TARIFICATION DE GARANTIES PLANCHER EN CAS DE VIE

Centre d'Etudes Actuarielles - Promotion 2004
Mémoire dirigé par Christophe Mugnier

Tristan Palerm

5 juin 2006

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser tous mes remerciements aux nombreuses personnes qui m'ont guidé dans la rédaction de ce mémoire. Je remercie tout particulièrement M. Christophe MUGNIER, directeur des Comptes et de la Rentabilité d'AXA France, pour m'avoir offert un sujet riche et novateur, et pour ses précieux conseils qui m'ont permis de mieux orienter mes études. Je remercie également Messieurs Antoine DE SARRAU, Pierre-Emmanuel SASSONIA et Alexis DE ROZIERES pour leurs relectures attentives de ce document. J'adresse enfin ma gratitude à Carole BOUCHER, qui m'a autorisé à utiliser dans ce document quelques schémas de son cru. Enfin, mes derniers remerciement iront à ma femme, Sandrine PALERM, qui a su m'aider à mener à bien cette étude.

RESUME

Par rapport aux traditionnels contrats d'assurance-vie en Euros, les contrats en Unités de Compte présentent un intérêt certain pour l'assureur, en lui permettant d'endosser un risque moindre. Commercialement en revanche, il est parfois difficile pour les clients d'accepter l'absence de garantie sur leur capital, ou même sur le rendement de leur contrat. Si en temps de hausse sur les marchés financiers, les performances obtenues sur les contrats en Unités de Compte s'avèrent largement supérieures à celles trouvées sur des contrats en Euros, les risques de perte en cas de forte baisse des marchés peuvent inciter à la circonspection.

On voit donc apparaître depuis plusieurs années déjà, et façon de plus en plus répandue, des options supplémentaires sur des contrats en Unités de Compte, permettant au client d'investir son épargne sur des contrats en Unités de Compte, tout en offrant des garanties sur le capital détenu par le client. De nombreuses garanties ont ainsi été définies pour les cas de décès de l'assuré. On peut toutefois imaginer des garanties, s'appliquant aux contrats en Unités de Compte, dans les cas de survie de l'assuré. Ce sont ces garanties qui feront l'objet de la présente étude.

Il est toutefois bien évident que l'assureur, endossant un nouveau risque, se doit d'en tenir compte au moment de l'étude de la profitabilité du contrat. Se pose alors la question de la tarification de ces garanties. Comment peut-on modéliser ces garanties de façon actuarielle ? Quelles techniques utiliser pour les évaluer ? Comment traduire l'évaluation de ces engagements sur les chargements affectés au contrat ?

Les mathématiques financières viennent au secours de l'actuaire : la théorie des options, notamment, permet d'appréhender les garanties liées aux Unités de Compte dans un cadre théorique rigoureux. Si l'utilisation de formules fermées est bien souvent impossible, du fait de la nature des garanties étudiées, de nombreuses méthodes numériques permettent de rendre compte de toutes les spécificités des garanties lors de l'exercice d'évaluation.

ABSTRACT

Compared to traditional savings contracts, unit-linked contracts are an opportunity for insurance companies, since they allow them to have lesser risks in their portfolios. Commercially, though, clients can have a hard time accepting that they could lose part of their capital, or even of their revenues. When financial markets increase, Unit-Linked contracts have much higher revenues than traditional savings contracts ; but the risks underrun in case of decrease in financial markets can frighten potential customers.

Since several years, new options were created for Unit-Linked contracts, which enable clients to invest on Unit-Linked contracts, and in the same time to have guarantees on their capital. Many guarantees were created to offer security in case of death of the client. You could however imagine Unit-Linked guarantees that provide security for the client who is still alive after a certain amount of time. The present document studies this kinf of guarantees.

The insurance company takes a new risk with such guarantees : it has to be taken into account when stuying the contract's profitability. The actuary has thus to solve the problem of pricing those contracts. How can the actuary modelize those guarantees ? Which methods can we use to evaluate them ? How will the company translate this cost in the fees related to he contract ?

Financial mathematics can help the actuary : the theory of options, in particular, is a great tool to study Unit-Linked options in a strict framework. Using formulaes is often impossible, due to the very nature of the guarantees, yet numerous mathematical methods exist to evaluate each specificity of the guarantee.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les contrats d'assurance-vie en Unités de Compte remportent un vif succès depuis plusieurs années ; les assureurs les apprécient tout particulièrement, car ils présentent un risque bien moindre que des contrats classiques en euros (diminution du risque qui s'accompagne, qui plus est, d'exigences réglementaires de solvabilité inférieures à celles des contrats en euros). Du point de vue des clients le constat est plus contrasté : si les perspectives de rendement sont largement supérieures à ce que l'on pourra trouver sur les fonds en euros, l'absence de garantie de performance, ou même de garantie sur le capital investi, peut représenter un élément dissuasif pour ce type d'investissements.

Les sociétés d'assurance cherchent donc à proposer à leurs clients de nouveaux produits leur permettant d'investir sur des fonds en Unités de Compte, et de ce fait de conserver un profil d'épargne plus dynamique, tout en apportant une sécurité suffisante pour limiter les répercussions négatives en cas de crise sur les marchés financiers.

Cette volonté se traduit par l'apparition de nouvelles garanties, liées aux Unités de Compte, qui représentent en fait autant d'options que le client est libre d'adjoindre ou non à son contrat d'épargne. Cela permet bien entendu, de façon très directe, d'offrir un argumentaire commercial plus efficace en offrant plus de dynamisme et plus de sécurité. A plus long terme, on peut y voir une opportunité considérable pour créer des produits d'investissement présentant un intérêt au-delà même de leur régime fiscal.

Les deux dernières décennies ont vu le paysage de l'assurance-vie se modifier considérablement, les produits dits "traditionnels" cédant la place à des produits d'investissement dans lesquels l'aléa viager devenait négligeable. Les assureurs ont mis à profit un régime fiscal très avantageux pour imposer l'assurance-vie comme mode d'épargne principal en France. La plupart des produits offerts sont des produits simples et sans garanties ; cela a d'ailleurs permis aux bancassureurs de s'insérer aisément dans le marché, et de s'y tailler la part du lion.

L'élaboration de produits plus sophistiqués de protection financière permettrait aux sociétés d'assurance d'opérer une différenciation en infléchissant la nature des produits proposés ; d'autre part, en recentrant la conception des produits sur des garanties et non plus sur un régime fiscal, les assureurs peuvent se préparer plus sereinement à faire face à un éventuel remaniement de la fiscalité de l'assurance-vie.

Des garanties en cas de décès ont déjà été introduites en France, elles sont même assez répandues. Leur fonctionnement et leur conception sont bien maîtrisés, et ont déjà fait l'objet de multiples études. Les garanties en cas de vie sont plus rares, et pour ainsi dire inexistantes sur le marché français ; pourtant, elles sont monnaie courante dans certains pays étrangers. Il n'est donc pas inutile de se pencher sur ces nouvelles garanties, qui peuvent représenter une opportunité intéressante pour les assureurs français. Toutefois les risques induits par la création de ces nouvelles garanties doivent être étudiés ; l'exercice de tarification en particulier doit être maîtrisé de bout en bout. Pour faire face à ces engagements d'un nouveau type, les sociétés d'assurance développent de nouvelles méthodes et adoptent de nouveaux outils, entremêlant des techniques traditionnelles d'assurance avec des modélisations plus purement financières, déjà largement adoptées dans les salles de marchés.

Le but de la présente étude est de présenter de façon aussi exhaustive que possible, les différentes garanties en cas de vie que l'assureur peut proposer, et d'étudier les méthodes qu'il peut déployer pour tarifer ces engagements.

La première partie de ce mémoire sera consacrée à la présentation des diverses modalités envisageables dans le cadre de garanties plancher en cas de vie. A l'instar des garanties liées aux Unités de Comptes en cas de décès, nous constaterons que ces engagements en cas de vie peuvent être envisagées comme des produits optionnels, et qu'en conséquence nous pouvons utiliser des techniques financières de *pricing* d'options pour étudier ces garanties.

Au cours des parties suivantes, nous décrirons succinctement les mécanismes de base liés aux options, ainsi qu'un certain nombre de méthodes pouvant être utilisées pour la détermination de leur prix.

Une fois les bases théoriques ainsi posées, nous pourrons appliquer ces outils financiers à l'étude des garanties considérées. Une approche strictement financière permettra dans un premier temps de bien comprendre les divers paramètres entrant en ligne de compte, et leur influence sur le prix de l'option.

Cette première approche devra enfin, pour être réaliste, être complétée par l'addition de paramètres intrinsèques à la nature d'une garantie d'assurance. Nous verrons ainsi comment il peut éventuellement être tenu compte de la mortalité, des rachats, et de prélèvements réguliers sur l'épargne (au titre de la garantie ou au titre des frais de gestion).

Chapitre 2

Description des garanties plancher en cas de vie

2.1 Produits d'assurance-vie en Unités de Compte

Depuis près de vingt ans, les produits d'épargne occupent une place importante au sein du marché de l'assurance-vie en France. Contrairement à des produits plus classiques, ces contrats réduisent considérablement l'aléa viager, et se positionnent clairement comme des produits de placement, tirant profit d'une fiscalité avantageuse pour séduire une vaste clientèle. Les contrats d'épargne peuvent assurer au client une revalorisation minimale de son placement, selon un taux défini à l'avance par les conditions générales, ou proposer l'adossement de l'épargne à un support dont le cours est variable.

On parle dans le premier cas d'épargne *en euro*, dans le second cas, d'épargne *en Unités de Compte (UC)*. Lorsque le client choisit d'investir dans un produit d'épargne en UC, la somme qu'il verse correspond en fait à l'achat d'un certain nombre de parts d'un support défini. Ces supports sont en général des fonds profilés gérés par la société d'assurance. L'engagement de l'assureur porte alors sur le nombre de parts que l'assuré possède, et non sur leur valorisation, qui dépend de l'évolution du cours du support.

Si l'épargne en UC présente des perspectives de rendements largement supérieurs à ceux obtenus sur des produits en euros, elle ne comporte, sauf garantie contractuelle spécifique, aucune sécurité pour l'assuré, qui ne peut être certain, en l'absence de garanties supplémentaires, d'obtenir une performance minimale sur son investissement, ni même, dans les cas défavorables, de récupérer au terme sa mise initiale. Du point de vue de l'assureur, en revanche, le transfert d'une grande partie du risque présente un intérêt évident. Le code des assurances prend d'ailleurs explicitement en compte cette diminution du risque : le minimum de marge de solvabilité réglementaire sur des produits en UC s'élève à 1% des provisions mathématiques, contre 4% pour des produits en euros.

Après plusieurs années très chahutées (voire calamiteuses) sur les marchés financiers, de nombreux clients, échaudés, font preuve d'une réticence croissante à assumer l'intégralité du risque. D'où l'idée, pour les sociétés d'assurance, de proposer pour des contrats en Unités de Compte des garanties supplémentaires apportant une sécurité au client. Notons dès à présent que l'ajout de garanties supplémentaires n'est en aucun cas un engagement anodin : en effet, les changements induits sur la nature du risque couvert peuvent influer sur la classification du produit en euro ou Unités de Compte. Les conséquences sur les montants réglementaires de marge de solvabilité devront ainsi être pris en compte dans l'étude de la rentabilité de tels contrats.

L'exemple emblématique de ce type d'engagements est celui d'une "garantie du cumul des primes versées au décès de l'assuré". Si l'assuré décède avant le terme du contrat, l'assureur s'engage à verser au bénéficiaire un montant égal au maximum entre l'épargne en compte au moment du décès et le cumul des primes versées par le client.

2.2 Produits en Unités de Comptes commercialisés dans les pays anglo-saxons

Dans les pays anglo-saxons, d'innombrables variétés de produits à garanties sur les UC ont été commercialisées. Les plus marquants sont les produits de ***variable annuities*** (rentes variables) commercialisés aux Etats-Unis. Ces produits ont la particularité de combiner une des facettes les plus traditionnelles de l'assurance-vie (la rente) et l'un de ses aspects les plus modernes (produit d'investissement en unités de compte).

Les produits de *variable annuities* proposent au client d'investir son épargne sur plusieurs supports, et lui donnent la possibilité de convertir son capital en rente (*annuities*) au terme d'une période de carence donnée.

Ces garanties sont novatrices à plusieurs titres :

- Elles permettent de rajeunir les garanties de rentes, dont l'importance avait considérablement décru dans le paysage de l'assurance-vie français. Cet aspect est loin d'être anodin, car, commercialement, il permet à l'assureur de différencier ses produits d'autres produits d'investissement classique. Sur le marché français, cependant, les produits de rentes restent souvent considérés comme peu attractifs. Le démarrage, moins fulgurant que prévu, du PERP, montre bien la réticence persistente des clients français à l'égard de ce type d'investissements.

- Elles s'accompagnent souvent de verrous garantissant à l'assuré un capital ou une performance minimale au terme du contrat ; cela permet au client d'éviter de trop grosses pertes en cas de chute des marchés financiers.

D'autres types de produits assez semblables aux *variable annuities* ont été commercialisés dans d'autres pays :

- Au Canada, les ***Segregated Funds*** sont des produits en Unités de Compte présentant des garanties de capital en cas de vie et en cas de décès. Le nom de ce type de produits provient du fait que les primes versées par l'assuré sont en général investies dans des fonds qui ne sont pas gérés en propre par l'assureur.

- Au Royaume-Uni, les produits ***Unit Linked*** sont semblables aux produits que l'on peut trouver en France. La plupart proposent une garantie plancher en cas de décès, mais on ne trouve presque plus de garanties en cas de vie.

- Aux Etats-Unis, les produits ***Equity-Indexed Annuities*** proposent, comme les *variable annuities*, des sorties en rente ; en revanche le mode de calcul de l'épargne du client diffère. Le client bénéficie en fait d'une participation sur un indice donné. A titre d'exemple, un taux de participation de 80% sur l'indice se traduirait par une augmentation de 8% de l'épargne si l'indice augmente de 10%. Ces contrats s'accompagnent en général d'une garantie de rendement minimal sur l'épargne.

Ces garanties, encore nouvelles pour les assureurs, sont parfois également mal comprises par les assurés et la presse. C'est bien entendu le prix de ces garanties qui est mis en cause. Les avis peuvent être assez tranchés sur les garanties liées aux UC ; ainsi le site américain *smartmoney.com* (équivalent du magazine français "Mieux Vivre Votre Argent", dédié à l'épargne des particuliers), se basant sur les taux de rendement élevés sur les fonds en UC des dernières années, affirme que les assurés ont autant besoin d'une garantie de capital en cas décès (GMDB) "qu'un canard aurait besoin de rames pour nager". Au sein du même article, une formule lapidaire résume ce qu'il faut, selon l'auteur, retenir des garanties liées aux UC : "des frais, des frais et encore des frais".

C'est faire peu de cas de la sécurité supplémentaire apportée par ces dispositifs ; c'est oublier qu'une diminution du risque a un prix, qu'il soit prélevé directement par le biais d'une prime, ou indirectement par le biais d'une performance moindre sur l'épargne du client. Globalement, c'est méconnaître les principes de base de l'activité d'assurance : faut-il considérer que la couverture d'un risque n'a de valeur que si ce risque se réalise ? Le débat est infini ; en tout cas, de telles affirmations démontrent la complexité de l'exercice de tarification, qui doit réussir à concilier viabilité technique et financière d'une part, et efficacité de l'argumentaire commercial d'autre part.

2.3 Garanties liées aux UC en cas de vie

Les garanties planchers permettent à l'assureur d'offrir -ou plus exactement de vendre- à son client une sécurité sur son investissement dans le cas où celui-ci est réalisé sur des produits en Unités de Compte. Les garanties planchers les plus classiques sont celles en cas de décès. Il est cependant tout à fait possible d'envisager des garanties plancher en cas de vie de l'assuré.

2.3.1 La garantie GMAB

L'intitulé exact de cette option est *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit* ; il s'agit en réalité du pendant "en cas de vie" de la garantie plancher traditionnelle en cas de décès.

Au terme d'une période d'attente définie par les conditions générales du contrat, l'épargne du client est comparée au montant garanti ; si elle s'avère inférieure à ce montant, l'assureur apporte la différence. L'assuré, lui, s'engage à prolonger son contrat.

Pour le client il s'agit d'une garantie de performance à terme, donc d'une sécurité considérable pour verrouiller un investissement en unités de compte. Pour la société d'assurance, le contrat ainsi prolongé reste plus longtemps en portefeuille, ce qui permet d'augmenter l'espérance de la marge réalisée.

2.3.2 La garantie GMMB

La *Guaranteed Minimum Maturity Benefit* offre au client une garantie de capital à terme, sans prolongement du contrat. En général, elle s'assortit en contrepartie d'une participation inférieure à 100% à la performance du support en cas de hausse, donc d'une diminution de l'espérance de gain du client.

2.3.3 La garantie GMSB

La *Guaranteed Minimum Surrender Benefit*, consiste à offrir au client, au-delà d'une période de carence, une garantie minimale sur la valeur de rachat de son contrat. Les produits commercialisés au Canada et offrant ce type de garantie proposent une valeur de rachat égale au montant des primes versées.

Cette garantie est presque identique (du moins sur son principe) à la GMMB. Mais dans une GMMB, cette garantie ne joue qu'à une seule date fixée à l'avance, celle de l'échéance du contrat ; la GMSB, en revanche, peut être exercée au gré du client à n'importe quelle date au-delà de la période de carence.

2.3.4 La garantie GMIB

Une garantie vendue dans certains produits de *variable annuities* propose au client une option de sortie en rente selon des conditions fixées lors de la souscription. Il s'agit de la garantie *GMIB*, abréviation de l'anglais *Guaranteed Minimum Income Benefits*, autrement dit garantie de revenu minimal.

Cette garantie permet au client de convertir un **montant garanti** en **rente viagère**, calculée avec une **table de mortalité et un taux technique fixés lors de la souscription** du contrat.

2.4 Différentes Définitions Possibles du Montant Garanti

Les différents types de garanties présentés au cours de la section précédente permettent de définir les prestations qui seront servies, ainsi que les dates auxquelles elles pourront être versées. Mais des raffinements supplémentaires peuvent encore être pris en compte dans la définition de l'engagement. En effet, le montant garanti utilisé pour le calcul des prestations servies peut être évalué selon plusieurs mécanismes distincts, la tarification dépendant bien sûr du mode de calcul choisi par le client.

- **Garantie de Capital** : c'est la plus classique, elle consiste à garantir au client un capital minimal donné au moment de l'exercice de la garantie. La forme la plus répandue est celle de "garantie du cumul des primes versées".

- **Garantie de Rendement** : beaucoup moins courante en France, elle offre au client un taux de revalorisation minimale de son épargne. La limite entre épargne en euro et épargne en UC est alors extrêmement ténue, le risque sur l'épargne étant réduit à sa plus simple expression. Le risque couvert étant loin d'être négligeable, l'impact tarifaire peut être important.

  La figure suivante illustre le fonctionnement d'un contrat offrant une garantie de rendement. Nous avons simulé l'évolution du cours du support par un tirage aléatoire d'un processus lognormal, de volatilité 5%. Le taux sans risque est 3%, le taux de revalorisation garanti est également de 3%, le versement initial s'élève à 100.

A titre d'exemple, entre les années 4 et 5, on constate que le cours du support est tel que l'épargne du client est largement supérieure à son versement initial revalorisé : la valeur intrinsèque (gain réalisé en cas d'exercice immédiat) d'une garantie en cas de vie est alors nulle.

En revanche, on constate qu'aux alentours du 8ème anniversaire du contrat, le cours du support à baissé ; cette fois l'épargne est inférieure au montant initial revalorisé. L'exercice d'une garantie en cas de vie présente un intérêt à cette date.

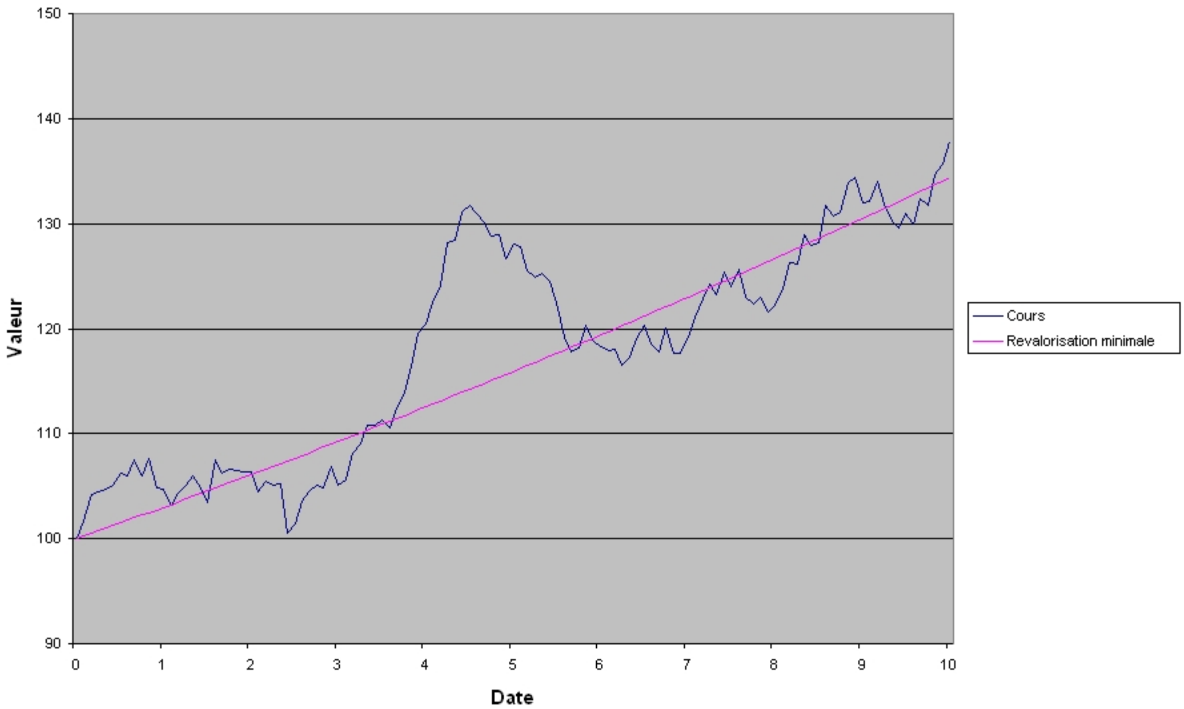


FIG. 2.1 – Exemple de fonctionnement d'un contrat avec garantie de rendement.

– **Effet Cliquet** : Garantie du plus haut cours atteint. Le client est assuré de sortir avec la valeur la plus haute atteinte par son épargne. En général, on ne considère que les valeurs atteintes à certaines dates (typiquement : plus haut cours atteint à date anniversaire du contrat). Cela permet évidemment de réduire les tarifs de la garantie ; cela en limite en revanche l'intérêt pour le client.

  La figure suivante, basée sur la même évolution de cours du support que l'exemple précédent, illustre le fonctionnement d'un cliquet annuel. On constate en particulier que l'évolution du cours entre deux dates anniversaires importe peu ; c'est la valeur du cours à la date de mise à jour du cliquet qui est prise en compte. Ainsi, malgré la hausse très forte et quasi-constante du cours entre les années 3 et 5, le cliquet n'est réévalué qu'annuellement. En revanche, on voit également qu'à partir de l'année 5, une baisse durable affecte le support. Le cliquet reste constant jusqu'au 9ème anniversaire du contrat.

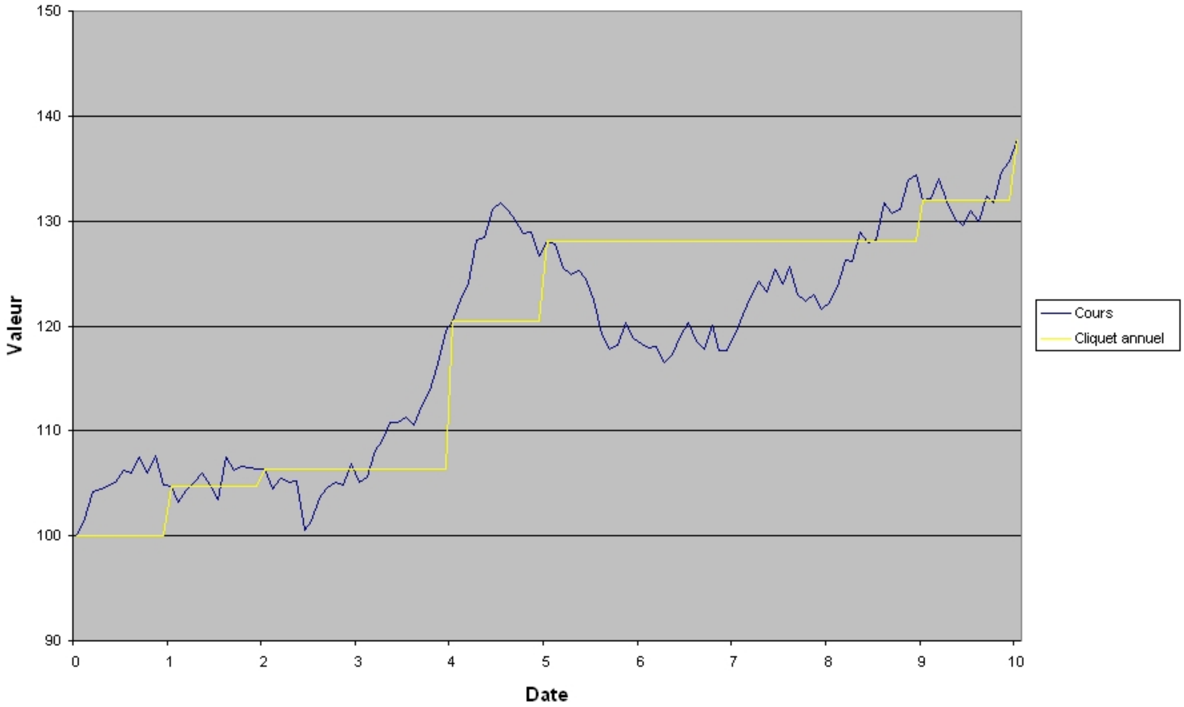


FIG. 2.2 – Exemple de fonctionnement d'un contrat avec garantie cliquet annuel.

– **Garantie du maximum entre garantie de rendement et garantie du plus haut cours atteint** : en combinant sécurité et performance, cette garantie peut être extrêmement séduisante. Sa tarification en est évidemment délicate, et les prix demandés peuvent s'avérer élevés.

  Ce troisième schéma, basé sur la même évolution de cours que les deux précédents, montre le fonctionnement d'une telle garantie. Entre les années 2 et 3, le cours et le cliquet sont en-deça de la revalorisation minimale du versement initial ; c'est donc cette dernière qui est prise en compte. Entre les années 5 et 8, c'est le cliquet qui est pris en compte. Entre les années 4 et 5, le cours du support est plus élevé que le cliquet et que le versement initial revalorisé ; sur cette période, la valeur intrinsèque de la garantie est nulle.

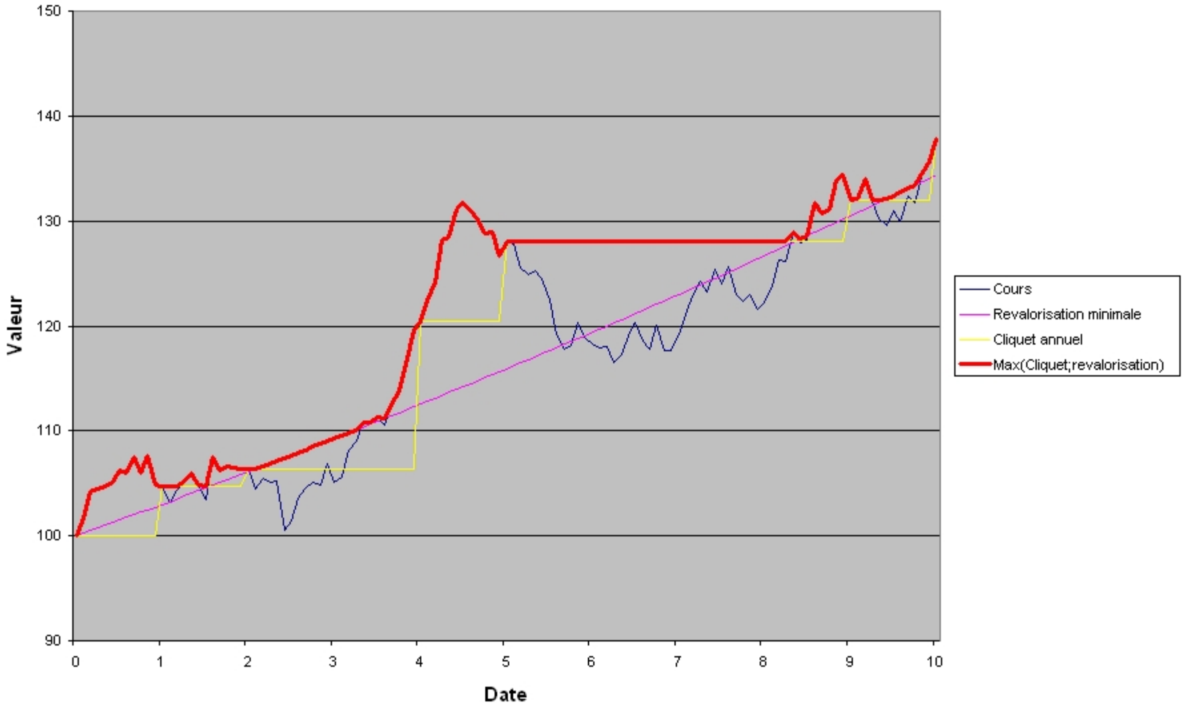


Fig. 2.3 – Exemple de fonctionnement d'un contrat basé sur la garantie d'un maximum entre cliquet annuel et revalorisation minimale.

2.4.1 Conversion en rente pour une garantie GMIB

Pour un capital constitutif donné, l'arrérage de la rente viagère est calculé à l'aide de la table de mortalité garantie et du taux technique de la rente, en utilisant une formule du type $r = K \cdot \frac{D_x}{N_x}$ (dans le cas d'une rente viagère à terme d'avance). On a ici noté r le montant de l'arrérage, et utilisé les nombre de commutations classiques N_x et D_x pour l'assuré d'âge x.

L'influence des paramètres mortalité et taux technique doit être maîtrisée ; ainsi, pour un capital fixé :

- Un taux technique plus élevé se traduit par un arrérage plus élevé (toutes choses égales par ailleurs)

- Une mortalité plus élevée donnerait également lieu à un montant d'arrérage plus élevé (toutes choses égales par ailleurs)

On voit ici poindre une des difficultés spécifiques posées par l'étude de cette garantie : la GMIB ne se résume pas à la maîtrise de l'évaluation du montant garanti. En effet, on peut imaginer des cas où le montant garanti serait supérieur à l'épargne réelle du client, sans que celui-ci ait intérêt à exercer cette garantie de sortie en rente. Cela peut se produire si les conditions de marché (soit du fait d'une mortalité plus élevée, soit, beaucoup plus vraisemblablement, du fait d'un taux technique plus élevé que celui pris en compte dans la tarification) sont telles que la conversion de l'épargne en rente aux conditions de marché conduise à un montant d'arrérage supérieur à celui obtenu lors de la conversion en rente du montant garanti en rente aux conditions du contrat.

A titre d'exemple, en utilisant la table de mortalité TPRV-93 (en supposant un décalage d'âge nul), étudions les arrérages perçus par un assuré de 50 ans.

On suppose que le montant garanti est de 100 000 €, tandis que la valeur de son épargne est de 99 000 €. La logique voudrait qu'il exerce sa garantie. Mais supposons à présent que la GMIB qu'il a souscrite garantit une sortie de rente au taux technique de 2,50%. L'arrérage annuel auquel il a droit en exerçant son option est de 4096,18€.

Si les taux du marché sont passés à 2,60%, la conversion en rente de son épargne aux conditions du marché lui permettent d'obtenir un arrérage annuel de 4119,85 €. L'exercice de la garantie conduit donc à obtenir un arrérage inférieur à une conversion en rente aux conditions du marché. Ainsi dans ce cas, après examen de toutes les hypothèses, il s'avère que l'assuré a intérêt à ne pas exercer sa garantie.

2.5 Tarification Stochastique

Les méthodes de l'actuariat classique en assurance-vie sont basées sur une approche déterministe. La tarification des garanties liées aux UC se prête malheureusement assez mal à ce type d'approche. Garder une approche déterministe reviendrait à se placer implicitement sur un chemin donné pour le cours du sous-jacent. Conserver une hypothèse de "scénario catastrophe" permettrait en théorie de choisir une approche prudentielle, mais les tarifs obtenus risquent fort d'aboutir à des chargements commercialement inacceptables.

La meilleure façon de rendre compte de façon satisfaisante de l'optionalité de la garantie est de panacher les techniques traditionnelles de l'actuariat par des techniques plus proches de la finance pure.

Cette démarche, consistant finalement à adopter une optique de *tarification stochastique*, est à la source de plusieurs développements de ce mémoire.

2.6 Formalisation financière : la garantie envisagée comme option

2.6.1 GMAB : option européenne

La GMAB ne peut s'exercer qu'à une date donnée, à la fin d'une période de carence. S'il est encore en vie au terme de cette période, le client voit son épargne réévaluée au niveau de sa plus haute valeur atteinte. Il se comporte donc comme s'il vendait son épargne au prix correspondant à la plus haute valeur atteinte.

La GMAB peut donc d'interpréter, en termes financiers, comme une option de vente (*put*) européenne dont le sous-jacent serait l'épargne du client. L'assureur est le vendeur de l'option, l'assuré son acheteur. Le prix d'exercice de ce *put* dépend du chemin suivi par la valeur de l'épargne : on parle d'option *path dependant*

2.6.2 GMIB ou GMSB : option américaine

Du point de vue du client, si l'on considère un versement unique sur lequel n'interviendrait aucun mouvement (rachat partiel, arbitrage, reversement), on peut envisager la garantie GMIB ou GMSB comme une option de vente (*put*), exerçable à n'importe quel moment (option *américaine*), dont le sous-jacent serait le montant de l'arrérage obtenu par le client.

Cette interprétation appelle bien entendu plusieurs remarques :

– le comportement du client est dans un premier temps occulté ; il s'agit bien entendu d'une approximation qu'on ne peut accepter lors de l'étude d'un produit d'assurance-vie. Toutefois dans le début de la présente étude, nous conserverons cette hypothèses afin de nous concentrer sur les mécanismes purement financiers de la garantie. Une fois ces rouages bien étudiés, nous devrons naturellement inclure le comportement du client dans la modélisation de la garantie.

– les facteurs influençant le sous-jacent sont ici extrêmement nombreux, ce qui rend l'étude d'autant plus complexe. Parmi ces facteurs, je citerais :

  – La volatilité du cours du support choisi par le client

  – Le taux de revalorisation minimal (*rollup*) garanti

  – La mortalité

  – Le taux technique garanti pour la rente, et sa position par rapport aux taux techniques que le client obtiendrait en sortant aux conditions de marché.

Chapitre 3

Elements de finance conditionnelle

Nous avons esquissé, au chapitre précédent, une première approche des garanties liées au Unités de Compte comme produits financiers optionnels.

Ce chapitre, ainsi que le suivant, s'attachent à rappeler de façon fort succincte les principes de base des instruments optionnels et des techniques de valorisation pouvant être utilisées pour évaluer leur prix. On essaiera autant que faire se peut d'employer des termes français ; néanmoins, comme dans tous les domaines financiers, l'usage d'une terminologie anglo-saxonne est souvent inévitable.

3.1 Options : définition et fonctionnement

3.1.1 Définition

On nomme *option* un produit financier donnant à l'acheteur le droit d'acheter ou de vendre à une date donnée un actif sous-jacent, selon des conditions déterminées lors de la conclusion du contrat.

Une option est définie par :

- **le sous jacent** : actif pouvant être acheté ou vendu par le détenteur de l'option.
- **l'échéance** : date à laquelle le contrat d'option expire.
- **les dates d'exercice possibles** : il peut s'agir d'une date unique, ou d'une période limitée ou illimitée dans le temps.
- **le prix d'exercice ou strike** : prix d'achat ou de vente du sous jacent, défini à l'achat de l'option. Ce prix de vente peut être un montant fixe, ou au contraire varier au cours du temps.
- **la prime** : prix de l'option résultant de la confrontation des ordres d'achat et de vente présentés sur le marché.

3.1.2 Fonctionnement

Exemple : *Option d'achat de type européen*
Le *sous-jacent* de l'option est une action de la société X, cotée S à l'instant 0. L'acheteur de l'option possède le droit d'acheter à l'horizon T le sous-jacent au *prix d'exercice* - ou *strike* - E.

Il s'agit donc d'une option d'achat - on parle couramment de *call*.

A l'instant T, si le cours S_t de l'action X est supérieur au prix d'exercice E, l'acheteur *exercera* son option, en faisant valoir son droit. L'achat d'une action à un prix inférieur à son cours lui permettra d'enregistrer un gain économique égal à $S_t - E$.

Si en revanche à l'instant T le cours S_t est inférieur au prix d'exercice, le détenteur de l'option n'aura aucun intérêt à l'exercer et la valeur de l'option sera nulle.

L'option présente une forte **asymétrie** : la perte maximale de l'acheteur du call se limite à la prime qu'il aura payée pour l'acquérir. Le vendeur du call, en l'absence de couverture, s'il enregistre au maximum un gain égal à cette prime, peut enregistrer une perte infinie (le cours S_t n'étant pas limité à la hausse a priori).

Le schéma ci-dessous illustre bien l'asymétrie du produit pour l'acheteur et le vendeur. On représente graphiquement, en fonction du cours atteint par le sous-jacent à la date d'exercice, les gains et les pertes réalisées sur un call dont le prix d'exercice est 22, et la prime 0,18.

Lorsque le cours est inférieur à 22, l'acheteur n'exerce pas son option ; il réalise une perte égale à la prime qu'il a payée pour l'acquérir (0,18). Le vendeur, de façon symétrique, encaisse un gain égal à cette prime.

Lorsque le cours est supérieur à 22, l'acheteur exerce son option. Toutefois, il ne commence à gagner de l'argent sur l'opération qu'à partir du moment où le gain réalisé lors de l'exercice couvre la prime de l'option. Ici, c'est lorsque le cours vaut 22,18 que cet équilibre est atteint. Entre 22 et 22,18, l'exercice de l'option permet à l'acheteur de diminuer sa perte. Les gains réalisés par le vendeur décroissent de façon totalement symétrique, et au-delà de 22,18, le vendeur enregistre une perte sur l'opération.

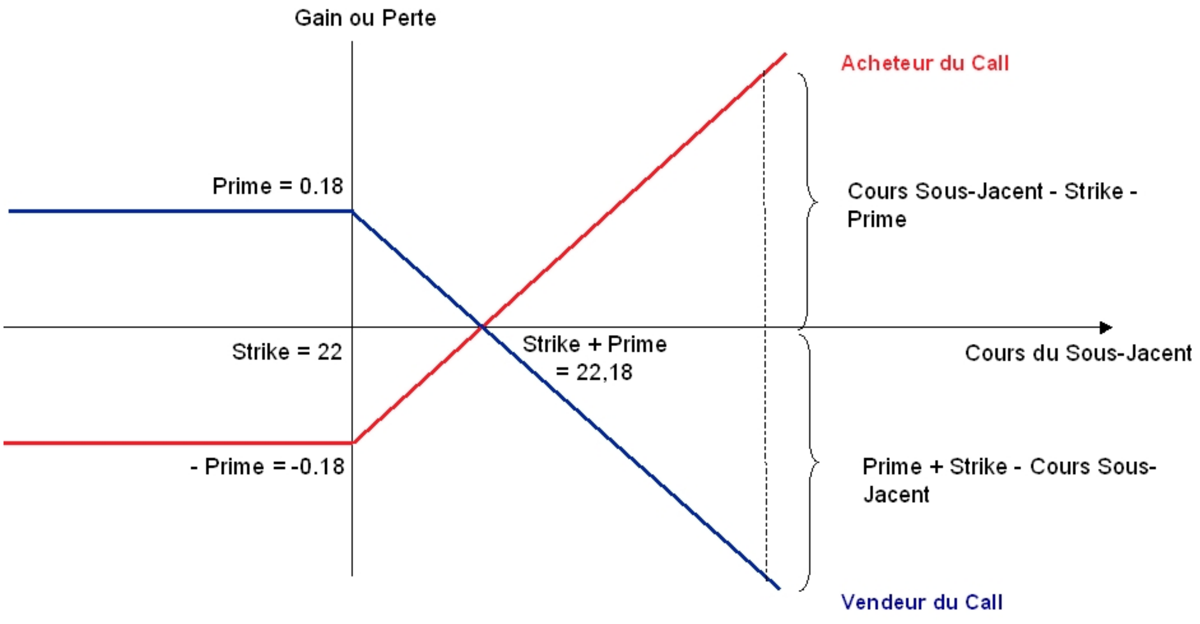


FIG. 3.1 – Diagramme des gains et pertes pour l'acheteur et le vendeur d'un call.

A l'inverse, l'asymétrie d'une option de vente ou *put* est illustrée par le schéma suivant :

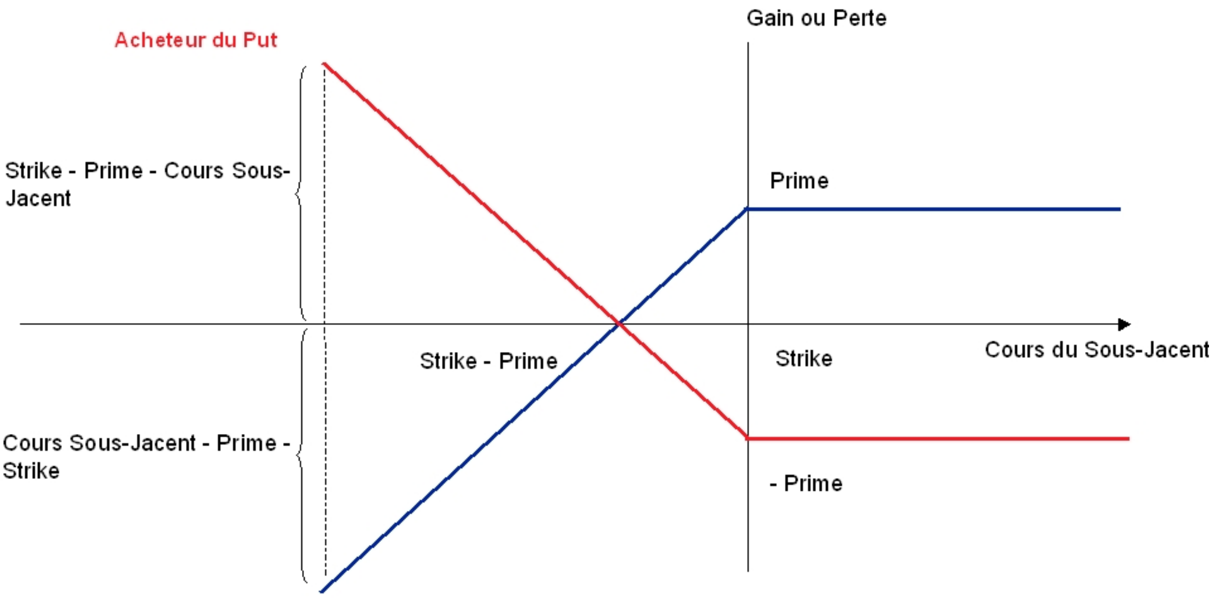


FIG. 3.2 – Diagramme des gains et pertes pour l'acheteur et le vendeur d'un put.

Lorsque le cours du sous-jacent est supérieur au strike à la date de maturité, l'option n'est pas exercée, et l'acheteur enregistre une perte égale à la prime (gain égal à la prime pour le vendeur). Lorsque le cours décroit en deça du prix d'exercice, la perte réalisée sur l'option décroit elle aussi. Lorsque le cours du sous-jacent devient inférieur au strike diminué de la prime, l'acheteur réalise un gain sur la globalité de l'opération (symétriquement, le vendeur réalise une perte).

On peut dès lors s'interroger sur l'intérêt d'une telle opération pour le vendeur, qui, dans tous les cas, endosse les risques les plus importants. Le vendeur fait en réalité le pari que l'option ne sera pas exercée, et compte donc ainsi enregistrer des gains grâce aux primes payées par l'acheteur. Ce type d'opérations portant en général sur un grand nombre de titres, les montants en jeu peuvent s'avérer considérables.

3.2 Options dépendant du chemin suivi par le sous-jacent

Les exemples fournis jusqu'ici comportaient le plus souvent un prix d'exercice fixé dès la conclusion du contrat. L'estimation de la valeur intrinsèque de l'option à tout instant est donc extrêmement aisée puisqu'il suffit de comparer le prix d'exercice au cours du sous-jacent à l'instant t.

D'autres options présentent des modalités plus complexes : dans certains cas, le prix d'exercice ne sera plus une constante, mais une fonction d'un certain nombre de paramètres liés au sous-jacent.

Lorsque le prix d'exercice à l'instant t dépend du chemin suivi par le cours du sous-jacent, la terminologie anglo-saxonne classique parle d'option *path-dependant*. On peut par exemple imaginer une option de vente dont le prix d'exercice serait le cours maximum atteint par le sous-jacent au cours de la période de vie de l'option.

Il n'y a pas de limite *a priori* à la sophistication que l'on peut mettre en oeuvre dans la définition d'une option. En revanche, la détermination du prix reste une contrainte inévitable, dont il faut pouvoir s'acquitter au mieux.

3.3 Terminologie

3.3.1 Expressions courantes

Valeur intrinsèque d'une option : il s'agit de la valeur que cette option aurait si l'on pouvait l'exercer à l'instant considéré. Pour une option de vente européenne simple sur un sous-jacent dont le cours est $S(t)$, par exemple, cette valeur intrinsèque est, à tout instant : $Max(E-S(t);0)$.

Valeur temporelle d'une option : c'est le complément de la valeur intrinsèque à la valeur de la prime de l'option. Elle s'annule à l'échéance

Le vocabulaire courant concernant les options comporte aussi des termes spécifiques pour caractériser la position du cours du sous-jacent par rapport au prix d'exercice.

Option *à la monnaie* : option dont le prix d'exercice est égal au cours du sous-jacent. Dans ce cas la valeur intrinsèque de l'option est nulle.

Option *dans la monnaie* : option dont le prix d'exercice est inférieur au cours du sous-jacent. La valeur intrinsèque de l'option est strictement positive.

Option *hors de la monnaie* : option dont le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent. La valeur intrinsèque de l'option est nulle.

Enfin nous parlerons à plusieurs reprises dans la suite de cette étude de ***payoff***. Ce terme anglo-saxon désigne le gain engendré par l'exercice de l'option. Il s'agit donc d'une fonction du temps, dans le calcul de laquelle intervient au moins le cours du sous-jacent. Dans le cas d'un put européen d'échéance T, cette fonction prend une forme simple : $Max(K - S_t; 0)$. Mais sur des produits plus sophistiqués, la fonction de payoff peut être beaucoup plus complexe.

3.3.2 Différents types d'options

L'option décrite ci-dessus ne peut être exercée qu'à une date précise : on parle d'une option *européenne.*

Les options dites *américaines* peuvent au contraire être exercées à n'importe quel instant avant la date d'échéance.

Les options décrites ci-dessus sont dites *vanille* (*plain vanilla options* en anglais) ; ce sont les premières apparues, les plus répandues et les plus simples.

Cependant, les besoins de couverture très divers ont favorisé l'apparition d'options plus complexes, comme par exemple :

– options asiatiques : aussi dites "options sur moyenne", elles s'appuient non pas sur le cours instantané du sous-jacent, mais sur une moyenne de ce cours sur une période.

– options bermudéennes (*bermuda option*) : options à dates d'exercices multiples mais fixées à l'avance

- options *lookback* : option dont le prix d'exercice n'est pas une constante, mais représente un extremum atteint par le cours du sous-jacent. Pour un put *lookback*, le vendeur garantit ainsi au détenteur de l'option qu'il achètera le sous-jacent au prix le plus élevé atteint par ce dernier sur la période.

Ces options sont souvent regroupées sous le terme générique d'options exotiques.

3.4 Deux hypothèses fondamentales

Nous rappelons ici deux conditions qui doivent impérativement être réalisées pour que l'on puisse correctement évaluer un prix "de marché" pour les instruments traités.

3.4.1 Complétude des marchés

Les marchés doivent pouvoir être considérés comme complets : c'est-à-dire qu'il doit exister des actifs financiers dépendant de tous les états de la nature possibles.

3.4.2 Absence d'Opportunité d'Arbitrage

L'**Absence d'Opportunité d'Arbitrage** est une des hypothèses les plus fréquemment utilisées dans les travaux financiers. Elle n'est pas propre aux instruments optionnels, mais il est important de la mentionner, car tous les développements financiers de cette étude s'appuieront, explicitement ou non, sur cette hypothèse.

L'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage consiste à supposer qu'il ne peut y avoir de création de richesse sans risque à partir d'un capital nul. Ses traductions pratiques sont multiples ; elle implique notamment que la fonction d'actualisation soit une relation d'équivalence.

Pour des flux financiers certains, l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage implique qu'il n'existe qu'une seule valeur, au comptant ou à terme fixé, du taux de rémunération sans risque pour une échéance donnée. Sous l'hypothèse d'AOA, deux opérations débouchant sur le même flux futur certain doivent donc avoir la même valeur initiale.

Si ce n'était pas le cas, la valeur actuelle d'un flux futur dépendrait du chemin suivi. Il suffirait alors de vendre l'actif de valeur actuelle la plus chère et d'acheter simultanément l'actif de valeur actuelle la moins chère pour réaliser un arbitrage, et mettre à défaut l'hypothèse.

C'est l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage qui permet en particulier d'établir les relations déterministes entre les taux comptant et les taux à terme ; grâce à ces relations, la connaissance de la structure des taux comptant (c'est-à-dire de la courbe des taux) nous permettra de déterminer tous les taux à terme de même date d'estimation.

3.5 Principe de valorisation financière d'une option

On considère que le prix d'une option correspond au coût de mise en place d'un portefeuille qui délivrerait exactement les mêmes flux que l'option quel que soit l'état du marché. Un tel portefeuille est appelé portefeuille de réplication. L'enjeu est donc en général de réussir à construire ce portefeuille de réplication de sorte qu'il se comporte comme l'option quelle que soit l'évolution du marché.

Cette formulation peut paraître anodine : on constatera au cours des diverses démonstrations présentées dans cette étude que ce principe est en fait une méthode générale, à l'origine de la plupart des arguments utilisés pour les calculs de prix d'options.

3.6 Parité Call-Put

Un résultat classique et intéressant permet d'établir une relation entre le prix d'un put et d'un call (dans le cas d'options européennes). Cette relation est nommée "parité Call-Put".

Soit C_t le prix d'un call européen et P_t le prix du put sur le même sous-jacent de cours S_t, de même maturité T et de même prix d'exercice K. On note r le taux sans risque.

En t, on achète un call et on vend un put.

Le prix du portefeuille ainsi constitué est $C_t - P_t$.

A l'instant $t+T$, le call nous permettra d'encaisser $Max(S_{t+T} - K; 0)$, et le put nous obligera à verser $-Max(K - S_{t+T}; 0)$.

Si $S_{t+T} > K$, on exercera le call, ce qui permettra d'enregistrer un gain de $S_{t+T} - K$. Le put, en revanche, ne génère aucun flux car il n'est pas exercé.

Si $S_{t+T} < K$, le call ne sera pas exercé, en revanche le put obligera à acheter au prix K des actifs dont le prix est S_{t+T}. On enregistre dans ce cas une perte de $-(K - S_{t+T})$.

On constate que dans tous les cas, la valeur finale de ce portefeuille est $S_{t+T} - K$.

Si l'on achetait en t une action S_t et que l'on effectuait un emprunt au taux sans risque remboursable en $t + T$ d'un montant Ke^{-rT}, on aurait également un portefeuille d'une valeur finale $S_{t+T} - K$.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage impose donc que les prix initiaux des deux portefeuilles prenant la même valeur finale soient égaux à l'instant t.

On en déduit donc que :

$$\boxed{C_t - P_t = S_t - Ke^{-rT}}.$$

3.7 Volatilité

Le plupart des techniques de valorisation d'options s'appuient largement sur la notion de **volatilité**. Il s'agit d'une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier. La volatilité du cours d'une action permet de mesurer le niveau d'incertitude sur l'évolution future de ce cours.

Plus la volatilité augmente, plus les probabilités pour que le cours augmente ou baisse fortement sont grandes.

Pour le détenteur d'une action, ces deux risques sont symétriques, et c'est à lui d'arbitrer entre des opportunités de gains plus importantes (volatilité élevée) et des pertes limitées en cas de baisse du cours (volatilité basse).

Pour le détenteur d'une option, en revanche, l'asymétrie fondamentale du produit change complètement l'approche. Ainsi pour le détenteur d'un *call* européen, lorsque la volatilité du sous-jacent augmente, la probabilité pour que son cours excède largement le prix d'exercice croît également. Les opportunités de gain sont plus élevées, en revanche les pertes potentielles sont toujours limitées à la prime de l'option. On s'attend donc naturellement à ce que **le prix du call augmente avec la volatilité du sous-jacent**.

De la même façon, le détenteur d'un *put* bénéficiera également d'une hausse de la volatilité, puisque la probabilité pour que le cours du sous-jacent baisse fortement devient plus forte. Comme les pertes sont ici aussi limitées à la prime de l'option, on en déduit que **le prix du put augmente lui aussi avec la volatilité du sous-jacent**.

La volatilité peut s'interpréter comme l'écart-type du rendement continu du sous-jacent sur une année. Des méthodes statistiques permettent ainsi de calculer, en fonction de mesures du cours, une valeur historique de la volatilité. Il est bien entendu assez risqué de considérer ces mesures comme des prédictions valables pour l'avenir : la volatilité n'est en effet pas une donnée figée et peut évoluer au cours du temps pour une action donnée. Néanmoins de telles études rétrospectives fournissent une base d'analyse intéressante lors de l'étude du prix d'une option.

Comme nous le verrons au chapitre suivant, la plupart des modèles d'évaluation de prix d'une option reposent sur des hypothèses fortes concernant la volatilité.

3.8 Valorisation en environnement "Risque Neutre"

La notion d'environnement risque neutre est un autre élément fondamental utilisé pour les calculs de prix d'options.

Un environnnement dit *risque neutre* est un environnement au sein duquel tous les intervenants sont indifférents au risque. Dans un tel environnement, aucune compensation n'est nécessaire à la prise de risque, et, quel que soit le support, le rendement attendu est le même : c'est le taux sans risque.

Faire l'hypothèse qu'on évolue dans un monde risque neutre est bien entendu la source de nombreuses simplifications pour l'évaluation des produits dérivés, et des options en particulier.

Dans la pratique, la valorisation en environnement risque neutre passe par la construction d'une mesure de probabilité spécifique, fort opportunément désignée comme "probabilité risque neutre", pondérant les différents états futurs possible de l'univers de façon à ce que tous les actifs aient le même rendement. L'existence et l'unicité de la mesure de probabilité risque neutre sont des résultats fondamentaux, qu'on se contentera de mentionner ici, leur démonstration dépassant très largement le cadre de cette étude.

Le modèle proposé par Black et Scholes, ainsi que les modèles d'arbres binomiaux, s'appuient ainsi sur des calculs en environnement risque neutre.

Chapitre 4

Méthodes de détermination du prix d'une option

Nous abordons ici de façon très générale les méthodes les plus largement utilisées pour l'évaluation de prix d'options.

Les formules de Black & Scholes nous fourniront des prix "de référence", auxquels nous pourrons comparer les prix obtenus par d'autre méthodes sur des options similaires. La validation des algorithmes développés par la suite en sera grandement facilitée.

Pour nous permettre d'élargir le champ d'action de notre étude, nous utiliserons des algorithmes d'approximation des prix d'options, qui s'avèrent beaucoup plus versatiles et flexibles. C'est notamment le cas des algorithmes d'arbres binomiaux.

4.1 Formules de Black & Scholes pour des options européennes

Les formules de Black et Scholes, publiées en 1973, sont probablement l'un des résultats les plus célèbres de la finance. Elle permettent d'obtenir, pour des options européennes d'achat ou de vente d'un unique sous-jacent, une formule analytique de calcul du prix.
Nous rappelons ici uniquement les conclusions, leur démonstration (par ailleurs disponible dans tout manuel de finance digne de ce nom) dépassant le contexte de l'étude.

Le modèle se base sur les hypothèses suivantes :

- Absence d'opportunités d'arbitrage
- Le sous-jacent ne verse pas de dividende
- L'action suit un processus lognormal : $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ où z représente un mouvement brownien standard. Rappelons qu'un mouvement brownien est un processus gaussien à accroissements indépendants et stationnaires. L'accroissement $z_t - z_s$ où $0 \leq s < t$ suit une loi gaussienne centrée de variance $(t - s)$
- Le taux sans risque r est constant au cours du temps, et est identique quelle que soit la maturité considérée
- La volatilité σ du sous-jacent est constante dans le temps.

– Il n'y a pas de coûts de transaction

La modélisation du cours du sous-jacent par un processus lognormal peut s'interpréter de façon concrète. En effet l'expression mathématique du processus fait clairement apparaître deux termes :

– Un terme dépendant uniquement du temps représenté par μdt : C'est la tendance globale de l'évolution du cours

– Un terme aléatoire σdz : ce brownien va introduire des mouvements aléatoires autour de la tendance. Le coefficient multiplicatif σ permet de caractériser l'amplitude de ces mouvements. Plus la volatilité σ est faible, plus les variations du cours autour de la tendance seront limitées. A l'inverse, si la volatilité est forte, les mouvements du cours auront une propension beaucoup plus marquée à s'écarter de la tendance moyenne.

Les deux schémas illustrent cet écart : à partir de la même tendance (taux d'évolution de 3%), une centaine de tirages aléatoires d'un processus lognormal ont été effectués, avec une volatilité de 5% dans le premier cas, de 15% dans le second cas. Les deux graphiques ayant la même échelle, on constate que l'augmentation de la volatilité favorise des écarts plus importants par rapport à la tendance moyenne.

Volatilité = 5%

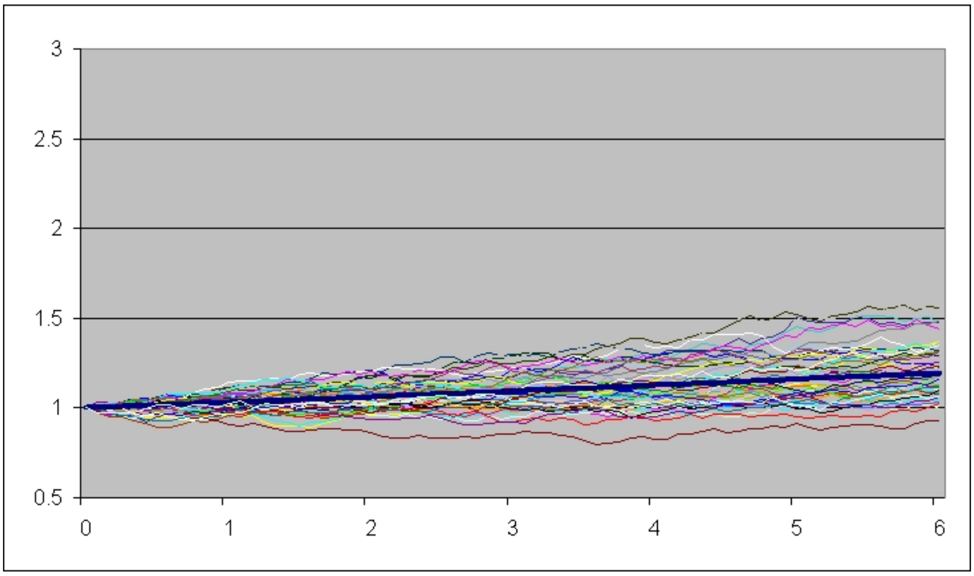


Fig. 4.1 – Tirages aléatoires d'un processus lognormal - Volatilité = 5%

Volatilité = 15%

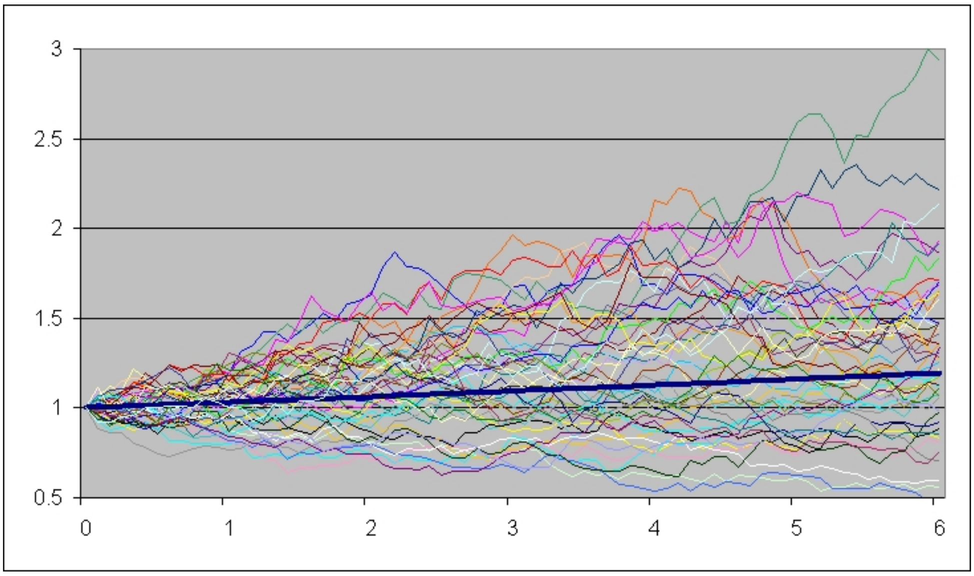


FIG. 4.2 – Tirages aléatoires d'un processus lognormal - Volatilité = 15%

Dans ce cadre, le prix d'un call s'écrit :

$$\boxed{C = S_0 N(x_1) - Ke^{-rT} N(x_2)}$$

Et celui d'un put :

$$\boxed{P = Ke^{-rT} N(-x_2) - S_0 N(-x_1)}$$

avec :

$$\boxed{x_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}$$

et

$$\boxed{x_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale standard.

On vérifie que la parité Call-Put est bien respectée.

Les formules de Black et Scholes sont une référence incontournable, à tel point qu'on estime parfois que les prix du marché ont tendance à s'en inspirer. Une représentation de la réalité sert donc de référence influençant la réalité même.

Une autre remarque d'importance concerne la volatilité implicite. Pour un prix donné, l'inversion des formules de Black et Scholes permet de retrouver une valeur (unique) de la volatilité. Le calcul de cette volatilité dite implicite permet de cerner les opinions quant au sous-jacent de plusieurs acteurs livrant un prix différent pour une même option.

4.2 Détermination du prix d'options américaines

La détermination du prix des options américaines pose un certain nombre de problèmes ; fondamentalement, la complexité de cette opération provient du fait que l'exercice ne se fait pas à une date donnée, mais peut s'effectuer à tout instant avant l'échéance.

Pour pouvoir évaluer le prix de ces options, il est donc capital de pouvoir déterminer quand s'effectuera l'exercice. Pour ce faire, la démarche utilisée est de considérer que le détenteur de l'option exercera celle-ci lorsque son espérance de gain sera optimale.

Partant de cette hypothèse fondamentale, plusieurs types de mécanismes de calcul peuvent être employés. Dans la plupart des cas, à l'inverse de ce que l'on peut trouver sur des options européennes, il sera impossible de déterminer une formule exacte d'évaluation de la prime ; les méthodes décrites dans la suite de ce chapitre sont des méthodes numériques.

4.3 Arbres Binomiaux

Les formules de Black and Scholes ont de nombreuses vertus : leur expression analytique permet un calcul simple, fiable, aisé à mettre en place et peu consommateur de ressources.

Elles ont en revanche plusieurs limites : elles ne sont valables que pour un certain type d'options, et sous certaines hypothèses très restrictives. Elles sont en particulier inadaptées par nature à l'évaluation d'options américaines.

D'autres algorithmes permettent en revanche de mener des évaluations sur des options plus élaborés, et s'avèrent plus versatiles, quoique consommateurs de ressources. C'est notamment le cas des algorithmes dits "d'arbres binomiaux" que nous allons présenter maintenant. Cette méthode a été exposée par Cox, Ross et Rubinstein dans un article publié en 1979.

4.3.1 Exemple d'arbre simple (1 pas) pour un call européen

On tente d'évaluer le prix d'un call de type européen (une seule date d'exercice possible), offrant le droit d'acheter une action au prix de 21€ dans 3 mois. Le cours de l'action à la date d'évaluation est de 20€.

On suppose que seuls deux états sont possibles au terme : à la fin des trois mois, l'action considérée vaudra soit 18€, soit 22€. Dans le premier cas, l'option d'achat n'est pas exercée et l'option vaut 0€ au terme ; dans le second cas elle sera exercée, sa valeur au terme est de 1€.

1ère étape : on calcule la composition d'un portefeuille sans risque.

On compose un portefeuille en achetant Δ actions et en vendant 1 call. On cherche à déterminer Δ tel que la valeur du portefeuille au terme soit assurée quel que soit l'état de l'univers au terme.

Dans le premier cas, l'action vaut 18€, tandis que la valeur de l'option est de 0, la valeur du portefeuille est donc de 18Δ.

Dans le second cas l'action vaut 22€et l'option vaut 1€, donc la valeur du portefeuille est de $22\Delta - 1$. La valeur du portefeuille étant la même dans les deux cas, on peut facilement déterminer la valeur de Δ ; on trouve $\Delta = 0,25$.

2ème étape :

On connait la composition de ce portefeuille ; sa valeur au terme, quelle que soit la valeur de l'action, sera de $22 \times 0,25 - 1 = 18 \times 0,25 = 4,5$

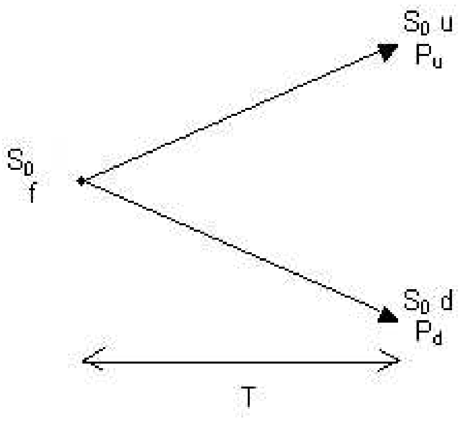
Le rendement de ce portefeuille sans risque est égal au taux sans risque. La valeur initiale du portefeuille se déduit donc facilement de sa valeur au terme : $4,5 \cdot e^{-rT}$ avec T=0,25 (3 mois). Si le taux sans risque est égal à 12%, la valeur initiale du portefeuille est donc de 4,367.

On en déduit le prix f de l'option : à l'instant initial, le coût du portefeuille est égal à $0,25 \cdot 20 - f$.

On trouve ainsi $f = 0,633$.

4.3.2 Généralisation du calcul - Formalisation

Le calcul précédent peut être généralisé à un put, ou plus largement à une option européenne pour laquelle seules deux issues sont possibles, chaque issue étant caractérisée par un *payoff* spécifique. On considère donc une option portant sur un sous-jacent de cours S_0 à l'instant initial. La durée de l'option est T, et au terme de cette période, le cours du sous-jacent a pu soit augmenter d'un facteur u soit diminuer d'un facteur d. Dans le premier cas, le *payoff* est noté P_u, dans le second cas P_d.



Comme précédemment on détermine la valeur de Δ qui permet d'immuniser un portefeuille composé d'une position longue de Δ sur le sous-jacent et courte d'une option. La valeur finale du portefeuille en cas de hausse est $S_0 u\Delta - P_u$. La valeur finale du portefeuille en cas de baisse est $S_0 d\Delta - P_d$. La valeur de Δ permettant d'immuniser le portefeuille est donc :

$$\Delta = \frac{P_u - P_d}{S_0 u - S_0 d}$$

Dans ce cas le portefeuille est sans risque et doit donc rapporter le taux d'intérêt dans risque. La valeur du portefeuille à l'instant initial est donc $(S_0 u\Delta - P_u)\, e^{-rT}$.

Le prix initial du portefeuille étant égal à $S_0\Delta - f$ où f est le prix de l'option, il s'ensuit que $f = S_0\Delta - (S_0 u\Delta - P_u)\, e^{-rT}$.

En reportant l'expression littérale de Δ, on trouve :

$$f = (pP_u + (1-p)P_d)\, e^{-rT}$$

avec :

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

N.B. : Cette formule ne fait pas intervenir les probabilités respectives d'un mouvement à la hausse ou à la baisse du sous-jacent. On remarquera cependant que p pondère les deux états possibles du monde à la date d'échéance : p est en fait la probabilité d'un mouvement à la hausse dans l'environnement risque neutre.

4.3.3 Pertinence des prix obtenus - lien avec le modèle de Black & Scholes

Composition de l'algorithme pour une option européenne

L'arbre à deux issues proposé est une simplification bien imprécise de la réalité lorsque le sous-jacent considéré est une action ou une part d'OPCVM (ce qui sera le plus souvent le cas dans le cadre de la garantie GMSB). En effet le cours de la part d'OPCVM peut *a priori* prendre une infinité de valeur à la date d'exercice T.

Une modélisation plus pertinente consiste à utiliser les résultats du paragraphe précédents pour des périodes courtes, correspondant à des subdivisions de la période T.

Sur chaque intervalle élémentaire δt le cours du sous-jacent n'a que deux évolutions possibles : Su ou Sd.

L'exemple ci-dessous montre comment le schéma élémentaire peut être composé sur plusieurs périodes.

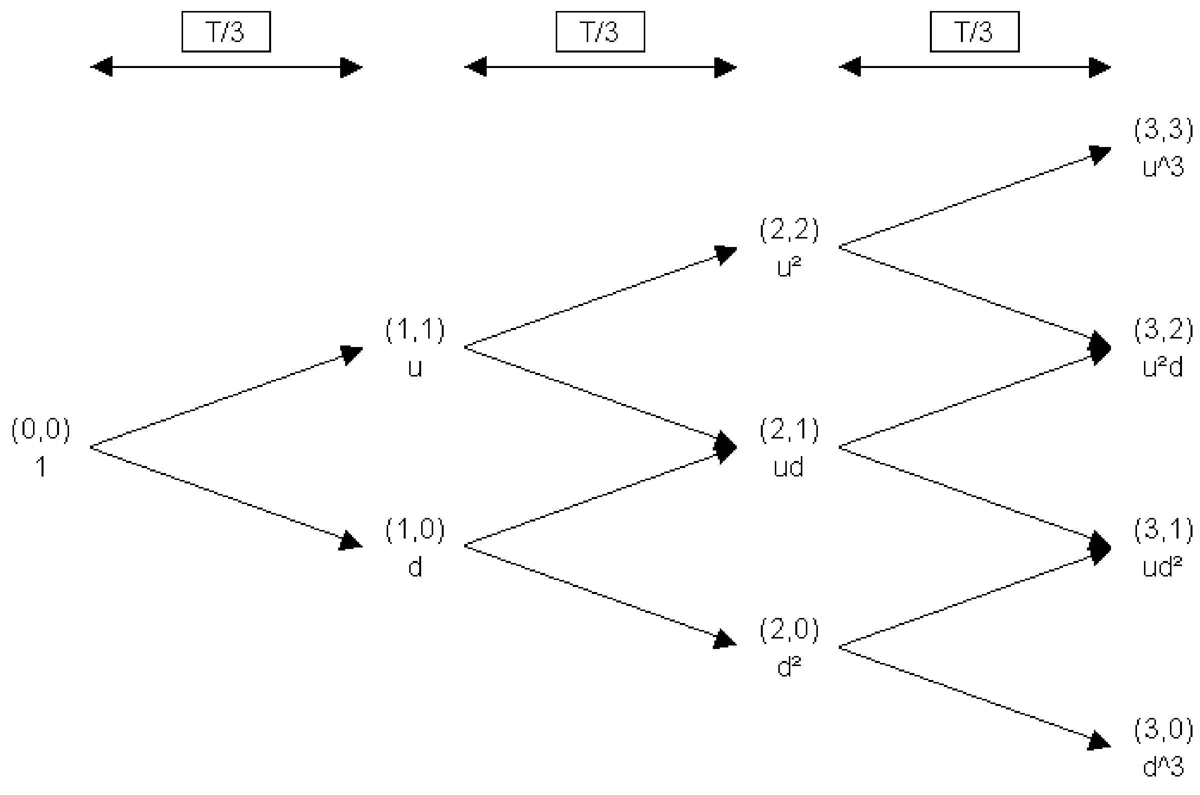


Fig. 4.3 – Composition de l'algorithme d'arbre binomial sur plusieurs périodes

On constitue ainsi un treillis de chemins possibles pour le cours du sous-jacent ; la précision du maillage temporel ainsi réalisé sera déterminante pour la précision de l'évaluation du prix de l'option.

Il est évident que l'utilisation d'un algorithme binomial pour la valorisation d'un call ou d'un put européen n'a pas vraiment d'intérêt puisque l'on dispose d'une formule fermée (Black & Scholes), qui permet une estimation plus fiable tout en réduisant la charge de calculs. Toutefois la comparaison effectuée a le mérite de prouver la pertinence des résultats obtenus par le biais d'un arbre binomial. Ce résultat est d'autant plus important que ce type d'algorithme va être un des outils principaux de la suite de cette étude ; la méthode de l'arbre binomial est en effet un moyen très naturel de valoriser une option américaine.

Justification de la convergence des résultats

L'objet de ce paragraphe n'est pas de donner une justification mathématique précise de cette convergence, mais d'aider à comprendre les mécanismes en jeu.

Au nœud de coordonnées (i, j) la valeur du support est $S_0 u^j d^{i-j}$. Le nombre de chemins possibles pour atteindre cette valeur est C_i^j.

Dans le modèle choisi la volatilité du sous-jacent est σ. On suppose que pour le pas de temps δt, on choisit les coefficients :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

Pour un nœud donné à l'instant t, il ne peut par définition y avoir que deux issues possibles à l'instant $t + \delta t$, déterminées par une évolution de u ou de $\frac{1}{u}$. L'évolution du sous-jacent pour un pas de temps élémentaire correspond donc à une variable aléatoire de Bernoulli.

Ainsi le cours de l'action à un instant donné correspondant à i intervalles élémentaires est le produit de i variables aléatoires pouvant prendre les valeurs u ou $\frac{1}{u}$. Si l'on considère le logarithme de l'évolution du cours, on trouve la somme de i variables aléatoires pouvant prendre deux valeurs ($ln(u)$ et $ln(d)$). Ce sont des variables dites de Bernoulli ; si l'on considère de plus que ces variables sont indépendantes - ce qui revient à considérer que l'évolution du cours de l'action à un instant donné ne dépend pas des mouvements passés, cette somme est une variable aléatoire binomiale.

Lorsque l'effectif est suffisamment élevé, il est classique d'identifier le comportement d'une variable discrète binomiale à celui d'une variable continue normale.

Le rendement du sous-jacent suivant une loi de distribution normale, la distribution des valeurs du cours des sous-jacent suit ici une variable aléatoire lognormale.

Ainsi lorsque le nombre de nœuds est suffisamment important (*i.e.* lorsque le pas de temps élémentaire est suffisamment petit), le modèle choisi pour l'évolution du sous-jacent dans le modèle d'arbre binomial se rapproche de celui retenu par Black et Scholes.

4.3.4 Rapidité de la convergence

A titre d'exemple, on considère un put européen ainsi défini :

– Durée : 1 an

– Le cours initial du sous-jacent est 100

– Le prix d'exercice est 110

– La volatilité du sous-jacent est de 20%

– le taux sans risque est de 3%

Le prix de cette option calculé par la formule de Black et Scholes est 12,0424.

Le graphique suivant montre, pour la même option, la convergence des résultats obtenus par l'algorithme d'arbre binomial vers le prix Black et Scholes, en fonction du nombre d'itérations.

On obtient une approximation de ce prix à 1% près à partir de 9 itérations.

Une précision de 0,50% s'obtient dès la 23ème itération.

Pour réduire l'erreur à moins de 0,10%, il faut pousser le nombre d'itérations à 160.

A titre de comparaison, même en effectuant 1 000 000 tirages à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo, on ne parviendra pas à certifier une précision de 0,10% sur un tel put.

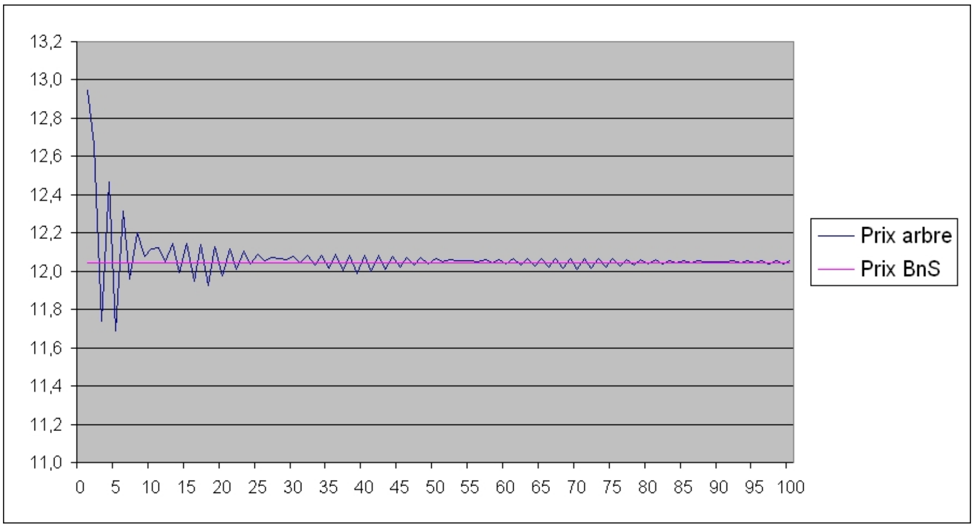


Fig. 4.4 – Convergence du prix obtenu par arbre binomial vers le prix Black and Scholes

4.4 Utilisation d'arbres binomiaux pour la valorisation d'options américaines

4.4.1 Principe

Le cas d'une option américaine va en fait s'étudier comme la juxtaposition d'arbres binomiaux simples selon le modèle présenté au paragraphe précédent.

L'arbre binomial offre une discrétisation du temps qui permet l'approche numérique. Toutefois, l'idée générale du raisonnement tenu consiste à attendre du détenteur de l'option un **comportement optimal**. Le détenteur peut à chaque instant (ici à chaque pas de temps) exercer son option. Il le fait si et seulement si la valeur qu'il obtient d'un exercice immédiat est supérieure à l'espérance (sous la mesure de probabilité risque neutre) de la valeur qu'il obtiendrait en la conservant.

Dans la pratique, on procèdera donc de la façon suivante. Au nœud (i, j) on connait la valeur du sous-jacent, on connait les valeurs de l'option en cas de hausse et de baisse du sous-jacent (on se trouve en effet aux nœuds $(i + 1, j)$ ou $(i + 1, j + 1)$ qui ont déjà été évalués.

On calcule donc la valeur de l'option élémentaire à l'aide de l'algorithme présenté ; on compare cette valeur à la valeur obtenue en exerçant immédiatement l'option.

4.4.2 Exemple

Etudions le cas d'une option de vente américaine, ainsi définie :

- La durée de l'option est égale à 1 an
- Le cours initial du sous-jacent est 100
- Le prix d'exercice est 110
- La volatilité du sous-jacent est 20%
- Le taux sans risque est 3%

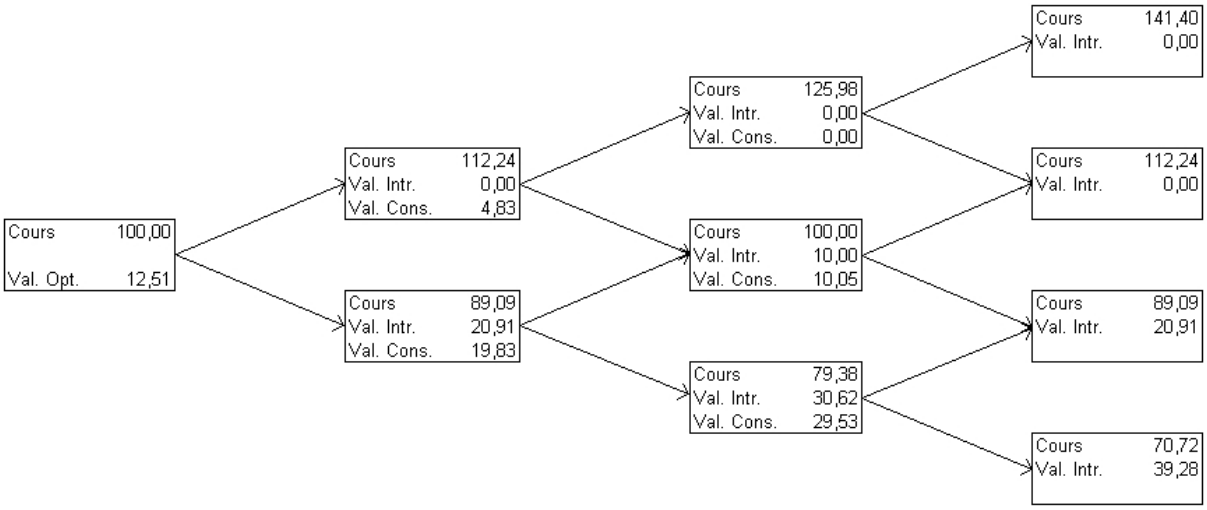
Dans le but de donner un exemple simple, nous utiliserons un nombre d'itérations volontairement faible. Nous divisons donc la durée de l'option en 3 pas de temps.

1 - Détermination du cours

La première étape consiste à trouver les valeurs que peut prendre le sous-jacent à chaque pas de temps. On les obtient très facilement ici, toutes les variables étant connues ; il suffit de calculer $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$,avec ici $dt = \frac{1}{3}$.

2 - Valeur de l'option au terme

Nous en déduisons facilement la valeur de l'option au terme pour chacune des 4 valeurs que peut prendre le sous-jacent en $t = 1$ (l'option est un put américain).



3 - Evaluation à $t = \frac{2}{3}$

Nous nous plaçons à présent en $t = \frac{2}{3}$. Pour chaque valeur possible du sous-jacent, nous pouvons calculer la valeur d'exercice anticipé de l'option. Nous utilisons ensuite l'algorithme d'arbre binomial élémentaire décrit précédemment pour calculer la valeur de conservation de l'option dans chaque cas. Par exemple en $t = \frac{2}{3}$ et pour un cours égal à 100, la valeur d'exercice anticipé est 10, et le calcul de la valeur de conservation donne 10,05. On conserve donc comme valeur de l'option à ce nœud le maximum entre les deux valeurs, soit 10,05.

A l'inverse pour un cours de 79,38, la valeur d'exercice anticipé est de 30,62, tandis que la valeur de conservation est 29,53. La valeur de l'option à ce nœud est donc égale à sa valeur intrinsèque.

4 - Evaluation à $t = \frac{1}{3}$

En $t = \frac{1}{3}$, nous calculons cette fois encore les valeurs d'exercice anticipé de l'option. Nous comparons ces valeurs avec les valeurs de conservation calculées à l'aide de l'algorithme d'arbre élémentaire, en prenant comme *payoff* les valeurs de l'option en $t = \frac{2}{3}$ telles que déterminées précédemment.

Ainsi pour un cours de 89,09, la valeur de conservation est calculée en considérant que l'option rapportera 10,04 en cas de hausse du sous-jacent, et 30,62 en cas de baisse. Cela permet d'évaluer sa valeur de conservation 19,83.

5 - Prime de l'option

Une fois tous les pas de temps ainsi traités, on arrive à $t = 0$, et, connaissant les valeurs prises par l'option en cas de hausse et de baisse du sous-jacent, on applique une ultime fois l'algorithme d'arbre binomial élémentaire pour trouver la prime de l'option : 12,51.

4.4.3 Commentaires

On considère ici une option pouvant être exercée à chaque instant. L'utilisation d'un arbre binomial repose sur une discrétisation du temps : dans un tel algorithme, l'option ne peut plus être exercée qu'en un nombre fini d'instants définis par le maillage temporel.

En limitant la liberté d'action du détenteur de l'option, on en minimise le prix. Pour une option américaine, l'utilisation d'un arbre binomial donnera donc en général un prix sous-évalué. En augmentant le nombre d'itérations, donc en réduisant la taille du pas de temps, on pourra dans une certaine mesure pallier cet effet.

4.5 Méthodes de Monte-Carlo

La méthode dite "de Monte-Carlo" s'appuie sur l'argument simple de la loi des grands nombres. En effectuant un nombre suffisant de tirages aléatoires, la moyenne empirique convergera vers la moyenne théorique.

Dans l'exemple d'une option européenne simple, on peut par exemple tester la convergence de cette méthode vers le prix donné par l'application de la formule de Black and Scholes. La seule variable aléatoire à simuler est le cours du sous-jacent à la date d'exercice. Pour approcher le prix "Black and Scholes", il faut donc simuler le tirage aléatoire d'une variable lognormale.

Prenons l'exemple d'un put européen, sur un sous-jacent de valeur initiale 100, le prix d'exercice étant lui aussi égal à 100. Le taux sans risque est de 3%, la durée de l'option de 1 an, la volatilité du sous-jacent est de 10%. Le prix de cette option par la formule de Black et Scholes est 2,62643.

On effectue l'approximation du prix de ce put par la méthode de Monte-Carlo ; voici les résultats obtenus en fonction du nombre de tirages.

Nombre de Tirages	Résultat	Ecart avec Black et Scholes
1 000	2,58577	-1,55%
10 000	2,62396	-0,09%
100 000	2,63815	0,45%
1 000 000	2,62050	-0,23%

TAB. 4.1 – Approximation du prix de l'option par la méthode de Monte-Carlo

Comme le montrent les résultats ci-dessus, la convergence n'est pas exceptionnelle : en effet même 1 000 000 de tirages ne permettent pas d'obtenir une précision inférieure à $0,2\%$.

Certains cas nécessitent toutefois l'utilisation de méthodes de Monte-Carlo. En effet, sur certaines options complexes, il n'est pas toujours possible de trouver une formule fermée permettant de calculer le prix de manière analytique. Quant aux arbres binomiaux, ils sont, comme nous allons le voir, inaptes à retranscrire certains effets.

4.6 Adaptation des méthodes de Monte-Carlo à des options américaines : algorithme de Longstaff-Schwartz

Comme nous l'avons vu précédemment, la démarche adoptée pour la valorisation d'options américaines consiste à comparer, à chaque point, la valeur intrinsèque de l'option et la valeur qu'elle représenterait si on la conservait en portefeuille.

La valeur d'exercice de l'option est généralement assez aisée à déterminer, du moins sur des options simples dont le *payoff* ne présente pas de subtilité particulière. La valeur de "conservation" est, en revanche, plus difficile à évaluer.

Supposons, par exemple, que nous tentions d'utiliser un algorithme de Monte-Carlo traditionnel pour un put américain. Nous considérons ainsi n tirages pour la trajectoire du sous-jacent. Dans la méthode de Monte-Carlo, un tirage aléatoire de cette trajectoire est une construction d'un scénario possible du futur. Si nous nous plaçons sur une trajectoire donnée, nous pouvons à chaque instant calculer la valeur d'exercice de l'option. En revanche, estimer sa valeur de conservation en utilisant l'évolution future du cours telle qu'elle est simulée dans la trajectoire considérée serait une erreur. En effet cela reviendrait à supposer que le détenteur de l'option prend sa décision en connaissant déjà à l'avance la totalité de la trajectoire. Dans la réalité, il n'a connaissance que d'une partie de l'information, à savoir l'évolution du cours jusqu'à la date où l'on se trouve. Evaluer le prix de l'option en supposant que son détenteur connait la totalité de l'information conduirait à une surévaluation de la prime.

Pour annuler ce biais important, nous pourrions imaginer un algorithme de "Monte-Carlo composé", dans lequel la valeur de conservation de l'option pour chaque point de chaque trajectoire ferait elle-même l'objet d'une évaluation par la méthode de Monte-Carlo. Cette démarche s'avérerait théoriquement exacte. Sa mise en place dans la réalité est impossible, car la quantité de calculs nécessaires à l'évaluation de l'option devient énorme.

Une méthode alternative consiste à s'appuyer sur une loi d'exercice approchée. La méthode dite de *Longstaff-Schwartz* propose par exemple de supposer une relation polynomiale d'ordre 2 entre le cours du sous-jacent et la valeur de conservation de l'option. Cet algorithme a été proposé par les deux mathématiciens dont il porte les noms dans un article paru en 2001.

4.6.1 Exemple d'utilisation de l'algorithme de Longstaff-Schwartz pour une option américaine simple

Algorithme

Nous considérons ici une option de vente (put) américaine, basée sur une action ne distribuant pas de dividende. Les hypothèses supplémentaires sont les suivantes :

- La durée de l'option est de 3 ans
- L'option peut être exercée à chaque fin d'année
- Le cours initial du sous-jacent est 1
- Le prix d'exercice de l'option est 1,1
- La volatilité du sous-jacent est 20%
- Le taux sans risque est de 3%

La première étape est de générer des tirages aléatoires de la trajectoire du sous-jacent.

Supposons que l'on ait gardé 10 tirages de l'évolution de S_t résumés dans le tableau suivant :

Tirage	t=0	t=1	t=2	t=3
1	1,00	1,13	1,16	1,22
2	1,00	0,90	0,82	0,97
3	1,00	0,65	0,76	0,92
4	1,00	1,13	0,81	0,79
5	1,00	1,26	1,49	1,41
6	1,00	1,44	1,82	1,34
7	1,00	1,40	1,32	1,35
8	1,00	1,17	0,86	0,91
9	1,00	0,99	0,90	0,97
10	1,00	1,09	0,97	0,87

Tab. 4.2 – Tirages de la trajectoire du sous-jacent

t=3

Plaçons-nous en t=3 : l'option est dans la monnaie à cette date pour les chemins 2, 3, 4, 8, 9, 10, et les gains obtenus si l'option n'était exerçable qu'en t=3 sont résumés dans le tableau suivant :

Tirage	t=3
1	0,00
2	0,13
3	0,18
4	0,31
5	0,00
6	0,00
7	0,00
8	0,19
9	0,13
10	0,23

Tab. 4.3 – Gains en cas d'exercice uniquement en t=3

t=2

Plaçons-nous à présent en t=2. Si l'option est dans la monnaie en t=2, son détenteur doit choisir entre la conserver jusqu'en t=3 ou l'exercer de façon anticipée. On note V la valeur de conservation de l'option, c'est-à-dire le gain que l'on peut en attendre en la gardant, actualisé au taux sans risque en t=2. L'option est dans la monnaie en t=2 pour les chemins 2, 3, 4, 8, 9, 10. En utilisant le tableau précédent, les valeurs de conservation correspondantes sont $0,13e^{-3\%}$, $0,18e^{-3\%}$, $0,31e^{-3\%}$, $0,19e^{-3\%}$, $0,13e^{-3\%}$, $0,23e^{-3\%}$.

La méthode de Longstaff-Schwartz consiste à supposer une relation fonctionnelle entre S et V, par exemple une relation polynomiale du type $V = a + bS + cS^2$.
Nous cherchons donc les valeurs de a,b,c qui permettront de minimiser la somme :

$$\sum_{i=1}^{6} \left(V_i - a - bS_i - cS_i^2\right)^2$$

où V_i et S_i sont les valeurs empiriques obtenues dans les 6 cas où l'option est dans la monnaie.

Une résolution numérique nous permet de trouver : a=2,336 b=-4,970 c=2,858.

Nous utilisons ces valeurs pour calculer la valeur de conservation de l'option et la comparer avec sa valeur intrinsèque en t=2.

Tirage	Valeur intrinsèque	Valeur de conservation	Exercice anticipé ?
1	0,00	0,00	Non
2	0,28	0,1823	Oui
3	0,34	0,2096	Oui
4	0,29	0,1854	Oui
5	0,00	0,00	Non
6	0,00	0,00	Non
7	0,00	0,00	Non
8	0,24	0,1756	Oui
9	0,20	0,1780	Oui
10	0,13	0,2042	Non

Tab. 4.4 – Comparaison de la valeur de conservation et de la valeur intrinsèque en t=2

Nous pouvons à présent résumer les bénéfices liés à l'exercice de l'option si celui-ci est possible et t=2 ou en t=3.

Tirage	t=2	t=3
1	0,00	0,00
2	0,28	0,00
3	0,34	0,00
4	0,29	0,00
5	0,00	0,00
6	0,00	0,00
7	0,00	0,00
8	0,24	0,00
9	0,20	0,00
10	0,00	0,23

Tab. 4.5 – Gains en cas d'exercice uniquement en t=2 ou t=3

t=1

Nous appliquons une démarche similaire en nous plaçant à la date t=1. A cet instant, l'option est dans la monnaie pour les chemins 2,3,9 et 10. Les valeurs de conservation correspondantes sont $0,28e^{-3\%}$, $0,34e^{-3\%}$, $0,20e^{-3\%}$, $0,23e^{-3\%*2}$.
En supposant de nouveau une relation polynomiale d'ordre 2 entre V et S, et en recherchant les nouvelles valeurs des coefficients a, b et c, on trouve :

$$V = 0,688 - 0,699S + 0,235S^2$$

On peut donc à présent calculer les valeurs de conservation en t=1 et les comparer avec les valeurs intrinsèques dans les différents cas retenus.

Les bénéfices liés à la détention de l'option dans les divers cas simulés sont ainsi résumés dans le tableau suivant :

t=0

L'évaluation du prix de l'option étudiée s'obtient en calculant la moyenne pondérée des bénéfices actualisés en t=0 pour les différents chemins simulés.
Ainsi le prix retenu dans cet exemple s'écrit :

$$\frac{1}{10}\left(0,28e^{-3\%*2} + 0,45e^{-3\%} + 0,29e^{-3\%*2} + 0,24e^{-3\%*2} + 0,20e^{-3\%*2} + 0,23e^{-3\%*3}\right) = 0,1598$$

Tirage	Valeur intrinsèque	Valeur de conservation	Exercice anticipé ?
1	0,00	0,00	Non
2	0,20	0,2493	Non
3	0,45	0,3329	Oui
4	0,00	0,00	Non
5	0,00	0,00	Non
6	0,00	0,00	Non
7	0,00	0,00	Non
8	0,00	0,00	Non
9	0,11	0,2263	Non
10	0,01	0,2053	Non

TAB. 4.6 – Comparaison de la valeur de conservation et de la valeur intrinsèque en t=1

Tirage	t=1	t=2	t=3
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,28	0,00
3	0,45	0,00	0,00
4	0,00	0,29	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,24	0,00
9	0,00	0,20	0,00
10	0,00	0,00	0,23

TAB. 4.7 – Gains en cas d'exercice uniquement en t=1, t=2 ou t=3

Remarque : Dans cet exemple, l'option ne peut être exercée qu'en un nombre fini de dates déjà connues. On peut donc se contenter de générer des tirages aléatoires du cours du sous-jacent en chacune de ces dates.

Pour une option américaine "au sens large", le détenteur de l'option peut l'exercer en une infinité de dates.

En plus de l'erreur d'estimation liée à l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo, cette méthode peut aussi présenter des biais non négligeables avec la réalité si le nombre de dates d'exercice possibles n'est pas suffisant. Cela conduit à une sous-évaluation du prix de l'option. Notons que ce biais est également présent dans les méthodes d'arbres.

Comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés par arbre binomial

On évalue le prix d'un put américain d'une durée d'1 an. Le cours initial du sous-jacent est 100, le prix d'exercice de 100, la volatilité du support est 10%, le taux sans risque de 3% (continu).

En utilisant un arbre binomial avec 12 pas de temps, on trouve : 2,89233

En utilisant un pas de temps beaucoup plus réduit :
52 pas de temps : 2,91813
365 pas de temps : 2,92770

En utilisant l'algorithme de Longstaff-Schwartz, on trouve :

pour 100 simulations : 2,87474

pour 1000 simulations : 2,85676

pour 10000 simulations : 2.80814

On constate que même pour un nombre assez élevé de tirages aléatoires, l'incertitude sur le résultat reste assez grande. La comparaison avec les algorithmes binomiaux est à ce titre intéressante : la convergence est bien plus rapide pour ces derniers.

4.6.2 Formalisation mathématique de l'algorithme

Nous détaillons ici les étapes à mettre en place pour l'implémentation de l'algorithme de Longstaff-Schwartz dans le cas d'une option de vente américaine simple (*plain vanilla american option*). Le prix d'exercice de l'option est noté K.

1ère étape : génération d'un échantillon de chemins possibles pour le cours du sous-jacent.

Le nombre de chemins générés N est un des paramètres du programme. De même le pas de temps choisi, δt doit être pris en compte ; il détermine le nombre de valeurs à générer pour définir un chemin de l'échantillon. On nomme M le nombre de pas de temps correspondant.

On utilise pour ces échantillonages les outils de génération aléatoires disponibles dans l'environnement de développement choisi. Il suffit en fait de pouvoir simuler des tirages aléatoires d'une variable suivant une loi normale standard.

En effet, dans le modèle choisi, le cours S_t du sous-jacent est un processus lognormal. Cela se traduit dans la pratique par une relation entre $S_{t+\delta t}$ et S_t :

$$S_{t+\delta t} = S_t exp^{r\delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\delta t}}$$

Où ϵ est un tirage d'une variable aléatoire suivant une loi normale standard.

Les chemins ainsi générés sont stockés dans une matrice S de dimensions $N \times M$. Celle-ci prendra la forme suivante (en choisissant $S_0 = 1$) :

$$\begin{array}{c} \\ i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ ... \\ i=N \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} j=0 & j=1 & j=2 & ... & j=M \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1,15 & 1,17 & ... & 1,34 \\ 1 & 1,02 & 1,01 & ... & 1,03 \\ 1 & 0,96 & 1.00 & ... & 0,99 \\ 1 & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0,87 & 0,91 & ... & 0,78 \end{pmatrix} \end{array}$$

On crée également une matrice de même dimension, dans laquelle nous stockerons les flux générés par l'option dans chaque chemin.

Cette matrice est notée C.

2ème étape : calcul de la valeur de l'option au dernier pas de temps t_M.

Ce calcul est ici très simple, puisque le cours du sous-jacent et le prix d'exercice sont connus. Pour chaque chemin i, on remplit donc les flux de la matrice C pour le pas de temps M :

$$C_{i,M} = Max(0, E - S_{i,M})$$

La matrice C prend au terme de cette étape la forme suivante (en supposant ici que le prix d'exercice est égal à 1,1) :

$$\begin{array}{l} \\ i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ ... \\ i=N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} j=0 & j=1 & j=2 & ... & j=M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0,07 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0,11 \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0,32 \end{pmatrix} \end{array}$$

3ème étape : itérations

Il s'agit de mettre en place une boucle descendant du pas de temps $M-1$ jusqu'au pas de temps initial. A chaque pas (correspondant au pas de temps j et donc à l'instant t_j), les opérations suivantes sont menées :

- Détermination des chemins pour lesquels l'option est dans la monnaie à t_j. Pour chaque chemin i, si la valeur d'exercice de l'option est strictement positive, la valeur du sous-jacent $S_{i,M}$ est ajoutée à un vecteur, noté A.

- Pour le chemin i considéré, on recherche la valeur de conservation de l'option : il s'agit de $e^{-r(m-j)\delta t}C_{i,m}$, où m est l'unique indice tel que $m > j$ et pour lequel $C_{i,m}$ est non nul. Cette valeur est entrée dans un vecteur noté B.

- En supposant une relation polynomiale entre le cours du sous-jacent S et la valeur de conservation V de l'option, par exemple $V = a + bS + cS^2$, on détermine les coefficients a, b, c qui minimiseront $\sum \left(V - a - bS - cS^2\right)^2$, pour les éléments S de A et V de B.

- La fonction de régression obtenue est utilisée pour calculer les valeurs de conservation estimées pour les chemins examinés. Pour chaque chemin, si la valeur d'exercice est supérieure à la valeur de conservation estimée, on considère que l'option sera exercée de façon anticipée. La valeur $C_{i,m}$ est ramenée à 0, tandis que $C_{i,j}$ est placée à la valeur d'exercice anticipée.

Au terme de ces itérations, chaque ligne de la matrice C contient au plus un seul flux strictement positif.

4ème étape : Calcul de la prime.

Cette évaluation s'effectue en connaissant tous les flux non nuls de la matrice C ainsi que la date à laquelle ils surviennent. La somme de tous ces flux, actualisés à l'instant initial, divisée par le nombre total de chemins échantillonnés, donne l'estimation du prix de l'option par la méthode de Longstaff-Schwartz.

Remarques :

- La forme de la fonction de régression peut être modifiée, par rapport à cet exemple. On peut par exemple retenir une relation polynomiale de degré supérieur à 2, ce qui aurait a priori pour effet de donner une meilleure approximation. Toutefois, le nombre de paramètres à déterminer lors des calculs d'optimisation sera plus élevé, et le temps de traitement sera plus long.

- Les variables à mettre en relation doivent être choisies avec soin. Dans l'exemple, nous avons supposé une relation entre cours du sous-jacent et la valeur de conservation de l'option. On aurait pu choisir de mettre en relation la valeur d'exercice anticipée et la valeur de conservation. Les résultats obtenus auraient été similaires. L'important est de déterminer avec soin combien de variables d'état conserver pour bien décrire le problème sans générer de redondance d'information.

Algorithmes de minimisation

Les techniques d'optimisations numériques mises en oeuvre dans le cadre des calculs de minimisation ne seront pas détaillées ici ; en effet, des modules dédiés à ce type de recherche existent déjà.

Ainsi, on a utilisé dans cette étude le célébrissime "solveur" d'Excel, dans les cas les plus simples. Pour les calculs plus complexes, les programmes ont été développés en langage "Python", un langage interprété disponible gratuitement (logiciel libre), et en utilisant le module "Numerical Python". On pourra pour plus d'information se reporter aux sites *www.python.org* et *numeric.python.org.*

4.6.3 Extension de l'algorithme à des options plus complexes

La même méthode pourra être utilisée pour l'évaluation de produits beaucoup plus sophistiqués. Pour obtenir des résultats satisfaisants, il faut en revanche définir avec soin les variables d'état prises en compte dans le calcul.

Par exemple dans le cas d'une option américaine de type "lookback", il faudra tenir compte de deux variables d'état à chaque pas de temps : le cours de l'action à l'instant considéré, et le maximum historique de ce cours depuis de début de la vie de l'option.

Plus le nombre de variables d'état sera élevé, plus la fonction à minimiser s'avérera complexe, et, naturellement, plus les temps de traitement seront importants. Ainsi, bien qu'extrêmement adaptable et versatile, cet algorithme pourra rapidement trouver ses limites dans la pratique.

Chapitre 5

Etude Financière de la Garantie Plancher en Cas de Vie

Si l'on simplifie un certain nombre d'hypothèses, la garantie GMSB peut s'apparenter à une option américaine de type lookback.

5.1 Utilisation d'arbres binomiaux pour une GMSB

Lors du précédent chapitre, nous avons introduit les principes de bases utilisés pour la valorisation d'options par arbres binomiaux. Les raffinements propres à la garantie étudiée nous conduisent à amener plusieurs modifications dans l'algorithme. Nous allons commencer par décrire précisément la méthode retenue.

Notons que ce système ne pourra pas être conservé avec succès tout au long de l'étude, pour des raisons qui seront détaillées dans la suite de ce chapitre. Mais un algorithme d'arbre binomial peut être conservé dans un premier temps, notamment si l'on suppose que les frais ne sont pas prélevés sur l'épargne. En effet on peut facilement garder dans ce cas l'égalité $u = \frac{1}{d}$. Si cette égalité n'est plus respectée, le nombre de maxima possibles à l'instant t peut devenir extrêmement grand, et le nombre de chemins à considérer peut excéder les capacités de la machine - ou la patience de l'utilisateur.

Nous allons tout d'abord nous pencher sur une option de type américain, présentant uniquement une garantie de cliquet, dont la périodicité est donnée. On définit donc une variable *intmax* donnant en années l'intervalle de temps séparant deux relevés du cours du sous-jacent.

On formule également les hypothèses suivantes :

- Le cours initial du support est S_0
- La durée de l'option est T
- La volatilité du cours du support est σ
- Le nombre d'étapes de simulation utilisées pour l'arbre est n
- Le taux sans risque est noté r

Le pas de temps élémentaire est noté δt. On a $\delta t = \frac{T}{n}$.

Conformément à ce que nous avons déjà vu dans le chapitre précédent, nous allons introduire les coefficients u et d correspondant aux taux d'évolution du cours à la suite d'un mouvement à la hausse (u) ou à la baisse (d). Afin de rester dans le paradigme des modèles classiques (Black et Scholes ou Cox, Ross et Robinson), nous considérerons que :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

Enfin nous utiliserons la variable *nbmax* désignant le nombre de pas de temps séparant deux relevés du cours dans le cadre de la garantie cliquet : $nbmax = \frac{intmax}{\delta t}$. Une des contraintes nécessaires au bon fonctionnement de l'algorithme est de vérifier que cet intervalle correspond bien à un nombre entier de pas de temps ; dans le cas contraire, le programme ignorerait certains relevés du cours, ce qui tendrait à sous-estimer le maximum atteint par ce cours, et donc à sous-estimer également le prix de l'option.

La méthode d'évaluation par arbre binomial peut de façon générale se décomposer en plusieurs étapes distinctes, que nous aménagerons en fonction de nos besoins :

- **Initialisation des nœuds de l'arbre** : pour chacun des nœuds, on calcule les différentes variables qui devront intervenir pour l'évaluation de la valeur intrinsèque de l'option au nœud considéré : pour une option américaine simple, seul le cours du sous-jacent est à calculer. Pour une option de type *lookback*, nous devrons calculer le cours du sous-jacent et le maximum atteint par ce cours jusqu'à l'instant considéré. Ce dénombrement des maxima est l'étape cruciale et, pour ainsi dire, la plus délicate de l'algorithme ; nous y accorderons une attention particulière.

- **Initialisation d'une matrice de Cash-Flows** : nous y consignerons les valeurs de l'option aux différents nœuds (et pour les différents chemins)

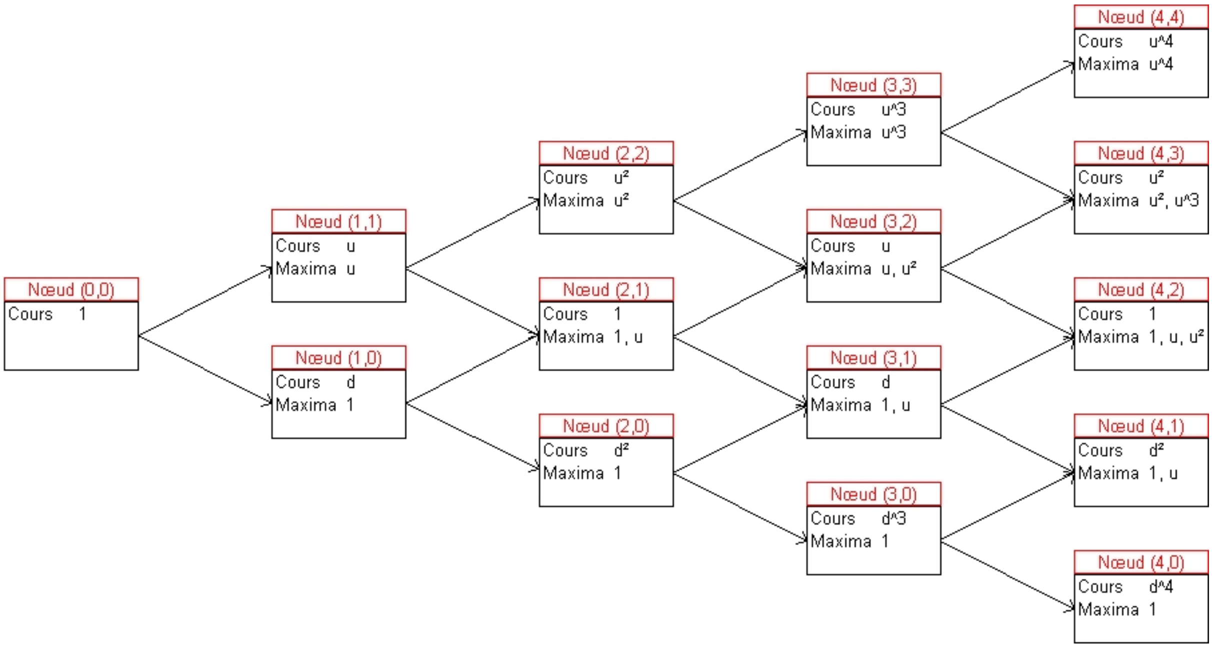
- **Calcul des Cash-Flows au terme de l'option** : la fonction de *payoff* de l'option étant connue, nous pouvons calculer sa valeur dans le cas où le détenteur la conserve jusqu'à son terme

- **Itération descendante sur le pas de temps** : en partant de l'avant-dernier pas de temps, calcul du prix de l'option à chaque nœud, en tenant compte de la valeur calculée lors de l'itération précédente pour chaque issue possible (hausse ou baisse du sous-jacent)

On construit un arbre binomial, comptant n+1 étapes, correspondant aux dates 0, $\frac{t}{n}$, $\frac{2t}{n}$, ..., t.

5.1.1 Initialisation des nœuds de l'arbre

Le schéma ci-dessous montre l'initialisation des cours et des maxima possibles aux différents nœuds d'un arbre binomial sur 4 pas de temps. Les résultats généraux démontrés par la suite pourront être vérifiés sur cet exemple.



COURS DU SOUS-JACENT

A chaque étape i, le nombre de valeurs possibles de l'action est de $i+1$, on crée donc $i+1$ nœuds indexés de 0 à i. Dans ce cas, pour le nœud de coordonnées (i,j) avec $0 \leq j \leq i \leq n$, la valeur de l'action est $S_{ij} = u^j d^{i-j}$, ce qui peut également s'écrire dans le cas particulier considéré $S_{ij} = u^{(2j-i)}$.

Dans la pratique, on crée une matrice carrée de dimension $n+1$, notée S, telle que :

$$S_{ij} = S_0 u^j d^{i-j} \; pour \; 0 \leq j \leq i \leq n$$

$$S_{ij} = 0 \; pour \; j > i$$

Apparence générale de la matrice S_{ij} :

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} i=0 & i=1 & i=2 & ... & i=n \end{array} \\
\begin{array}{c} j=n \\ ... \\ j=2 \\ j=1 \\ j=0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & u^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & u^2 & ... & u^2 d^{n-2} \\ 0 & u & 1 & ... & ud^{n-1} \\ 1 & d & d^2 & ... & d^n \end{pmatrix}
\end{array}$$

5.1.2 Dénombrement des maxima possibles lorsque le cours est relevé de façon continue

On se place ici dans l'hypothèse d'un relevé permanent du cours de l'action, ou du moins dans le cas d'une actualisation du cours à chaque pas de temps. Ici $nbmax = 1$.

Le nombre de chemins possibles pour parvenir au nœud (i,j) est C_j^i. On pourrait donc considérer qu'à chaque chemin correspond un maximum et mener les calculs sur l'ensemble des chemins possibles.

Cependant la forme particulière de l'arbre et les hypothèses formulées nous permettent d'obtenir une simplification qui allège quelque peu les calculs. En effet, plusieurs chemins menant à (i, j) peuvent en fait avoir atteint le même maximum. Une méthode de calcul consiste donc à dénombrer et identifier les maxima possibles à chaque nœud, puis à mener les calculs pour chacun des maxima possibles.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Pour le nœud (i, j) le nombre de maxima possibles atteints par le cours aux divers nœuds précédents est $Min(j + 1; i - j + 1)$.

Ce résultat se vérifie facilement dans l'exemple fourni ; ainsi par exemple au nœud (2,1), nous pouvons suivre les chemins indiqués ci-dessous :

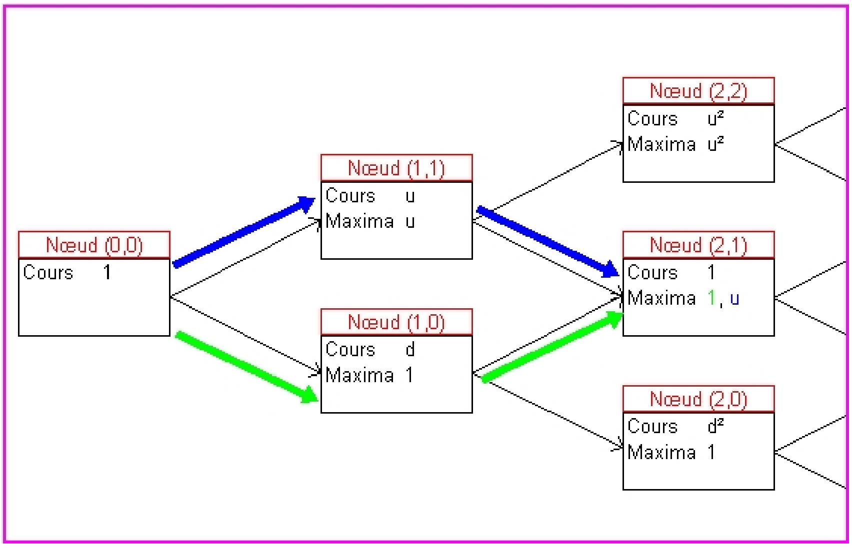


FIG. 5.1 – Maxima possibles au nœud (2,1)

Dans le chemin "du bas", le cours maximum est égal au cours initial. Pour le chemin "du haut", le maximum a été atteint lors du premier pas de temps, après une augmentation d'un facteur u.

Nous allons démontrer ce résultat dans le cas où S_0 est égal à 1. Il se généralisera très facilement en multipliant les maxima déterminés par S_0.

Notons tout d'abord qu'au nœud (i, j), le cours du sous-jacent est $S_0 u^j d^{i-j}$, soit, puisque $u = \frac{1}{d}$, $S_0 u^{2j-i}$.

Nous distinguerons ensuite deux cas :

Si $i - j > j$:

Dans ce cas $u^j d^{i-j} < 1$, le cours est inférieur à 1. Les maxima possibles sont $1, u, u^2 ... u^j$: ils sont au nombre de $j + 1$.

Tout maximum inférieur à 1 est bien entendu inenvisageable puisque c'est la valeur initiale.

Tout maximum supérieur à u^j est également impossible à atteindre puisqu'il serait impossible d'atteindre la valeur finale du cours dans le nombre de périodes considéré.

Pour $k \in [0 : j]$, on peut atteindre le maximum u^k en suivant le parcours $u^k \cdot (du)...(du) \cdot d^{i-j-(j-k)}$ (on répète $j-k$ fois le schéma (du)).

Si $i - j < j$ **:**

On a $u^j d^{i-j} > 1$. Les maxima possibles sont u^{2j-i}, ... , u^{j-1}, u^j.

Tout maximum inférieur à u^{2j-i} est impossible, puisque cette valeur représente le cours du sous-jacent à la période considérée.

Toute valeur supérieure à u^j est également impossible puisqu'on ne pourrait pas ainsi atteindre le cours constaté dans le nombre de pas de temps considéré.

Enfin pour $k \leq i-j$, on peut atteindre le maximum u^{j-k} par le parcours $u^{j-k} \cdot (du)...(du)d^{i-j-k}$ (on répète k fois le schéma (du)).

Mise en place de l'algorithme :

Pour chaque nœud de l'arbre, on va en fait créer un vecteur de dimension $n+1$ (indices k variant de 0 à n). Pour chaque k, la valeur de l'élément du vecteur sera égale à u^k si cette valeur correspond à un maximum possible au nœud (i, j), à 0 sinon.

Cela revient à créer un tableau tridimensionnel $ValMax$, de dimensions $(n+1,\ n+1,\ n+1)$, défini par :

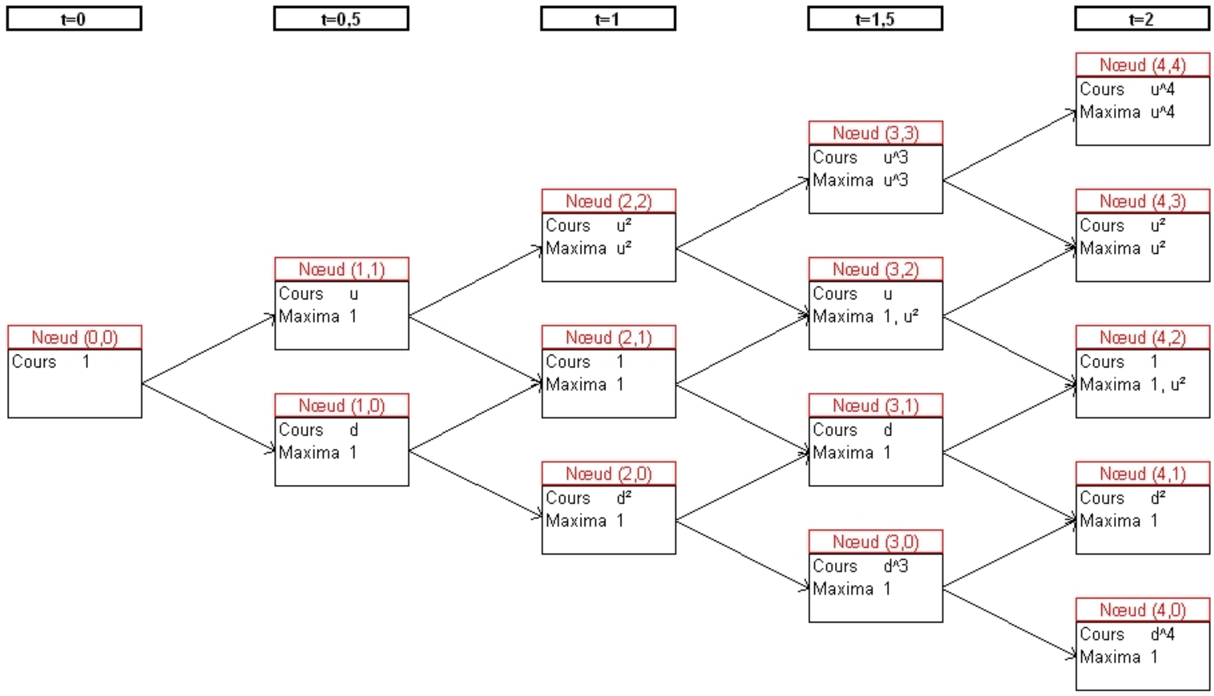
- $ValMax(i, j, k) = u^k$ si cette valeur correspond à un maximum pouvant être retenu au nœud (i, j).
- $ValMax(i, j, k) = 0$ sinon.

5.1.3 Maximum uniquement retenu à certaines dates fixées

La précédente modélisation serait applicable au cas de la GMSB si les pas de temps étaient annuels. En effet la garantie GMSB retient en général la valeur maximale du support non pas au cours du temps, mais simplement à date anniversaire. Si chaque nœud de notre arbre correspond à une date anniversaire, l'algorithme précédent continuera à fonctionner. Il semble cependant très risqué de se limiter à un pas de temps annuel.

Le schéma ci-dessous présente un exemple simple illustrant la marche à suivre dans ce cas précis. Il s'agit d'une option d'une durée de 2 ans, pour laquelle le cliquet est annuel. Le relevé du cours du sous-jacent, et donc la mise à jour éventuelle du maximum, interviennent aux pas de temps 2 et 4 ; les pas de temps 1 et 3 sont des intermédiaires permettant d'affiner le résultat par rapport à un pas de temps annuel (meilleure approximation de l'évolution du cours), mais ne conduisent pas à une modification du cliquet.

Nous allons devoir modifier l'algorithme de façon à ne plus actualiser le cours maximal du sous-jacent qu'à date anniversaire. De formulation anodine, cet aménagement oblige en réalité à revoir l'algorithme en profondeur. Nous allons pour cela utiliser les grandeurs $intmax$, intervalle de temps séparant deux relevés du cours pour actualisation du maximum, et $nbmax$, nombre de



pas de temps séparant ces deux relevés.

Détermination des maxima possibles

Comme précédemment, nous allons remplir un tableau tridimensionnel $ValMax$, mais la méthode utilisée pour alimenter ce tableau n'est plus aussi directe qu'auparavant. Nous devons séparer deux cas, selon que le pas de temps considéré correspond à une date anniversaire ou non.

Si le pas de temps i correspond à une date anniversaire

(C'est-à-dire si i est tel que le module de $\frac{\delta ti}{intmax}$ est nul).

- *Si* $j = 0$, on se trouve sur la branche la plus basse de l'arbre : le sous-jacent n'a subi que des mouvements à la baisse ; le seul maximum admissible est 1 (correspondant au cours initial), donc $ValMax(i, j, 0) = 1$, et $ValMax(i, j, k) = 0$ si $k \neq 0$.

- *Si* $0 < j < i$:
  Pour k<i :
  Le nœud (i, j) peut être atteint par deux nœuds d'indice $i-1$: il s'agit des nœuds $(i-1, j)$ et $(i-1, j-1)$. On voit par exemple sur le schéma fourni que le nœud $(3, 2)$ peut être atteint à partir des nœuds $(2, 1)$ et $(2, 2)$.
  Si pour l'un de ces nœuds, le maximum u^k est admissible, il s'agit a priori d'une valeur possible également pour le nœud (i, j).
  On compare donc u^k avec le cours atteint en (i, j) :

  - Si celui-ci est supérieur, la valeur u^k n'est plus un maximum possible pour (i, j), et $ValMax(i, j, k) = 0$.

  - Dans le cas contraire, $ValMax(i, j, k) = u^k$.

- *Si* $j = i$ *:*
  le nœud (i, j) ne peut être atteint que par le nœud $(i-1, j-1)$; on se trouve dans la branche la plus haute de l'arbre, dans le cas où le cours n'a fait qu'augmenter depuis le début du contrat. Un seul maximum est possible, c'est u^i. On a donc $ValMax(i, j, k) = u^i$ si $k = i$, et $ValMax(i, j, k) = 0$ sinon.

- Dans tous les autres cas ($j > i$ ou $k > i$), on a directement $ValMax(i, j, k) = 0$, car

  - si $j > i$, les coordonnées (i, j) ne correspondent pas à un nœud de l'arbre binomial,

  - et si $k > i$, la valeur u^k ne peut pas correspondre à un cours atteint au pas de temps i.

Si le pas de temps i ***ne correspond pas à une date anniversaire***

Si l'on se place à date non-anniversaire : le cours au nœud (i, j), n'influe plus sur la détermination du maximum, seuls les maxima admissibles aux nœuds $(i-1, j)$ et $(i-1, j-1)$ entrent en ligne de compte.

Si $j = 0$, on se trouve encore sur la branche la plus basse de l'arbre, donc le seul maximum possible reste 1.

Si $0 < j < i$:
Pour k<i : Le nœud (i, j) peut être atteint par deux nœuds d'indice $i-1$: il s'agit des nœuds $(i-1, j)$ et $(i-1, j-1)$.
Si pour l'un de ces nœuds, le maximum u^k est admissible, c'est-à-dire si la valeur de $ValMax[i-1, j, k]$ ou $ValMax[i-1, j, k-1]$ n'est pas nulle, alors ce maximum doit aussi être conservé pour le nœud (i, j) (on ne met pas à jour les valeurs possibles du maximum).
On a donc $ValMax[i, j, k] = u^k$. Dans le cas contraire, $ValMax[i, j, k] = 0$.

Dans le cas où $i = j$, le nœud (i, j) ne peut être atteint que par le nœud $(i-1, j-1)$; on se trouve dans la branche la plus haute de l'arbre, dans le cas où le cours n'a fait qu'augmenter depuis le début du contrat. Un seul maximum est possible, en revanche il ne correspond plus forcément à u^i, mais à $u^{i_{ann}}$, où i_{ann} est l'indice de pas de temps correspondant à la date anniversaire précédant i. Dans ce cas, la démarche précédente est en fait conservée, mais seule la valeur de $ValMax[i-1, j-1, k]$ est examinée.

Alimentation de la matrice des cash-flows

L'initialisation d'une matrice de Cash-Flows ne nécessite pas de détail particulier. En revanche la façon dont elle sera alimentée mérite d'être étudiée plus précisément.

Nous étudions d'abord les valeurs finales possibles de l'option ; cela revient à nous pencher sur les nœuds de type (n, j). Nous connaissons déjà les valeurs de $ValMax(n, j, k)$. Nous pouvons donc commencer à remplir le tableau $ValOpt$ de la façon suivante :$ValOpt(n, j, k) = max(ValMax(n, j, k) - Cours(n, j), 0)$.

Nous devons ensuite procéder à une itération descendante sur le pas temps ; le but de cette

itération est de trouver la valeur de l'option pour chaque nœud de l'arbre, et pour les différents chemins possibles ; cela revient à remplir le tableau $ValOpt(i, j, k)$.
A chaque pas de temps i, nous connaissons la valeur du cours du sous-jacent ainsi que la valeur $ValMax(i, j, k)$. Nous connaissons donc la valeur d'exercice anticipé $max(ValMax(i, j, k) - Cours(i, j), 0)$.

Nous devons déterminer la valeur de conservation de l'option. On distingue deux cas :

- Si $ValMax(i, j, k)$ est nul : u^k n'est pas un maximum admissible pour le nœud (i, j) (cf méthode de détermination des maxima exposée précédemment). Dans ce cas, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire : $ValOpt(i, j, k) = 0$.

- Si en revanche $ValMax(i, j, k)$ n'est pas nul, u^k est un maximum possible pour le cours du sous-jacent. Nous connaissons dans ce cas les valeurs de l'option en cas de hausse ou de baisse du sous-jacent : elles sont dans le tableau $ValOpt$ pour le pas de temps $i+1$. On ne peut toutefois pas récupérer directement les valeurs $ValOpt$ correspondantes en utilisant l'indice k.

  - En cas de hausse du sous-jacent, nous serons sur le nœud $(i + 1, j + 1)$.

    Si l'étape $i + 1$ ne correspond pas à une date anniversaire, u^k reste un maximum possible au noeud considéré ; la valeur de l'option en cas de hausse dans ce cas est bien $ValOpt(i + 1, j + 1, k)$.

    Si l'étape $i + 1$ correspond à une date anniversaire, en revanche, u^k peut ne plus correspondre à un maximum admissible. Il nous faut donc dans cas réussir à déterminer le maximum admissible l le plus proche de k par valeurs supérieures - cela se fait aisément à l'aide d'une boucle. La valeur de l'option en cas de hausse est alors $ValOpt(i+1, j+1, l)$.

  - En cas de baisse du sous-jacent, nous serons sur le nœud $(i + 1, j)$.

    De la même façon, si $i + 1$ ne correspond pas à une date anniversaire, nous pourrons récupérer directement la valeur $ValOpt(i + 1, j, k)$.

    Si en revanche $i+1$ correspond à une date anniversaire, nous devrons comme précédemment récupérer m, le maximum admissible le plus proche de k par valeurs supérieures, et utiliser la valeur $ValOpt(i + 1, j, m)$

Au terme de toutes ces manipulations, la quasi-totalité des difficultés pratiques sont résolues. En effet nous connaissons les valeurs de l'option en cas de hausse ou de baisse du sous-jacent : nous pouvons calculer aisément la valeur de conservation de l'option en nous plaçant sur un arbre binomial élémentaire.

5.1.4 Ajout d'une revalorisation minimale du capital : Rollup

Cette fois, notre modélisation se rapproche encore de la réalité : la valeur garantie n'est plus simplement égale au maximum historique du cours du support à date anniversaire, mais prend également en compte une revalorisation minimale.
On introduit donc une hypothèse supplémentaire, correspondant au taux r_{min} de revalorisation minimale de la garantie.

L'algorithme est modifié par l'introduction d'une étape supplémentaire :

après avoir déterminé les valeurs possibles du maximum du cours, donc après avoir rempli le tableau tridimensionnel $ValMax$, nous remanions ce tableau en tenant compte de la revalorisation minimale.

Au pas de temps i, l'effet de la revalorisation minimale se résume de façon simple : nous supposons en fait que le minimum ne peut être inférieur à $S_0 e^{i \times dt \times r_{min}}$.

On remplace donc toute valeur non nulle de $ValMax[i, j, k]$ par $S_0 e^{i \times dt \times r_{min}}$ dans le cas ou cette valeur est supérieure au maximum du cours retenu.

Le reste de l'algorithme est inchangé par rapport à ce qui a été décrit précédemment.

5.1.5 Prise en compte du délai de carence

La garantie GMSB n'est pas directement assimilable à une option américaine :

- A première vue, elle ne présente pas de date limite d'exercice ; pour un contrat donné, toutefois, on peut soit connaître l'âge limite d'exercice pour le client, soit connaître, en se reportant à la table de mortalité, l'âge maximal qu'il pourra atteindre. Cela permet de définir une date limite d'exercice.

- La garantie présente aussi une période de carence (10 ans) pendant lesquels l'option de vente ne peut pas être exercée par le client. L'algorithme binomial américain doit donc être adapté : en remontant le temps à partir de la date ultime d'exercice, pour toute période située au-delà de la période de carence, la méthode décrite est valable. En revanche, en-deça de ce délai, le client ne peut choisir d'exercer son option. Dans ce cas, c'est un algorithme de type européen qu'il faut appliquer.

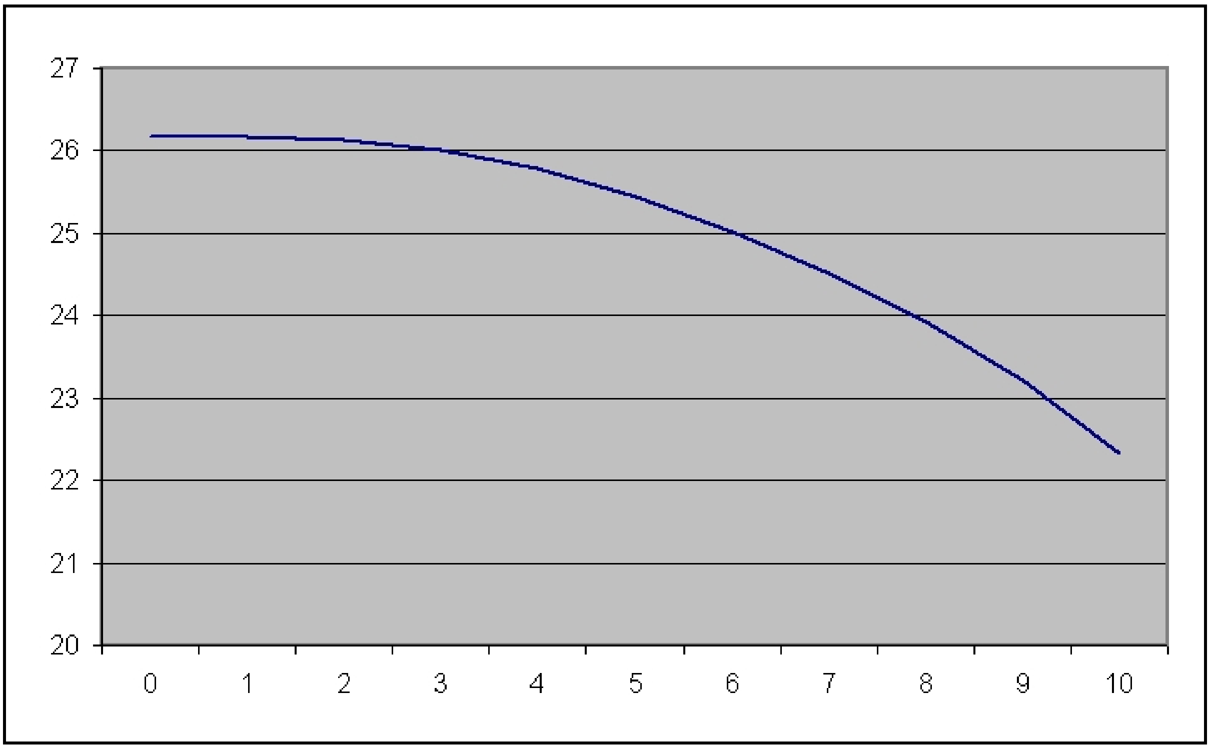


Fig. 5.2 – Décroissance du prix de la garantie en fonction du délai de carence

5.1.6 Remarque

Le contrat d'assurance-vie considéré s'étend, par définition, sur une longue durée, potentiellement plusieurs décennies. La précision des résultats obtenus à l'aide de l'arbre binomial doit être examinée avec soin. En effet celle-ci repose sur un maillage riche de la période étudiée, afin de couvrir au mieux l'éventail des valeurs possibles pour le cours du sous-jacent. Cela ne pose pas de problème pour une option de courte durée. Pour un contrat déroulé sur trente ans, en revanche, un pas mensuel conduit à 360 itérations, un pas hebdomadaire à 1560 itérations, un pas journalier à 10957 itérations. Pour l'étude d'un contrat spécifique, le pas mensuel reste utilisable malgré des temps de traitements assez importants, en revanche un pas de temps hebdomadaire ou journalier est impossible. Pour un déroulé de portefeuille, conduit sur plusieurs contrats, la seule option acceptable en termes de temps de traitement sera le pas mensuel, qui peut s'avérer insuffisamment précis.

5.2 Comparaison avec les résultats obtenus à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo

L'utilisation d'un calcul par la méthode de Monte-Carlo doit se faire avec prudence dans le cas d'une option américaine.

Dans le cas d'une option européenne, ce type de simulation est assez naturel et se justifie pleinement : la date d'exercice étant unique par définition, il suffit de générer des tirages aléatoires du cours du sous-jacent à la date d'exercice, de calculer les valeurs de l'option dans chacun de ces cas, puis d'en faire une moyenne pour faire jouer la Loi des Grands Nombres.

Pour une option américaine en revanche, la date d'exercice n'est pas unique : le client peut choisir d'exercer à tout moment. Un réflexe "naturel" serait de considérer que chaque tirage aléatoire consiste à générer une trajectoire pour le cours du sous-jacent et de calculer, de façon similaire au raisonnement suivi dans un arbre binomial, la date d'exercice optimale. La valorisation se ferait alors en remontant le temps comme pour un arbre binomial. L'erreur de ce raisonnement réside dans le fait que l'on considère alors que le détenteur de l'option connait à tout instant exactement l'évolution future du sous-jacent, et prend sa décision en connaissance de cause (cf précédemment).

5.3 Gestion de la courbe des taux

Les modélisations envisagées précédemment ont été traitées avec un taux sans risque considéré comme constant. Pour mieux rendre compte de la réalité, il convient d'inclure la prise en compte de taux variables.

5.3.1 Courbe des taux déterministes

On suppose connaître la courbe des taux déterministe. Nous connaissons donc le taux zéro coupon au comptant pour chaque échéance. La méthode d'évaluation est ici modifiée de façon assez simple : en utilisant la relation des taux comptant-terme, nous pouvons déterminer pour chaque pas de temps i le taux sans risque sur le pas de temps de longueur dt, dérivant de la courbe des taux.

En effet, on peut écrire :

$$r(0, i \times dt, dt) = \frac{(i+1)dt \times r(0,(i+1)dt) - idt \times r(0, idt)}{dt}$$

On notera cependant que l'utilisation d'une courbe des taux peut entrer en conflit avec la méthode classique de tarification actuarielle des garanties d'assurance-vie. En particulier dans le cas d'une garantie GMIB, la tarification classique d'une rente est basée sur l'utilisation de nombre de commutations calculés à l'aide d'un taux technique constant. Tous les flux futurs sont actualisés à l'aide d'un taux considéré constant.
par De plus l'utilisation d'une courbe des taux dans le cadre d'un modèle d'arbre binomial repose sur l'hypothèse que l'évolution du sous-jacent et l'évolution des taux sont complètement décorrélées. Il s'agit là d'une hypothèse forte.

5.3.2 Modèle stochastique de taux

L'utilisation d'un courbe de taux déterministe permet d'étudier le comportement de la garantie dans le cadre d'un scénario prédéfini. En utilisant un certain nombre de scénarios différents de courbe des taux, on pourra ainsi tester la garantie dans diverses configurations et anticiper un certain nombre de chocs possibles. Mais chaque scénario, pris individuellement, n'a qu'une très faible probabilité de se produire. Une telle approche ne peut donc offrir qu'une vision imparfaite des risques réels. De plus, il est extrêmement délicat dans ce cas de tenir compte des probabilités respectives de réalisation de chacun des scenarii déterministes étudiés. Pris individuellement, chaque scenario a une probabilité nulle de se réaliser. En affectant une probabilité non nulle à un tel scenario, on le considère implicitement comme représentatif d'un ensemble de scenarii possibles.

Une solution pour pallier cette lacune est de mettre en place un modèle stochastique de taux d'intérêts. La méthodologie à suivre reste assez simple (la mise en oeuvre effective peut, elle, s'avérer fort délicate). Grâce à un modèle stochastique de taux, l'utilisateur peut générer un certain nombre de scenarii de taux possibles, correspondant à des tirages aléatoires basés sur la distribution du modèle choisi.

L'évaluation indépendante de chaque scenario, traité comme une courbe de taux déterministe (cf paragraphe précédent), permet ainsi d'aboutir à une vision englobant autant que possible tous les événements futurs possibles.

Etant donnée la diversité des modèles stochastiques de taux existant sur le marché, il n'est pas possible de donner un mode opératoire précis qui soit valable dans tous les cas. La méthode générale reste une itération du calcul pour plusieurs hypothèses de courbe de taux différentes, la moyenne des résultats obtenus devant converger vers le prix de l'option.

On peut à titre d'exemple utiliser le modèle de taux spot de Vasicek. Il faut toutefois s'assurer, ce faisant, que le pas de temps utilisé dans la simulation peut être effectivement considéré comme court, afin que le modèle utilisé garde un sens.

5.4 Influence des paramètres financiers sur le prix de la garantie

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier les répercussions sur le prix de l'option de variations des paramètres entrant en ligne de compte dans le calcul. On n'étudie ici encore que des paramètres purement financiers, et le comportement du client est considéré comme optimal.

5.4.1 Durée de la garantie

Ce paramètre a une importance considérable, et ce à plusieurs titres.

Tout d'abord, le prix d'une option est, généralement, une fonction croissante de sa durée. Il ne s'agit pas d'une règle absolue ; par exemple on peut constater, au-delà d'une certaine durée, la décroissance du prix d'un put européen donné par la formule de Black and Scholes.

Dans des conditions normales d'utilisation, c'est tout de même le comportement que l'on constate. Il convient de noter toutefois que les garanties planchers en cas de vie, par leur durée extrêmement longues, posent justement un problème de conditions "extrêmes". Pour une option américaine simple, on peut observer l'évolution du prix obtenu par arbre binomial en fonction de la durée de l'option. Si ce prix est effectivement croissant, on peut noter qu'il tend à s'aplatir très rapidement.

La garantie GMSB, si elle tient compte d'un délai de carence, ne précise pas de date limite d'exercice ; elle est en revanche limitée par la survie de l'assuré, et par un âge limite d'exercice (85 ans dans le cas du produit étudié).

D'autre part, le tarif proposé ne dépend pas de l'âge du client. Cela revient à anticiper a priori le profil de clientèle qui souscrira la garantie (en terme d'âge moyen en particulier), où à prévoir dès la conception de celle-ci une tarification "agressive".

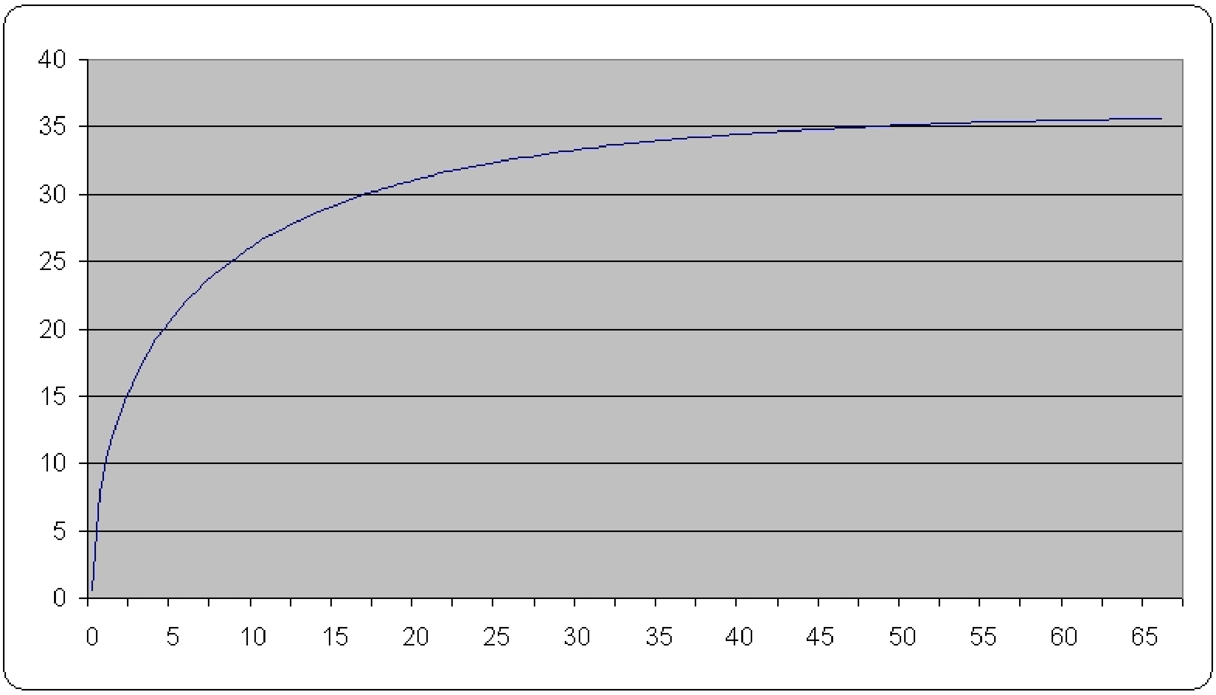
Une première approche "prudente" est donc de raisonner systématiquement en âge limite, et de considérer que l'assuré ne décèdera pas avant l'âge limite. Ainsi, pour un assuré âgé de 50 ans à la souscription, le calcul consisterait à simuler la garantie sur 35 ans.

Le graphique suivant montre, sur un put simple, l'évolution du prix d'une option en fonction de la durée.

Il s'agit d'un put américain à la monnaie, le cours du sous-jacent et le prix d'exercice sont tous deux égaux à 100, la volatilité du sous-jacent est de 30%, le taux sans risque de 2,5%. Les prix sont calculés à l'aide d'un arbre binomial, les résultats présentés représentant la moyenne entre le résultat à 300 itérations et celui à 301 itérations.

On remarque un aplatissement progressif de la courbe : si la durée de la garantie en augmente très nettement la valeur sur des durées assez courtes, ce n'est plus aussi net sur des durées longues. Le produit d'assurance-vie étant par nature un produit de long terme, on peut considérer l'influence de ce paramètre sur le tarif de la garantie comme finalement assez secondaire. On peut se placer directement dans une tarification "haute".

Il convient également de garder à l'esprit les limitations des moyens de calcul mis à notre disposition : les algorithmes d'arbres binomiaux reposent fondamentalement sur des arguments de convergence de lois de probabilités discrètes vers des lois de probabilités continues. La précision du prix calculé par de tels algorithmes dépend donc grandement de la qualité du maillage temporel effectué, c'est-à-dire, concrètement, de la taille du pas de temps. Plus ce dernier est petit, meilleur sera le calcul. En revanche, les temps de calcul deviennent rapidement très élevés, et dans la pratique, dépasser 300 pas de temps pour une option américaine "lookback" relève de la haute voltige.



5.4.2 Influence de la garantie cliquet

Nous allons ici étudier comment le prix de l'option américaine se déforme lorsque l'on ajoute une garantie cliquet.

De toute évidence, l'influence de cette garantie dépendra de la périodicité de relevé du cours : plus les relevés sont fréquents, plus le prix de cette garantie sera élevé.

Si l'on fait augmenter la période séparant deux relevés du maximum, le prix de la garantie diminue ; si cet intervalle se rapproche de la durée totale de l'option, la garantie s'apparente de plus en plus à une option américaine (avec éventuellement une période de carence). Le prix converge donc vers un prix plancher qui est celui de l'option américaine à la monnaie correspondante. D'autre part, la volatilité du sous-jacent aura évidemment une influence déterminante.

On étudie à titre d'exemple l'influence de la mise en place d'un cliquet annuel (maximum relevé à date anniversaire du contrat), ce système étant le plus répandu dans les offres de garanties en cas de vie sur les UC.

L'influence de l'introduction du cliquet est, on le voit, considérable, puisqu'elle conduit à multiplier la prime par un facteur oscillant entre 2 et 5. Lorsque la durée du contrat augmente, l'effet de l'introduction du cliquet se fait de plus en plus prégnant. En revanche l'effet de la volatilité est moins aisé à appréhender, car l'augmentation de la volatilité semble tout d'abord atténuer l'effet du cliquet, puis l'accentuer de nouveau.

Le graphique suivant montre l'évolution du prix de l'option en fonction de la volatilité, avec et sans cliquet annuel. On constate que la garantie cliquet accentue l'effet de la volatilité : lorsque la volatilité augmente, le prix de la garantie avec cliquet tend à s'écarter encore du prix de la garantie simple.

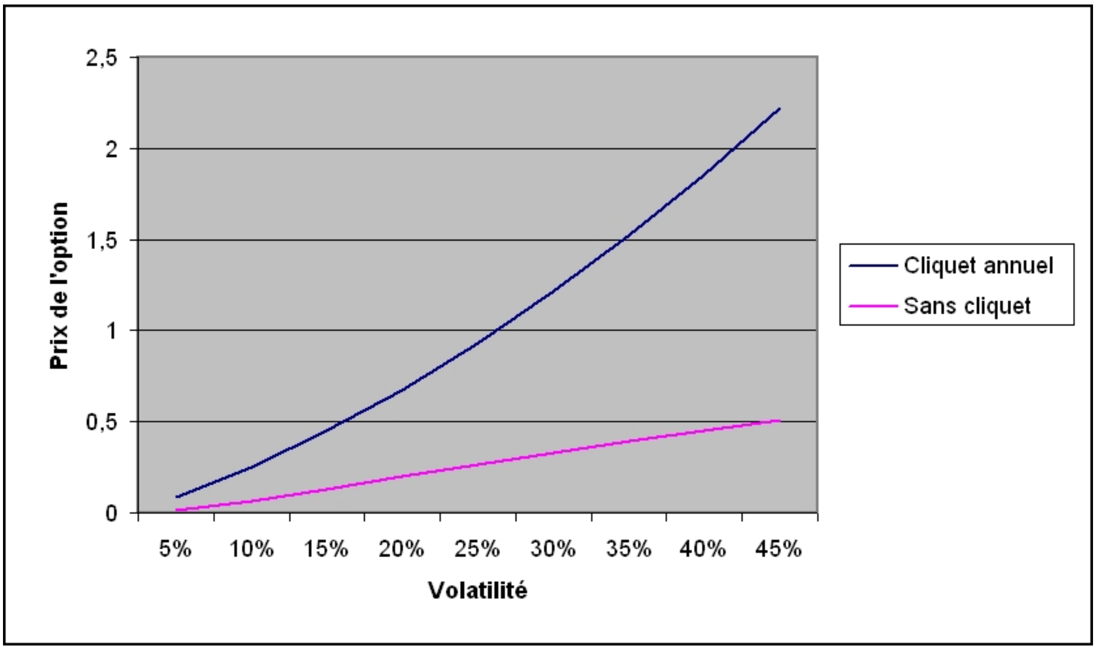


FIG. 5.3 – Influence de la garantie cliquet sur le prix de l'option

5.4.3 Revalorisation Minimale

On étudie ici l'influence sur le prix d'une revalorisation minimale du montant garanti. On considère ici que l'option n'offre pas de garantie cliquet.

L'effet anticipé est bien entendu celui d'une hausse du prix lorsque le taux garanti augmente. On remarque également dans la pratique que l'influence du taux de revalorisation minimal est accentué par une baisse de la volatilité. Intuitivement cela peut se comprendre assez aisément : en effet, plus la volatilité est faible, plus les chances que le cours du sous-jacent connaisse une forte croissance sous réduites. Dans ce cas, pour un même montant garanti (correspondant à la revalorisation minimale), le prix de l'option de vente pour un prix égal à ce montant garanti est d'autant plus élevé.

Le graphique suivant montre l'évolution du prix d'un put américain avec lookback, le cours initial de l'action étant égal à 100, pour 100 itérations, avec un taux sans risque de 2,5%, et une volatilité du sous-jacent égale à 30%.

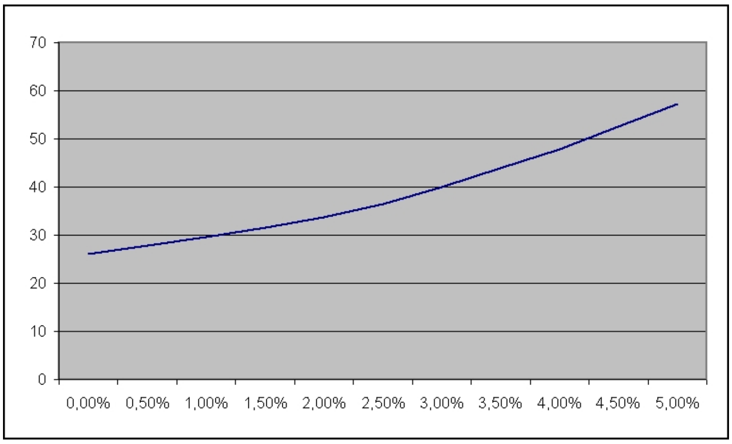


FIG. 5.4 – Influence d'un taux de revalorisation minimal sur le prix de l'option

Le graphique suivant permet de mesurer plus précisément, en fonction de la volatilité, l'influence d'une revalorisation minimale sur le prix de l'option. Cette influence est, on le voit, loin d'être

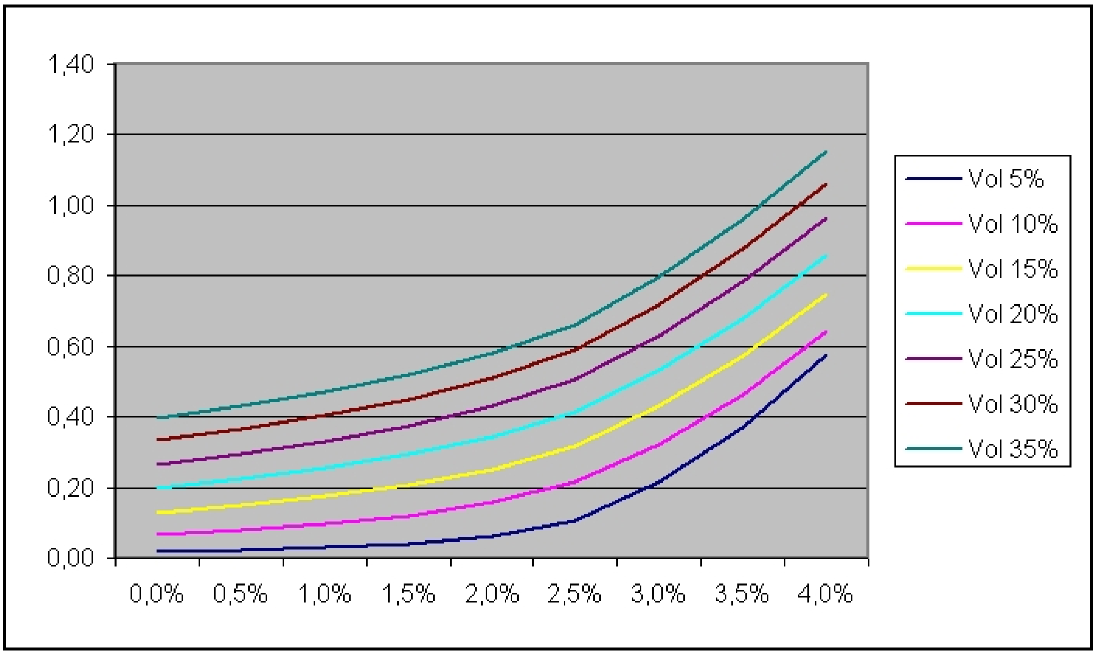


Fig. 5.5 – Prix de l'option en fonction du taux de revalorisation minimal pour plusieurs valeurs de la volatilité

négligeable, puisqu'une garantie de 2,5% de revalorisation annuelle de l'épargne peut facilement conduire à doubler la prime. Encore une fois cependant, les particularités de l'assurance-vie nous permettent d'apporter une réponse pragmatique à ce problème : les supports d'assurance-vie présentant en général une volatilité très faible, on peut déterminer une borne supérieure pour le tarif de la garantie.

5.4.4 Effets combinés d'un cliquet et d'une revalorisation minimale

La mise en place simultanée d'un taux de revalorisation minimale et d'un effet cliquet peut s'avérer une solution intéressante, dans la mesure où le prix obtenu grâce à la combinaison des deux est moins élevé que celui que l'on proposerait en sommant le prix de chaque garantie séparément.

On constate cependant que cet effet varie en fonction de la volatilité du support retenu, et du taux de revalorisation minimale proposé.

Comme on le voit sur les graphiques ci-dessous, lorsque le taux de revalorisation augmente, le prix de la garantie combinée "revalorisation + cliquet" converge vers le prix d'une garantie revalorisation seule. Cela se comprend intuitivement, car à volatilité fixée, lorsque le taux de revalorisation augmente, la probabilité que le cours à date anniversaire soit supérieur à la valeur minimale devient de plus en plus faible. L'effet du cliquet a donc de moins en moins tendance à s'appliquer.

Lorsque la volatilité augmente, la convergence se fait moins rapide, puisque la probabilité de hausses importantes du cours est élevée, donc l'effet de la revalorisation minimale est moins sensible pour des taux peu élevés.

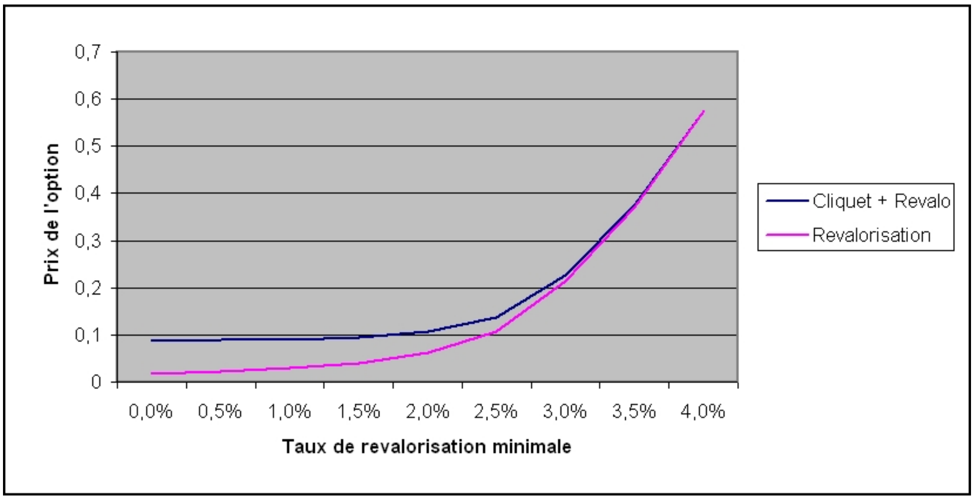


Fig. 5.6 – Cliquet et revalorisation minimale pour une volatilité de 5%

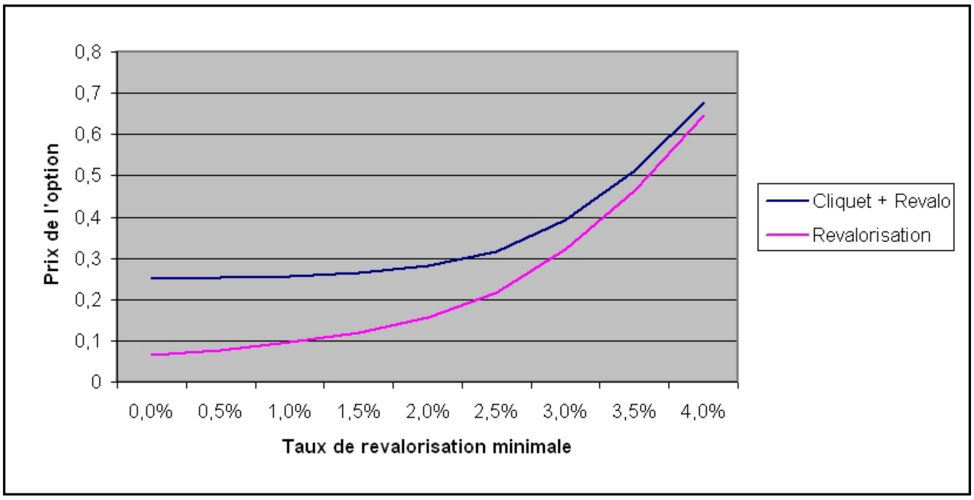


Fig. 5.7 – Cliquet et revalorisation minimale pour une volatilité de 10%

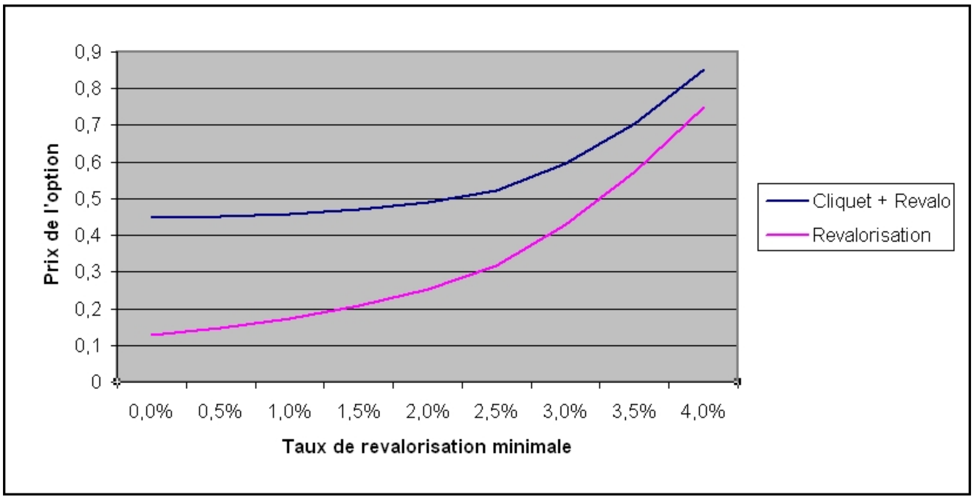


Fig. 5.8 – Cliquet et revalorisation minimale pour une volatilité de 15%

5.4.5 Période de carence

La période de carence permet de limiter la probabilité d'un exercice anticipé de l'option.

D'un point de vue méthodologique, on utilise les techniques de valorisation d'une option américaine au-delà de la période de carence, et les techniques de valorisation d'une option européenne en-deçà.

Si l'on ne considère que les stricts aspects financiers, l'impact d'une période de carence sur le prix de l'option est assez mince. Cet impact décroit lorsque la volatilité augmente.

Sur les graphiques suivants, on voit, pour des durées de garantie de 20 et 30 ans, l'impact d'une période de carence sur le prix d'une option en fonction de la volatilité. L'option modélisée est définie ainsi :

- Exercice possible à tout instant une fois écoulée la période de carence.
- Valeur initiale du sous-jacent : 1
- Prix d'exercice : 1
- Taux sans risque : 2,5%
- Pas d'effet cliquet ni de revalorisation minimale

La durée de la période de carence est une variable, puisque c'est l'impact que l'on cherche à évaluer. La volatilité varie dans chaque cas de 5% à 35% (une courbe par valeur de volatilité).

Durée 20 ans.

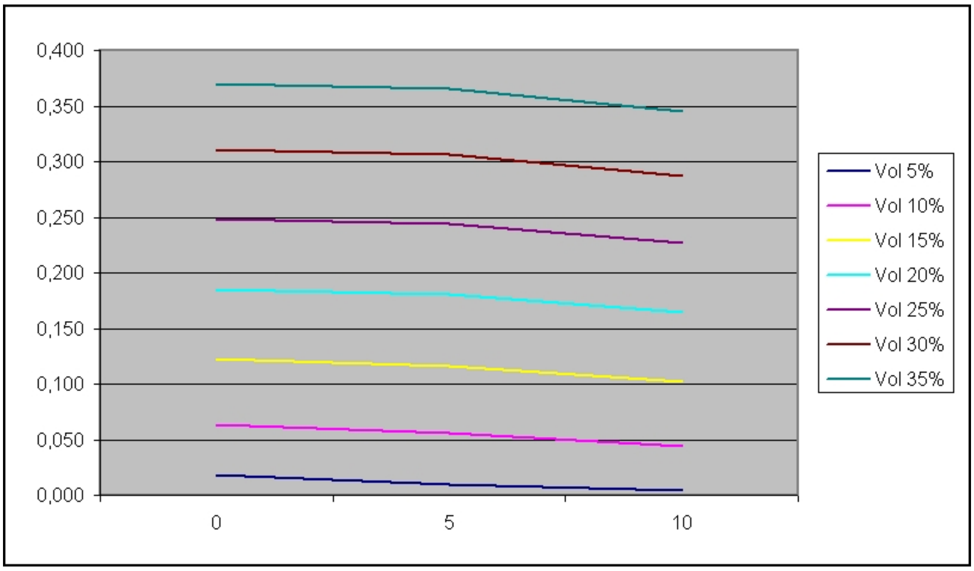


FIG. 5.9 – Influence de la durée de la carence pour une garantie de 20 ans

Durée 30 ans.

Afin d'étudier de façon exhaustive la pertinence d'une période de carence, il convient de

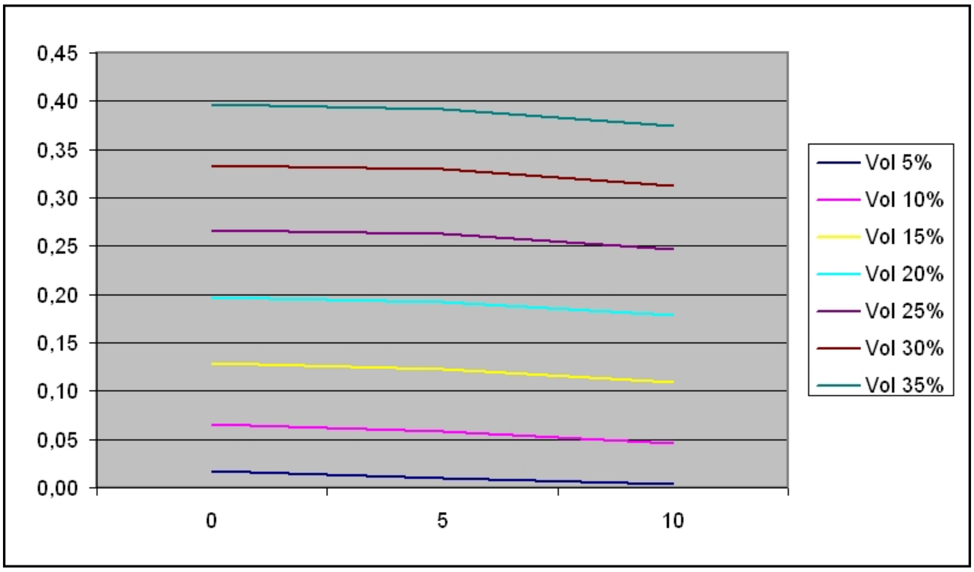


FIG. 5.10 – Influence de la durée de la carence pour une garantie de 30 ans

garder à l'esprit plusieurs points :

– Les fonds sur lesquels sont adossés les contrats en UC sont bien souvent des fonds dont la volatilité est assez limitée, afin de limiter autant que faire se peut le risque couru par l'assuré. Dans ce cas, la mise en place d'une période de carence est une possibilité intéressante, puisqu'elle permet de faire baisser le tarif de l'option de plus de 10% dans le cas d'une carence à 10 ans.

– Les contrats d'assurance-vie français bénéficient d'un cadre fiscal très avantageux à partir de la 8ème année. Cet élément est en général une incitation forte à la conservation du contrat d'assurance. En revanche la fiscalisation des plus-values ne jouera que dans le cas où l'évolution de l'épargne a été positive. Si le cours du support a eu une tendance baissière, l'appât fiscal n'est plus de mise, donc le client n'a pas d'incitation forte à conserver son contrat - sauf dans le cas où les conditions générales font état de prélèvements sur rachats. La période de carence permet d'inciter le client à conserver son contrat même -et surtout- lorsque le support a baissé : en effet c'est dans ce cas que la garantie en cas de vie prend de la valeur. Le client aura donc une incitation à conserver son contrat jusqu'à la fin de la période de carence pour sauver son épargne ou s'assurer un rendement minimal, selon les garanties choisies.

5.5 Prise en compte des frais

Le prélèvement des frais a, contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser envisager de prime abord, une influence considérable sur la façon d'envisager la modélisation. Un prélèvement de frais effectué de façon continue sur l'épargne du client disqualifie, par exemple, de fait, les algorithmes binomiaux.

En effet, si la garantie cliquet s'appuie sur la valeur maximale atteinte par l'épargne, supposons à présent que l'on prélève à chaque pas de temps un portion f de cette épargne.

Dans les algorithmes utilisés jusqu'ici, l'hypothèse consistant à poser $d = \frac{1}{u}$ permettait de réduire notablement le nombre des maxima possibles à un nœud donné. En effet, au nœud (i, j) les valeurs possibles pour le maximum étaient $Max(i + 1; i - j + 1)$.

La contrainte posée sur d et u permettait en fait de ne plus avoir à étudier l'ensemble des chemins possibles pour arriver à (i, j) ; chaque valeur du maximum correspondait à un groupe de chemins différents mais correspondant à l'atteinte d'une même valeur maximale, quelle que soit la période à laquelle cette valeur a été atteinte.

Si le nombre de parts baisse d'une proportion f à chaque pas de temps, le suivi de la valeur de l'épargne ne peut plus se réduire à la seule étude du cours du sous-jacent : il convient de prendre en compte cette baisse du nombre de parts.

Ainsi la période à laquelle la valeur maximale du cours est atteinte entre en ligne de compte dans l'estimation du maximum d'épargne.

Il faut alors réellement traiter séparément les différents chemins menant à (i, j). Le nombre d'opérations nécessaires pour l'approximation de la valeur de l'option devient du même coup énorme ; les temps de traitement deviennent rapidement inacceptables dès lors qu'une précision correcte est requise.

5.6 Prélèvements sur rachats

L'ajout de prélèvements sur rachats peut également avoir une influence non négligeable sur la tarification.

En effet, l'algorithme de décision repose sur la comparaison qu'effectue le détenteur de l'option (i.e. le client) entre la fair value de l'option s'il la conserve et le bénéfice qu'il dégage d'un exercice anticipé de l'option.

Si le produit comporte des pénalités sur rachats, la comparaison effectuée par le client est modifiée car la valeur d'un exercice anticipé doit être diminuée du montant des prélèvements sur rachats.

Toutefois la réglementation française est très restrictive sur les prélèvements sur rachats, et limite à la fois le montant que la société peut prélever et la durée durant laquelle ces prélèvements sont autorisés. Outre les aspects réglementaires, la contrainte concurrentielle incite elle aussi à la modération quant à ce type de dispositifs.

Chapitre 6

Etude "assurancielle" de la garantie plancher en cas de vie

Dans cette dernière section, nous allons aborder quelques raffinements possibles pour l'assureur lors de son exercice de tarification. En effet une modélisation strictement financière ne permet pas forcément de rendre compte de toutes les particularités de la garantie. La prise en compte de la mortalité dans le tarif, ainsi que le calcul d'une prime prélevée non plus de façon unique mais de façon continue sur l'épargne, sont à ce titre particulièrement intéressants.

6.1 Mortalité

N.B : Cette partie n'aborde pas l'optionalité d'une garantie *GMIB* sur la mortalité (écart entre les arrérages obtenus en exerçant la garantie et en sortant en rente aux conditions de marché).

Jusqu'ici nous avons considéré que le détenteur de l'option (le client) examinait à chaque instant l'opportunité de conserver ou non cette option, en comparant sa valeur intrinsèque à la fair value de l'option s'il la conserve. Toutes ces comparaisons sont basées sur l'hypothèse sous-jacente que le client ne décède pas avant la conclusion de sa garantie.

Cette hypothèse serait recevable si nous travaillions sur un strict produit financier. Puisque nous travaillons sur un produit d'assurance-vie, il est indispensable de tenir compte de la mortalité.

Nous considérons dans la suite de cette étude que la mortalité du client n'a aucune corrélation avec l'évolution de son épargne, ni avec les paramètres qui la sous-tendent. Cela revient notamment à négliger le risque qu'un client, découvrant la situation de son contrat après une année de forte baisse, soit foudroyé par une attaque cardiaque. Dans ce cas, nous pouvons adapter nos algorithmes de comportement optimal de façon assez simple. Par exemple pour un arbre binomial, à chaque noeud nous comparons la valeur intrinsèque de l'option avec la valeur de conservation. Si l'évolution de l'épargne n'a pas de corrélation avec la mortalité, la probabilité que le client soit encore vivant au pas de temps suivant est la même, que l'on considère que le cours du sous-jacent augmente ou qu'il baisse.

Ainsi, nous allons comparer la valeur intrinsèque de l'option avec une valeur de conservation "corrigée" destinée à rendre compte de l'impact de la mortalité, et qui sera naturellement égale à la valeur de conservation "financière" multipliée par la probabilité de survie de client entre les deux pas de temps.

On remarquera que ce traitement est "intuitivement cohérent" : en multipliant les valeurs de conservation par un facteur de probabilité (structurellement inférieur à 1), nous minimisons à chaque fois la valeur conservée, par rapport à la démarche purement financière appliquée précédemment. La valeur de la garantie sera donc inférieure à sa valeur financière stricte. Nous pouvions anticiper ce résultat : en effet, en introduisant de la mortalité dans notre garantie, nous formulons implicitement l'hypothèse qu'un certain nombre de contrats n'utiliseront pas la garantie car leur détenteur décèdera avant que survienne la période d'exercice optimal.

6.1.1 Modification de l'algorithme d'arbre binomial par la prise en compte de la mortalité

Si l'on se place dans une configuration où un algorithme binomial est acceptable, on peut assez aisément introduire un facteur de mortalité dans le calcul.

Dans l'algorithme initial, à chaque étape, au noeud (i, j), on calcule l'espérance actualisée sous la probabilité risque neutre du payoff de l'option. Si l'on connait une table de mortalité pour l'assuré, on peut affecter à ce payoff un coefficient multiplicatif représentant le taux de survie $\frac{l_{x+dt}}{l_x}$ de l'assuré durant la période dt.

6.1.2 Tarification par âge

La prise en compte de la mortalité dans l'évaluation du prix de la garantie conduit à donner un tarif différent selon l'âge du client. L'assureur préférera souvent, pour faciliter l'argumentaire commercial, aboutir à une tarification unique. Les garanties étudiées comportent, certes, un aléa viager, mais pour des produits d'épargne, il est assez délicat d'introduire des grilles tarifaires complexes, et il est tentant, commercialement parlant, de proposer un prix unique - éventuellement décliné par tranche d'âge assez large.

Le risque est bien entendu celui d'une forte antisélection, les personnes les plus âgées ayant alors un très net intérêt à souscrire les garanties, tandis que pour les personnes moins âgées ou présentant un risque moindre, le prix proposé s'avérerait peu avantageux.

Plusieurs solutions sont envisageables afin de réduire ce risque : on peut, à titre d'exemple, n'offrir ces garanties qu'aux assurés en deça d'un âge maximal ; le tarif unique proposé peut s'appuyer sur les résultats obtenus pour cet âge maximal, ce qui permet de garder une approche prudente de la garantie.

Dans le cas d'une garantie en cas de vie, une augmentation de la mortalité diminue les chances que la garantie soit exercée par le client. Cela a donc pour effet d'en minimiser le tarif. Cette interprétation est toutefois à nuancer : si l'on considère que l'option est payée en prime unique dès sa souscription, ce raisonnement restera vrai en général. Lorsque l'on évalue un tarif prélevé chaque année sur l'épargne du client, la mortalité a à la fois un impact sur la juste valeur des prestations, mais également sur celle des prélèvements. Sur des âges extrêmes, la diminution de la valeur des prélèvements induite par la mortalité peut conduire à constater des tarifs plus élevés que sur des âges inférieurs.

En limitant l'âge maximal de souscription d'une telle garantie, on peut éviter ce type d'effets ; pour se garantir une approche prudente, il faut dans ce cas tarifer la garantie avec l'âge le plus bas possible.

L'influence de l'âge sur le tarif de la garantie peut être énorme. Le graphique ci-dessous permet de s'en convaincre. On étudie ici en fonction de l'âge le prix d'une garantie définie comme suit :

- Volatilité du support : 8%
- Table de mortalité utilisée : TV88-90
- Pas de garantie cliquet
- Taux de revalorisation minimale de 2%
- Durée de la garantie : 40 ans au maximum
- Période de carence : 10 ans
- Frais de Gestion : 1% annuels

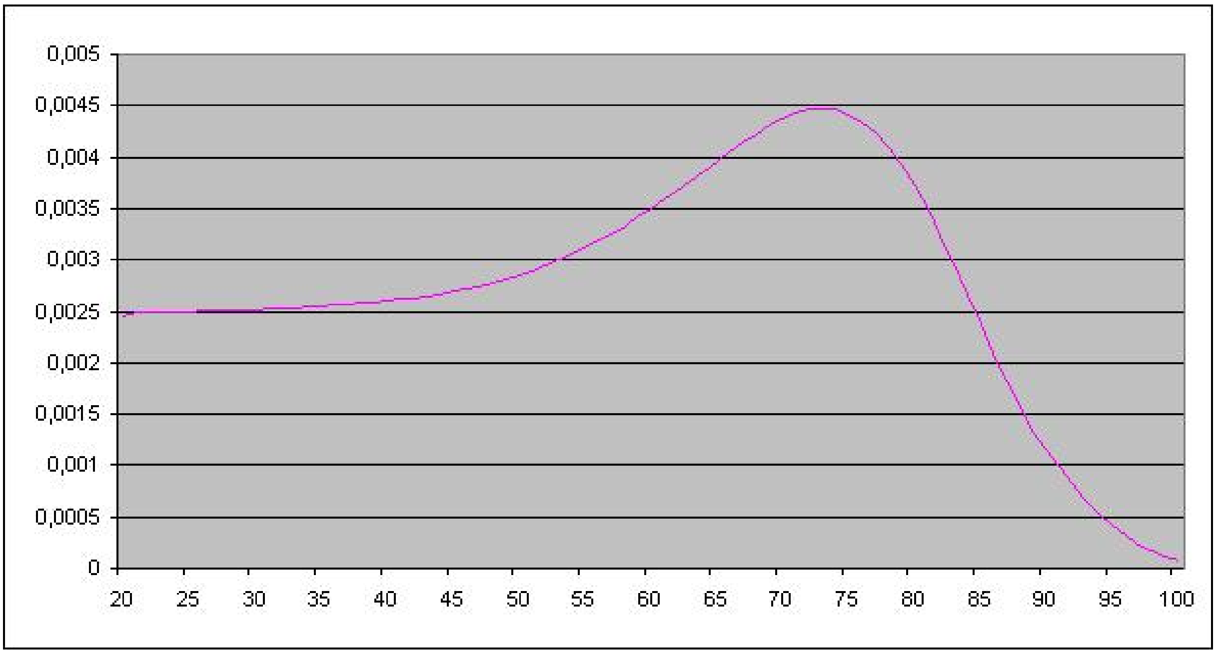


Fig. 6.1 – Influence de l'âge sur le prix de la garantie en cas de modélisation de la mortalité

La décroissance du graphique pour les âges extrêmes s'explique simplement par la durée de plus en plus courte de la garantie dans ces cas là (l'atteinte de l'âge maximal prévu dans la table de mortalité provoque en effet la fin du contrat et donc de la garantie).

6.2 Frais prélevés régulièrement sur l'épargne

Jusqu'ici, nos calculs de tarification nous ont permis de calculer des "primes uniques", de façon aussi sophistiquée que possible, pour les garanties considérées. Cela revient à considérer que l'assuré règle la totalité des frais liés à sa garantie lors de la souscription du contrat, et qu'il les règle par un versement additionnel au montant placé sur le contrat. Dans la pratique, le fonctionnement de la garantie est différent : la souscription d'une garantie plancher se traduit généralement par un pourcentage de frais supplémentaire prélevé sur l'épargne du client.

Donc non seulement la prime de l'option n'est-elle pas versée en un flux unique, mais le prélèvement des frais a un impact sur l'évolution de l'épargne du client.

Nous supposerons dans un premier temps que le contrat étudié ne comporte pas de garantie cliquet. Cette hypothèse nous permet de conserver un algorithme d'arbre binomial. En revanche, le fait que les frais soient prélevés à intervalles réguliers sur l'épargne nous oblige à aménager la méthode d'évaluation du prix de la garantie.

Tant que nous considérions ce prix comme une prime unique payée "séparément" du contrat par le client, notre seule préoccupation était l'évaluation de la juste valeur des prestations. Cette fois, nous devons adopter une démarche plus proche des techniques traditionnelles de tarification d'assurance : **la juste valeur des prélèvements futurs sur le contrat doit être égale à la juste valeur des prestations que l'assureur garantit au client**. Dans le cas particulier d'un taux de prélèvement régulier sur l'épargne, il faut tenir compte d'une subtilité supplémentaire : les prélèvements sur l'épargne ont une influence sur la valeur des prestations.

Cela peut se constater facilement sur un exemple simple. Considérons un contrat dont la valeur initiale est 1. Au bout d'une année, le cours du support a pu évoluer d'un facteur haussier u ou d'un facteur baissier d. L'assureur garantit au client une valeur de rachat minimale de 1 au terme de l'année. Un pourcentage f de frais est prélevé chaque année sur l'épargne du client au titre de cette garantie.

Au bout d'un an, l'épargne du client sera donc $u(1-f)$ en cas de hausse et $d(1-f)$ en cas de baisse. La valeur de la garantie est donc $Max(0; 1-u(1-f))$ en cas de hausse et $1-d(1-f)$ en cas de baisse.

En introduisant la probabilité risque neutre p de cet environnement binomial, et en notant r le taux sans risque, la juste valeur des prestations est :

$$(pMax(0; 1-u(1-f)) + (1-p)d(1-f))\, e^r$$

On voit immédiatement que cette valeur est bien fonction du tarif retenu.

Autrement dit les deux valeurs ne peuvent pas être calculées séparément. Dans la pratique, on procédera donc par approximation numérique en utilisant des itérations successives permettant de déterminer le taux de prélèvement qui permet d'égaliser primes et prestations en juste valeur.

Voici un exemple simple démontrant la logique suivie. Les hypothèses retenues ne sont pas réalistes dans le cadre de l'étude d'un contrat d'assurance-vie, mais elles sont nécessaires pour la compréhension de l'exemple ; la méthode exposée s'étend facilement à des cas plus complexes modélisant de façon plus exacte l'évolution d'un contrat d'assurance-vie (pas de temps plus précis, durée plus longue...)

Nous allons étudier un contrat présentant les caractéristiques suivantes :

- La durée du contrat est de 3 ans
- L'épargne du client est adossée à un support sous-jacent d'une volatilité de 8%
- Le versement initial du client est de 100 ; il correspond à 1 part du support considéré.
- Paradigme binomial : chaque année, le cours du support ne peut subir que deux mouvements :

  – Un mouvement à la hausse correspondant à une augmentation de $u = e^{8\%}$
  – Un mouvement à la baisse correspondant à une diminution de $d = e^{-8\%}$

– A la fin de chaque année, l'épargne du client subit deux prélèvements successifs :
  – Un prélèvement correspondant aux frais de gestion de l'épargne, pour un taux $tx_{fg} = 1\%$
  – Un prélèvement correspondant au tarif de la garantie , pour un taux tx_{gar}

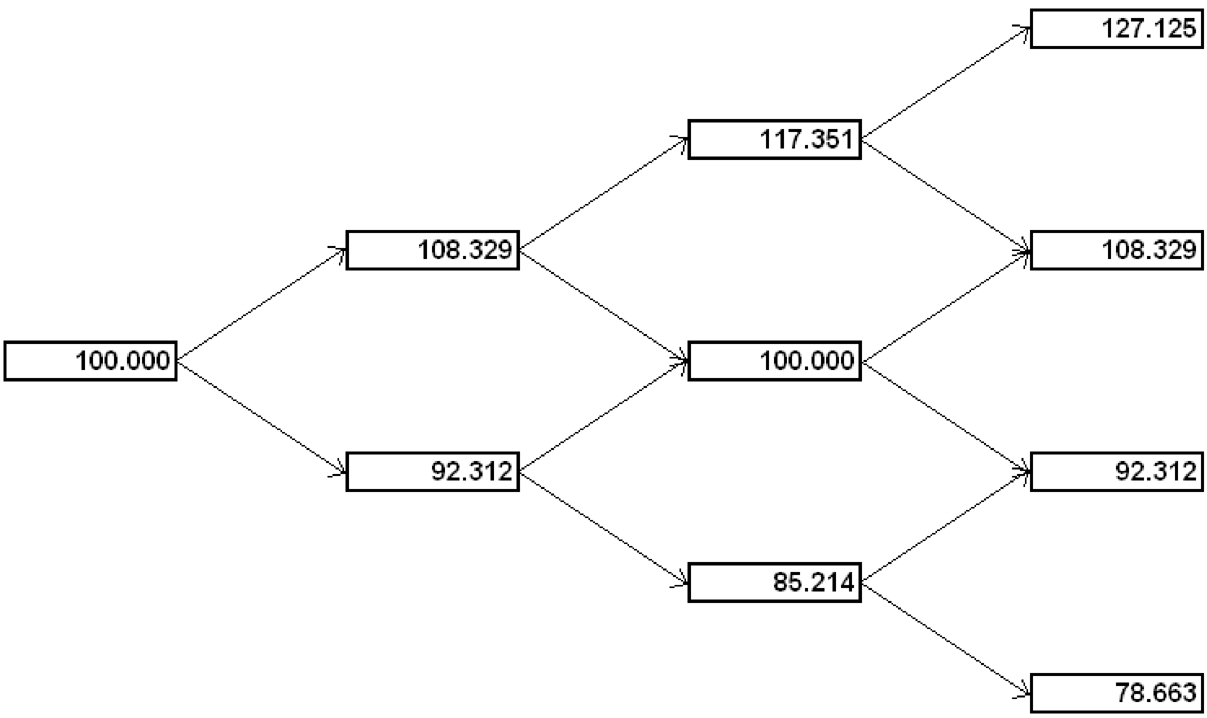
– L'assuré peut racheter son contrat à la fin de chaque année (après les prélèvements) ; l'assureur lui garantit une valeur de rachat minimale égale à son versement initial revalorisé au taux annuel de 1%.

– Le taux sans risque est de 4% (taux actuariel, correspondant à un taux continu de 3,922%).

Le but de l'exercice de tarification est de déterminer le taux de prélèvements tx_{gar}. Nous procéderons par itérations successives. Seule la première sera détaillée ici ; nous retenons une valeur de départ $tx_{gar} = 1,5\%$.

1ère étape : Calcul des évolutions possibles du cours du support

Cette première partie ne pose aucun problème, il suffit de créer l'arbre binomial des valeurs en utilisant les coefficients u et d. Le schéma suivant résume ces résultats.



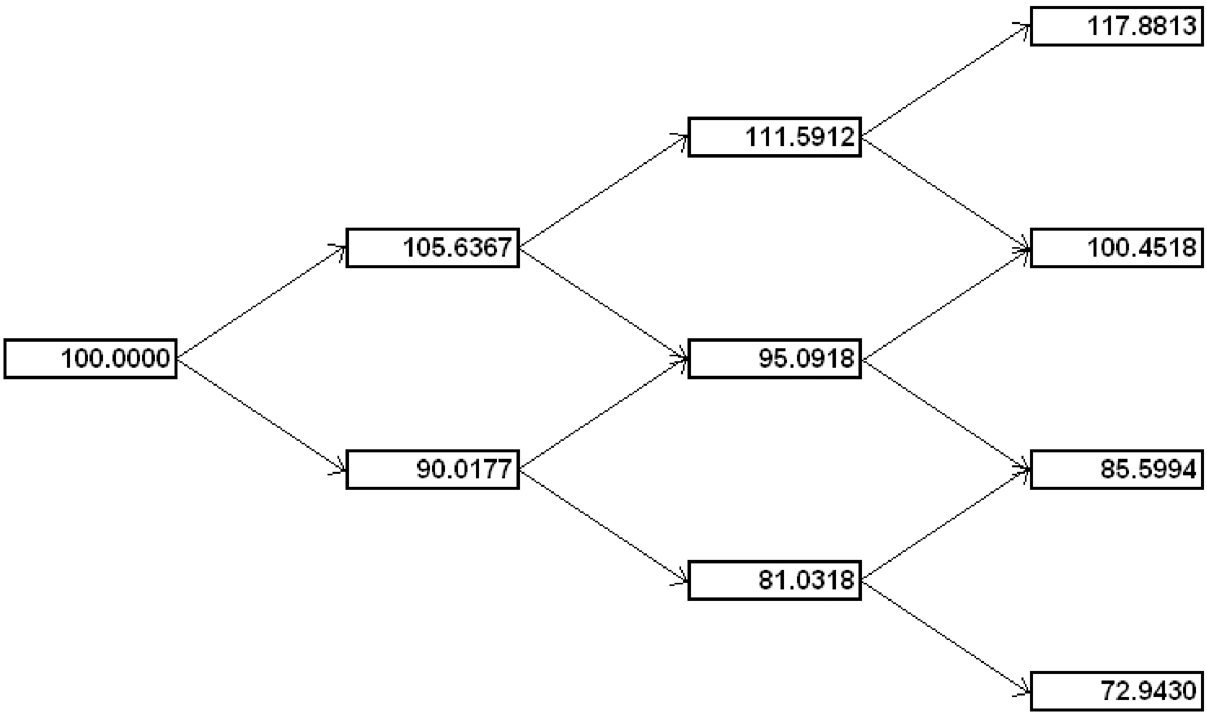
2ème étape : Calcul du nombre de parts détenues par le client

Le nombre de parts initial est égal à 1, et à chaque fin d'année, deux prélèvements successifs de 1% viennent diminuer ce nombre de parts. Le nombre de parts détenu par le client en début d'année i est donc égal à $(1 - tx_{fg})^i \times (1 - tx_{gar})^i$, ce qui se traduit numériquement par les résultats suivants :

Date	0	1	2	3
Nombre de Parts	1,0000	0,9752	0,9509	0,9273

3ème étape : Calcul des valeurs possibles de l'épargne du client

Il suffit de multiplier la valeur du cours à chaque noeud de l'arbre par le nombre de parts détenues par le client à la date correspondante pour obtenir l'arbre de valeurs possibles de l'épargne :

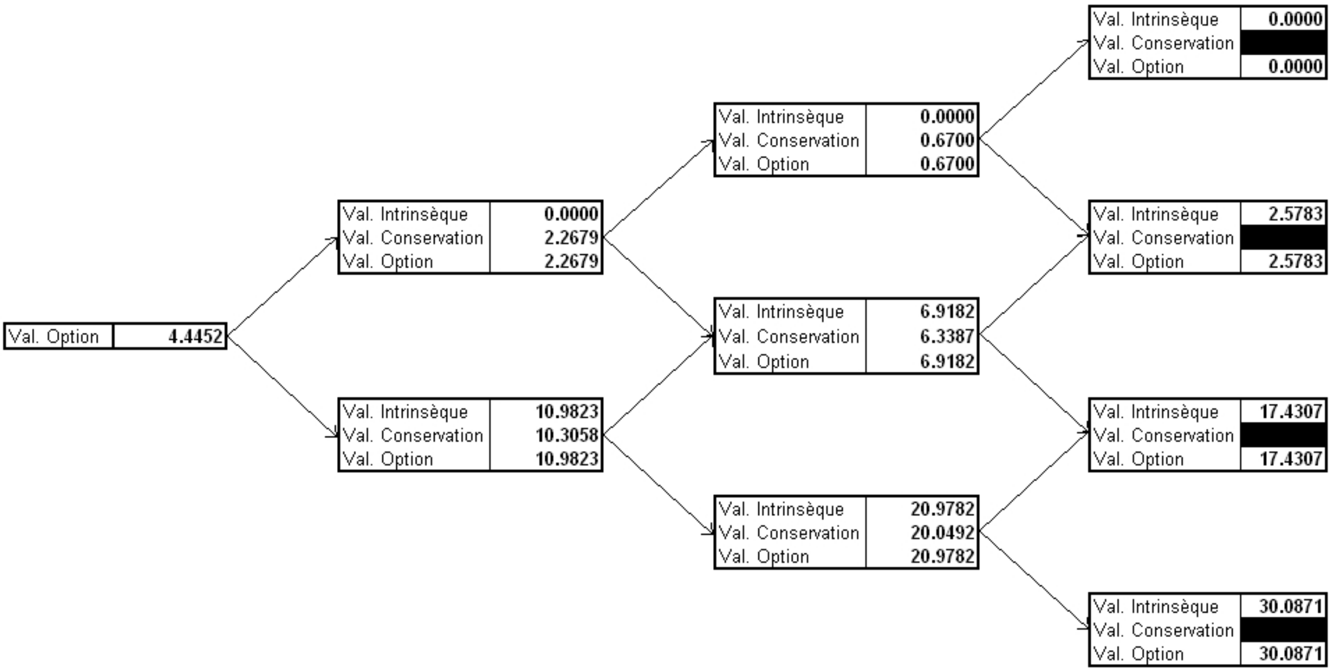


4ème étape : Calcul de la juste valeur des prestations

La démarche utilisée est inchangée, et correspond à la méthode d'évaluation d'une option américaine par arbre binomial : en partant de la dernière période, on effectue une itération par pas de temps décroissant, en comparant à chaque pas la valeur d'exercice anticipé à la valeur de conservation de l'option (déterminée à l'aide de la probabilité risque neutre).

Le payoff de l'option est ici égal à $Max(1 \times (1+2,5\%)^i - E_{ij}; 0)$, où E_{ij} correspond à l'épargne du client au noeud $(i; j)$.

Dans le cas présent, on trouve ainsi la juste valeur des prestations : 4,4452.



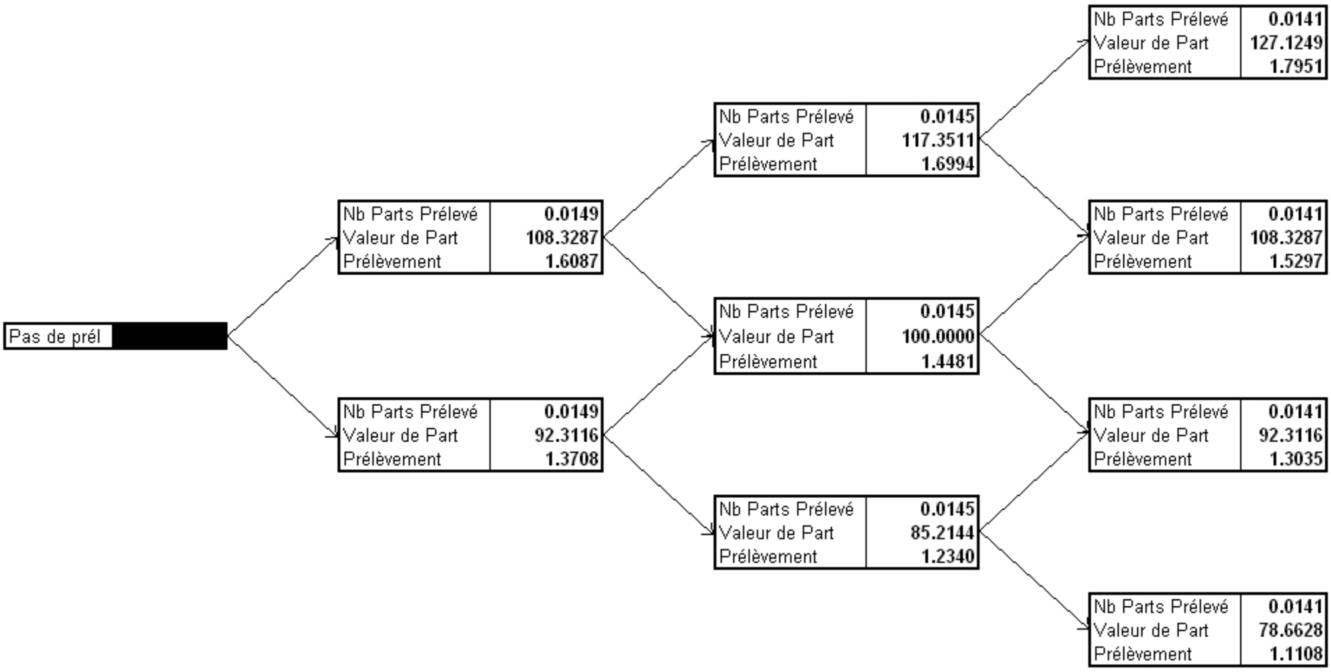
5ème étape : Calcul de la juste valeur des prélèvements

On connait le nombre de parts prélevé à chaque pas de temps ; en revanche la valorisation de ces parts varie en fonction du cours du support au noeud considéré. L'utilisation de la probabilité risque neutre nous offre un moyen simple et élégant d'aboutir au résultat cherché : en effet, dans l'univers risque neutre, tous les actifs évoluent (en espérance) au taux sans risque.

Le nombre de parts prélevés à chaque pas de temps étant le même quelle que soit la valeur du cours du support, on sait que l'espérance de la valeur de ces prélèvements sera égal à ce nombre de parts valorisé à l'aide d'une valeur de part capitalisée au taux sans risque.

Comme par ailleurs tous les montants sont actualisés au taux sans risque, nous pouvons directement écrire que la juste valeur des prélèvements est égal à la somme des nombres de parts prélevés à chaque période, multiplié par la valeur initiale du cours du sous-jacent.

Un raisonnement par arbre consistant à calculer la valeur des prélèvements à chaque noeud de l'arbre et en effectuant la somme actualisée de ces prélèvements, pondérés par la probabilité d'arriver à chaque noeud donnera bien la même valeur. Le résultat trouvé est 4,3452. Dans ce cas, les prélèvements ne suffisent pas à couvrir les prestations, malgré un taux de prélèvement élevé pour cette garantie. Il faudrait donc déterminer le taux de prélèvement souhaité par itérations successives. Une simple méthode par dichotomie, ou des techniques plus sophistiquées d'optimisation numérique nous permettront d'effectuer ce calcul.



6.3 Rachats Statiques

La modélisation de rachats statiques est possible à condition de considérer que ces taux de rachats proviennent d'une cause totalement exogène et ne dérivent pas d'un comportement du client.

Dans ce cas, la modélisation est semblable à celle utilisée pour la mortalité, si ce n'est que les coefficients de chute ne dépendent plus de l'âge de l'assuré mais de l'ancienneté du contrat.

le graphique ci-dessous montre l'influence du taux de rachat moyen sur le prix de la garantie.

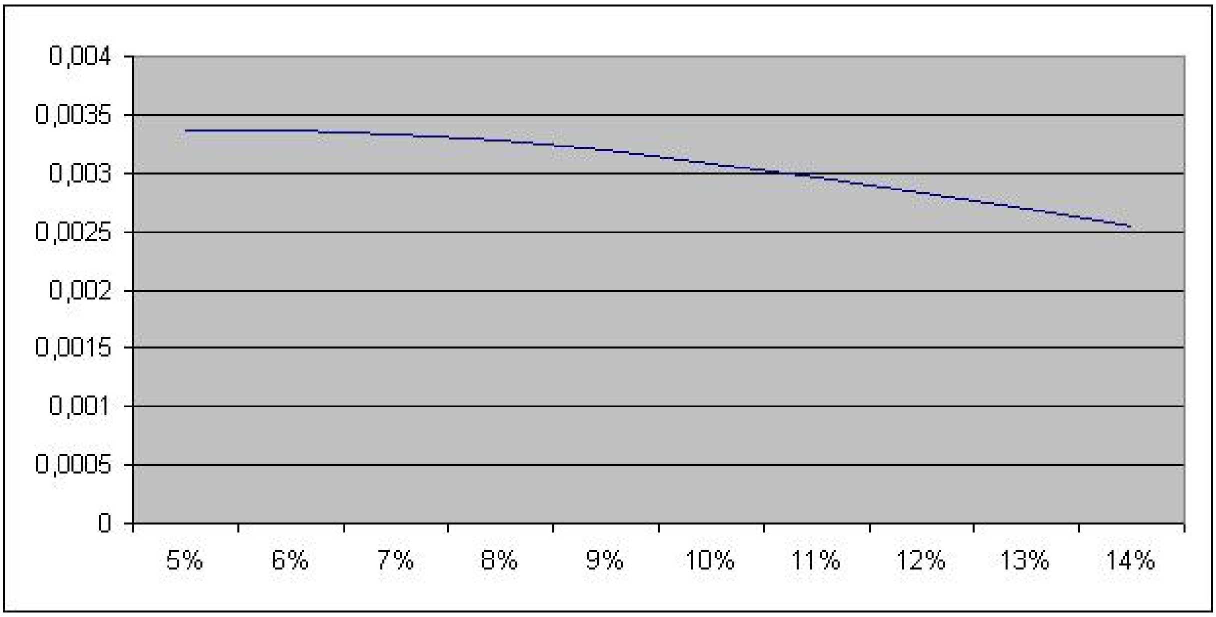


FIG. 6.2 – Influence d'un taux de rachat statique

6.4 Rachats Dynamiques et Rachats Optimaux

Toutes les études menées jusqu'ici sont basées sur une hypothèse implicite de comportement optimal du client. On considère en effet que le client, à chaque étape, compare la valeur d'exercice anticipé de sa garantie avec l'espérance de ses gains s'il la conserve. Cela appelle deux remarques :

- Les tarifs obtenus correspondent à une estimation prudente à l'extrême pour l'assureur. Commercialement, en revanche, les tarifs obtenus peuvent facilement s'avérer excessifs.

- Le détenteur d'un produit d'assurance-vie n'obéit pas systématiquement à une logique de comportement optimal. Contrairement à un acteur institutionnel intervenant sur un marché financier, le client possédant un contrat d'assurance-vie peut décider d'adopter un comportement différent de celui dicté par la recherche d'une espérance de gain maximale. Il peut être amené à racheter son contrat prématurément pour faire face à un besoin d'argent. Il peut également préférer un gain instantané certain à une espérance de gains futurs certes supérieure, mais sur laquelle pèse un aléa.

Une solution pour pallier ce problème peut être d'adopter une méthode de tarification différente. On peut en particulier mettre en place une modélisation du comportement du client s'éloignant du modèle optimal adopté jusqu'ici.

Le risque d'une telle solution est bien entendu celui d'une sous-estimation du tarif ; et dans le cas où le client adopte réellement un comportement optimal, cette tarification se soldera par une perte pour l'assureur.

Dans ce cas, on sort d'une optique de comportement optimal, et la démarche adoptée s'en trouve inversée :

- Dans la démarche classique de tarification d'option américaine en comportement optimal, on détermine la date d'exercice qui permet au client de maximiser l'espérance de son gain. Pour ce faire, on part du dernier pas de temps pour ensuite procéder par itération sur des dates décroissantes.

- Ici en revanche, en posant une loi d'exercice a priori, dépendant de la réalisation d'une condition déterminée par les conditions de marché, on considère que l'exercice sera effectué dès que la condition posée est réalisée. On procède donc par évaluations successives de cette condition lorsque le temps augmente.

La modélisation de rachats dynamiques n'a d'autres limites que celles de l'imagination de l'actuaire : divers mécanismes peuvent être envisagés. La plus grande difficulté réside en fait dans l'obtention de données pertinentes. Le nombre de paramètres entrant en compte dans la modélisation du comportement du client peut être multiplié à l'envi, encore faut-il pouvoir disposer de données concrètes pour l'étalonnage du modèle.

- La plus simple est probablement de définir un seuil en valeur absolue à partir duquel l'assuré exerce systématiquement sa garantie. Très simple à mettre en place, cette règle d'exercice est également très criticable, le choix du seuil ayant de ce fait un impact déterminant.
  Le graphique suivant montre l'impact d'une valeur d'exercice automatique sur le prix de la garantie.
- Une autre possibilité est d'envisager pour le cours du sous-jacent un seuil en valeur absolue à partir duquel l'assuré rachète son contrat. Le problème posé par une telle règle est que

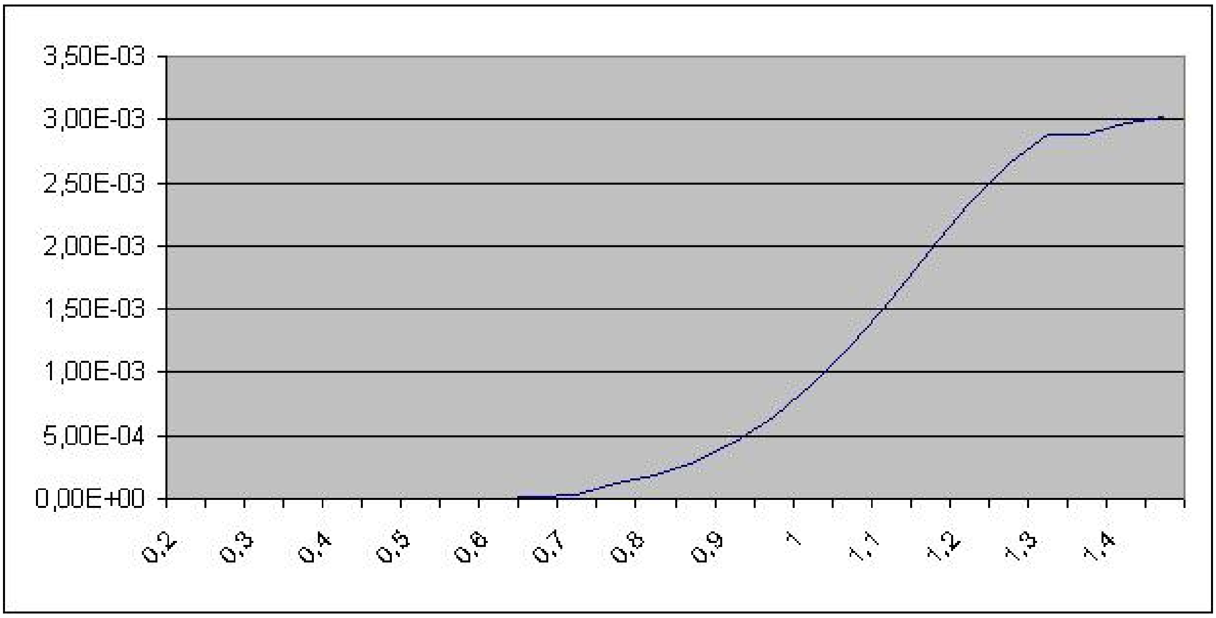


FIG. 6.3 – Influence d'un exercice automatique en cas d'atteinte d'une valeur maximale de l'option

la survenance éventuelle du rachat automatique se produit lorsque les cours sont élevés, donc en général lorsque la valeur intrinsèque de la garantie est nulle. Si l'on fixe un cours limite trop bas, la rachat du contrat se produit pour des valeurs d'épargne assez faible, le risque est grand de sous-estimer la valeur de la garantie. A l'inverse, plus la valeur du cours de rachat automatique augmente, plus son influence devient faible dans le prix. Le graphique suivant montre l'évolution de la valeur de la garantie lorsque l'on introduit un mouvement de rachat automatique.

– Une autre règle envisagée est plus avancée. On suit au cours de l'évolution du contrat, le rapport entre la valeur d'exercice de la garantie et l'épargne du client. Lorsque ce rapport franchit un certain seuil, on considère que les assurés seront incités à l'exercer. On affecte dans ce cas un coefficient multiplicateur à la loi de rachat statique.

6.5 Courbe des Taux

6.5.1 Courbe des taux déterministe

Comme dans la partie précédente, la gestion d'une structure des taux sans risque ajoute des complexités supplémentaires dans le modèle. Comme précédemment, toutefois, les modèles que nous utilisons restent basés sur un discrétisation du temps. Nous pouvons donc, cette fois encore, mettre cette discrétisation à profit et utiliser à chaque pas de temps les relations d'équivalence des taux comptant-terme pour obtenir le taux sans risque, calculé à la date d'évaluation, à utiliser pour ce pas de temps.

6.5.2 Scénario stochastique de taux

Encore une fois, la méthode à appliquer reste constante : l'utilisation d'un modèle stochastique de taux nous permet de générer un ensemble de scénarios de taux que nous pouvons ensuite simuler comme autant de scénarios "déterministes".

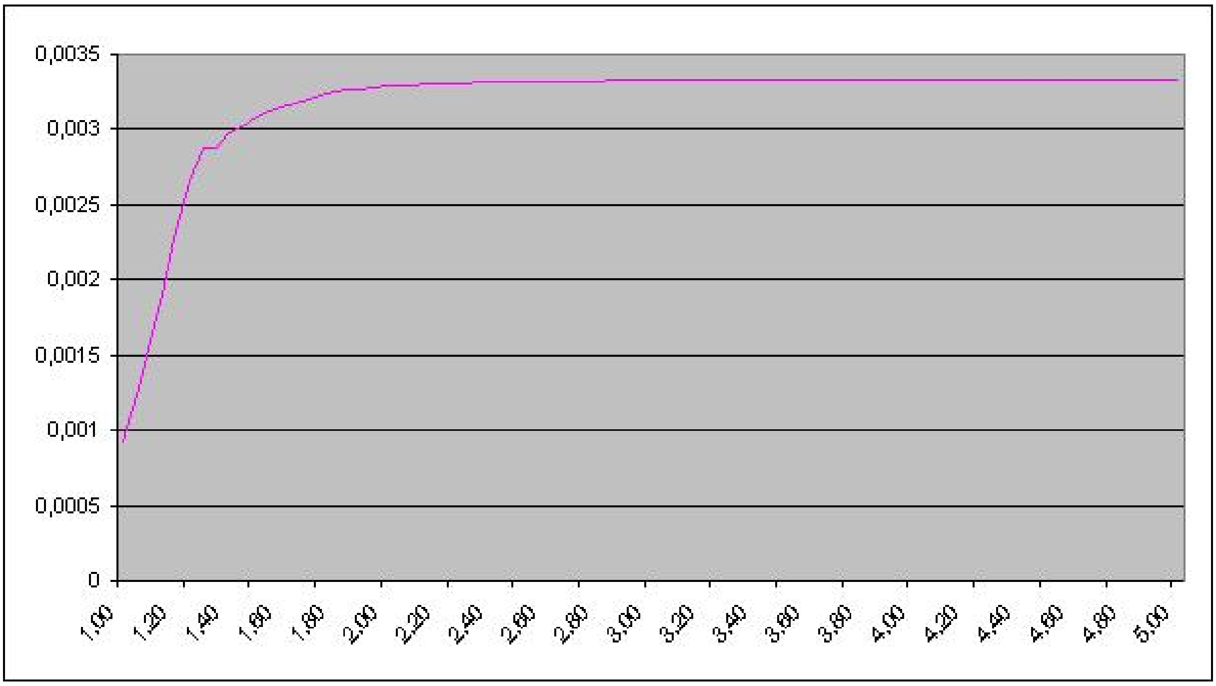


Fig. 6.4 – Influence d'un rachat automatique en cas d'atteinte d'un cours maximal

On notera toutefois que la gestion d'un scénario stochastique de taux débouche ici sur des temps de traitement extrêmement élevés, car pour chaque scénario, le prix doit être évalué à partir de la méthode de Longstaff-Schwartz, donc en utilisant là encore une multiplicité de scénarios.

6.6 Analyse des résultats

La première réaction lors de l'analyse des résultats obtenus concerne les taux élevés de prélèvements à prévoir pour garantir une GMSB. Se pose dès lors la question de la viabilité commerciale d'une telle garantie.

L'anticipation faite sur les taux est primordiale ; c'est d'ailleurs un des risques principaux sur une telle garantie.
L'effet du taux minimum garanti est également énorme. Pour obtenir des tarifs acceptables, l'assureur sera obligé de brider drastiquement l'éventuel taux de revalorisation minimale.

6.7 Optionalité sur les paramètres de sortie en rente d'une GMIB

Nous ne traiterons pas ici les problèmes liés à l'optionalité d'une GMIB dans leur intégralité. Nous nous permettrons en revanche de mentionner ici le deux pistes d'analyse qui nous paraissent mériter un examen plus approfondi. L'optionalité sur le taux technique est un premier élément. Les taux techniques maximaux sur des produits de rente étant liés par le Code des Assurances au TME, il est possible de rendre compte de cette optionnalité en utilisant un modèle de taux simulant l'évolution du TME. L'optionalité sur la mortalité est, elle, beaucoup plus difficile à prendre en compte. En effet, la probabilité d'une modification des tables de mortalité réglementaires pendant la durée du contrat d'assurance-vie est réelle. Toutefois l'anticipation de ces modifications et leur survenance effective n'a jamais fait l'objet d'une modélisation.

Globalement, tous ces risques peuvent être évacués d'une façon très simple : il suffit en effet de fixer les paramètres de sortie en rente dès la souscription du contrat, et de ne pas les relier avec les valeurs du marché (cela peut toutefois poser des problèmes réglementaires).

Chapitre 7

Conclusion

Nous l'avons vu, l'exercice de tarification d'une garantie en cas de vie sur des contrats en Unités de Compte peut être abordé sous des angles très variés. Les raffinements possibles dans la conception et l'évaluation de la garantie sont quasiment illimités.

Retenons en tout cas la richesse des possibilités offertes par les techniques financières développées durant ces trente dernières années : d'innombrables outils, utilisés quotidiennement dans les salles de marchés bancaires, sont encore peu utilisés en assurance. Notre étude s'est particulièrement attardée sur les modélisations par arbres binomiaux et sur les adaptations possibles de méthodes de Monte-Carlo (se reporter à l'algorithme de Longstaff et Schwartz).

D'autres pistes d'études restent maintenant ouvertes. Les problématiques de couverture n'ont en effet pas été abordées ici.

Toutes les techniques décrites ici s'appliquent au cas d'un versement unique à la souscription. Le cas de primes périodiques éventuelles reste à traiter.

Le provisionnement de ce type de garantie est également un sujet qu'il conviendrait de creuser. En effet les contraintes réglementaires françaises imposent des règles prudentielles pour le calcul des provisions liées aux Garanties Plancher, contraintes que l'application de diverses techniques ici étudiées pourrait mettre à mal.

Enfin, une interrogation cruciale demeure : celle de la capacité du marché de l'assurance (et de l'assurance française en particulier) à s'ouvrir à des garanties moins traditionnelles comme les garanties présentées ici. Sur les produits en Unités de Compte existant, on constate bien souvent des pics de production aux périodes où les marchés sont au plus haut, et des vagues de rachats lorsque les cours ont chuté. Ce simple fait semble démontrer une maturité insuffisante de la compréhension de ce type de produits. L'adoption d'outils novateurs encore plus complexe apparaît dès lors comme une étape supplémentaire à franchir.

Annexe A

ANNEXES

A.1 Revue de presse : comment sont perçues les garanties liées aux Unités de Compte ?

A.1.1 Article de smartmoney.com : What's wrong with variable annuities (extraits

VARIABLE ANNUITIES are sold more aggressively than fake Gucci handbags on the streets of New York City. Thanks in part to commissions around 5%, sales of variable annuities have soared over the past decade.

But popularity is no indicator of practicality. The truth is, annuities only make sense for a tiny fraction of the population. The rest of us should be buying plain old mutual funds.[...]

The Basics

First, a primer. A variable annuity is basically a tax-deferred investment vehicle that comes with an insurance contract, usually designed to protect you from a loss in capital.[...]

Variable annuities can be immediate or deferred. With a deferred annuity the account grows until you decide it's time to make withdrawals. And when that time comes (which should be after age 59 1/2, or you owe an early withdrawal penalty) you can either annuitize your payments (which will provide regular payments over a set amount of time) or you can withdraw money as you see fit.

Fees, Fees and More Fees

Variable annuities are notorious for the fees they charge. Indeed, the average annual expense on variable annuity subaccounts has been on the rise and currently stands at 2.3% of assets, according to Morningstar. (This figure includes fund expenses plus insurance expenses.) The average mutual fund, on the other hand, charges just 1.44%. Unfortunately, variable annuity fees don't stop there. Many variable annuities also have loads on their subaccounts, surrender charges for selling within, say, seven years and an annual contract charge of about $25.

What Death Benefit ?

The death benefit basically guarantees that your account will hold a certain value should you die before the annuity payments begin. With basic accounts, this typically means that your beneficiary will at least receive the total amount invested - even if the account has lost money. For an added fee, this figure can be periodically "stepped-up" or earn a small amount of interest. (If you opt not to annuitize, then the death benefit typically expires at a certain age, often around 75 years old.) Well, given the fact that stocks have returned an average of 12% annually (assuming dividends are reinvested) from 1926 to 2003, according to the Center for Research in Security Prices, over the long haul you need this insurance about as much as a duck needs a paddle to swim.

OK, investors who bought annuities and then died within the next two months probably got their money's worth.[...]

Surrender Fees

Another problem with most variable annuities is that your money is often locked up for several years - typically five. Trying to withdraw funds during this time will result in huge fines. These fees typically decrease as the years tick by. For example, you might be charged a 7% surrender fee for a withdrawal during your first year of ownership. After seven years, however, that could be just 1%. The average fee is a steep 5.6%, according to Morningstar.

Early Withdrawal Penalty

As with most retirement accounts, if you withdraw funds before age 59 1/2, you'll be hit with a 10% early withdrawal tax penalty.

The Taxes

Gains in variable annuities are taxed at ordinary income tax rates, which go as high as 35%. For most investors, that's a whole lot higher than the maximum 15% rate they now pay on their long-term mutual fund gains and dividend income. And that tax difference can easily eat up the advantage of an annuity's tax-free compounding. "You're generally going to have to wait 15 to 20 years before these suckers become more tax efficient than a mutual fund," says CFP Dee Lee of Harvard, Mass.

The World's Lousiest Estate Planning Vehicle

There's no getting around the income tax due on annuities. In fact, if you die with money remaining in your annuity, your beneficiary will inherit all the taxes that you have deferred.[...]

Switch to a Low-Fee Variable Annuity

Now, if you've read all this and still want to buy an annuity, do yourself a favor and buy one with low costs and good investment options. [...]

A.2 Programmes développés pour l'étude

Seuls sont présentés ici les programmes "de base" de l'étude. Les multiples raffinements introduits au cours de l'étude conduisent à des programmes longs et finalement assez peu lisibles. Les fonctions présentées ici restent à notre sens les plus exploitables, car leur structure reste assez simple.

A.2.1 Algorithmes d'arbres binomiaux

Arbre binomial de base

```
def Arb_Bin_Base(S,u,d,Pu,Pd,r,dt):
    #Calcul d'un arbre binomial élémentaire
    #Valeur d'une option européenne si le sous-jacent peut prendre uniquement
    #deux valeurs finales
    #S : cours du sous-jacent
    #u,d : facteurs appliqués à S (up et down) pour calculer les valeurs finales possibles
    #Modèle Cox,Ross,Rubinstein : d=1/u
    #Pu, Pd : payoffs de l'option dans les deux cas envisagés
    #r : taux sans risque
    #dt : durée sur laquelle se valorise le call
    p=(exp(r*dt)-d)/(u-d)
    f=exp(-r*dt)*(p*Pu+(1-p)*Pd)
    return f
```

Arbre binomial pour une option américaine simple

```
def Arb_Bin_Am_Put_Multi(S,E,u,d,r,T,n):
    #Intervalle utilisé pour chaque noeud de l'arbre
    dt=T/n
    i=0
    ValOptFin=[max(0,E-S*pow(u,j)*pow(d,n-j)) for j in range(0,n+1)]
    while i<n:
        ValAct=[S*pow(u,j)*pow(d,n-1-i-j) for j in range(0,n-i)]
ValOpt=[max(Arb_Bin_Base(ValAct[j],u,d,ValOptFin[j+1],ValOptFin[j],r,dt),
max(0,E-S*pow(u,j)*pow(d,n-1-i-j))) for j in range(0,n-i)]
        ValOptFin=ValOpt
        i=i+1
    return ValOpt[0]
```

Arbre binomial pour une option américaine "lookback"

```
def Lookback_Arb_Bin(S0,Sigma,Rollup,intmax,r,T,n):
    #S0 : cours initial du sous-jacent
    #Sigma : volatilité du sous-jacent
    #Rollup : taux de revalorisation minimal
    #T : durée de l'option
    #intmax : intervalle entre deux relevés de la valeur du sous-jacent pour le max
    #r taux sans risque
    #Nombre d'itérations

    #Détermination de dt,u et d
```

```
    dt=T/n
    u=exp(Sigma*sqrt(dt))
    d=1/u

    #On appelle l'algorithme d'arbre binomial
    Resultat=Arb_Bin_Gen(1,u,d,Rollup,intmax,r,T,n)
    return Resultat
```

Arbre binomial pour une option type "GMSB" sans frais

```
def GMSB(Sigma,Rollup,intmax,r,T,n,carence):
    #Sigma   : volatilité du cours du support
    #Rollup  : taux minimum de revalorisation du support
    #intmax  : intervalle (en années) entre deux relevés de la valeur maximale
    #r       : taux sans risque - considéré fixe au cours du temps ici
    #T       : durée de l'option
    #carence : délai de carence avant de pouvoir exercer l'option

    #vérifications initiales
    if carence>=T:
        #print "Erreur : le délai de carence est supérieur ou égal à la durée de la garantie
        return -1.;

    #détermination du pas de temps et des coefficients d'évolution du cours
    dt=float(T)/float(n)
    nbint=int(intmax/dt)
    nbcarence=float(carence)/float(dt)
    u=exp(Sigma*sqrt(dt))
    d=1/u

    #Valeurs de l'action pour tous les noeuds de l'arbre
    Cours=Calc_Cours(u,d,n+1)
    #Valeurs possibles du max en tenant compte :
    #de la revalorisation minimale du max
    #du cliquet s'exerçant uniquement à date anniversaire, donc quand le temps
    #écoulé est un multiple de intmax
    Val_Max=zeros((n+1,n+1,n+1),Float)
    Val_Max[0,0,0]=1
    i=1
    while i<=n:
        j=0
        while j<=i:
            k=0
            while k<=min(j+int((i-j)/2.)+1,n):
                Mk=max(Val_Max[i-1,j,k],Val_Max[i-1,j-1,k])     #Mk est la valeur
                maximale du cours pour les 2 noeuds menant à i,j
                if modf(float(i)/float(nbint))[0]==0.:          #si on se place à
                date anniversaire
                    if Mk==0:
                        if k==2*j-i:
                            Val_Max[i,j,k]=Cours[i,j]
                        else:
```

```
                        Val_Max[i,j,k]=0
                    else:
                        if (Mk-Cours[i,j])/Cours[i,j]<-0.0000001:
                            Val_Max[i,j,k]=0            #Le maximum ne peut pas être
                            inférieur au cours à date anniversaire
                        else:                                    #Si le maximum "passé"
                        est supérieur au cours
                            Val_Max[i,j,k]=Mk
                else:                                   #à date non anniversaire
                    if Mk==0.:
                        Val_Max[i,j,k]=0
                    else:
                        Val_Max[i,j,k]=Mk               #On reporte juste le rollup
                k=k+1
            j=j+1
        i=i+1

i=1
while i<=n:
    Val_Rollup=exp(dt*i*Rollup)
    j=0
    while j<=i:
        k=0
        while k<=n:
            if Val_Max[i,j,k]>0 and Val_Rollup>Val_Max[i,j,k]:
                Val_Max[i,j,k]=Val_Rollup
            k=k+1
        j=j+1
    i=i+1

#Détermination des valeurs finales des options
Val_Opt=zeros((n+1,n+1,n+1),Float)
j=0
while j<=n:
    k=0
    while k<=min(j+int((n-j)/2.)+1,n):
        Val_Opt[n,j,k]=max(Val_Max[n,j,k]-Cours[n,j],0)
        k=k+1
    j=j+1
#Compte à rebours
i=n-1
while i>=nbcarence:  #au-delà du délai de carence : valorisation "à l'américaine"
    j=0;
    while j<=i:
        k=0
        while k<=min(j+int((i-j)/2.)+1,n):
            if Val_Max[i,j,k]==0: #si u^k n'est pas un maximum admissible,
                Val_Opt[i,j,k]=0  #la valeur de l'option n'est pas renseignée
            else:
                S=Cours[i,j]
                if modf(float(i+1)/float(nbint))[0]==0.: #la valeur récupérée est
```

```
                    différente selon que le pas i+1 correspond à une date anniversaire ou no
                        l=k
                        while round(Val_Max[i+1,j+1,l],7)==0.:
                            l=l+1
                        Pu=Val_Opt[i+1,j+1,l]
                    else:
                        Pu=Val_Opt[i+1,j+1,k]
                    m=k
                    while round(Val_Max[i+1,j,m],7)==0.:
                        m=m+1
                    Pd=Val_Opt[i+1,j,m]
                    Val_Opt[i,j,k]=max(Arb_Bin_Base(S,u,d,Pu,Pd,r,dt),max(Val_Max[i,j,k]-Cou
                k=k+1
            j=j+1
        i=i-1
    #A ce point on est à la date correspondant à la période de carence
    #l'option ne peut plus être exercée à la date choisie par le client
    #L'algorithme utilisé doit donc être celui d'une option européenne
    while i>=0:  #en-deçà du délai de carence : valorisation "à l'européenne"
        j=0;
        while j<=i:
            k=0
            while k<=min(j+int((i-j)/2.)+1,n):
                if Val_Max[i,j,k]==0.: #si u^k n'est pas un maximum admissible,
                    Val_Opt[i,j,k]=0.  #la valeur de l'option n'est pas renseignée
                else:
                    S=Cours[i,j]
                    if modf(float(i+1)/float(nbint))[0]==0.: #la valeur récupérée est
                    différente selon que le pas i+1 correspond à une date anniversaire ou no
                        l=k
                        while round(Val_Max[i+1,j+1,l],7)==0.:
                            l=l+1
                        Pu=Val_Opt[i+1,j+1,l]
                    else:
                        Pu=Val_Opt[i+1,j+1,min(k,i+1)]
                    m=k
                    while round(Val_Max[i+1,j,m],7)==0.:
                        m=m+1
                    Pd=Val_Opt[i+1,j,m]
                    Val_Opt[i,j,k]=Arb_Bin_Base(S,u,d,Pu,Pd,r,dt)
                k=k+1
            j=j+1
        i=i-1
    return Val_Opt[0,0,0]
```

A.3 Méthodes de Monte-Carlo

A.3.1 Fonctions Générales

```
def Cours_Lognormal(S,Sigma,T,r):
    alea=gauss(0,1)
    return S*exp((r-(Sigma**2)/2)*T+Sigma*sqrt(T)*alea)
```

A.3.2 Méthode de Monte-Carlo pour une option de vente européenne simple

```
def MC_Euro_Put(E,S,Sigma,T,r,n):
    i=0
    Somme=0
    while (i<n):
        ValOpt=max(E-Cours_Lognormal(S,Sigma,T,r),0)*exp(-r*T)
        Somme=Somme+ValOpt
        i=i+1

    return Somme/n
```

A.3.3 Algorithme de Longstaff-Schwartz pour une option américaine

```
def MC_LS_Am_Put(S,E,Sigma,T,r,n_per,n_tir):

    if n_per<=1:
        print "pas assez de périodes"
        return 0.


    #Echantillonnage des chemins
    #S(i,j) : i = numéro du tirage, j = numéro de la période
    St=zeros((n_tir,n_per+1),Float)
    i=0
    while i<=n_tir-1:
        j=0
        while j<=n_per:
            if j==0:
                St[i,j]=S
            else:
                St[i,j]=St[i,j-1]*exp((r-(Sigma**2)/2)*T/n_per
                +Sigma*sqrt(T/n_per)*gauss(0,1))
            j=j+1
        i=i+1

    Val_Opt=zeros((n_tir,n_per+1),Float)
    #Val_Opt est la matrice des cash-flows de l'option
    i=0
    while i<=n_tir-1:
        #Calcul des valeurs d'exercice de l'option
        j=n_per
        Val_Opt[i,j]=max(E-St[i,j],0)
        i=i+1

    j=n_per-1
    while j>=1:
        Liste=zeros((1,5),Float)
        #On va stocker les informations utiles dans le tableau Liste
        i=0
        k=0
        while i<=n_tir-1:
```

```
        #L'option est-elle dans la monnaie?
        if E-St[i,j]>0:
            Liste=resize(Liste,(k+1,5))
            Liste[k,0]=i   #numéro du tirage
            Liste[k,1]=St[i,j]  #cours
            Liste[k,2]=E-St[i,j]   #valeur intrinsèque de l'option
            #Détermination de la valeur de conservation non nulle
            m=j+1
            while m<n_per and Val_Opt[i,m]==0:
                m=m+1
            Liste[k,3]=Val_Opt[i,m]*exp(-r*(m-j)*T/n_per)
            #valeur de conservation actualisée
            k=k+1
        i=i+1
    def a_minimiser(x):
        Somme=0.
        p=0
        while (p<=Liste.shape[0]-1):
            Somme=Somme+(Liste[p,3]-x[0]-x[1]*Liste[p,1]-x[2]*Liste[p,1]**2)**2
            p=p+1
        return Somme

    min=optimize.fmin(a_minimiser,[0.,0.,0.])
    #une fois les paramètres du min calculés, on détermine à quels points
    l'exercice anticipé doit se faire
    #Réévaluation des valeurs de conservation
    q=0
    while q<=k-1:
        Liste[q,4]=min[0]+min[1]*Liste[q,1]+min[2]*Liste[q,1]**2
        if Liste[q,4]<Liste[q,2]:
            Val_Opt[int(Liste[q,0]),j]=Liste[q,2]
            s=j+1
            while s<=n_per:
                Val_Opt[int(Liste[q,0]),s]=0.
                s=s+1
        q=q+1
    j=j-1

#Calcul du prix de l'option
Prix=0.
i=0
while i<=n_tir-1:
    j=0
    while j<=n_per:
        if Val_Opt[i,j]>0:
            Prix=Prix+Val_Opt[i,j]*exp(-r*j*T/float(n_per))
            j=n_per+1
        else:
            j=j+1
    i=i+1
return Prix/n_tir
```

A.3.4 Algorithme de Longstaff-Schwartz pour une option américaine ”look-back”

```
def MC_LS_Am_LB_Put(S,Sigma,T,r,n_per,n_tir):
    #Estimation d'un put américain lookback par la méthode de Monte-Carlo
    #avec approche des "moindres carrés"

    if n_per<=1:
        print "pas assez de périodes"
        return 0.


    #Echantillonnage des chemins
    #Cours du sous-jacent S(i,j) : i = numéro du tirage, j = numéro de la période
    #Maximum à la période considérée M(i,j)
    St=zeros((n_tir,n_per+1),Float)
    Mt=zeros((n_tir,n_per+1),Float)
    i=0
    while i<=n_tir-1:
        j=0
        while j<=n_per:
            if j==0:
                St[i,j]=S
                Mt[i,j]=S
            else:
                St[i,j]=St[i,j-1]*exp((r-(Sigma**2)/2)*T/n_per
                +Sigma*sqrt(T/n_per)*gauss(0,1))
                if St[i,j]>Mt[i,j-1]:
                    Mt[i,j]=St[i,j]
                else:
                    Mt[i,j]=Mt[i,j-1]
            j=j+1
        i=i+1

    Val_Opt=zeros((n_tir,n_per+1),Float)
    #Val_Opt est la matrice des cash-flows de l'option
    i=0
    while i<=n_tir-1:
        #Calcul des valeurs d'exercice de l'option
        j=n_per
        Val_Opt[i,j]=max(Mt[i,j]-St[i,j],0)
        i=i+1

    j=n_per-1
    while j>=1:
        Liste=zeros((1,6),Float)
        #On va stocker les informations utiles dans le tableau Liste
        i=0
        k=0
        while i<=n_tir-1:
            #L'option est-elle dans la monnaie?
            if Mt[i,j]-St[i,j]>0:
```

```
            Liste=resize(Liste,(k+1,6))
            Liste[k,0]=i   #numéro du tirage
            Liste[k,1]=St[i,j]  #cours
            Liste[k,2]=Mt[i,j]
            Liste[k,3]=Mt[i,j]-St[i,j]   #valeur intrinsèque de l'option
            #Détermination de la valeur de conservation non nulle
            m=j+1
            while m<n_per and Val_Opt[i,m]==0:
                m=m+1
            Liste[k,4]=Val_Opt[i,m]*exp(-r*(m-j)*T/n_per)
            #valeur de conservation actualisée
            k=k+1
        i=i+1
    def a_minimiser(x):
        Somme=0.
        p=0
        while (p<=Liste.shape[0]-1):
            Somme=Somme+(Liste[p,3]-x[0]-x[1]*Liste[p,1]-x[2]*Liste[p,1]**2
            -x[3]*Liste[p,2]-x[4]*Liste[p,2]**2-x[5]*Liste[p,1]*Liste[p,2])**2
            p=p+1
        return Somme

    min=optimize.fmin(a_minimiser,[0.,0.,0.,0.,0.,0.],disp=0)
    #une fois les paramètres du min calculés, on détermine à quels points
    l'exercice anticipé doit se faire
    #Réévaluation des valeurs de conservation
    q=0
    while q<=k-1:
        Liste[q,5]=min[0]+min[1]*Liste[q,1]+min[2]*Liste[q,1]**2+min[3]*Liste[q,2]
        +min[4]*Liste[q,2]**2+min[5]*Liste[q,1]*Liste[q,2]
        if Liste[q,5]<Liste[q,3]:
            Val_Opt[int(Liste[q,0]),j]=Liste[q,3]
            s=j+1
            while s<=n_per:
                Val_Opt[int(Liste[q,0]),s]=0.
                s=s+1
        q=q+1
    j=j-1

#Calcul du prix de l'option
Prix=0.
i=0
while i<=n_tir-1:
    j=0
    while j<=n_per:
        if Val_Opt[i,j]>0:
            Prix=Prix+Val_Opt[i,j]*exp(-r*j*T/float(n_per))
            j=n_per+1
        else:
            j=j+1
    i=i+1
```

```
return Prix/n_tir
```

Bibliographie

[1] **DE SARRAU A.** : *Garanties Liées aux Unités de Compte des Contrats d'Assurance-Vie*, Mémoire IAF 2004

[2] **PEQUEUX O., MERLUS S.** : *Les Garanties Plancher des Contrats d'Assurance-Vie en Unités de Compte : Tarification et Couverture*, Mémoire IAF 2000

[3] **HULL, John C.** : *Options, Futures and other Derivatives*

[4] **HARDY, Mary** : I*nvestment Guarantees, Modeling and Risk-Management for Equity-Linked Life Insurance*, Wiley Finance

[5] **COX J., ROSS S., RUBINSTEIN M.** : *Option Pricing : A Simplified Approach, Journal of Financial Economics*, 1979

[6] **SCHIATTI, Marion** : *Modélisation Stochastique de la Courbe des Taux d'Intérêt*, Mémoire ISUP 2004

[7] **BOULKROUNE, Patricia** : *Evaluation d'un Passif d'Assurance à la Juste Valeur*, Mémoire ISFA 2004