité (3.113). L'impact de chaque choc, simulé individuellement, était ensuite agrégé en utilisant une matrice de corrélation dont les coefficients dépendaient du sens du choc sur la volatilité¹. Un mécanisme d'ajustement contracyclique du choc sur le niveau des actions était par ailleurs prévu ($\pm 10\%$).

	Hausse de la volatilité de 50%	Baisse de la volatilité de 15%
Baisse de 45% du cours	75%	0%

13.4 Estimation du SCR_{life} (risque de souscription vie)

Le module souscription vie regroupe les risques actuariels couverts par la garantie et la manière dont les contrats sont gérés. Pour ces modules, les chocs impactent uniquement la valeur du passif.

Dans le cadre de notre modèle et de nos hypothèses, le SCR_{life} est constitué du module de mortalité ($Life_{mort}$) et de longévité ($Life_{long}$). Nous en déduisons l'expression de SCR_{life} :

$$\begin{aligned} SCR_{mkt} &= \sqrt{\sum_{(r,c)} CorrLife_{r,c} \cdot Life_r \cdot Life_c} \\ &= \sqrt{(Life_{mort})^2 - 0.25 \cdot Life_{long} \cdot Life_{mort} + (Life_{long})^2} \end{aligned}$$

Remarque : les garanties GMWB / GLWB ne possédant pas de valeur de rachat garantie, nous avons posé $Life_{lapse} = 0$. La formulation actuelle du QIS 5 ne permet pas d'appréhender l'ensemble des risques liés au rachat. En effet, une variation du taux de rachat par rapport aux anticipations de l'assuré provoque une perte pour l'assureur² (voir chapitres 9 et 10).

¹ Les coefficients de corrélation variable traduisent l'asymétrie entre l'évolution des cours et de la volatilité : lorsque la volatilité augmente, les prix baissent alors que la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

² En cas d'écart entre le comportement de rachat anticipé et les rachats réalisés, le coût des garanties est fortement impacté. Par ailleurs, les rachats dynamiques jouent un rôle important dans la gestion du portefeuille de couverture dynamique. Par exemple lorsque l'assuré joue contre l'assureur, celui-ci constate des pertes sur le portefeuille de couverture (sous-couvert en période de baisse des marchés car les rachats seront inférieurs aux anticipations, sur-couvert en cas de hausse des marchés et de rachats en augmentation)

13.4.1 Estimation du $Life_{mort}$ (risque de mortalité)

Le besoin en capital $Life_{mort}$ correspond à l'impact sur l'actif net d'une augmentation uniforme et permanente de 15% du taux de mortalité¹ pour tous les âges :

$$Life_{mort} = \Delta NAV | choc_{mort}$$

La table de mortalité stressé est obtenue à partir de la relation [10-1] développée dans le cadre du pricing des garanties GLWB.

13.4.2 Estimation du $Life_{long}$ (risque de longévité)

Le besoin en capital $Life_{long}$ correspond à l'impact sur l'actif net d'une diminution uniforme et permanente de 20% du taux de mortalité pour tous les âges :

$$Life_{long} = \Delta NAV | choc_{long}$$

Le calcul est analogue à celui du $Life_{mort}$.

Remarque : l'intensité du choc a été abaissée de 25% à 20% par rapport à la version provisoire du QIS 5 publié en avril 2010.

13.5 Estimation du BSCR

13.5.1 Estimation du SCR_{op} (risque opérationnel)

Le risque opérationnel traduit les conséquences d'erreurs survenant dans les processus que l'assureur doit être en mesure de contrôler (faute d'un employé, dysfonctionnements d'une application informatique...). Le QIS 5 fournit dans la partie SCR.3 (numérotation du document de juillet 2010) une formule standard pour évaluer le SCR_{op} :

$$SCR_{op} = \min(30\% \times BSCR, Op) + 25\% \times Exp_{ul}$$

$$Op = \max(Op_{premiums}, Op_{provisions})$$

Cette formule est uniquement basée sur les caractéristiques du contrat et sur la structure de production. Elle ne traduit ni la politique de contrôle mise en place par l'assureur, ni la complexité de gestion des risques de la garantie (mise en place d'un programme de couverture...).

Dans la mesure où nous nous intéressons uniquement à la garantie, l'assuré ne supporte pas de risque d'investissement. Ainsi tous les éléments indexés en $-ul$ sont nuls :

$$pEarn_{life-ul} = Earn_{life-ul} = TP_{life-ul} = Exp_{ul} = 0$$

Par ailleurs, l'évaluation des termes intervenant dans cette formule nécessite de considérer les éléments du compte de résultat des 12 mois précédant le début de l'exercice et des 12 mois à venir (afin de prendre en compte la croissance de l'activité)². Pour évaluer le SCR_{op} à la date $t = 0$ pour un produit venant d'être commercialisé, nous considérons donc les éléments du compte de résultat sur la période $t \in [0,1]$. Les éléments antérieurs à $t = 0$ sont considérés comme nuls :

¹ La table de mortalité de référence est celle utilisée pour évaluer la provision Best Estimate. Dans notre cas, il s'agit de la table TGH / TGF 00-05

² L'approche fournie par le QIS 5 est adaptée dès le 2nd exercice d'activité

$$pEarn_{life} = 0$$

En supposant que les primes sont encaissées en fin d'année ($N_{even} = 1$), nous calculons $Earn_{life}$ correspondant aux primes encaissées au cours des 12 mois de l'exercice considéré (brutes de réassurance). En utilisant les notations de la partie 7.1.2.1 et l'équation [7-4], nous pouvons écrire :

$$Earn_{life} = {}_{t_{12}}p_x \cdot \prod_{i=0}^{11} \left(1 - {}_{t_i|} \frac{1}{N} R_x \right) \cdot \alpha_g \cdot AV_{t_{12}}^- (1 - \alpha_m) \quad [13-2]$$

Avec l'équation [13-2] et en reprenant l'expression de la provision best estimate définie dans le chapitre 12, nous en déduisons les expressions de $Op_{premiums}$ et de $Op_{provisions}$:

$$Op_{premiums} = 8\% \times {}_{t_{12}}p_x \cdot \prod_{i=0}^{11} \left(1 - {}_{t_i|} \frac{1}{N} R_x \right) \cdot \alpha_g \cdot AV_{t_{12}}^- (1 - \alpha_m)$$

$$Op_{provisions} = 0.45\% \times \left[VAP_{t_{12}} (Prestation_{\alpha_g}) - \min \left(1, \frac{CE^j}{\alpha_g} \right) \cdot VAP_{t_{12}} (Frais_{\alpha_g}) \right]$$

Nous pourrions alors en déduire l'expression du $SCR_{op}^{t=0}$:

$$SCR_{op} = \min(30\% \times BSCR, \max(Op_{premiums}, Op_{provisions})) \quad [13-3]$$

13.5.2 Estimation du SCR

Une fois que tous les éléments précédents ont été calculés, nous déduisons de l'équation [13-1] le SCR :

$$SCR = \sqrt{SCR_{mkt}^2 + 0.25 \times SCR_{mkt} \times SCR_{life} + SCR_{life}^2 + SCR_{op}}$$

Il reste désormais à calculer la marge pour risque que nous avons ignoré jusque là.

13.6 Evaluation de la Risk margin (marge pour risque)

La marge pour risque correspond au coût du capital à détenir en supplément du SCR (voir partie 13.5.2). La formule à utiliser est donnée en annexe H du document de juillet 2010¹ :

$$COC_t = 6\% \sum_{i=t} SCR_i \cdot \exp[-R(t, i+1) \times (i+1)]$$

La courbe des taux utilisée correspond au taux sans risque, sans prime d'illiquidité (contrairement au calcul de la provision best estimate et des SCR).

En reprenant les hypothèses faites dans la partie 13.2.1, nous prenons uniquement en compte les SCR liés aux risques de souscription, aux risques opérationnels et aux risques de marché

¹ Nous reprenons dans cette partie les notations données dans le QIS 5, sans les adapter au reste des conventions retenues dans le mémoire.

inévitables. La définition des risques de marché inévitables est assez large et semble devoir regrouper l'ensemble des paramètres financiers pour les garanties GMWB / GLWB¹.

Le calcul précis du COC_t est complexe et coûteux en termes de temps de calcul. Le QIS 5 prévoit plusieurs types d'approximations pour simplifier les calculs², notamment :

- Supposer que les COC_t sont proportionnels à la provision best estimate BE_t (nette de réassurance) :

$$\begin{aligned} COC_t &= 6\% \sum_{i=t} SCR_i \cdot \exp[-R(t, i+1) \times (i+1)] \\ &= 6\% \left(\frac{SCR_0}{BE_0} \right) \cdot \sum_{i=t} BE_i \cdot \exp[-R(t, i+1) \times (i+1)] \end{aligned}$$

- Estimer l'ensemble des SCR_t en utilisant la duration effective de la garantie³ ;

$$COC_t = 6\% \cdot \exp(-R(t, t+1)) \times Dur_{mod}(0) \times SCR_0$$

- Supposer que le COC_t est proportionnel à la provision Best Estimate BE_0 (nette de réassurance) :

$$COC_t = \alpha \times BE_0$$

La pertinence et la robustesse de ces approximations devront être testées avant de les implémenter. Les deux dernières méthodes supposent que les risques ne sont pas modifiées dans le temps, ce qui paraît constituer une approximation trop forte pour les garanties de revenus. Par ailleurs, les risques financiers inévitables peuvent être couverts lorsque leur maturité décroît en achetant des instruments sur les marchés.

Ces méthodes d'approximation peuvent s'avérer utiles en phase de développement de nouveaux produits afin d'estimer sommairement le besoin au titre de la marge pour risque (test de sensibilités, analyse du profit...).

Nous proposons dans le chapitre suivant quelques pistes de réflexions sur les développements ultérieurs possibles et sur les améliorations qui pourraient être apportées au modèle proposé dans le cadre de ce mémoire.

¹ Dans la mesure où nous nous intéressons à des risques de long terme qui ne peuvent être couverts par des instruments de marché à la date $t = 0$. Cela n'est plus vrai cependant lorsque les maturités résiduelles des garanties diminuent.

² L'ordre retenu pour présenter ces méthodes correspond au niveau de simplification effectuée. Nous reprenons les notations données dans les documents communiqués pour le QIS 5, sans adapter les notations (pas de temps...)

³ Voir chapitre 9 dans le cas des garanties GMWB

Chapitre 14 : Développements ultérieurs

Ce chapitre regroupe certaines problématiques identifiées dans le mémoire mais non traitées et qui pourraient donner lieu à des développements ultérieurs.

14.1 Formulation d'un produit alternatif

Le coût et les risques des garanties GMWB / GLWB sont élevés, même en proposant une formulation réduisant les risques a priori (voir partie 3.5). La commercialisation de ces garanties nécessite par ailleurs un investissement important de l'assureur en système d'information et en compétences financières afin de gérer les risques. Des produits retraite innovants ne reposant pas sur une mécanique financière aussi complexe mais remplissant le même rôle pour les assurés pourraient être proposés par les assureurs qui ne souhaitent pas se lancer dans les produits GMWB / GLWB, pour des raisons techniques, de niveau de risque ou de surface financière.

Une solution pourrait consister à convertir progressivement dans le temps le capital en rente viagère. La technicité du produit résiderait dans le fait de proposer des garanties de revenus proches de ceux des garanties GLWB, tout en préservant la fraction du capital qui n'aurait pas été convertie et resterait disponible au rachat. Le lecteur pourrait approfondir par exemple l'idée présentée dans **Horneff et al. (2008)**, qui étudie la conversion en rente et l'allocation d'actifs optimale pour un retraité bénéficiant déjà d'un revenu lié à une conversion précédente partielle de son épargne. Le problème revient pour l'assureur à choisir chaque année, en fonction des préférences (utilité) de l'assuré déclarée à la souscription, la proportion d'actions, d'obligations, d'unités de rente et d'unités de consommation pour la période suivante.

Le mécanisme des contrats eurodiversifiés pourrait être exploité pour la création d'un produit alternatif.

Une dernière piste pourrait résider dans l'introduction de taux de revalorisation garanti variable sur les garanties GMWB / GLWB ou sur les rentes viagères directement :

- Pour la revalorisation durant la phase d'accumulation (GMAB), en fonction de la valeur des taux d'intérêts¹ observée sur le marché ;
- Pour la revalorisation de la rente en phase de distribution (avant le déclenchement de la garantie), en fonction d'indice² comme l'écart de longévité entre le portefeuille de l'assureur et la population globale.

¹ Source : Les Echos décembre 2009

² L'index de longévité remplace alors le rendement financier du fonds qui joue aujourd'hui ce rôle pour revaloriser le montant de la rente servie. Voir par exemple le mémoire d'actuariat de **Dekimpe (2009)**

14.2 Améliorations de la modélisation

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons effectué des hypothèses simplificatrices sur le produit et le fonctionnement des marchés afin de fournir des tendances sur les sensibilités des garanties. Il serait utile de poursuivre ce travail afin de mesurer les effets d'un relâchement de ces hypothèses ou d'une modification des modèles utilisés.

14.2.1 Modélisation du produit

Certaines garanties GMWB / GLWB, existantes sur le marché français ou étranger, ne peuvent pas être étudiées par le modèle proposé dans ce mémoire. Il serait nécessaire par exemple d'étudier les impacts provoqués par :

- La possibilité d'effectuer des versements complémentaires. Cela nécessite un traitement séparé dans la mesure où le versement complémentaire ne correspond pas nécessairement au même niveau de frais et de garantie que le versement principal. Si les frais sont formulés en pourcentage des primes investies, il semble possible d'étendre la modélisation existante en utilisant un barycentre des frais et des revenus garantis, applicable à la prime totale et à la benefit base. Ces versements étant effectués à des instants différents, il est possible qu'un mécanisme de compensation s'opère et réduise ainsi le montant total des prestations payées par l'assureur. Cette problématique se rapproche de celle de l'étude d'un portefeuille ouvert par rapport au portefeuille fermé étudié dans le mémoire (voir la partie 14.2.3) ;
- La possibilité d'effectuer des arbitrages sur ces garanties dans la mesure où il est difficile d'imposer une allocation d'actifs fixe sur des produits d'épargne présentant un horizon d'investissement très longs ;
- La revalorisation et la réversion de la rente, en particulier la manière de traiter le changement de conjoint (qui peut présenter des différences d'âges importantes par rapport à la situation initiale). Une étude de faisabilité concernant la protection des revenus garantis contre l'inflation (protection du pouvoir d'achat de l'assuré) serait par ailleurs utile.

14.2.2 Cadre de modélisation utilisé

Le cadre de modélisation que nous avons utilisé reste simple et pourrait être largement amélioré, notamment sur les aspects suivants :

- Ne plus supposer que la mortalité est déterministe (hypothèse de mutualisation et d'indépendance avec les risques financiers) en effectuant des tirages à chaque pas de temps et/ou en supposant que la table de mortalité est différente pour chaque tirage (voir chapitre 7.1.1.1) ;
- Intégrer les rachats partiels dans la stratégie optimale de l'assuré, avec éventuellement la prise en compte d'une pénalité de rachat lorsque le rachat partiel dépasse le montant de retrait garanti (voir chapitre 6). Le modèle de passif du chapitre 7 prévoit la dynamique des variables d'état en présence de rachats partiels mais cet aspect n'est pas intégré dans le programme Matlab. Il faudrait en particulier définir un critère de décision pour les rachats partiels ;
- Utiliser des modèles d'actifs plus complexe que le modèle lognormal pour les actifs risqués afin de rendre compte de l'asymétrie de la distribution des rendements et de l'épaisseur des queues de distribution (modèle à saut, modèle à volatilité stochastique

du type Heston¹...). **Benhamou et Gauthier (2009)** propose par exemple un modèle combinant Hull & White pour les taux et Heston pour les actions afin d'étudier les garanties GMAB (corrélations entre les processus décrivant l'évolution des actions, la volatilité des actions et le taux court) ;

- Améliorer l'étalonnage des modèles (primes de risque, volatilité implicite et volatilité historique², modélisation de la corrélation des différentes classes d'actifs³, prise en compte de l'inflation⁴...);
- Modéliser la stratégie de couverture optimale en intégrant les frais de transaction liés aux rebalancements et en utilisant en priorité les instruments liquides et cotés sur les marchés ;
- Ne plus supposer que le marché est complet et évaluer les impacts sur la détermination du prix (perte de l'unicité du prix et de la probabilité risque neutre) et sur la mise en place de la couverture du produit (couverture par quantile, minimisation de l'erreur quadratique de couverture...);

14.2.3 Impacts sur les résultats lorsque le portefeuille devient ouvert

Le mémoire a été effectué dans le cadre d'un contrat ou d'un portefeuille fermé de contrats, ce qui correspond davantage à une logique de provisionnement ou de calcul de marge de solvabilité.

L'assureur disposera en réalité d'un portefeuille constitué de différentes générations de contrats et ouverts à de nouvelles souscriptions. Dans ce cas, un phénomène de mutualisation peut exister en raison des maturités différentes des contrats (temps restant jusqu'à la maturité différents, tarifs différents, dates d'investissement des actifs différentes...). La gestion de la couverture s'effectuera sur ces portefeuilles d'options de vente, dont certaines pourront être hors de la monnaie et d'autres dans la monnaie.

Cette éventuelle mutualisation doit être quantifiée et pourrait faire l'objet d'un développement ultérieur.

14.3 Amélioration du programme Matlab

Le programme développé dans le cadre du mémoire suffit pour étudier le comportement d'une seule garantie GMWB / GLWB. Il pourrait être étendu pour effectuer des projections stochastiques dans le stochastique afin de simuler des portefeuilles de couverture, de calculer la provision ou le SCR dans un cadre Solvabilité 2 (utilisation de projections risque neutre pour chaque scénario économique généré sous probabilité historique).

¹ Voir **El-Ayoubi (2009)**

² Ce point est notamment traité dans l'annexe G (page 24) de l'annexe aux spécifications techniques du QIS 5

³ Le traitement de la corrélation entre les classes d'actifs a notamment un impact sur les valeurs extrêmes des distributions, ce qui limite la portée des modèles lorsqu'il s'agit de calculer des quantiles (type VaR). L'utilisation de copules, pour traduire la dépendance variable entre les actifs, constitue une piste d'étude ultérieure nécessaire pour améliorer la compréhension des garanties GMWB / GLWB

⁴ Plusieurs approches peuvent être utilisées pour modéliser l'inflation en 1^{ère} approximation :

- Le modèle de Fama : l'inflation est une fonction linéaire du taux court ;
- Les modèles intégrés de Wilkie ou d'Ahlgren qui permettent de déduire l'inflation ;
- Le modèle consistant à revenir à la définition de l'inflation (Taux d'intérêt Nominal = Taux d'Inflation + Taux d'intérêt Réel) et à effectuer la différence entre 2 modèles stochastiques, l'un pour les taux réels et l'autre pour les taux nominaux. Cette approche est souvent retenue dans les générateurs d'actifs des assureurs (type Barrie & Hibbert)

Dans la réalité, l'assureur devra faire ces calculs pour l'ensemble de son portefeuille. Programmer des simulations dans les simulations pose alors des problèmes de capacité et de temps de calcul malgré le recours classique à des accélérateurs de convergence (variables antithétiques...), à des regroupements de contrats¹ (model points) ou à des simulations de Quasi Monte Carlo. Par ailleurs, l'assureur peut souhaiter disposer d'estimations de ses engagements plus fréquemment afin d'améliorer la qualité de son pilotage des risques, sans nécessairement recourir à une modélisation complète.

L'évolution des référentiels comptables et prudentiels (IFRS phase 2, Solvabilité 2) et la sophistication des couvertures financières nécessaires à une bonne gestion des risques ont conduit la littérature actuarielle à explorer les algorithmes et les principes de modélisation.

Devineau et Loisel (2009) puis **Nteukam et Planchet (2010)** proposent une méthode alternative aux simulations dans les simulations afin d'accélérer le calcul des $VaR_{99,5\%}$ dans le cadre de Solvabilité 2. Remarquant que le calcul de cet indicateur ne nécessite de connaître que les scénarios les plus adverses, les auteurs proposent de regrouper les scénarios et de leur attribuer une probabilité d'occurrence en se basant sur la notion d'échantillonnage préférentiel. Cette approche est limitée à l'évaluation de quantile et semble toutefois difficile à mettre en œuvre lorsqu'il existe de nombreuses sources de risque modélisées par des processus stochastiques, ce qui est notre cas. Elle fait par ailleurs apparaître plusieurs erreurs dans les résultats : le choix du critère de regroupement va conditionner la manière de définir les paquets de trajectoires et des fluctuations d'échantillonnage vont subsister à l'intérieur de chaque paquet (dépendant du nombre de scénarios pris en compte dans chaque paquet). Le modèle doit donc analyser les impacts de ces erreurs sur les résultats obtenus.

Une autre approche consiste à rechercher des portefeuilles répliquants, c'est-à-dire construire un portefeuille d'actifs dont les payoffs ou les sensibilités coïncident avec ceux de la garantie étudiée². Cette approche est semblable à la couverture statique des garanties. Les actifs utilisés doivent être simples et liquides, de manière à pouvoir disposer de formules fermées d'évaluation ainsi que des informations accessibles sur le marché. Il est usuel d'utiliser des options, des zéro coupons et des indices actions dans ces portefeuilles. Le choix de la métrique posera problème (valeur de marché, sensibilité, valeur future des cash-flows, identification des cash-flows...) ainsi que la stabilité de la composition du portefeuille. Par ailleurs, pour les garanties GMWB / GLWB présentant des payoffs complexes et de très longue durée, il semble difficile de construire de tels portefeuilles.

Chercher la manière d'appliquer et d'améliorer ces méthodes sur le cas concret de l'étude des garanties GMWB / GLWB pourrait constituer une piste de développement ultérieur.

¹ L'objectif de cette méthode réside dans la réduction du nombre de polices dont on va projeter les cash-flows. Une construction habile de "model points" permet d'obtenir les mêmes résultats qu'en projetant l'ensemble du portefeuille et donc de diminuer le temps de calcul nécessaire. La méthode de construction de ces "model points" n'est pas systématique et il est nécessaire de définir les variables pertinentes pour la segmentation. Voir la conclusion du chapitre 9

² Les avantages d'un tel portefeuille sont évidents : ALM facilité, description des risques du portefeuille accessible à tout moment, calcul rapide de la MCEV ou des provisions, prise en compte aisée des chocs dans le cadre des calculs de SCR...

Conclusion

Le mémoire fournit une première référence publique utile à l'ensemble des mémoires d'actuariat ou des travaux à venir qui porteront sur les garanties de revenus.

Dans un premier temps, nous avons établi un état des lieux des travaux réalisés sur les garanties de revenus temporaires ou viagers et avons regroupé l'ensemble de ces résultats dans un cadre unifié de modélisation. Le mémoire comporte par ailleurs des chapitres traitant de l'étude de marché, de la cartographie des risques ainsi qu'une analyse de la manière dont ces produits pourraient s'intégrer dans le cadre réglementaire.

En l'absence de formules fermées exploitables d'un point de vue opérationnel, nous avons développé un modèle de Monte Carlo afin de déterminer le coût et les indicateurs de risque de ces garanties. La modélisation retenue permet de tester la sensibilité des résultats à l'ensemble des paramètres financiers et actuariels ainsi qu'aux modèles d'actifs utilisés. Une technique pour déterminer la prime commerciale est proposée et des surfaces de tarif en fonction de l'âge et de la durée figurent dans le mémoire. Le modèle présenté ici est d'une portée plus générale que ceux développés dans la littérature. En effet, ceux-ci s'intéressent uniquement à la détermination du tarif en prime pure de la garantie, en supposant que les frais au titre de la garantie sont prélevés en une seule fois à la souscription.

Nous constatons que les garanties sont particulièrement sensibles à une variation des valeurs de marché des taux d'intérêts et de la volatilité. Le coût des garanties GLWB est par ailleurs dépendant des lois de décès et de rachats utilisées car celles-ci modifient la maturité effective des engagements de long terme. La forte sensibilité aux paramètres financiers et l'aléa existant sur le notionnel imposent à l'assureur de mettre en place un mécanisme de transfert de risque et de provisionner prudemment les engagements liés à ces garanties. Ces aspects sont indissociables de la démarche de tarification dans un souci de bonne gestion du risque. Ils permettent de mesurer la possibilité de mettre réellement en œuvre un programme de couverture qui permettrait de se prémunir efficacement des cas les plus adverses et de mesurer la robustesse de la tarification en prime commerciale proposée.

Nous avons proposé dans les derniers chapitres du mémoire des éléments de réflexion sur la manière de couvrir, de provisionner et d'estimer la marge de solvabilité de ces garanties. Nous n'avons pas développé les applications numériques correspondantes qui nécessiteraient de recourir à des simulations stochastiques risque neutre dans les projections stochastiques centrales effectuées sous probabilité historique. La modélisation informatique de ces problématiques constitue un véritable sujet opérationnel pour les assureurs qui souhaiteraient commercialiser de telles garanties dans la mesure où un suivi performant des risques nécessite de disposer de reporting réalisés régulièrement.

De nombreuses questions restent par ailleurs à explorer sur un sujet aussi vaste et complexe. Le mémoire en identifie certaines qui semblent devoir être creusées avant de lancer une offre sur le marché. En effet, l'asymétrie des engagements de long terme pris par l'assureur nécessite d'améliorer la modélisation de l'actif afin de l'adapter aux enjeux de la projection financière sur le long terme (corrélation entre actifs, prise en compte des sauts et de la volatilité stochastique pour les actions, utilisation d'autres modèles de taux...).

Bibliographie

Abbey T. et Henshall C. (2007), Variable Annuities, *Presented to the Staple Inn Actuarial Society*, disponible sur <http://www.sias.org.uk/data/papers/VariableAnnuities/DownloadPDF>

ACP (mai 2008), Solvabilité 2 – QIS 4 - Orientations Nationales Complémentaires aux spécifications techniques (août 2010 pour les ONC du QIS 5)

Axa (2008), Managing Variable Annuity risks, disponible à l'adresse suivante:
http://www.axa.com/lib/axa/uploads/presentationinvestisseurs/2008/20081125_AXA_Autumn_conference_VAb_Workshop.pdf

Bacinello A. R. (2003a), Fair Valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option. *Journal of Risk and Insurance* 70 (3), pp. 461-487

Bacinello A. R. (2003b). Pricing guaranteed life insurance participating policies with annual premiums and surrender option. *North American Actuarial Journal* 7 (3), pp. 1-17

Bacinello A. R., Biffis E. et Millosovich P. (2007), Regression-based algorithms for life insurance contracts with surrender guarantees, <http://ssrn.com/abstract=1028325>

Ballotta L. et Haberman S. (2003), Valuation of Guaranteed Annuity Conversion Options, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 33, pp. 87 – 108

Bauer D., Kling A. et Russ J. (2009). A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities, *Présentation lors du colloque AFIR*.

Bayraktar E. et Young V. (2007), Minimizing the lifetime shortfall or shortfall at death, *working paper*

Bélangier A. C. (2008), Numerical methods for long-term impulse control problems in finance, *Thèse, Université de Waterloo, Canada*

Bélangier A. C., Forsyth P. A. et Labahn G. (2009), Valuing the GMDB Clause with Partial Withdrawals, *Applied Mathematical Finance*, Vol. 16, pp. 451 – 496

Benhamou E. et Gauthier P. (2009), Impact of stochastic interest rates and stochastic volatility on variable annuities, *working paper*, <http://ssrn.com/abstract=1483736>

Bernard C. et Lemieux Ch. (2008), Fast simulation of equity-linked life insurance contracts with a surrender option, *Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*

Biffis E. et Millosovich P. (2006), The fair value of GAO, *Scandinavian actuarial journal*, vol. 1, pp. 23 – 41

Blamont D. et Sagoo P. (2009). Pricing and hedging of variable annuities. *Life and Pensions*, février 2009

Brennan M. et Schwartz E. (1976), The pricing of equity-linked insurance policies with an asset value guarantee, *Journal of financial economics*, vol. 3 (3), pp. 195 – 213

Boyle P. et Schwartz E. (1977), Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts, *Journal of risk and insurance*, vol. 44 (4), pp. 639 – 680

Boyle P. P. & Hardy M. R. (2003), Guaranteed Annuity Options, *ASTIN Bulletin*, Vol. 33 (2), pp. 125 – 152

Boyle P. et Potapchik A. (2008), Prices and sensitivities of Asian options: a survey, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 42, pp. 189 – 211

Caja A., Carvas P. et Rousseau V. (2009). Intégrer des informations exogènes dans un modèle d'actifs. *Rapport technique ISFA, sous la direction de F. Planchet et M. Juillard.*

Carr P. and Wu L. (2004), Static hedging of standard options. *Technical report, disponible sur <http://ssrn.com/abstract=585451>*

Chen Z. et Forsyth P. A. (2008). A numerical scheme for the impulse control formulation for pricing variable annuities with a guaranteed minimum withdrawal benefit. *Numerische Mathematik*, Vol. 109, pp. 535-569.

Chen Z., Forsyth P. A. et Vetzal K. (2008). The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 43 (1), pp. 165-173

Chu C. C. et Kwok Y. K. (2005), Valuation of guaranteed annuity options in affine term structure models, <http://www.ssrn.com/abstract=644224>

Coleman T. F., Li Y. et Patron M-C (2006a), Hedging guarantees in VA under both equity and interest rate risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 38 (2), pp. 215-228

Coleman T. F., Kim Y. H., Li Y. et Patron M-C (2006b), Robustly hedging variable annuities with guarantees under jump and volatility risks. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 74 (2), pp. 347 – 376

Costabile M., Massabo I., Russo E. (2008), A binomial model for valuing equity-linked policies embedding surrender options, *Insurance, Mathematics and Economics*, Vol. 42 (3), pp. 873 – 886

Dekimpe G. (2009), Variable annuities : transfert d'une partie du risque de longévité au client, *Université Catholique de Louvain, Mémoire d'actuariat*

Devineau L. et Loisel S. (2009). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité 2. *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 9 (17), janvier – juillet 2009, pp. 188 – 221.

Dai M., Kwok Y. K. et Zong J. (2008, Octobre). Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities. *Mathematical Finance*, 18 (4), pp. 595-611.

- Dai M., Li P. et Zhang J. E. (2009), A lattice algorithm for pricing moving average barrier options, *working paper*
- Dufresne D. (2007), Stochastic life annuities, *North American Actuarial Journal*, vol. 11 (1), pp. 136 – 157
- El-Ayoubi M. (2009), Implémentation du modèle d'Heston, *mémoire ISFA*
- Favre-Bonvin Th. (2010), Gestion des risques de produit variable annuities, *Séminaire Sépia, Mai 2010*
- Föllmer H. et Leukert P. (1999), Quantile hedging, *Financial and Stochastics*, Vol. 3, pp. 251 – 273
- Föllmer H. et Leukert P. (2000), Efficient hedging : cost versus shortfall risk, *Financial and Stochastics*, Vol. 4, pp. 117 – 146
- Gabriel F. et Sourlas Ph. (2008), Couverture d'options en présence de sauts, *Bulletin français d'actuariat*, vol. 8, n°16, juillet – décembre 2008, pp. 14 – 60
- Gaillardetz P. et Lin X. S. (2006), Valuation of equity-linked insurance and annuity products with binomial models, *North American Actuarial Journal*, vol. 10 (4), pp. 117 – 144
- Gatzert N. (2009), Implicit Options in Life Insurance: a review, *Working Papers Series in Finance, Paper No. 38, University of Saint Gallen*
- Gatzert N., Hoermann G. et Schmeiser H. (2009), The impact of the secondary market on life insurer's surrender profits, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 76 (4), pp. 887 – 908
- Gerber H. U. & Shiu E. S. W. (2003), Pricing lookback options and dynamic guarantees, *North American Actuarial Journal*, vol 7 (1), pp. 48 – 67 (discussions pp. 124 – 127)
- Geman H. et Yor M. (1993), Bessel Processes, Asian options and perpetuities, *Mathematical Finance*, Vol. 3, pp. 349 – 375
- Gilbert Ch. L., Ravindran K. et Reitano R. R. (2007), Results of the survey on variable annuity hedging programs for life insurance companies, *Society of Actuaries*
- Grasselli M. R. et Silla S. (2009), A policyholder's utility indifference valuation model for the Guaranteed Annuity Option, *A paraître dans Mathematical Methods in Economics and Finance*
- Grosen A. et Jorgensen P. L. (2000), Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 26, pp. 37 – 57
- Gupta S. D. (2007), Estimating the cost of variable annuity guaranteed minimum withdrawal benefit, *Belgian Actuarial Journal*, vol. 7, n°1

Hardy M. R. (2003). Investment guarantees: modeling and risk management for equity-linked life insurance. *John Wiley & Son*.

Healy P. et O'Malley P. (2008), The Development of GMXB products, *disponible sur <http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/document/pdf/OmalleyHealy.pdf>*

Hobbs C., Krishnaraj B., Liu Y. et Musselman J. (2009), Calculation of variable annuity market sensitivities using a pathwise methodology, *Life and Pensions*, septembre, pp. 40 – 44

Holler H. et Finkelstein G. (2009). Variable annuity risk management and hedging effectiveness. *Présentation lors du colloque AFIR*.

Holz D., Kling A. et Russ J. (2007). GMWB for Life: an analysis of lifelong withdrawal guarantees, *working paper*

Huang H., Milevsky M. A. et Wang J. (2004), Ruined moments in your life: how good are the approximations? *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 34 (3), pp. 421 – 447

Huang H. et Forsyth P. A. (2009). Analysis of a penalty method for pricing a guaranteed minimum withdrawal benefit, *working paper*

Huang H., Milevsky M. A. et Salisbury T. S. (2009), Complete market valuation of the Ruin-Contingent Life Annuity (RCLA), *working paper*, <http://ssrn.com/abstract=1335454>

Huynh H. T., Lai V. S. et Soumaré I. (2006), Simulations stochastiques et applications en finance avec programme Matlab, chapitre 6, *Editions Economica*

Jimenez M. (2010), Problématique d'évaluation des contrats de type GMWB, *Séminaire Sepia*, 18 mai 2010

Johannesen J. M. et Moller Th. (2009), Dynamic programming and efficient hedging for unit-linked insurance contracts, *working paper*

Karatzas I. et Shreve S. E. (1998), Brownian motion and stochastic calculus, *Springer Verlag*

Kijima M. et Wong T. (2006), Pricing of ratchet equity-indexed annuities under stochastic interest rates, *working paper*

Kling A., Ruez F. et Russ J. (2009). The impact of stochastic volatility on pricing, hedging and hedge efficiency of variable annuities guarantees, *working paper*

Ledlie M-C., Corry D. P., Finkelstein G. S., Ritchie A. J.; Su K. et Wilson D. C. E. (2008), Variable annuities, *Institute of Actuaries*

Lee H. (2003). Pricing equity-indexed annuities with path-dependent options. *Insurance: Mathematics and Economics* 33 (3), pp. 677-690

Lin X. S. et Tan K. S. (2003), Valuation of equity-indexed annuities under stochastic interest rate. *North American Actuarial Journal* 7 (3), pp. 72-91

- Lin X. S., Tan K. S. et Yang H. (2009), Pricing annuity guarantees under a regime-switching model, *North American Actuarial Journal*, Vol. 13 (3), pp. 316 – 338
- Liu Y. (2010), Pricing and hedging the guaranteed Minimum Withdrawal Benefits in Variable Annuities, *Thesis*
- Lord R. (2006), Partially exact and bounded approximations for arithmetic Asian options, *Journal of Computational Finance*, Vol. 10 (2), <http://myweb.tiscali.co.uk/rogerlord/pebasian.pdf>
- Marshall C., Hardy M. et Saunders D. (2010), Valuation of a Guaranteed Minimum Income Benefit, *North American Actuarial Journal*, vol. 14 (1), pp. 38 – 58
- Matterson W., Sun P. H. et Ino R. (2008), Impact of recent market turbulence on hedging programs for equity-linked guarantees, *Milliman*, mai 2008
- Merlus S. et Pequeux O. (2000), Les garanties plancher des contrats d'assurance-vie en unités de compte : tarification et couverture, *mémoire d'actuaire ENSAE*
- Moller T. (1998). Risk minimizing hedging strategies for equity-linked life insurance contracts. *ASTIN Bulletin* 28 (1), pp. 17-47
- Moller T. (2001), Hedging Equity-Linked life insurance contracts, *North American Actuarial Journal*, Vol. 5 (2), pp. 79 – 95
- Milevsky M. A. et Salisbury T. S (2006), Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 38, pp. 21 – 36
- Moire Th. (2008), Engagements en cas de vie sur supports à capital variable et contrat diversifié, *Mémoire actuariat CNAM*
- Nteukam O. T., Planchet F. et Therond P-E. (2009), Optimal strategies of hedging portfolio of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantees, *working paper*
- Nteukam O. T. et Planchet F. (2010), Evaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif et mesure de l'erreur lié à l'agrégation, *working paper*
- Pellser A. (2003), Pricing and hedging guaranteed annuity options via static option replication, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 33 (2), pp. 283 – 296
- Planchet F. et Jacquemin J. (2003), L'utilisation de méthodes de simulation en assurance, partie I : générer des nombres aléatoires, *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 6 (11), juin-décembre 2003, pp. 3-35
- Peng J., Leung K. S. et Kwok Y. K. (2009). Pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under stochastic interest rate. *A paraître dans Quantitative Finance* .
- Pernoud L. et Favre-Bonvin Th. (2003), Maturity guarantees embedded in unit-linked contracts, valuation and risk management. *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 6 (11), juin – décembre, pp. 167 – 183

Priault Ph. & Mrad M. (2005), Modélisation de la courbe des taux, supports de cours ENSAE, disponible sur <http://www.ensae.fr/ParisTech/FA304/FA304.htm>

Roger & Shi (1995), The value of an Asian option, *Journal of Applied Probability*, Vol. 3, pp 1077 – 1088

Roncalli Th. (1998), La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique, *thèse*.

Siu T. K. (2005), Financial Fair Valuation of participating policies with surrender options and regime switching, *Insurance: Mathematics and economics*, Vol. 37, pp. 533 – 552

Shah P. et Bertsimas D. (2008), An analysis of the guaranteed withdrawal benefits for life option, *working paper*, <http://ssrn.com/abstract=1312727>

Shen W. et Xu H. (2005), The valuation of unit-linked policies with or without surrender options, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 36 (1), pp. 79–92

Su K. (2007). A pricing analysis of guaranteed lifetime withdrawal benefits. *Faculty of Actuarial Science and Statistics, Case Business School*.

Sun F (2006), Pricing and risk management of variable annuities with multiple GMB, http://www.soa.org/library/journals/actuarial-practice-forum/2006/october/APF0610_4.pdf

Tankov P. (2008), Calibration de modèles et couverture de produits dérivés, *Université Paris VII, polycopié cours*

Thompson B. W. P. (2002), Fast narrow bounds on the value of Asian options, *working paper*, *Centre for Financial Research, University of Cambridge*

Tiong S. (2000), Valuing equity-indexed annuities, *North American Actuarial Journal*, Vol. 4 (4), pp. 149-163

Ulm E. R. (2008), Analytic solution for return of premium and roll up GMDB options under some simple mortality law, *Astin Bulletin*, Vol. 38 (2), pp. 543 – 563

Vanduffel S., Shang Z., Henrard L., Dhaene J. et Valdez E. A. (2008), Analytic bounds and approximations for annuities, *working paper*

Van Haastrecht A., Plat R. et Pelsser A. (2009), Valuation of GAO using a stochastic volatility model for equity prices, <http://www.ssrn.com/abstract=1576625>

Vecer J. (2001), A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options, *Journal of Computational Finance*, Vol. 4 (4), pp. 105 - 113

Young V. R. (2003), Equity indexed life insurance: pricing and reserving using the principle of equivalent utility, *North American Actuarial Journal*, Vol. 7 (1), pp. 68 – 86

Wang Y. (2009), Quantile hedging for guaranteed minimum death benefits, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 45 (3), pp. 449 – 458

Principales notations

Dans le mémoire, les variables possédant un exposant $+$ / $-$ désignent la valeur en t^+ / t^-

Caractéristiques du contrat	
$h_W / h_{WL}(x, t)$	Pourcentage de retrait garanti à la date t et à l'âge x (GMWB et GLWB)
α_m	Frais annuels de gestion du contrat (management fees)
α_g	Frais annuels prélevés au titre des GMWB et GLWB (+ GMDB)
$\alpha_g^{PP} / \alpha_g^{PC}$	Tarif en prime en pure (PP) / prime commerciale (PC) de la garantie étudiée
f_{acq}	Frais d'acquisition
$V^G(t, AV_t, G_t^W)$	Valeur de la garantie à la date t , connaissant AV_t et G_t^W
$V^C(t, AV_t, G_t^W)$	Valeur de l'ensemble « contrat + garantie » à la date t , connaissant AV_t et G_t^W
d / T	Durée du différé (phase d'accumulation) / Maturité des contrats (GMWB)
TMG	Taux Minimum Garanti (taux associé i_{TMG})

Paramètres de modélisation (Monte Carlo)	
AV_t	Valeur de l'épargne de l'assuré à la date t (account value)
BB_t	Base de calcul des retraits garantis à la date t (Benefit Base)
G_t	Retrait réalisé à la date t par l'assuré
G_t^W	Montant total de revenus garantis restant à effectuer à la date t
C_t^W	Prestations payées à la date t par l'assureur au titre de la GMWB / GLWB
F_t	Frais payés à la date t par l'assuré au titre de la GMWB / GLWB
τ_S	Date de déclenchement de la garantie GMWB / GLWB
G_t^D	Montant annuel garanti en cas de décès dans le cadre de la GMDB
C_t^D	Prestations payées à la date t par l'assureur au titre de la GMDB
G	Montant annuel de revenus garantis (GMWB dans le cas statique)
N	Périodicité des simulations ($1/N$ est le pas de temps de la simulation)
N_{even}	Périodicité des événements (retraits, paiement des frais...)
N_a, N_d	Périodicité des cliquets en phase d'accumulation et de distribution
$ITM(t_k)$	In the Moneyness de la garantie
CE^j / M^j	Coût économique de la garantie / Marge attendue sur la garantie

Notations actuarielles	
a_x	Prix de 1€ de rente viagère payable à terme échu pour un assuré d'âge x
${}_n a_x$	Prix de 1€ de rente payable à terme échu pendant n années
$[x]$	Partie entière de x ($[x] \leq x < [x] + 1$)
${}_k p_x$	Probabilité d'être en vie à la date t_k pour un assuré d'âge x à la souscription
${}_k \frac{1}{N} q_x / {}_k \frac{1}{N} R_x$	Probabilité de décès / rachat sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}[$

Notations financières	
Z_t^j	Browniens géométriques
$\mathbb{Q} / \mathbb{P} / \mathbb{Q}_S$	Probabilité Risque neutre / historique / utilisant S_t comme numéraire
S_t / σ_S	Valeur / volatilité de l'indice actions à la date t
B_t / σ_S	Valeur / volatilité de l'indice obligataire à la date t
r_t / σ_r	Taux court (taux sans risque) / Volatilité du taux court (modèle de Vasicek)
$P(t, T)$	Prix du taux zéro coupon de maturité T à la date t
$\Delta, \rho, \Gamma, vega$	Grecques du passif

Annexe 1 : Extraits du Code des Assurances

Les articles sont classés par ordre chronologique d'apparition dans le chapitre 4.

Article R321-1

(...) 20. Vie-Décès : toute opération comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine autre que les activités visées aux branches 22, 23 et 26. (...)

22. Assurances liées à des fonds d'investissement : toutes opérations comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine et liées à un fonds d'investissement.

Les branches mentionnées aux 20, 21 et 22 comportent la pratique d'assurances complémentaires au risque principal, notamment celles ayant pour objet des garanties en cas de décès accidentel ou d'invalidité (...).

Article L131-1

(...) En matière d'assurance sur la vie ou d'opération de capitalisation, le capital ou la rente garantis peuvent être exprimés en unités de compte constituées de valeurs mobilières ou d'actifs offrant une protection suffisante de l'épargne investie (...).

Article L132-23

Les assurances temporaires en cas de décès ainsi que les rentes viagères immédiates ou en cours de service ne peuvent comporter ni réduction ni rachat. Les assurances de capitaux de survie et de rente de survie, les assurances en cas de vie sans contre-assurance et les rentes viagères différées sans contre-assurance ne peuvent comporter de rachat. (...) Pour les autres assurances sur la vie et pour les opérations de capitalisation, l'assureur ne peut refuser la réduction ou le rachat.

Article L132-5-1

(...) La proposition ou le projet de contrat (...) indique (...) les valeurs de rachat au terme de chacune des huit premières années du contrat au moins, ainsi que, dans le même tableau, la somme des primes ou cotisations versées au terme de chacune des mêmes années. (...) La proposition ou le projet de contrat (...) indique les valeurs minimales et explique le mécanisme de calcul des valeurs de rachat ou de transfert lorsque celles-ci ne peuvent être établies (...)

Article A132-5-2

2° Sont indiquées, à titre d'exemple, des simulations de valeurs de rachat ou de transfert pour les huit premières années au moins, intégrant les frais prélevés à quelque titre que ce soit. Les simulations sont relatives à l'intégralité de la valeur de rachat ou de transfert (...)

Article A132-5

Pour les contrats mentionnés au deuxième alinéa de l'article L131-1, il est indiqué que l'entreprise d'assurance ne s'engage que sur le nombre d'unités de compte, mais pas sur leur valeur ; il est également précisé que la valeur de ces unités de compte, qui reflète la valeur d'actifs sous-jacents, n'est pas garantie mais est sujette à des fluctuations à la hausse ou à la baisse (...)

Article L331-2

Pour tout contrat d'assurance sur la vie comportant une valeur de rachat ou de transfert et pour tout contrat de capitalisation, la valeur de rachat (...) est égale à la provision mathématique dans la limite, pour la valeur de rachat des contrats d'assurance sur la vie, du montant assuré en cas de décès. La

valeur de rachat ou de transfert, lorsque n'est pas appliqué le mécanisme prévu à l'article L331-1, peut être diminuée d'une indemnité dont le montant maximal est fixé par décret.

Article L132-22-1

Pour chaque contrat d'assurance sur la vie ou de capitalisation, la valeur de rachat ou de transfert ne peut être inférieure de plus de 5 % à la valeur de rachat ou de transfert qui serait calculée sans que la provision mathématique ne tienne compte des chargements d'acquisition dudit contrat contenus dans les primes devant être versées par l'intéressé.

Article R331-5

L'indemnité mentionnée à l'article L331-2 ne peut dépasser 5 % de la PM du contrat, et doit être nulle à l'issue d'une période de dix ans à compter de la date d'effet du contrat

Article A132-1

Les tarifs pratiqués (...) doivent être établis d'après un taux au plus égal à 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur une base semestrielle sans pouvoir dépasser, au-delà de huit ans, le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus. Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, quelle que soit leur durée, ce taux ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus. (...)

Article A335-1

Les tarifs pratiqués par les entreprises d'assurance sur la vie et de capitalisation comprennent la rémunération de l'entreprise et sont établis d'après les éléments suivants :

1° Un taux d'intérêt technique fixé dans les conditions prévues à l'article A132-1.

2° Une des tables suivantes :

- a) Tables homologuées (...), établies par sexe, sur la base de populations d'assurés pour les contrats de rente viagère, et sur la base de données publiées par l'INSEE pour les autres contrats ;
- b) Tables (...) ou non par sexe par l'entreprise d'assurance et certifiées par un actuair indépendant (...)

Lorsque les tarifs sont établis d'après des tables mentionnées au a, et dès lors qu'est retenue une table unique pour tous les assurés, celle-ci correspond à la table appropriée conduisant au tarif le plus prudent.

Pour les contrats en cas de vie autres que les contrats de rente viagère, les tables mentionnées au a sont utilisées en corrigeant l'âge de l'assuré conformément aux décalages d'âge ci-annexés. Pour les contrats de rentes viagères (...), le tarif déterminé en utilisant les tables mentionnées au b ne peut être inférieur à celui qui résulterait de l'utilisation des tables appropriées mentionnées au a. (...) »

Article L331-3

Les entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent, dans les conditions fixées par arrêté du ministre de l'économie et des finances.

Article A331-3

Le montant minimal de la participation aux bénéfices techniques et financiers des entreprises pratiquant les opérations mentionnées au 1° de l'article L. 310-1 est déterminé pour les contrats individuels et collectifs de toute nature, conformément aux articles A. 331-4 à A. 331-9-1. Les articles A. 331-4 à A331-8 ne s'appliquent pas aux contrats à capital variable

Article A331-4

I-(...) Le montant minimal de la participation aux bénéfices à attribuer au titre d'un exercice est déterminé globalement à partir d'un compte de participation aux résultats.

Ce compte comporte les éléments de dépenses et de recettes concernant les catégories 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 de l'article A344-2 (...). Il est ajouté en recette du compte de participation aux résultats une part des

produits financiers. Cette part est égale à 85 % du solde d'un compte financier comportant les éléments prévus à l'article A331-6. Le compte de participation aux résultats comporte en outre les sommes correspondant aux "solde de réassurance cédée", calculées conformément aux dispositions de l'article A331-8 et, s'il y a lieu, le solde débiteur du compte de participation aux résultats de l'exercice précédent.

II.-a) Pour les contrats relevant de l'article R. 142-2 (...), le montant de la participation aux bénéfices techniques et financiers (...) est déterminé à partir d'un compte de participation aux résultats spécifique relatif aux seules opérations relevant de la comptabilité auxiliaire, à l'exclusion des éventuels engagements exprimés en unités de compte.

b) Le compte mentionné au a est établi à la date de chaque échéance, qui est au moins trimestrielle. Ce compte comporte (...)

Lorsque ce compte présente un solde débiteur, ce solde est reporté en dépenses du compte de participation aux résultats arrêté à l'échéance suivante (...)

c) L'attribution et la répartition entre les adhérents des résultats techniques et financiers du contrat s'effectuent par la revalorisation des engagements de rente ou de capital exprimés en euros ou par l'affectation à la provision de diversification, soit au moyen de la revalorisation de la valeur de la part ou soit au moyen de l'affectation de parts nouvelles aux adhérents.

Article A331-5

Le montant minimal annuel de la participation aux résultats est le solde créditeur du compte de participation aux résultats défini au I de l'article A331-4 pour les opérations mentionnées à ce même I. Le montant minimal annuel de la participation aux bénéfices est égal au montant défini à l'alinéa précédent diminué du montant des intérêts crédités aux provisions mathématiques et augmenté le cas échéant d'un montant égal à la somme, contrat par contrat, du produit de la provision mathématique ayant bénéficié pour l'exercice en cours et au titre de l'article A132-2 d'un taux garanti supérieur au taux moyen servi aux assurés pour l'exercice en cours tel qu'il est défini au III de l'article A132-3, par la différence entre le taux garanti à ladite provision mathématique et le taux moyen servi aux assurés défini précédemment.

Le présent article ne s'applique pas aux contrats mentionnés à l'article L142-1.

Article A331-6

Le compte financier mentionné à l'article A331-4 comprend, en recettes, la part du produit net des placements calculée suivant les règles mentionnées à l'article A331-7 et, en dépenses, sur autorisation de l'Autorité de contrôle prudentiel et après justifications, la part des résultats que l'entreprise a dû affecter aux fonds propres pour satisfaire au montant minimal réglementaire de la marge de solvabilité.

Article A331-7

Pour l'établissement du compte défini à l'article A331-6, la part du résultat financier à inscrire en recettes de ce compte est égale à la somme des deux éléments suivants :

1. Le produit du montant moyen au cours de l'exercice des provisions techniques brutes de cessions en réassurance des contrats (...), et diminuées de la valeur (...) des actifs transférés mentionnés au 2, par le taux de rendement des placements (...);

2. (...)

Le taux de rendement prévu au 1 du présent article est égal au rapport :

- du produit net des placements considérés, figurant à l'annexe à l'article A344-3, au compte technique de l'assurance vie, à la rubrique II.2 "Produits des placements" diminuée de la rubrique II.9 "Charges des placements", déduction faite des produits des placements mentionnés aux a, b et c du I de l'article R344-1 ;
- au montant moyen, au cours de l'exercice, des placements mentionnés dans les tableaux a à h de l'état détaillé de la même annexe, autres que ceux mentionnés aux a, b et c du I de l'article R344-1.

Article A331-8

Pour l'application de l'article A. 331-4, il est prévu, dans le compte de participation aux résultats, une rubrique intitulée "Solde de réassurance cédée". Seule est prise en compte la réassurance de risque, c'est-à-dire celle dans laquelle l'engagement des cessionnaires porte exclusivement sur tout ou partie de la différence entre le montant des capitaux en cas de décès ou d'invalidité et celui des provisions mathématiques des contrats correspondants. (...)

Article A331-9

Le montant des participations aux bénéficiaires peut être affecté directement aux provisions mathématiques ou porté, partiellement ou totalement, à la provision pour participation aux bénéficiaires mentionnée à l'article R331-3. Les sommes portées à cette dernière provision sont affectées à la provision mathématique ou versées aux souscripteurs au cours des huit exercices suivant celui au titre duquel elles ont été portées à la provision pour participation aux bénéficiaires.

Article A331-9-1

Lorsqu'une catégorie de contrats est assortie d'une clause de participation aux résultats, la participation affectée individuellement à chaque contrat réduit ou suspendu ne peut être inférieure à celle qui serait affectée à un contrat en cours de paiement de primes de la même catégorie ayant la même provision mathématique. (...)

Article R332-2

(...) Les entreprises d'assurance mentionnées à l'article L. 310-1 représentent leurs engagements réglementés mentionnés à l'article R. 331-1 par les actifs suivants :

A.-Valeurs mobilières et titres assimilés (...)

B.-Actifs immobiliers : (...)

C.-Prêts et dépôts (...)

D.-Dispositions communes : (...). Lorsqu'un instrument financier à terme a été souscrit dans les conditions définies à l'article R332-45 et qu'il est lié à un titre (...), parmi ceux mentionnés au paragraphe A (...), les primes ou soultes versées ou reçues pour la mise en place de l'instrument sont assimilées audit titre (...), dans la limite de la part restant à amortir et, pour les primes ou soultes versées au titre d'opérations de gré à gré, du montant des garanties reçues dans les conditions de l'article R332-56. (...)

Article R332-45

Une entreprise d'assurance peut utiliser un instrument financier à terme au sens de l'article L211-1 du CMF, lié à un placement (...) si sont remplies durant toute l'opération les conditions suivantes :

- a) Le placement (...) est détenu ou a été acquis à terme avec une échéance antérieure à la date d'échéance ou d'exercice de cet instrument ;
- b) Le placement (...) est identique ou assimilable au sous-jacent de cet instrument, et de montant au moins égal au montant notionnel de cet instrument ;
- c) Pour les contrats d'échange, le sous-jacent visé au b est celui que l'entreprise s'engage à échanger ;
- d) L'instrument financier à terme permet, en adéquation avec les engagements de l'entreprise, une gestion efficace et prudente (...), visant à titre principal au maintien de sa valeur ou de son rendement. »

Article R332-46

Une entreprise d'assurance peut utiliser un instrument financier à terme en anticipation de placement si sont remplies durant toute l'opération les conditions suivantes :

- a) L'entreprise détient ou recevra avant la date d'échéance ou d'exercice de cet instrument un montant de liquidités au moins égal au montant notionnel de l'instrument. Lorsque l'instrument financier à terme n'emporte pour l'entreprise aucune obligation financière exigible à la date d'exercice ou ultérieurement, les liquidités peuvent être à recevoir de façon probable ;

b) L'opération a pour objet de diminuer l'aléa des conditions de placement futur, en adéquation avec les engagements de l'entreprise (...). »

Article R332-47

Une entreprise d'assurance peut utiliser un instrument financier à terme de taux ou de devise lié à une dette financière si sont remplies durant toute l'opération les conditions suivantes :

- a) L'emprunt contracté ou la dette émise est identique ou assimilable au sous-jacent de cet instrument ;
- b) Pour les contrats d'échange, le sous-jacent visé au a est celui que l'entreprise s'engage à échanger ;
- c) L'emprunt contracté ou la dette émise par l'entreprise est de montant au moins égal au montant notionnel de cet instrument ;
- d) L'instrument financier à terme permet une gestion efficace et prudente de cette dette en adéquation avec les placements de l'entreprise.

Article R332-58

L'entreprise d'assurance utilisant des instruments financiers à terme effectue, au moins une fois par mois, des projections concernant la composition de son portefeuille de placements afin de prendre en compte l'impact sur celle-ci de ses opérations sur instruments financiers à terme. Ces projections sont établies pour les échéances d'1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, et annuellement jusqu'à l'échéance maximale des instruments financiers à terme utilisés (...).

Article R332-53

Une entreprise d'assurance ne peut souscrire d'instruments financiers à terme que :

1. Sur les marchés reconnus au sens du dernier alinéa du A de l'article R332-2 ;
2. De gré à gré, auprès :
 - a) Des établissements de crédit et entreprises d'investissement ayant leur siège social sur le territoire de l'un des Etats membres de la Communauté européenne (...);
 - b) Des organismes mentionnés à l'article L518-1 du code monétaire et financier ;
 - c) Des établissements de crédit ou entreprises d'investissement de pays tiers assujettis à des règles prudentielles considérées comme équivalentes par l'Autorité de contrôle prudentiel ;
 - d) D'entreprises d'assurance, de réassurance ou d'autres organismes, sur accord de l'Autorité de contrôle prudentiel.

Article R332-20-2

La valeur de réalisation des instruments financiers à terme mentionnés aux articles R332-45 à R332-48 est :

- a) Pour les instruments financiers à terme échangés sur des marchés reconnus au sens du dernier alinéa du A de l'article R332-2, la valeur de la dernière cotation ;
- b) Pour les instruments échangés de gré à gré, le coût de remplacement, évalué par au moins 2 organismes (...)

Article R332-1

1. Les engagements réglementés mentionnés à l'article R331-1 doivent, à toute époque, être représentés par des actifs équivalents. (...)
4. Les engagements pris par des entreprises mentionnées à l'article L310-1 et résultant d'opérations réalisées en libre prestation de services au sens des articles L351-1 et L353-1 sont soumis aux règles du pays de situation du risque ou de l'engagement lorsque ce dernier subordonne l'exercice de ces opérations à agrément. »

Article R334-11

III.-Sur demande et justification de l'entreprise et avec l'accord de l'Autorité de contrôle, la marge de solvabilité peut également être constituée par : (...)

3. Les plus-values latentes sur les instruments financiers à terme mentionnés aux articles R332-45 et R332-46, dès lors que les opérations correspondantes sont négociées sur un marché reconnu au sens du dernier alinéa du A de l'article R332-2 ou réalisées de gré à gré dans la mesure où elles sont garanties dans les conditions prévues à l'article R332-56 (...)

Article L331-1

Les provisions mathématiques (...) sont calculées en tenant compte, dans la détermination de l'engagement de l'assuré ou du souscripteur, de la partie des primes devant être versée (...) et représentative des frais d'acquisition du contrat, lorsque ces frais ont été portés en charge déductible par l'entreprise avant la fin de l'exercice à la clôture duquel la provision est constituée. Toutefois, (...) conformément à l'article L132-22-1, la provision mathématique ne peut être inférieure de plus de 5 % à la provision mathématique qui serait calculée sans tenir compte de la partie des primes mentionnée à l'alinéa précédent. (...).

Article R331-1

Les engagements réglementés dont les entreprises mentionnées à l'article L310-1 (Vie/IARD) ou au 1° du III de l'article L310-1-1 (Réassureurs) doivent, à toute époque, être en mesure de justifier l'évaluation sont les suivants : 1° Les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis-à-vis des assurés, des entreprises réassurées et bénéficiaires de contrats ; (...). Les provisions techniques mentionnées au 1° (...) sont calculées, sans déduction des réassurances cédées à des entreprises agréées ou non, dans les conditions déterminées par décret en Conseil d'Etat. (...).

Article R331-3

Les provisions techniques correspondant aux opérations d'assurance sur la vie, d'assurance nuptialité-natalité, et aux opérations de capitalisation sont les suivantes :

- 1° Provision mathématique : différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés (...)
- 2° Provision pour participation aux bénéfices : PB attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits ;
- 3° Réserve de capitalisation : réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu ;
- 4° Provision de gestion : couvrir des charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs ;
- 5° Provision pour aléas financiers : destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif ;
- 6° Provision pour risque d'exigibilité : provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R332-20. La provision à constituer est calculée dans les conditions définies au I de l'article R331-5-1 ;
- 7° Provision pour frais d'acquisition reportés : provision destinée à couvrir les charges résultant du report des frais d'acquisition constaté en application de l'article R332-35 ;
- 8° Provision pour égalisation : provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurance de groupe contre le risque décès ;
- 9° Provision de diversification : (...)

Un engagement ne peut être provisionné qu'au titre d'une seule des catégories mentionnées au présent article.

Article R331-6

Les provisions techniques correspondant aux autres opérations d'assurance sont les suivantes :

- 1° Provision mathématique des rentes : valeur actuelle des engagements (...) en ce qui concerne les rentes (...)
- 2° Provision pour primes non acquises : provision (...) destinée à constater (...) la part des primes émises et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date de l'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime (...)

2° bis Provision pour risques en cours : provision (...) destinée à couvrir (...) la charge des sinistres et des frais afférents aux contrats, pour la période s'écoulant entre la date de l'inventaire et la date de la première échéance de prime pouvant donner lieu à révision de la prime par l'assureur (...) pour la part de ce coût qui n'est pas couverte par la provision pour primes non acquises ;

3° Réserve de capitalisation : réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu ;

4° Provision pour sinistres à payer : valeur estimative des dépenses (...) nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés (...)

5° Provision pour risques croissants : (...)

6° Provision pour égalisation : (...)

7° Provision pour risque d'exigibilité : provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value (...) des actifs mentionnés à l'article R332-20. La provision à constituer est calculée dans les conditions définies au I de l'article R331-5-1.

Article A331-1-1

1° Les provisions mathématiques des contrats (...) d'assurance sur la vie, doivent être calculées d'après des taux d'intérêt au plus égaux à ceux retenus pour l'établissement du tarif et, s'ils comportent un élément viager et sous réserve du premier alinéa de l'article A331-1-2, d'après les tables de mortalité appropriées mentionnées à l'article A335-1 en vigueur à l'époque de l'application du tarif ; (...)

3° Les entreprises peuvent calculer les provisions mathématiques de tous leurs contrats en cours, en appliquant lors de tous les inventaires annuels ultérieurs les taux mentionnés au premier alinéa et les tables de mortalité appropriées en vigueur à la date de l'inventaire. (...)

Article A132-1

Les tarifs (...) doivent être établis d'après un taux au plus égal à 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur une base semestrielle sans pouvoir dépasser, au-delà de huit ans, le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus.

Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, quelle que soit leur durée, ce taux ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus. (...)

Le taux moyen des emprunts d'Etat à retenir est le plus élevé des deux taux suivants : taux à l'émission et taux de rendement sur le marché secondaire. (...)

Article R334-13

Pour les entreprises mentionnées au 1° de l'article L310-2, l'exigence minimale de marge de solvabilité est déterminée, en fonction des branches exercées, en application des dispositions suivantes :

a) Pour les branches 20 et 21, à l'exception des assurances complémentaires, l'exigence minimale de marge est calculée par rapport aux provisions mentionnées aux 1° et 4° de l'article R331-3 et aux capitaux sous risque. Ce montant est égal à la somme des deux résultats suivants :

Le premier résultat est obtenu en multipliant un nombre représentant 4 % de la somme des provisions mentionnées aux 1° et 4° de l'article R331-3, (...) sans déduction des cessions en réassurance, par le rapport existant, pour le dernier exercice, entre le montant des provisions mathématiques après cessions en réassurance et le montant des provisions mathématiques brut de réassurance, sans que ce rapport puisse être inférieur à 85%.

Le second résultat est obtenu en multipliant un nombre représentant 0,3 % des capitaux sous risque par le rapport existant, pour le dernier exercice, entre le montant des capitaux sous risque après cession et rétrocession en réassurance et le montant des capitaux sous risque brut de réassurance sans que ce rapport puisse être inférieur à 50%.

(...) Le capital sous risque est égal au risque décès, déduction faite de la provision mathématique du risque principal ; (...)

e) Pour la branche 22, à l'exception des assurances complémentaires, (...) l'exigence minimale de marge est égale :

1. Lorsque l'entreprise assume un risque de placement, à un nombre représentant 4% des provisions techniques relatives aux opérations d'assurances directes (...) multiplié par le rapport mentionné au premier résultat défini au a ;
2. Lorsque l'entreprise n'assume pas de risque de placement, à un nombre représentant 1% des provisions techniques des contrats multiplié par le rapport mentionné au premier résultat du a, à la condition que le montant destiné à couvrir les frais de gestion prévus dans ces contrats soit fixé pour une période supérieure à cinq années ;
3. Lorsque l'entreprise assume un risque de mortalité, le montant de l'exigence minimale de marge est obtenu en ajoutant à l'un ou l'autre des résultats déterminés par application des dispositions des deux alinéas précédents un nombre représentant 0,3% des capitaux sous risque, multiplié par le rapport existant, pour le dernier exercice, entre le montant des capitaux sous risque après cessions et rétrocessions en réassurance et le montant des capitaux sous risque brut de réassurance, sans que ce rapport puisse être inférieur à 50% ; (...) »

Article R331-5

L'indemnité mentionnée à l'article L331-2 ne peut dépasser 5% de la provision mathématique du contrat, et doit être nulle à l'issue d'une période de dix ans à compter de la date d'effet du contrat.

Pour l'application du présent article, la provision mathématique ne tient pas compte des éventuelles garanties de fidélité non exigibles par l'assuré au moment du rachat. Ces garanties doivent être explicitement décrites dans le contrat et clairement distinguées de la garantie qui en est l'objet principal.

Annexe 2 : Code Matlab

```

%-----
%
%           Modélisation des garanties GMWB / GLWB
%   Script central (à faire tourner une fois les scénarios d'actifs simulés)
%
%-----

clear all;
clc;

%-----
N_even=1;           %1/N_even = Pas de temps entre 2 retrait
N_scenario=10000;   %Nombre de simulations
T=15;              %Echéance du produit + durée du différé (T=200 si GLWB)
d=0;               %Durée du différé en années (peut être nulle)
N_model=12;        %1/N_model = Pas de temps des scénarios économiques
rebalancement='N'; %Rebalancement annuel de l'épargne ('Y') ou non

%Chargement des scénarios économiques
load('actif_B&S_Nscenario10000_r0.03_volaction0.25_nbpaction0.6_corr-
0.15.mat');
%load('actif_lognormal+Vasicek_Nscenario10000_volaction0.25_nbpaction0.6
_corr-0.15.mat');

s0=100;            %Valeur initiale du sous-jacent
s0_stress=100;    %Stress de l'épargne initiale
f_acq=0;          %frais d'acquisition (on laisse les frais à 0)
alpha_m=0.96;     %frais de gestion annuels
frais_garantie=0.50:0.01:0.55;
%frais_garantie=0.56;      %Valeur des frais de la garantie à tester

x=50;             %age de l'assuré
sexe='M';         %sexe de l'assuré (M ou F) - P si absence de décès

garantie='GMWB';  %Type de garantie à tester ('GMWB' ou 'GLWB')
taux_retrait_GLWB=0.04; %Taux de retrait garanti si GLWB
taux_retrait_garanti='F'; %'P' si progressif (fonction de l'age du
%départ à la retraite) ou 'flat'
assiette_frais='E'; %'P' si prime initiale et 'E' si épargne

gar_deces='N';    %Garantie en cas de décès ('Y' ou 'N')

gar_TMG_accumulation='N'; %Garantie TMG en phase d'accu ('Y' ou 'N')
taux_min=0.025;   %Taux annuel garanti (garantie TMG)

gar_cliquet_accumulation='N'; %Cliquet en phase d'accu ('Y' ou 'N')
N_cliquet_a=2;    %1/N_cliquet_a = Pas de temps entre 2 cliquet

gar_cliquet_distribution='N'; %Cliquet en phase de distrib ('Y' ou 'N')
N_cliquet_d=1;    %1/N_cliquet_d = Pas de temps entre 2 cliquet

taux_rachat_stat=0.05; %taux de rachat statique
rachat_dyn='N';      %Si rachat_dyn='Y', on retrouve le cas statique

```

```

I1=0.7;           %Paramètre de la loi de rachat dynamique
I2=0.9;           %Paramètre de la loi de rachat dynamique
I3=1.1;           %Paramètre de la loi de rachat dynamique
I4=1.3;           %Paramètre de la loi de rachat dynamique
Rmin=-0.03;      %Paramètre de la loi de rachat dynamique
Rmax=0.15;       %Paramètre de la loi de rachat dynamique

%-----
tic
if ne(rachat_dyn,'Y')
    clear I1 I2 I3 I4 Rmin Rmax;
end

if rebalancement=='Y'
    rendement=rendement_rebal;
else
    rendement=rendement_non_rebal;
end

if N_even>N_model
    disp('N_even>N_model - Simulation non valide');
end
if strcmp(garantie,'GLWB') && lt(x+d,50)
    disp('GLWB et début de la retraite avant 50 ans - Simulation non
valide');
end

% Définition du pas de temps
dt=1/N_model;
compteur=size(frais_garantie,2);

% Construction des l(x+t_k)
if sexe=='M'
    load('table_M.mat');           %Chargement de TGH05
    temp_mort=table_M;
    clear table_M;
else
    load('table_F.mat');           %Chargement de TGF05
    temp_mort=table_F;
    clear table_F;
end
table_mortalite=zeros(size(temp_mort,1),1);

annee=2010-x;
temp=annee-1900+2;
temp_mort=temp_mort(:,temp);
clear temp annee;
temp_mort(1,:)=[];
temp_mort(size(table_mortalite,1),:)=zeros(1,size(temp_mort,2));
%la lère ligne de temp_mort désigne l'age 0
table_mortalite(:,1)=temp_mort;
clear temp_mort;
omega=size(table_mortalite,1)-1;           %Fin de la table de mortalité
table_mortalite=[(0:1:omega)' table_mortalite];
table_mortalite(1:x,:)=[];
table_mortalite(:,1)=(0:1:(size(table_mortalite,1)-1))';
table_mortalite=table_mortalite';
clear omega echelle_model;

```

```

if sexe=='P'
    table_mortalite=ones(size(table_mortalite,1),size(table_mortalite,2));
end

T_fin_viager=(size(table_mortalite,2)-1);
T=min(T,T_fin_viager);
clear T_fin_viager sexe;

echelle_model=dt:dt:T;
% Réduction de la date de fin de projection des scénarios si nécessaire
rendement=rendement(1:N_scenario,1:N_model*T);
actu=actu(1:N_scenario,1:N_model*T);

% Définition des échelles des garanties de revalorisation
if d==0
    gar_TMG_accumulation='N';
    gar_cliquet_accumulation='N';
end

echelle_TMG=zeros(1,N_model*T);
if (ne(d,0) && gar_TMG_accumulation=='Y')
    echelle_TMG(1,d*N_model)=1;
end
clear gar_TMG_accumulation;

indic_cliquet_d=zeros(1,(T-d)*N_model);
if gar_cliquet_distribution=='Y'
    temp=round(1000*N_cliquet_d .* echelle_model)/1000;
    temp2=temp-floor(temp);
    indic_cliquet_d=temp2(1,1:(T-d)*N_model);
    clear temp temp2;
    for i=1:size(indic_cliquet_d,2)
        if indic_cliquet_d(1,i)==0
            indic_cliquet_d(1,i)=1;
        else
            indic_cliquet_d(1,i)=0;
        end
    end
    clear i;
end
clear N_cliquet_d gar_cliquet_distribution;

if ne(d,0)
    indic_cliquet_a=zeros(1,d*N_model);
    if gar_cliquet_accumulation=='Y'
        temp=round(1000*N_cliquet_a .* echelle_model)/1000;
        temp2=temp-floor(temp);
        indic_cliquet_a=temp2(1,1:d*N_model);
        clear temp temp2;
        for i=1:size(indic_cliquet_a,2)
            if indic_cliquet_a(1,i)==0
                indic_cliquet_a(1,i)=1;
            else
                indic_cliquet_a(1,i)=0;
            end
        end
        clear i;
    end
end
clear N_cliquet_a gar_cliquet_accumulation;

```

```

if ne(d,0)
    echelle_cliquet=[indic_cliquet_a indic_cliquet_d];
else
    echelle_cliquet=indic_cliquet_d;
end
clear indic_cliquet_a indic_cliquet_d;

temp=round(1000*N_even .* echelle_model)/1000;
echelle_even=temp-floor(temp);
for i=1:(N_model*T)
    if echelle_even(1,i)==0
        echelle_even(1,i)=1;
    else
        echelle_even(1,i)=0;
    end
end
clear temp i;

temp=zeros(N_scenario,N_model*T);
temp2=zeros(N_scenario,N_model*T);
temp3=zeros(N_scenario,N_model*T);
for i=1:N_scenario
    temp(i,:)=echelle_even(1,:);
    temp2(i,:)=echelle_TMG(1,:);
    temp3(i,:)=echelle_cliquet(1,:);
end
echelle_even=temp;
echelle_TMG=temp2;
echelle_cliquet=temp3;
clear i temp temp1 temp2;

echelle_tempo(1,:)=dt:dt:T;

ref=table_mortalite(2,1);
table_mortalite(:,1)=[];
table_mortalite(1,:)=[];
temp2=[ref table_mortalite];
temp2(:,T+1)=[];
temp3=(table_mortalite-temp2)/N_model;
clear temp temp2;

nb_vie(1,:)=echelle_tempo;
for i=1:T
    for j=1:N_model
        nb_vie(2,N_model*(i-1)+j)=temp3(1,i);
    end
end
clear i j;
temp_decès=-nb_vie(2,:);
clear temp3;

nb_vie(1,:)=[];
nb_vie(1,1)=ref+nb_vie(1,1);
for j=2:N_model*T
    nb_vie(1,j)=nb_vie(1,j-1)+nb_vie(1,j);
end
clear j;

nb_vie(1,:)=nb_vie(1,:)/ref;

```

```

nb_deces=temp_deces/ref;
%La case k désigne les décès entre (k-1)/N et k/N
clear temp_deces ref;

% Définition de la matrice de tarif à tester
alpha_m=alpha_m/(100*N_even);           %frais de gestion

resultat=zeros(13,size(frais_garantie,2));

for l=1:size(frais_garantie,2)

    % Définition des matrices
    av=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Epargne AV (Account Value)
    bb=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Benefit Base
    fm=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Frais de gestion
    fgaz=zeros(N_scenarior,N_model*T);  %Frais au titre des garantis
    tr=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Taux de retrait garanti
    g=zeros(N_scenarior,N_model*T);     %Retrait réel
    gw=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Montgaranti restant à retirer
    cw=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Prestations au titre de la GMWB
    gd=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Montant garanti en cas de décès
    cd=zeros(N_scenarior,N_model*T);    %Prestations en cas de décès
    ITM=zeros(N_scenarior,N_model*T);

    alpha_g=frais_garantie(1,1)/(100*N_even); %frais de garantie

    av0=s0_stress*(1-f_acq).*ones(N_scenarior,1);
    bb0=s0*(1-f_acq).*ones(N_scenarior,1);

    % Définition des taux de retrait garanti progressifs en fonction
    % de l'age de départ à la retraite
    taux_retrait_GLWB_p=50:75;
    %Taux central pour x+d=65 ans
    taux_retrait_GLWB_p(2,16)=taux_retrait_GLWB;
    for i=1:15
        taux_retrait_GLWB_p(2,i)=taux_retrait_GLWB-0.001*(16-i);
    end
    clear i;

    for i=1:10
        taux_retrait_GLWB_p(2,i+16)=taux_retrait_GLWB+0.001*i;
    end
    clear i;

    if ne(d,0)
        x_r=x+d;
    else
        x_r=x;
    end

    if strcmp(garantie,'GLWB')
        taux_retrait_GLWB_p=taux_retrait_GLWB_p(:,x_r-49);
        taux_retrait_GLWB_p(1,:)=[];
    end

    if strcmp(garantie,'GMWB')
        taux_retrait=(1/(T-d))/N_even;
    else

```

```

    if taux_retrait_garanti=='F'
        taux_retrait=taux_retrait_GLWB/N_even;
    else
        taux_retrait=taux_retrait_GLWB_p/N_even;
    end
end

tr0=taux_retrait.*ones(N_scenario,1);

if strcmp(garantie,'GMWB')
    gw0=s0*(1-f_acq).*ones(N_scenario,1);
else
    gw0=1000000*ones(N_scenario,1); %le montant garanti est infini
end

gd0=s0*(1-f_acq).*ones(N_scenario,1);

% Matrice de probabilité de non-rachat (statique)
nr_s=zeros(1,N_model*T);
temp=zeros(1,T);
proba_non_rachat_statique=zeros(N_scenario+1,N_model*T);

for j=1:T
    nr_s(1,j*N_model)=(1-taux_rachat_stat)^j;
end
clear j;

for j=1:T
    temp(1,j)=(1-taux_rachat_stat)^j;
end
clear j;
temp2=[1 temp];
temp2(:,T+1)=[];
temp3=(temp-temp2)/N_model;
clear j temp temp2;

proba_non_rachat_statique(1,:)=echelle_tempo;
for i=1:T
    for j=1:N_model
        proba_non_rachat_statique(2,N_model*(i-1)+j)=temp3(1,i);
    end
end
clear i j temp3;

proba_non_rachat_statique(1,:)=[];

for i=1:N_scenario
    proba_non_rachat_statique(i,:)=proba_non_rachat_statique(1,:);
end
clear i;

% Calcul du vecteur au pas de temps 1/N_model
av(:,1)=av0.*rendement(:,1); %Revalorisation de l'épargne

indic_rachat_total=ones(N_scenario,N_model*T);
for i=1:N_scenario %Abattement des rachats statiques
    if av(i,1)==0
        proba_non_rachat_statique(i,1)=0;
    end
end

```

```

        indic_rachat_total(i,1)=0;
    end
end
clear i;

if strcmp(garantie,'GMWB')
    ITM(:,1)=av(:,1)./gw0;    %Pour les GMWB
else
    ITM(:,1)=av(:,1)./bb0;    %Pour les GLWB
end

%Les frais sont prélevés en même temps que les retraits effectués
%Les rachats et les décès ont lieu à chaque N_model
fm(:,1)=av(:,1).*alpha_m.*echelle_even(:,1); %frais de gestion

%Calcul des frais de garantie
if assiette_frais=='E'
    fgar(:,1)=(av(:,1)-fm(:,1)).*alpha_g.*echelle_even(:,1);
else
    fgar(:,1)=s0*(1-f_acq)*alpha_g.*echelle_even(:,1);
end

cd(:,1)=max(gd0-av(:,1),0);    %Prestations au titre de la GMDB

%Calcul du retrait effectué par l'assuré (comportement statique)
if echelle_model(1,1)<=d
    g(:,1)=0;
else
    g(:,1)=tr0.*bb0.*echelle_even(:,1);    %Retrait effectué
end

gd(:,1)=gd0-g(:,1);    %Montant garanti en cas de décès
gw(:,1)=gw0-g(:,1);    %Montant total garanti restant à retirer
%Prestations au titre de la garantie GMWB / GLWB
av(:,1)=max(av(:,1)-fm(:,1)-fgar(:,1),0);
cw(:,1)=max(g(:,1)-av(:,1),0);
av(:,1)=max(av(:,1)-g(:,1),0);

%Revalorisation de la benefit base
bb(:,1)=max(bb0,av(:,1).*echelle_cliquet(:,1));
bb(:,1)=max(bb(:,1),bb0.*echelle_TMG(:,1).*(1+taux_min)^(d));

%Impact sur les montants garantis en cas de revalorisation
%de la benefit base
gd(:,1)=(gd(:,1).*bb(:,1))./bb0;
gw(:,1)=(gw(:,1).*bb(:,1))./bb0;

tr(:,1)=tr0;    %Le taux de revenu garanti n'est jamais modifié

clear fm0 fgar0 tr0 g0 gw0 cw0 gd0 cd0;

% Projection pour les temps > 1/N_model
for j=2:T*N_model
    av(:,j)=av(:,j-1).*rendement(:,j);

    for i=1:N_scenario    %Abattement des rachats statiques
        if av(i,j)==0
            proba_non_rachat_statique(i,j)=0;
        end
    end
end

```

```

        indic_rachat_total(i,j)=0;
    end
end
clear i;

% Calcul de l'ITM de la garantie pour calcul des rachat dyn
if strcmp(garantie,'GMWB')
    ITM(:,j)=av(:,j)./gw(:,j-1); %Pour les GMWB
else
    ITM(:,j)=av(:,j)./bb(:,j-1); %Pour les GLWB
end

fm(:,j)=av(:,j).*alpha_m.*echelle_even(:,j); %frais de gestion

if assiette_frais=='E'
    fgar(:,j)=(av(:,j)-fm(:,j)).*alpha_g.*echelle_even(:,j);
else
    fgar(:,j)=s0*(1-f_acq)*alpha_g.*echelle_even(:,j);
end

cd(:,j)=max(gd(:,j-1)-av(:,j),0);

if echelle_model(1,j)<=d
    g(:,j)=0;
else
    g(:,j)=tr(:,j-1).*bb(:,j-1).*echelle_even(:,j);
end

gd(:,j)=gd(:,j-1)-g(:,j);
gw(:,j)=gw(:,j-1)-g(:,j);
av(:,j)=max(av(:,j)-fm(:,j)-fgar(:,j),0);
cw(:,j)=max(g(:,j)-av(:,j),0);
av(:,j)=max(av(:,j)-g(:,j),0);

bb(:,j)=max(bb(:,j-1),av(:,j).*echelle_cliquet(:,j));
bb(:,j)=max(bb(:,j),bb0.*echelle_TMG(:,j).*(1+taux_min)^(d));

gd(:,j)=(gd(:,j).*bb(:,j))./bb(:,j-1);
gw(:,j)=(gw(:,j).*bb(:,j))./bb(:,j-1);
tr(:,j)=tr(:,j-1);
end
clear j;

for i=1:N_scenario
    proba_non_rachat_statique(i,1)=1+proba_non_rachat_statique(i,1);
    for j=2:N_model*T
        proba_non_rachat_statique(i,j)=proba_non_rachat_statique(i,j-1)+proba_non_rachat_statique(i,j);
    end
end

% Définition des rachats dynamique
taux_rachat_dyn=zeros(N_scenario,T);
if rachat_dyn=='Y'
    for j=1:T
        for i=1:N_scenario
            if gt(ITM(i,j*N_model),I4)
                taux_rachat_dyn(i,j)=Rmax;
            else

```

```

        if gt(ITM(i,j*N_model),I3)
            taux_rachat_dyn(i,j)=(Rmax)*(ITM(i,j*N_model)-
I3)/(I4-I3);
        else
            if gt(ITM(i,j*N_model),I2)
                taux_rachat_dyn(i,j)=0;
            else
                if gt(ITM(i,j*N_model),I1)
                    taux_rachat_dyn(i,j)=(Rmin)*(I2-
ITM(i,j*N_model))/(I2-I1);
                else
                    taux_rachat_dyn(i,j)=Rmin;
                end
            end
        end
    end
end
end
end

temp=zeros(N_scenario,T);
for j=1:T
    for i=1:N_scenario
        temp(i,j)=taux_rachat_stat+taux_rachat_dyn(i,j);
    end
end

%Nombre de rachats pour chaque année
temp2=zeros(N_scenario,N_model*T);
for i=1:N_scenario
    temp2(i,1)=1-temp(i,1);
    for j=2:T
        temp2(i,j)=temp2(i,j-1)*(1-temp(i,j));
    end
end
clear i j temp;

temp3=[ones(N_scenario,1) temp2];
temp3(:,T+1)=[];
temp4=(temp2-temp3)./N_model;
clear temp2 temp3;

proba_non_rachat_dyn=zeros(N_scenario,N_model*T);
for m=1:N_scenario
    for i=1:T
        for j=1:N_model
            proba_non_rachat_dyn(m,N_model*(i-1)+j)=temp4(m,i);
        end
    end
end
clear m i j temp4;
proba_non_rachat_dyn=indic_rachat_total.*proba_non_rachat_dyn;

for i=1:N_scenario
    proba_non_rachat_dyn(i,1)=1+proba_non_rachat_dyn(i,1);
    for j=2:N_model*T
        proba_non_rachat_dyn(i,j)=proba_non_rachat_dyn(i,j-
1)+proba_non_rachat_dyn(i,j);
    end
end
end

```

```

clear i j;

temp=ones(N_scenario,N_model*T);
for i=1:N_scenario
    temp(i,:)=nb_vie(1,:);
end
nb_vie=temp;
clear i temp;

%Nombre de contrats en cours à la date t_k
if rachat_dyn=='N'
    nb_contrat_en_cours=proba_non_rachat_statique.*nb_vie;
else
    nb_contrat_en_cours=proba_non_rachat_dyn.*nb_vie;
end

%Nombre de décès sur la période t_(k-1) à t_k
nb_contrat_decès=zeros(N_scenario,N_model*T);
nb_contrat_decès(:,1)=nb_decès(:,1);
for j=2:N_model*T
    if rachat_dyn=='N'

nb_contrat_decès(:,j)=nb_decès(:,j).*proba_non_rachat_statique(:,j-1);
    else
        nb_contrat_decès(:,j)=nb_decès(:,j).*proba_non_rachat_dyn(:,j-1);
    end
end
clear j;
compteur=compteur-1;
disp('valeur des alpha_g à tester');
disp(compteur);

flux_vie_actualise=zeros(N_scenario,N_model*T);
flux_decès_actualise=zeros(N_scenario,N_model*T);
for j=1:N_model*T
    flux_vie_actualise(:,j)=nb_contrat_en_cours(:,j).*(cw(:,j)-fgar(:,j)).*actu(:,j);
flux_decès_actualise(:,j)=nb_contrat_decès(:,j).*cd(:,j).*actu(:,j);
end
clear j;

if gar_decès=='Y'
    flux_gar=flux_vie_actualise+flux_decès_actualise;
else
    flux_gar=flux_vie_actualise;
end

%Calcul de la vap
vap_scenario=sum(flux_gar,2); %Provision de la garantie
vap_scenario=sort(vap_scenario);
vap=sum(vap_scenario,1)/N_scenario;

%Calcul des indicateurs de risque
quantile_99=0.99*N_scenario;
quantile_95=0.95*N_scenario;
quantile_90=0.90*N_scenario;
quantile_75=0.75*N_scenario;
quantile_50=0.50*N_scenario;

```

```

VaR_99=vap_scenario(quantile_99,1);
VaR_95=vap_scenario(quantile_95,1);
VaR_90=vap_scenario(quantile_90,1);
VaR_75=vap_scenario(quantile_75,1);
VaR_50=vap_scenario(quantile_50,1);

TailVaR_99=sum(vap_scenario(quantile_99:N_scenario,1),1)/(N_scenario-
quantile_99);
TailVaR_95=sum(vap_scenario(quantile_95:N_scenario,1),1)/(N_scenario-
quantile_95);
TailVaR_90=sum(vap_scenario(quantile_90:N_scenario,1),1)/(N_scenario-
quantile_90);
TailVaR_75=sum(vap_scenario(quantile_75:N_scenario,1),1)/(N_scenario-
quantile_75);
TailVaR_50=sum(vap_scenario(quantile_50:N_scenario,1),1)/(N_scenario-
quantile_50);

maximum=max(vap_scenario);
minimum=min(vap_scenario);

resultat(1,1)=vap;
resultat(2,1)=VaR_99;
resultat(3,1)=VaR_95;
resultat(4,1)=VaR_90;
resultat(5,1)=VaR_75;
resultat(6,1)=VaR_50;
resultat(7,1)=TailVaR_99;
resultat(8,1)=TailVaR_95;
resultat(9,1)=TailVaR_90;
resultat(10,1)=TailVaR_75;
resultat(11,1)=TailVaR_50;
resultat(12,1)=maximum;
resultat(13,1)=minimum;

clear quantile_99 quantile_95 quantile_90 quantile_75 quantile_50;
clear vap VaR_99 VaR_95 VaR_90 VaR_75 VaR_50 TailVaR_99 TailVaR_95;
clear TailVaR_90 TailVaR_75 TailVaR_50 maximum minimum;

clear alpha_g;
end
clear l;

% Tracé des cas favorables / défavorables
%echelle_age=x.*ones(1,size(echelle_model,2))+echelle_model;
%i=781;
%plot(echelle_age,av(i,:),echelle_age,bb(i,:),echelle_age,g(i,:),echelle_ag
e,cw(i,:));
%legend('Epargne du contrat','Benefit Base','Retrait effectué par
assuré','Prestations payées par assureur','Location','northeast');
%xlabel('Age assuré');

% Illustration du nombre de contrats en cours + nombre de décès

%echelle_age=x.*ones(1,size(echelle_model,2))+echelle_model;
%test2=[nb_contrat_en_cours(6,:); nb_contrat_en_cours(12,:);
nb_contrat_en_cours(3,:)];

```

```

%plot(echelle_age,test2(1,:),echelle_age,test2(3,:),echelle_age,test2(2,:),
echelle_age,nb_vie(1,:));
%legend('Garantie non activée','Garantie activée à x=60 ans','Garantie
activée à x=76 ans','Mortalité seule','Location','northeast');
%xlabel('Age assuré');

%test3=[nb_contrat_deces(6,:); nb_contrat_deces(12,:);
nb_contrat_deces(3,:)];
%plot(echelle_age,test3(1,:),echelle_age,test3(3,:),echelle_age,test3(2,:),
echelle_age,nb_deces(1,:));
%legend('Garantie non activée','Garantie activée à x=60 ans','Garantie
activée à x=76 ans','Mortalité seule','Location','northwest');
%xlabel('Age assuré');

resultat=[frais_garantie; resultat];

resultat_fin=[resultat(1,:); resultat(2,:); resultat(4,:); resultat(9,:)];

clear av bb fm fgar tr g gw cw gd cd ITM;
clear N_even N_model T actu alpha_m av0;
clear bb0 d dt echelle_TMG echelle_cliquet echelle_even;
clear echelle_model echelle_t echelle_tempo f_acq frais_garantie;
clear gar_deces garantie indic_rachat_total;
clear nb_contrat_deces nb_contrat_en_cours nb_deces nb_vie;
clear nr_s proba_non_rachat_dyn proba_non_rachat_statique;
clear rachat_dyn rendement s0 s0_stress table_mortalite;
clear assiette_frais compteur flux_deces_actualise flux_gar;
clear flux_vie_actualise rebalancement rendement_non_rebal;
clear rendement_rebal taux_min taux_rachat_dyn tayx_rachat_stat;
clear taux_retrait taux_retrait_GLWB taux_retrait_GLWB_p;
clear x x_r taux_rachat_stat taux_retrait_garanti;

disp('Simulation terminée');
toc

%% Tracé de la fonction de répartition de la provision mathématique
echelle_t=1:N_scenario;
plot(vap_scenario,echelle_t/N_scenario);
text(resultat(4,1),0, ' | Va95% ', 'VerticalAlignment', 'bottom');

%% Tracé de la densité de la provision mathématique
x2=floor(resultat(14,1)):0.1:floor(resultat(13,1));
a=ksdensity(vap_scenario,x2,'function','pdf');
%b=ksdensity(vap_scenario,x2,'function','cdf');
plot(x2,a);
text(resultat(4,1),0, ' | Va95% ', 'VerticalAlignment', 'bottom');

clear N_scenario vap_scenario;

```

```

%-----
%
%           Rendement de l'épargne / Modèle de Black & Scholes /
%           Avec - Sans rebalancement
%-----
clear all;
clc;

%-----
%Paramètres du générateur d'actifs
N_scenario=5000;      %Nombre de simulations
T=80;                %Durée des simulations (mettre T=80 pour GLWB)
w_action0=0.6;       %nb parts action
N_rebal=1;           %rebalancement annuel (ne pas changer)

r=0.03;              %Taux sans risque annuel
sigma_s=0.45;        %Volatilité annuelle du sous-jacent action
s0=100;              %Valeur initiale du sous-jacent action
sigma_b=0.04;        %Volatilité annuelle du sous-jacent oblig
b0=100;              %Valeur initiale du sous-jacent oblig
corr=-0.15;          %Corrélation entre actions et taux

A=['actif_B&S_Nscenario' '10000' '_r' '0.03' '_volaction' '0.45'
  '_nbpaction' '0.6' '_corr' '-0.15' '.mat'];
%-----
tic
N_model=12;          %1/N_model = Pas de temps des scénarios économiques
dt=1/N_model;
echelle_model=dt:dt:T;

temp=round(1000*N_rebal .* echelle_model)/1000;
echelle_rebal=temp-floor(temp);
for i=1:(N_model*T)
    if echelle_rebal(1,i)==0
        echelle_rebal(1,i)=1;
    else
        echelle_rebal(1,i)=0;
    end
end
clear temp i N_rebal;

%Calcul des taux d'actualisation
actu=zeros(2*N_scenario,N_model*T);
for j=1:N_model*T
    actu(:,j)=exp(-r*j*dt);
end

dZ1=randn(N_scenario,N_model*T);
dZ2=randn(N_scenario,N_model*T);
TT=kron(ones(N_scenario,1),dt:dt:T);

% Generation du sous-jacent equity
dZ_s=sqrt(dt)*dZ1;
Z_s=cumsum(dZ_s,2);
s=s0*exp((r-0.5*sigma_s^2)*TT+sigma_s*Z_s);
s_anti=s0*exp((r-0.5*sigma_s^2)*TT-sigma_s*Z_s);
s_tot=[s ; s_anti];
clear s s_anti dZ_s Z_s;

```

```

% Generation du sous-jacent oblig
dZ_b=sqrt(dt).*(corr.*dZ1+sqrt(1-corr^2).*dZ2);
Z_b=cumsum(dZ_b,2);
b=b0*exp((r-0.5*sigma_b^2)*TT+sigma_b*Z_b);
b_anti=b0*exp((r-0.5*sigma_b^2)*TT-sigma_b*Z_b);
b_tot=[b ; b_anti];
clear b b_anti dZ_b Z_b dZ1 dZ2 TT;

%Génération de l'actif agrégé sans rebalancement
actif_non_rebal=w_action0.*s_tot+(1-w_action0).*b_tot;
w_action_non_rebal=w_action0.*ones(2*N_scenario,N_model*T);

%Génération de l'actif agrégé avec rebalancement
actif_rebal=zeros(2*N_scenario,N_model*T);
w_action_rebal=w_action0.*ones(2*N_scenario,N_model*T);
actif0=w_action0*s0+(1-w_action0)*b0;

%Pour les pas de temps compris entre 1 et 12
actif_rebal(:,1:12)=actif_non_rebal(:,1:12);
for j=1:12
    if echelle_rebal(1,j)==1

w_action_rebal(:,j)=w_action0.*(s0./s_tot(:,j)).*(actif_rebal(:,j)./actif0)
;
        else
            w_action_rebal(:,j)=w_action0;
        end
    end

for i=1:(T-1)
    for j=1:(N_model)

actif_rebal(:,i*N_model+j)=w_action_rebal(:,i*N_model).*s_tot(:,i*N_model+j)
)+(ones(2*N_scenario,1)-w_action_rebal(:,i*N_model)).*b_tot(:,i*N_model+j);
        if echelle_rebal(1,i*N_model+j)==1

w_action_rebal(:,i*N_model+j)=w_action_rebal(:,i*N_model).*(s_tot(:,i*N_model)
./s_tot(:,i*N_model+j)).*(actif_rebal(:,i*N_model+j)./actif_rebal(:,i*N_model)
));
            else
                w_action_rebal(:,i*N_model+j)=w_action_rebal(:,i*N_model);
            end
        end
    end

part_action_rebal=w_action_rebal.*s_tot./actif_rebal;

% Calcul du rendement associé aux scénarios
actif_non_rebal_temp=actif_non_rebal;
actif_non_rebal_temp(:,N_model*T)=[];
actif_non_rebal_decale=[actif0.*ones(size(actif_non_rebal,1),1)
actif_non_rebal_temp];
%dans script central, on utilise cette formulation du rendement (pas besoin
d'enlever le 1)
rendement_non_rebal=(actif_non_rebal./actif_non_rebal_decale);
clear actif_non_rebal_temp actif_non_rebal_decale;

%test de la propriété de martingale
test80=sum(actu(:,N_model*80).*actif_non_rebal(:,N_model*80))/(2*N_scenario
);

```

```
test65=sum(actu(:,N_model*65).*actif_non_rebal(:,N_model*65))/(2*N_scenario);
test50=sum(actu(:,N_model*50).*actif_non_rebal(:,N_model*50))/(2*N_scenario);
test30=sum(actu(:,N_model*30).*actif_non_rebal(:,N_model*30))/(2*N_scenario);
test10=sum(actu(:,N_model*10).*actif_non_rebal(:,N_model*10))/(2*N_scenario);
test1=sum(actu(:,1*N_model).*actif_non_rebal(:,N_model*1))/(2*N_scenario);
test=[2*N_scenario test1 test10 test30 test50 test65 test80];
v=[0 1 10 30 50 65 80];
test=[v; test];
clear test100 test75 test50 test30 test10 test1;

%test de la normalité des rendements
test3=log(rendement_non_rebal(:,N_model*5));
test3=sort(test3,1);

clear actif_non_rebal;

actif_rebal_temp=actif_rebal;
actif_rebal_temp(:,N_model*T)=[];
actif_rebal_decale=[actif0.*ones(size(actif_rebal,1),1) actif_rebal_temp];
rendement_rebal=(actif_rebal./actif_rebal_decale);
clear actif_non_rebal_temp actif_non_rebal actif_non_rebal_decale

save(A,'rendement_rebal','rendement_non_rebal','actu');

disp('simulation terminee');
toc
```

```

%-----
% Rendement de l'épargne / Modèle lognormal + Vasicek /
% Sans rebalancement
%-----
clear all;
clc;

%-----
%Paramètres du générateur d'actifs
N_scenario=5000; %Nombre de simulations
T=80; %Durée des simulations (mettre T=80 pour GLWB)
w_action0=0.6; %nb parts action

sigma_s=0.25; %Volatilité annuelle du sous-jacent action
s0=100; %Valeur initiale du sous-jacent action
sigma_b=0.04; %Volatilité annuelle du sous-jacent oblig
b0=100; %Valeur initiale du sous-jacent oblig
corr=-0.15; %Corrélation entre actions et taux

A=['actif_lognormal+Vasicek_Nscenario' '10000' '_volaction' '0.25'
'_nbpaction' '0.6' '_corr' '-0.15' '.mat'];

%Paramètres du modèle de Vasicek
sigma_taux=0.031;
a=0.35;
b=0.05;
r0=0.002;
corr_taux_court=-0.15;
%-----
tic
N_model=12; %1/N_model = Pas de temps des scénarios économiques
dt=1/N_model;
load('taux_zc_IA_30_04_10.mat');

dZ1=randn(N_scenario,N_model*T);
dZ2=randn(N_scenario,N_model*T);

r=zeros(N_scenario,N_model*T); %Projection du taux court
r_anti=zeros(N_scenario,N_model*T); %Projection du taux court antithétique
dZ_taux=corr_taux_court.*dZ1+sqrt(1-corr_taux_court^2).*dZ2;
r(:,1)=(r0+a*(b-
r0)*dt).*ones(size(dZ_taux,1),1)+(sigma_taux*sqrt(dt)).*dZ_taux(:,1);
r_anti(:,1)=(r0+a*(b-r0)*dt).*ones(size(dZ_taux,1),1)-
(sigma_taux*sqrt(dt)).*dZ_taux(:,1);
for j=2:N_model*T
    r(:,j)=r(:,j-1)+(a*dt).*(b.*ones(size(dZ_taux,1),1)-r(:,j-
1))+sigma_taux*sqrt(dt)).*dZ_taux(:,j);
    r_anti(:,j)=r_anti(:,j-1)+(a*dt).*(b.*ones(size(dZ_taux,1),1)-
r_anti(:,j-1))+sigma_taux*sqrt(dt)).*dZ_taux(:,j);
end
clear j;
r_tot=[r; r_anti];
clear dZ2 dZ_taux;

%Vérification de la moyenne des taux court
%temp=sum(r_tot,1)/(2*N_scenario);
%moyenne=zeros(1,N_model*T);
%for j=1:N_model*T

```

```

% moyenne(1,j)=r0*exp(-a*j*dt)+b*(1-exp(-a*j*dt));
%end;
%plot(echelle_model,temp,echelle_model,moyenne)

% Construction des zéro coupons associés aux simulations de taux court
temp=(r0*dt).*ones(size(r_tot,1),1) r_tot.*dt];
temp(:,size(r_tot,2)+1)=[];
temp=-cumsum(temp,2);
zero_coupon=exp(temp);
%zero_coupon_moyen=sum(zero_coupon,1)/(2*N_scenario);
clear temp;

% Courbe des taux à la date t=0 construit à partir des taux courts
R=zeros(1,N_model*T); %Taux zéro coupon (courbe des taux)
R_infini=b-((sigma_taux^2)/(2*a^2));
for j=1:N_model*T
    R(1,j)=R_infini-((1-exp(-a*j*dt))/(a*j*dt))*(R_infini-
r0)+(sigma_taux^2)*((1-exp(-a*j*dt))^2)/(4*j*dt*a^3);
end
clear j;

% Taux d'actualisation (prix des zéro coupons) calculés à partir de la
% courbe des taux
%zero_coupon_vasicek=zeros(N_scenario,N_model*T);
%for j=1:N_model*T
% zero_coupon_vasicek(:,j)=exp(-R(:,j)*j*dt);
%end

%echelle_model(:,size(taux_zc_IA,2)+1:N_model*T)=[];
%P2=exp(-taux_zc_IA(2,:).*echelle_model);
%zero_coupon_vasicek(:,size(echelle_model,2)+1:size(zero_coupon_vasicek,2))
=[];
%zero_coupon_moyen(:,size(echelle_model,2)+1:size(zero_coupon_moyen,2))=[];

%plot(echelle_model,zero_coupon_moyen,echelle_model,zero_coupon_vasicek,ech
elle_model,P2);
%legend('Moyenne des zéro coupons simulés','zéro coupons recalculés -
fonctionnelle de Vasicek','zéro coupon courbe des
taux','location','northeast');

%Generation du sous-jacent equity avec taux Vasicek
s=zeros(N_scenario,N_model*T);
s_anti=zeros(N_scenario,N_model*T);
b=zeros(N_scenario,N_model*T);
b_anti=zeros(N_scenario,N_model*T);

dZ3=randn(N_scenario,N_model*T);

% Generation du sous-jacent equity
dZ_s=sqrt(dt)*dZ1;
dZ_b=sqrt(dt).*(corr.*dZ1+sqrt(1-corr^2).*dZ3);

s(:,1)=s0.*exp((r0-
0.5.*sigma_s^2.*ones(N_scenario,1)).*dt+sigma_s.*dZ_s(:,1));
s_anti(:,1)=s0.*exp((r0-0.5.*sigma_s^2.*ones(N_scenario,1)).*dt-
sigma_s.*dZ_s(:,1));

b(:,1)=b0.*exp((r0-
0.5.*sigma_b^2.*ones(N_scenario,1)).*dt+sigma_b.*dZ_b(:,1));

```

```

b_anti(:,1)=b0.*exp((r0-0.5.*sigma_b^2.*ones(N_scenari0,1)).*dt-
sigma_b.*dZ_b(:,1));

for j=2:N_model*T
    s(:,j)=s(:,j-1).*exp((r(:,j-1)-
0.5.*sigma_s^2.*ones(N_scenari0,1)).*dt+sigma_s.*dZ_s(:,j));
    s_anti(:,j)=s_anti(:,j-1).*exp((r_anti(:,j-1)-
0.5.*sigma_s^2.*ones(N_scenari0,1)).*dt-sigma_s.*dZ_s(:,j));
    b(:,j)=b(:,j-1).*exp((r(:,j-1)-
0.5.*sigma_b^2.*ones(N_scenari0,1)).*dt+sigma_b.*dZ_b(:,j));
    b_anti(:,j)=b_anti(:,j-1).*exp((r_anti(:,j-1)-
0.5.*sigma_b^2.*ones(N_scenari0,1)).*dt-sigma_b.*dZ_b(:,j));
end
clear j;
s_tot=[s ; s_anti];
b_tot=[b ; b_anti];
clear s s_anti dZ_s Z_s b b_anti dZ_b Z_b dZ1 dZ3 r r_anti r_tot;

actu=zero_coupon;

%Génération de l'actif agrégé sans rebalancement
actif_non_rebal=w_action0.*s_tot+(1-w_action0).*b_tot;
%w_action_non_rebal=w_action0.*ones(2*N_scenari0,N_model*T);
actif0=w_action0*s0+(1-w_action0)*b0;
clear s_tot b_tot w_action0 s0 b0 r0;

% Calcul du rendement associé aux scénarios
actif_non_rebal_temp=actif_non_rebal;
actif_non_rebal_temp(:,N_model*T)=[];
actif_non_rebal_decale=[actif0.*ones(size(actif_non_rebal,1),1)
actif_non_rebal_temp];
%dans script central, on utilise cette formulation du rendement
%(pas besoin d'enlever le 1)
rendement_non_rebal=(actif_non_rebal./actif_non_rebal_decale);
clear actif_non_rebal_temp actif_non_rebal_decale;

%test de la propriété de martingale
test80=sum(actu(:,N_model*80).*actif_non_rebal(:,N_model*80))/(2*N_scenari0
);
test65=sum(actu(:,N_model*65).*actif_non_rebal(:,N_model*65))/(2*N_scenari0
);
test50=sum(actu(:,N_model*50).*actif_non_rebal(:,N_model*50))/(2*N_scenari0
);
test30=sum(actu(:,N_model*30).*actif_non_rebal(:,N_model*30))/(2*N_scenari0
);
test10=sum(actu(:,N_model*10).*actif_non_rebal(:,N_model*10))/(2*N_scenari0
);
test1=sum(actu(:,1*N_model).*actif_non_rebal(:,N_model*1))/(2*N_scenari0);
test=[2*N_scenari0 test1 test10 test30 test50 test65 test80];
v=[0 1 10 30 50 65 80];
test=[v; test];
clear test80 test65 test50 test30 test10 test1 actif_non_rebal v;

save(A,'rendement_non_rebal', 'actu');

disp('simulation terminée');
clear sigma_taux taux_zc_IA N_model N_rebal N_scenari0 R R_infini T a;
clear actif0 corr corr_taux_court dt echelle_model sigma_b sigma_s;
clear zero_coupon;
toc

```

Annexe 3 : Graphique du put (partie 3.1)

