

le **cnam**

Conservatoire national  
des arts et métiers



**Problématiques de calibration en vue de l'évaluation des risques de taux, de défaut et de liquidité dans le cadre de Solvabilité II**

Yacine LAÏDI

*Juin 2013*

**« Les actuaires savent que s'il est très important de choisir le bon modèle, il est encore plus important de le calibrer correctement<sup>1</sup>. »**

**W. James MacGinnitie, FSA, MAAA, FCAS, actuaire et conseiller à Atlanta (Georgia)**

---

<sup>1</sup> <http://www.les-actuares.fr/cours-des-choses/>

---

## SOMMAIRE

---

<b>SOMMAIRE</b> .....	<b>3</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>6</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>7</b>
<b>Remerciements</b> .....	<b>8</b>
<b>Problématique et contexte réglementaire</b> .....	<b>9</b>
<b>1. Utilité d'un modèle de taux correctement calibré</b> .....	<b>9</b>
<b>2. Contexte réglementaire</b> .....	<b>9</b>
<b>3. Objectif du mémoire</b> .....	<b>10</b>
<b>Les courbes de taux : méthodes de construction</b> .....	<b>12</b>
<b>1. Proposition d'une définition</b> .....	<b>12</b>
<b>2. Directives de l'EIOPA</b> .....	<b>12</b>
2.1. Caractéristiques des instruments adaptés à la construction d'une courbe des taux sans risque .....	12
2.2. Choix possibles .....	13
2.3. Méthodes d'extrapolation .....	14
2.4. Détermination du taux forward ultime .....	15
2.5. Estimation du taux d'inflation à long terme prévue .....	16
2.6. Estimation du taux d'intérêt réel prévu .....	17
2.7. Conclusion .....	18
<b>3. Choix des instruments de calibration</b> .....	<b>19</b>
3.1. Introduction .....	19
3.2. Taux au jour le jour .....	19
3.3. <i>Swaps</i> sur indice au jour le jour et <i>swaps</i> sur Libor/Euribor .....	20
3.4. Choix final .....	21
<b>4. Méthodes d'interpolation</b> .....	<b>22</b>
4.1. Généralités .....	22
4.2. Méthodes d'interpolation linéaires et par splines .....	23
4.2.1. Interpolation linéaire .....	23
4.2.2. Interpolation par splines cubiques .....	24
4.2.3. Méthode par splines quadratiques .....	26
4.3. La méthode de Nelson, Siegel et Svensson .....	28
4.3.1. Description du modèle .....	28
4.3.2. Calibrage des paramètres à l'aide d'un algorithme d'évolution différentielle .....	34
4.3.3. Critique du modèle .....	34
4.4. La méthode de Smith-Wilson .....	39
4.4.1. Généralités .....	39
4.4.2. Technique dans le cas de titres zéro-coupon .....	40
4.4.3. Technique dans le cas général .....	42
4.4.4. Taux forward instantané .....	44
4.4.5. Avantages et inconvénients .....	46
4.4.6. Récapitulatif .....	48
<b>5. Implémentation</b> .....	<b>49</b>
5.1. Collecte des données .....	49
5.2. Algorithmes de calibration .....	50

5.2.1. Méthode d'interpolation linéaire .....	50
5.2.2. Méthode de Smith et Wilson .....	50
5.2.3. Méthode de Nelson, Siegel et Svensson .....	50
<b>6. Analyse des résultats .....</b>	<b>62</b>
6.1. Segment long terme .....	62
6.1.1. Interpolation linéaire.....	62
6.1.2. Interpolation de Smith et Wilson .....	63
6.1.3. Interpolation de Nelson, Siegel et Svensson.....	65
6.2. Stabilité des paramètres .....	67
6.2.1. Smith et Wilson .....	67
6.2.2. UFR endogène.....	69
6.2.3. UFR exogène.....	72
6.3. Choix de la méthode d'interpolation .....	76
6.4. Test de prédictabilité.....	81
<b>7. Conclusion .....</b>	<b>82</b>
<b>Le risque de taux : le modèle de Hull et White .....</b>	<b>83</b>
<b>1. Modélisation de la dynamique des taux d'intérêt.....</b>	<b>83</b>
1.1. Introduction .....	83
1.2. Modèles d'équilibre général.....	83
1.3. Modèle de Hull et White.....	84
1.4. Obligations et options .....	88
1.4.1. Obligations .....	88
1.4.2. Caps.....	89
1.4.3. Swaptions .....	95
<b>2. Données.....</b>	<b>98</b>
2.1. Choix des données .....	98
2.2. Collecte des données .....	99
<b>3. Calibration .....</b>	<b>100</b>
<b>4. Analyse des résultats .....</b>	<b>101</b>
4.1. Evolution des paramètres .....	101
4.2. Qualité d'ajustement .....	103
4.2.1. Qualité d'ajustement sur échantillon .....	103
4.2.2. Qualité d'ajustement hors échantillon : autres instruments .....	106
4.2.3. Qualité d'ajustement hors échantillon : période future .....	109
4.3. Conclusion .....	111
<b>Les spreads de crédit : composantes et modèles d'analyse .....</b>	<b>112</b>
<b>1. Risques sur le marché obligataire .....</b>	<b>112</b>
1.1. Le <i>spread</i> compense-t-il un seul et unique risque ?.....	112
1.2. Décomposition du <i>spread</i> de crédit .....	113
<b>2. Les CDS .....</b>	<b>115</b>
2.1. Présentation générale.....	115
2.2. Aperçu du marché .....	117
2.2.1. Sources d'informations.....	117
2.2.2. Structure et taille du marché .....	118
2.2.3. Différentes mesures du risque de contrepartie dans le cadre d'un CDS.....	120
2.2.4. Conclusions .....	121
2.3. Risque de contrepartie et problématiques sur la stabilité financière .....	121
2.3.1. Concentration.....	122

2.3.2. Interconnexion .....	123
2.3.3. Liquidité.....	125
2.3.4. Conclusions .....	126
<b>3. Choix du modèle de défaut.....</b>	<b>127</b>
<b>4. Implémentation du modèle de Longstaff, Mithal et Neis (2005).....</b>	<b>128</b>
4.1. Description du modèle .....	128
4.2. Calibration du modèle LMN .....	134
4.2.1. Choix et collecte des données .....	135
4.2.2. Description des données.....	138
4.2.3. Principe de l'algorithme de calibration.....	139
4.3. Analyse des résultats.....	145
4.3.1. Qualité d'ajustement .....	145
4.3.2. Décomposition du rendement actuariel d'une obligation.....	146
4.3.3. Test hors échantillon .....	149
<b>Pistes d'amélioration possibles .....</b>	<b>152</b>
<b>1. Construction de la courbe de taux .....</b>	<b>152</b>
<b>2. Dynamique du taux court.....</b>	<b>152</b>
<b>3. Modèle LMN.....</b>	<b>152</b>
<b>Conclusion .....</b>	<b>154</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>155</b>

## Résumé

Le régime Solvabilité II impose aux assureurs de développer des modèles pour prendre en compte les risques de taux et de spread. S'il est relativement aisé de trouver des modèles satisfaisant aux exigences du régulateur, le calibrage de ces derniers s'avère ardu. Il est donc décisif de définir un processus de calibrage aussi robuste et borné que possible. Ce mémoire propose ainsi l'étude du calibrage des différentes parties d'un générateur de scénarios économiques (ou ESG), destiné à simuler la dynamique des taux, ce qui aidera un assureur à gérer de façon plus efficiente un portefeuille composé de produits de taux.

Par ailleurs, un assureur ayant nécessairement une vision à long terme de son portefeuille, nous privilégierons un horizon de risque à long terme, que nous fixerons à 5 ans.

La première partie se veut une introduction en ce qu'elle expose la problématique et décrit le contexte réglementaire.

La seconde partie, quant à elle, entre dans le vif du sujet. Elle vise à construire une courbe des taux sans risque réaliste et fiable en suivant scrupuleusement les directives de l'EIOPA. À cet effet, elle étudie deux méthodes de construction de la courbe des taux sans risque : l'une basée sur l'interpolation de Smith et Wilson et l'autre sur celle de Nelson, Siegel et Svensson. La crise de l'effondrement du crédit, qui a démarré durant l'été 2007, a creusé les écarts sur le marché entre les instruments de taux d'intérêt basés sur une monnaie unique, les swaps en particulier, caractérisés par des teneurs différentes du taux de référence. Toute la problématique consiste alors à déterminer la source de données qui servira à construire la véritable courbe des taux sans risque. En outre, il faut que lesdits taux soient suffisamment liquides et disponibles pour suffisamment de maturité. Idéalement, on devrait prendre les swaps sur EONIA, mais malheureusement ils ne sont pas assez liquides et n'existent pas pour les maturités supérieures à 2 ans. Dans ce mémoire, nous nous conformerons aux directives du CNO, qui préconise de prendre les taux swaps sur indice Euribor 6 mois.

La troisième partie implémente le modèle de Hull & White, qui représente la dynamique du taux court sous la forme d'un processus de retour à la moyenne combiné à une dérive. Les stratégies à base de dérivés permettent de mettre en œuvre des solutions sur mesure, notamment pour la couverture des événements extrêmes (*tail risk*), l'atténuation des risques liés aux longues échéances ou la gestion des comportements non linéaires. En général, les dérivés nécessitent des investissements et des liquidités moindres (souvent ces dernières se restreignent aux appels de marge ou au paiement des intérêts) dans des placements plus risqués, sans pour autant menacer l'équilibre du bilan, objection clé en gestion actif-passif. Par conséquent, ce genre d'instruments est fortement apprécié par les assureurs. Dans cette perspective, il est tout naturel d'élaborer des méthodes de calibrage à l'aide de dérivés. Dans ce mémoire, nous avons choisi d'en étudier deux : l'une à partir de swaptions, l'autre à partir de caps. À chaque date de calibrage, les calculs utiliseront la courbe de taux sans risque générée à l'étape précédente. Par ailleurs, un assureur ayant nécessairement une vision à long terme de son portefeuille, nous privilégierons les instruments dont la maturité est voisine de l'horizon de projection de l'ESG. Une fois achevée la calibration de ce modèle, celui-ci sera utilisé par le modèle décrit à la partie suivante dans le cadre des simulations futures.

La quatrième partie, quant à elle, étudie une méthode de calibration du modèle de Longstaff, Mithal et Neis (ou modèle LMN) à partir d'un CDS et d'obligations portant sur l'entité de référence de ce CDS, modèle utilisé au sein du groupe AG2R La Mondiale. En effet, les dérivés de crédit comme les CDS strcombinés avec des emprunts d'État constituent une alternative à l'achat direct d'obligations d'entreprise. Le risque de contrepartie est le même, cependant cette position synthétique offre une liquidité sensiblement supérieure et, pour un niveau de risque équivalent, le rendement peut s'avérer meilleur. L'achat combiné d'obligations d'entreprise et de dérivés de crédit sur les mêmes émetteurs, maturités et séniorités permet de capturer la prime de liquidité correspondante. Pareillement à la partie précédente, les calculs utiliseront la courbe de taux sans risque générée lors de la seconde partie. Le processus décomposera le *spread* attribué à l'entité de référence en question et déterminera notamment la composante associée au risque de défaut et celle associée au risque de liquidité. L'entité sera le [Deutsch Bank AG](#). L'étude révélera l'existence d'une composante de liquidité négative pour certaines obligations corporate et à certaines dates de cotation, ce qui montrera que les taux swap sur Euribor 6 mois contiennent un *spread* implicite.

Les données de calibration proviennent de cotations fournies par Reuters et la période étudiée s'étend du 5 janvier 2009 au 30 décembre 2011. Par ailleurs, les différentes fonctions de calibration sont d'optimisées au moyen d'un algorithme d'évolution différentielle, dont une présentation est donnée en annexe de ce mémoire.

## Abstract

The new Solvency II regime obliges the insurer to develop models to handle interest rate and spread risk. If it is relatively easy to find models meeting regulatory requirement, calibrating them proves challenging. Hence, it is decisive to define a calibration process as robust and bounded as possible. Thus this dissertation deals with the calibration of different parts of an Economic Scenario Generator for simulating rate dynamic, which will help an insurance company to manage more efficiently a portfolio comprised with rate products.

Besides, since an insurer has a long-term vision of his portfolio, we will favour a long-term risk horizon, which we will fix at 5 years.

The first part will be an introduction in that it will set out the main issue and will describe the regulatory environment.

Regarding the second part, it will get to the heart of the matter. It aims at building a realistic and reliable risk-free rate curve strictly compliant to EIOPA guidelines. In this regard, we will study two methods of building risk-free rate curve: the first one is based on Smith and Wilson interpolation, whereas the second one is based on Nelson, Siegel and Svensson interpolation. The collapse of global credit markets which arised in summer 2007 has widened divergence on the market between interest rate instruments based on a single currency, swaps in particular, characterised with different tenors of reference rate. The whole issue consists of choosing the data source which will be used to build the actual risk-free rate curve. Furthermore, the before-mentioned rates must be sufficiently liquid and available for enough maturities. We should ideally select rate swaps indexed on the EONIA, but unfortunately they are not liquid enough and they are not available for maturities greater than two years. In this dissertation, we will comply with the CNO's guidelines, which recommends taking six-month EURIBOR rate swaps.

The third part aims at implementing Hull and White model, which represents short rate dynamic in the form of a mean-return process combined with a drift. The derivatives strategies make it possible to achieve tailor-made solutions, in particular for hedging extrem events (tail risk), reducing the risks pertaining to long maturities or managing non-linear behaviours. Derivatives generally need fewer funds and liquidity (the latter is often restricted to margin calls and interest payments) in riskier investments without threatening the financial balance sheet. This kind of instruments is therefore highly appreciated by insurers. In this perspective, it is natural to develop calibrating methods using derivatives. In this dissertation we have decided to study two : one from swaptions, another one from caps. At each calibrating date the calculations will use the risk-free rate curve generated at the previous stage. Moreover, since an insurer is likely to have a long-term vision of his portfolio, we will favour the instruments whose maturity is close to the ESG's projection horizon. After achieving calibrating this model, the model described in the next part will use it for future simulations.

As for the fourth part, it deals with a method of calibrating Longstaff, Mithal and Neis model (or LMN model) from a CDS and bonds associated with the same entity as the CDS. This model is used within the group AG2R La Mondiale. Indeed, credit derivatives such as CDS combined with state loans turn out to be an alternative to directly purchasing corporate bonds. The counterparty risk is the same, however, this synthetic position offers a significantly better liquidity and, for an equivalent risk level, the yield proves to be better. Through the combined purchase of corporate bonds and credit derivatives on the same issuers, maturities and seniorities, it is possible to catch the liquidity premium. Similarly to the previous part, the calculations will use the risk-free rate curve generated at the second part. The process will decompose the spread attributed to the reference entity and will especially evaluate the component associated to default risk and the one associated to liquidity risk. The entity will be Deutsch Bank AG. The study will reveal the existence of a negative liquidity component for some corporate bonds and at some cotation dates, which will show that rate swaps indexed on six-month Euribor include an implied spread.

The calibration data come from cotations provided by Reuters and the studied period spreads from the 5th January 2009 to the 30th December 2011. In addition, the different calibration functions are optimized by means of a differential evolution algorithm, a description of which is given in the annex of this dissertation.

## Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu Frédéric Planchet, mon tuteur, professeur à l'ISFA, pour son encadrement poussé et ses multiples suggestions avisées.

Je remercie également Areski Cousin, maître de conférence à l'ISFA, pour ses précieux conseils et son suivi très sérieux.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à Augustin Balaÿ, collaborateur au sein de [Riskedge](#), société en conseils financiers, pour avoir aimablement fourni les données qui ont servi à ce mémoire.

Je remercie aussi Sébastien Gurrieri<sup>2</sup>, analyste quantitatif au sein du département de Risk Management de la filiale londonienne de [Mizuho International](#), pour son aide concernant la calibration de Hull et White à partir de swaptions.

Enfin, je tiens à témoigner toute ma gratitude à toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce mémoire.

---

<sup>2</sup> Sa page personnelle peut être consultée à l'adresse : <http://sebgur.fr/> .

# Problématique et contexte réglementaire

## 1. Utilité d'un modèle de taux correctement calibré

WINDCLIFF et BOYLE [2004] examinent la stratégie consistant à investir le même montant dans chaque classe d'actifs du portefeuille. Ils justifient la pertinence de cette stratégie par la difficulté d'estimer les poids du portefeuille optimal dans le modèle de MARKOWITZ [1952], ceux-ci étant extrêmement sensibles aux erreurs d'estimation : les estimations historiques pour la matrice de variance-covariance sont plutôt robustes, tandis que celles pour les rendements des actifs tendent à être bruitées et peu fiables.

Le principe de l'optimisation de MARKOWITZ [1952] repose sur le fait qu'un investisseur peut utiliser l'information décrivant les relations entre différents actifs pour construire un portefeuille dont les caractéristiques risque et rendement sont meilleures que celles d'un portefeuille qu'il aurait construit en considérant uniquement les actifs individuellement. Lesdites caractéristiques sont les rendements espérés des actifs, leurs variances respectives et leurs corrélations. WINDCLIFF et BOYLE [2004] démontrent que, dans certains cas de figure, un portefeuille équilibré s'avère plus rentable qu'un portefeuille construit selon le modèle de Markovitz.

Les auteurs montrent ainsi qu'une erreur de spécification de l'espérance impacte fortement les performances effectives des portefeuilles estimés. En effet, il est beaucoup plus ardu d'estimer le vecteurs des espérances que la matrice de variance-covariance. Le portefeuille équipondéré n'exige pas la connaissance des paramètres à l'aide des données historiques et ne pâtit donc pas de ces erreurs d'estimation.

De surcroît, les auteurs montrent que, même si le portefeuille équipondéré présente des performances moindres que dans le cas moyen, il présente de meilleures performances que dans les quatre cas les plus défavorables. Or, un investisseur averse au risque, comme un assureur par exemple, se préoccupera essentiellement d'éviter les résultats les plus défavorables. Cette attitude est en fait conforme au principe prudentiel en vigueur dans le monde de l'assurance, principe renforcé par la réforme réglementaire européenne Solvabilité II.

Pour conclure, en sus de l'erreur d'ajustement, inhérente au modèle employé, il est impératif de prendre en compte l'erreur d'estimation des paramètres, aspect trop souvent négligé par les gestionnaires de portefeuille.

## 2. Contexte réglementaire

Les raisons qui amènent un assureur de développer un générateur de scénario économique (GSE) sont les suivantes :

1. Développer un modèle prospectif.
2. Calculer le Best Estimate.
3. Anticiper le comportement des marchés.
4. Maîtriser le modèle implémenté.

Dans le dispositif de Solvabilité II, le principe de calcul des provisions techniques repose sur la distinction entre deux catégories de risques :

1. Les risques couvrables,
2. Les risques non couvrables.

Dans le premier cas, la provision technique correspond au prix de la couverture financière, construite à partir d'instruments financiers issus d'un marché profond, liquide et transparent, répliquant les flux futurs d'assurance ; dans le second cas, la provision technique est évaluée par la somme du *best estimate* et de la marge pour risque.

L'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) est une institution financière régulatrice de l'Union Européenne. Cet organisme retient comme définition du *best estimate* (cf. CP n°26) celle énoncée dans le paragraphe TS.II.A.10 des spécifications techniques du QIS4, à savoir : « *La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente.* »

Le *best estimate* correspond à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs jusqu'à l'extinction du portefeuille. Il est censé couvrir les prestations et les coûts liés à l'exploitation des contrats.

Les différentes étapes pour calculer le *best estimate* sont les suivantes :

- Calculer les flux de prestations et de frais à chaque date de projection ;
- Actualiser tous les flux à la date initiale.

Les actifs doivent être comptabilisés à leur valeur de marché. Lorsqu'un passif est répliquable, autrement dit quand les flux du passif peuvent être dupliqués parfaitement par des instruments financiers, l'assureur doit comptabiliser ce passif à la valeur de marché de ces produits : c'est la méthode « *mark to market* ». Dans le cas contraire, si le passif n'est pas répliquable, l'assureur doit alors le comptabiliser comme la somme d'un *best estimate* et d'une marge de risque : il s'agit de la méthode « *mark to model* ». La Figure 1 récapitule les différentes composantes du bilan économique dans le cadre de la norme prudentielle Solvabilité II.

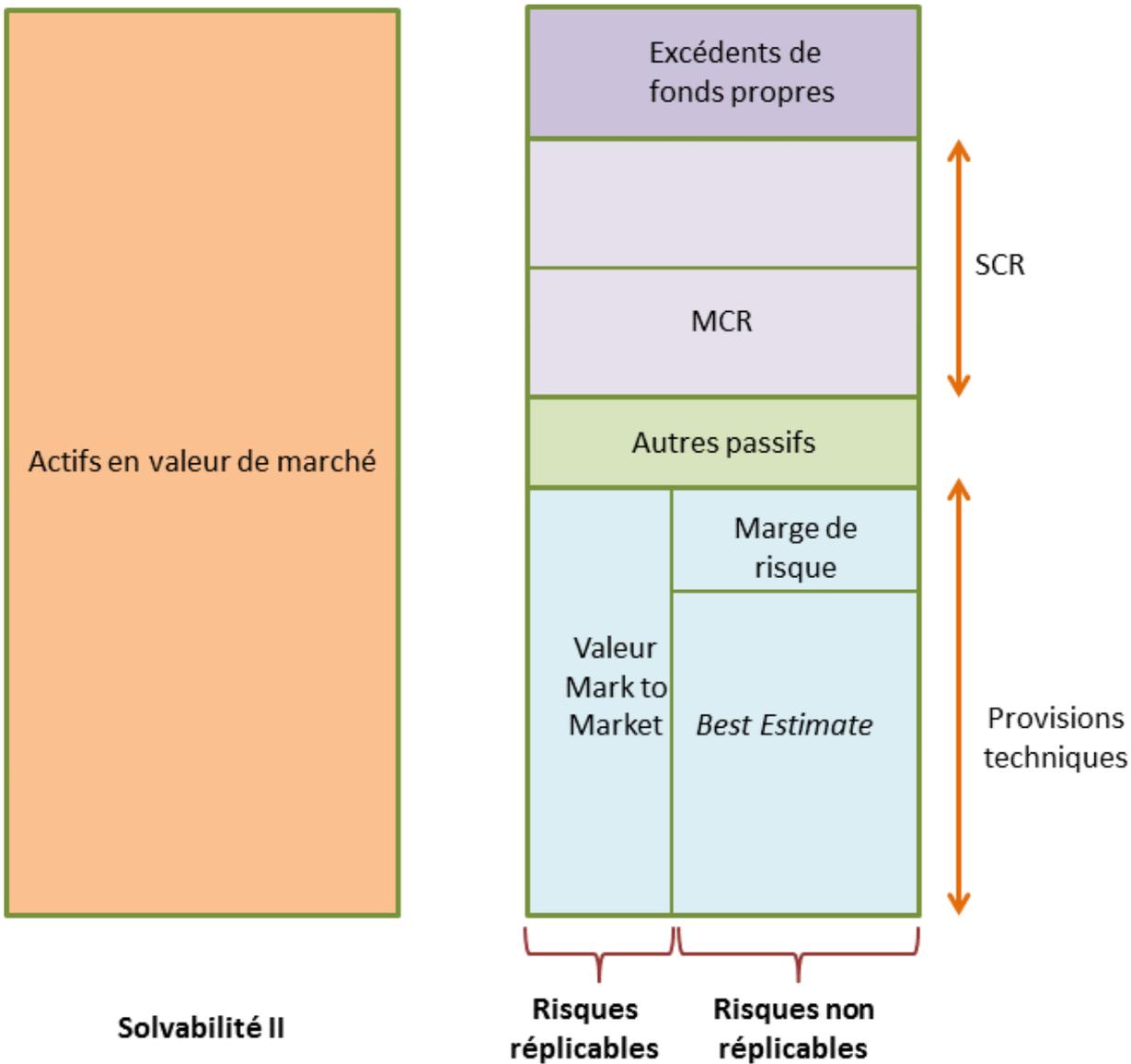
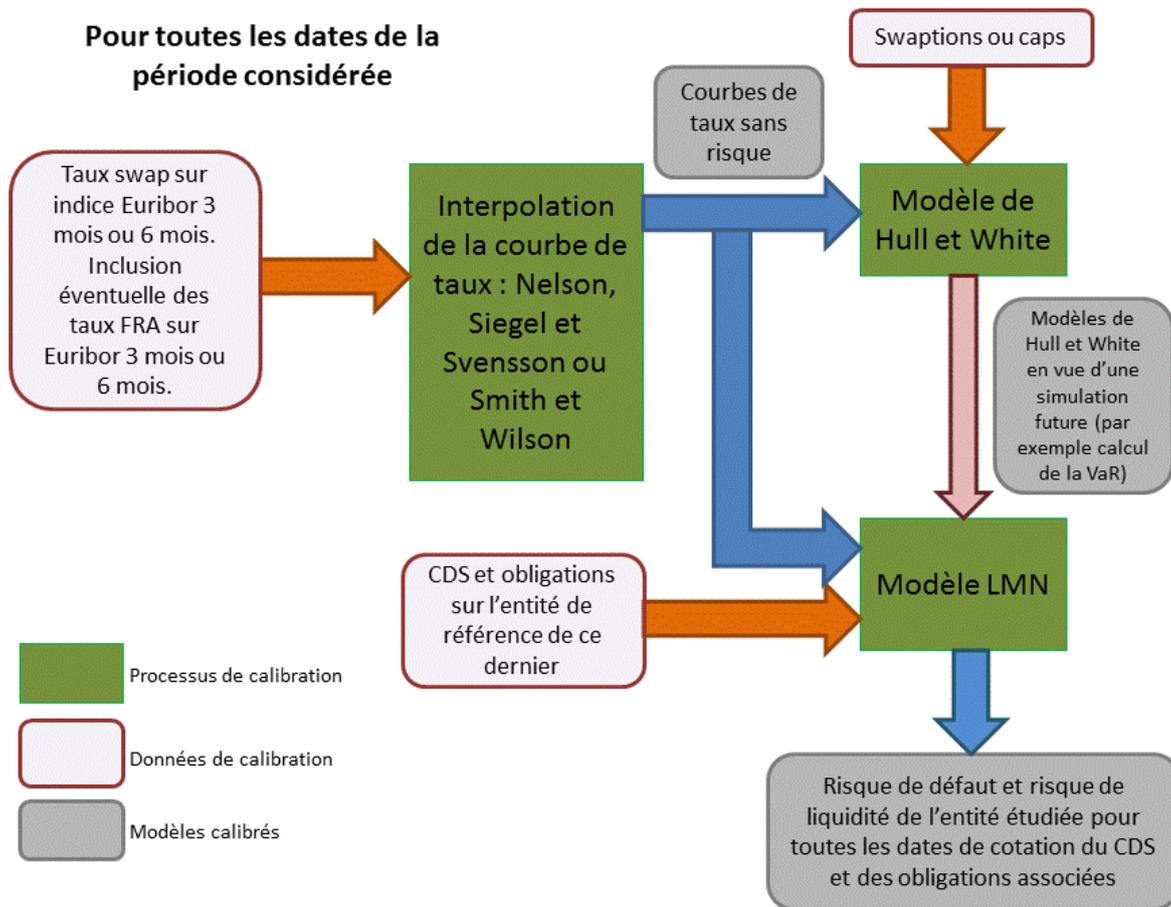


Figure 1 : Bilan financier sous Solvabilité II.

Pouvoir modéliser la dynamique des taux est important aussi bien à l'actif qu'au passif. En effet, si l'actif comporte des produits de taux, il importe d'élaborer un modèle pertinent dans le cadre d'une valorisation. Au passif, cela importe dans le cadre de la participation aux bénéfices des assurés. Pour ce qui est du passif, compte tenu de son mode de calcul, le *best estimate* nécessite donc un modèle de taux cohérent.

### 3. Objectif du mémoire

La Figure 2 récapitule les différentes étapes du processus de calibration du générateur.



**Figure 2 : étapes de la calibration du générateur de scénarios économiques.**

# Les courbes de taux : méthodes de construction

## 1. Proposition d'une définition

Si nous définissons un investissement sans risque comme un investissement où le taux de rendement espéré est connu avec certitude, sous quelles conditions le taux de retour sur investissement sera-t-il égal au taux espéré ? Dans cette perspective, deux conditions doivent être satisfaites :

1. L'actif ne doit pas présenter de risque de défaut. Cela exclut d'office tous les titres émis par les entreprises privées, car toute entreprise, fût-elle même l'entreprise la plus grande et la plus sûre, présente un risque de défaut. Les seuls valeurs susceptibles d'être exemptes de risque sont les valeurs gouvernementales, non parce qu'un gouvernement est mieux géré, mais parce qu'il peut imprimer de la monnaie. Au moins en valeur nominale, un gouvernement est en mesure de tenir ses promesses. Cependant, ce n'est pas toujours le cas, lorsque, par exemple, un gouvernement refuse d'honorer les engagements des régimes précédents ou lorsqu'il emprunte dans une devise autre que la sienne.
2. L'actif peut être réinvesti sans aucun risque. Un bon du trésor de 5 ans n'est pas exempt de risque, puisque les coupons seront réinvestis à des taux qui ne peuvent être prédits à la date courante. Le taux sans risque sur un horizon de cinq ans doit être le rendement espéré d'un titre gouvernemental zéro coupon d'échéance cinq ans.

## 2. Directives de l'EIOPA

Dans deux de ses documents, CEIOPS [2009] et CEIOPS [2010], l'EIOPA<sup>3</sup> énonce les règles que doivent respecter les différentes procédures de construction d'une courbe des taux sans risque.

### 2.1. Caractéristiques des instruments adaptés à la construction d'une courbe des taux sans risque

Idéalement, les instruments qui vont servir à construire la courbe des taux sans risque doivent présenter les caractéristiques suivantes :

1. Absence de risque de crédit. Les obligations émises par des gouvernements de signature AAA sont considérées par l'EIOPA comme exemptes de risque de crédit. Néanmoins, le risque de crédit varie selon la devise considérée. Par exemple, la zone Euro comprend plusieurs gouvernements de signature AAA et ainsi une courbe des obligations gouvernementales sans risque peut être basée sur la courbe Euro publiée par la Banque Centrale Européenne. En ce qui concerne les devises liées à un unique gouvernement, cependant, le taux obligataire gouvernemental est susceptible de porter en permanence un risque de crédit. Le cas échéant, un ajustement s'avérera nécessaire. Par ailleurs, bien que les *swaps* soient des transactions collatéralisées, ils incorporent un risque de crédit non négligeable et ce pour trois raisons essentielles :
  - a. La valeur de marché du collatéral peut être affectée par l'évènement de défaut.
  - b. Le collatéral couvre uniquement la valeur courante du swap. Si les taux d'intérêt changent, une exposition significative risque de ne plus être couverte, particulièrement pour les swaps de longue échéance.
  - c. Il faut également prendre en compte le risque de crédit résultant du taux de la jambe variable.
2. Réalisme. Par réalisme, un assureur doit pouvoir obtenir un taux sans risque sans encourir de risques particuliers. Dans le cas contraire, les provisions techniques escomptées par un tel taux contiendraient des pertes cachées, qui se matérialiseraient au cours de la période de liquidation. Le bilan résultant ne serait alors pas approprié pour l'évaluation de la solvabilité.
3. Fiabilité. Les méthodes mises en œuvre doivent être robustes, fiables et précises et ce d'autant plus en période de crise ou de turbulence.
4. Une liquidité élevée pour toutes les maturités. Une gamme des taux construite à partir d'un marché profond, transparent et liquide présentera moins de distorsions qu'une courbe construite à partir d'un marché moins liquide. Les caractéristiques d'un tel marché sont les suivantes :
  - d. Les participants peuvent promptement exécuter des transactions volumineuses sans impacter significativement les prix des instruments impliqués dans les réplifications.

---

<sup>3</sup> <https://eiopa.europa.eu>

- e. Les transactions en cours et les informations sur les cotations sont disponibles immédiatement au public.
  - f. Les propriétés susmentionnées sont permanentes.
5. Aucun biais technique. Le Groupe de travail ad hoc sur la marge du risque de l'Association Actuarielle Internationale (AAI) donne un exemple de biais technique associé à des obligations gouvernementales : « *Government bond prices can be distorted due to an artificially high demand from financial institutions and pension funds that may be subject to regulatory constraints that favour Government bond holdings or were the basis at the time issued of a benchmark (e.g., a ten-year bond whose yield might be 50 basis points lower than either a nine- or eleven-year bond). These supply and demand distortions may not be considered to be relevant for the cash flows expected to occur at that duration.* »<sup>4</sup> En outre, des distorsions entre l'offre et la demande peuvent engendrer un biais technique dans le cas des taux de swap. En principe, les swaps présentent des rendements supérieurs à ceux des obligations gouvernementales. Néanmoins, au cours de la crise financière un renversement s'est produit sur les marchés de l'Euro et la livre sterling : les rendements des swaps furent inférieurs à ceux des obligations gouvernementales pour des durations situées aux alentours de 20 ans. La demande élevée pour la jambe fixe provint principalement des investisseurs ayant des engagements fixes, comme les assureurs et les fonds de pension, et elle ne peut être satisfaite en raison de l'offre limitée en matière de swaps de la part des banques.
  6. Disponibilité pour toutes les devises pertinentes. Il est préférable que l'instrument choisi comme base pour le taux sans risque soit disponible pour toutes les devises pertinentes. Si ce n'est pas le cas, des opportunités d'arbitrage peuvent apparaître. En outre, le calcul du SCR (Solvency Capital Requirement) dépendant des provisions techniques, la prime d'une police d'assurance pourrait différer selon les devises.
  7. Proportionnalité. L'EIOPA recommande que la gamme des taux sans risque soit fournie au moins à une fréquence trimestrielle. Lorsque les conditions de marché deviennent volatiles, la gamme des taux doit être fournie plus fréquemment.

## 2.2. Choix possibles

L'EIOPA propose une approche en trois étapes en vue de construire une courbe des taux sans risque :

1. S'il existe des obligations gouvernementales satisfaisant aux critères 1 et 5, alors ce sont celles-ci qui doivent être utilisées.
2. S'il existe des obligations gouvernementales, mais qui ne satisfont pas aux critères du taux sans risque, elles doivent alors être ajustées de façon à ce qu'elles satisfassent lesdits critères.
3. S'il n'existe aucune obligation gouvernementale ou s'il en existe mais que celles-ci ne peuvent être ajustées pour des raisons théoriques ou pratiques, d'autres instruments devront être choisis, aussi proches que possible des obligations gouvernementales. Dans ce cas, ceux-ci devront voir leur taux ajustés de façon à approcher des taux d'obligations gouvernementales qui satisfont les critères de taux sans risque.

Par ailleurs, plusieurs options existent :

1. Utiliser la courbe des swaps
2. Utiliser la courbe des obligations gouvernementales
3. Utiliser la courbe des swaps moyennant un ajustement à la baisse. Ce dernier reflète le risque de crédit encapsulé dans le taux swap.
4. Utiliser les obligations gouvernementales moyennant un ajustement à la hausse. Les rendements sur les obligations gouvernementales peuvent être sujets à des distorsions du marché, et comme résultat, les investisseurs peuvent obtenir un rendement supérieur sans encourir un risque supplémentaire en pratique. L'ajustement à la hausse est censé refléter ce phénomène.
5. Combiner les options précédentes. La gamme des taux sans risque peut être déterminée différemment selon les devises. Par exemple, si les obligations gouvernementales sont indisponibles ou inappropriées pour certaines devises, la gamme des taux sans risque peut être déterminée grâce à un ajustement appliqué à la courbe des obligations gouvernementales ou à celle des swaps.

Il se peut qu'il existe des obligations gouvernementales conformes aux critères précédents pour certaines maturités mais non pour d'autres. Le cas échéant, des instruments alternatifs devront être déterminés pour ces maturités-là.

Par ailleurs, les marchés financiers évoluent en permanence. Par exemple, un instrument peut devenir liquide entretemps ou un biais technique peut affecter un autre instrument. Par conséquent, l'approche mise en œuvre en vue de construire une courbe de taux sans risque doit être révisée régulièrement.

<sup>4</sup> INTERNATIONAL ACTUARIAL ASSOCIATION [2009] (page 46).

De surcroît, l'EIOPA s'oppose à l'inclusion d'une prime d'illiquidité dans le taux sans risque, car cela risque de diminuer sensiblement les provisions techniques.

La Banque Centrale Européenne (ou BCE) publie régulièrement une structure par terme des taux sans risque, qui est dérivée d'obligations de signature AAA émises en euro par un gouvernement central de la zone euro et soumis aux critères ci-dessous :

- Seules les obligations avec un montant dû d'au moins 5 milliards d'euro sont incluses.
- Les obligations possédant des caractéristiques spéciales, y compris celles avec des spécificités institutionnelles, sont exclues.
- Seules les obligations avec coupon fixe et maturité finie ainsi que les obligations zéro-coupon sont sélectionnées, dont les STRIPS<sup>5</sup>. Les obligations à coupon variable, dont les obligations indexées sur l'inflation, ne sont pas incluses.
- Seules les obligations d'État activement négociées, dotées d'un écart acheteur-vendeur (bid-ask spread) par cotation de trois points de base, sont retenues. Les prix/rendements correspondent au cours de fermeture lors du jour de référence.
- Afin de refléter une profondeur de marché suffisante, la plage de maturités résiduelles s'étale de 3 mois à 30 ans.

La courbe des taux sans risque est nécessairement construite à partir d'un nombre fini de points. Subséquemment, une interpolation entre ces points et une extrapolation au-delà du dernier point suffisamment liquide constaté s'avéreront nécessaires. Ces deux opérations devront satisfaire aux critères définis précédemment.

### 2.3. Méthodes d'extrapolation

Plusieurs méthodes d'extrapolation existent, mais il n'y a pas de consensus concernant celle qui convient le mieux en toutes circonstances et pour toutes les devises. L'EIOPA a établi que :

- a. Les mêmes principes de haut niveau doivent être appliqués aussi bien pour la partie extrapolée que la partie interpolée de la courbe.
- b. La méthode doit fournir des résultats stables et éviter les fluctuations parasites dans le segment long terme de la courbe. Ceci est particulièrement important pour les devises où les taux de référence liquides sont disponibles uniquement pour les maturités à court terme et une simple extrapolation des taux d'intérêt court terme pourrait engendrer une volatilité excessive.
- c. Il est impossible d'identifier une méthode réalisant la meilleure extrapolation pour toutes les devises. En effet, certaines devises ne sont que très peu négociées et sujettes à de fortes fluctuations en termes d'attentes macroéconomiques. Dans ce cas, l'approche macroéconomique peut produire des résultats volatiles. D'autres devises vont bientôt être intégrées à la zone euro. D'autres devises peuvent être activement négociées et bénéficier de prévisions macroéconomiques stables.
- d. Il est impossible de garantir qu'une méthode donnée se comportera de façon optimale pour une devise donnée à tout instant.

Les techniques simples ne requièrent pas d'analyse approfondie concernant la forme de la courbe. Dans sa forme la plus frustrante, la technique d'extrapolation simple suppose que le point de donnée liquide final est aussi le niveau du taux d'intérêt à long terme. Par conséquent, à partir du dernier point de donnée observé, la courbe est une ligne horizontale.

Les techniques macroéconomiques, quant à elles, impliquent d'identifier un taux d'intérêt d'un équilibre à long terme habituellement, quoique non nécessairement, via une analyse économique, et d'interpoler entre les points de données disponibles et ce point d'équilibre.

Les techniques de paramétrisation mettent l'accent sur le lissage et fournissent une construction objective de la gamme des taux, si la technique de paramétrisation est fixée. Elles peuvent (mais ce n'est pas nécessairement le cas) reposer sur des hypothèses économiques. C'est cette catégorie de techniques qui est le plus utilisée en pratique sur les marchés. Comme exemples, on peut citer la méthode de Svensson et celle Smith et Wilson.

---

<sup>5</sup> L'acronyme « STRIPS » signifie « *Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities* » (Échange séparé des intérêts nominatifs et du principal des titres). Cela signifie que l'échange et la propriété de chaque coupon et du principal de l'obligation sous-jacente sont des obligations à coupon zéro dématérialisées et autonomes. Ce sont des instruments idéaux pour l'ALM (Asset & Liability Management) car tous les types d'échéances sont disponibles : par exemple les gestionnaires de patrimoine achètent des strips à court terme alors que les échéances les plus longues sont détenues par des fonds de pension et des compagnies d'assurance attirés par la longue durée de ces instruments.

Les techniques par *spread* constant ou variable sont des méthodes alternatives pour les devises autres que l'euro :

- D'abord, une technique d'extrapolation appropriée est appliquée dans le cas de l'euro.
- Puis les taux liés aux autres devises sont extrapolés à l'aide de la courbe de l'euro à laquelle est ajoutée :
  - o Dans le cas d'un *spread* constant, le *spread* entre l'euro et la devise concernée pour la dernière donnée liquide disponible de cette devise ;
  - o Dans le cas d'un *spread* variable, les *spreads* dérivés via l'ajustement d'une courbe aux *spreads* observés dans la partie non extrapolée de la courbe.

	Taux d'intérêt 20 ans	Taux d'intérêt 22 ans	Taux d'intérêt 24 ans
<b>Devise X</b>	Valeur observée : 4.25%	Valeur observée : non fiable Valeur fournie par la méthode du <i>spread</i> constant : 4.20% (=3.45+0.75)	Valeur observée : non fiable Valeur fournie par la méthode du <i>spread</i> constant : 4.10% (=3.35+0.75)
<b>Euro</b>	3.50%	3.45%	3.35%
<b>Spread (€/X)</b>	+0.75% (=4.25-3.50)	+0.75% (constant)	+0.75% (constant)

**Tableau 1 : illustration de la méthode par *spread* constant. Source : CEIOPS [2010].**

## 2.4. Détermination du taux forward ultime

Le taux forward ultime (*Ultimate Forward Rate* ou UFR) est le taux asymptotique vers lequel tend la courbe des taux spot  $r(\tau)$  lorsque la maturité  $\tau$  tend vers l'infini.

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} r(\tau) = UFR \quad (1)$$

Bien qu'il soit sujet à une révision régulière, il doit être stable au cours du temps et ne peut être influencé que par des prévisions à long terme. Il est défini pour chaque devise à l'aide de méthodes macro-économiques.

Les principes communs présidant les méthodes de calcul doivent garantir un terrain d'égalité entre les différentes devises. Pour toutes les devises, les taux d'intérêt au-delà de la dernière maturité observable (où aucun prix de marché n'existe) sont nécessaires. Un moyen d'éviter d'instaurer une inégalité de traitement lors de l'extrapolation du taux sans risque à des horizons atteignant 100 ans est d'utiliser pour devise toutes les données de marché disponibles issues du segment liquide de la gamme des taux.

Les principaux facteurs économiques expliquant les taux forward à long terme sont :

1. L'inflation prévue à long terme.
2. Le taux d'intérêt réel prévu.
3. La prime à terme nominale à long terme prévue. Cette prime à terme représente le retour additionnel qu'un investisseur est en droit d'attendre sur des obligations à longue échéance par rapport à des obligations à courte échéance, en guise de compensation pour l'investissement à long terme. Ce facteur peut avoir aussi bien une valeur négative que positive, selon les considérations de liquidité et les lieux de résidence des investisseurs : si ces derniers cherchent un rendement supérieur pour accepter le risque de taux d'intérêt sur une obligation à longue échéance, ce facteur est positif, s'ils sont enclins à accepter un rendement inférieur pour bénéficier des avantages d'un investissement d'appariement de passif, ce facteur est négatif.
4. L'effet de convexité nominal à long terme. Celui-ci procède de la relation non linéaire (convexe) entre les taux d'intérêt et les prix des obligations utilisées pour estimer ces derniers. Il s'agit d'un effet purement technique, qui résulte toujours en une composante négative.

Aucune donnée empirique sur la prime à terme pour les échéances extrêmement longues n'existe, l'estimation pratique de cette grandeur relèverait de la gageure et impliquerait d'extrapoler à partir des primes à terme pour les plus courtes échéances. Subséquemment, afin d'obtenir une estimation robuste et fiable de l'UFR, la procédure d'évaluation ne prend en compte que les deux premiers facteurs et peut se formuler comme suit :

$$\text{Ultimate Forward Rate} = \text{Inflation prévue à long terme} + \text{Taux d'intérêt réel prévu} \quad (2)$$

Selon CEIOPS [2009], d'un point de vue macroéconomique, il est parfaitement cohérent de s'attendre à la même valeur de l'UFR dans le monde entier dans 100 ans, car l'économie à l'échelle mondiale a tendance à s'uniformiser et à s'harmoniser et devrait atteindre un régime global à long terme. Toutefois, si des analyses indiquent des déviations significatives, un ajustement s'avèrera nécessaire.

## 2.5. Estimation du taux d'inflation à long terme prévue

L'inflation prévue n'est pas seulement basée sur les moyennes historiques des données observées, car les taux de grande inflation du siècle passé semblent peu influencer l'avenir. Le fait est que, au cours des deux dernières décennies, beaucoup de banques ont réussi à contrôler l'inflation, bien mieux qu'aux périodes précédentes.

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
France	1,7	1,8	2,0	1,2	0,6	0,5	1,7	1,6	1,9	2,1	2,1	1,7	1,7	1,5	2,8	0,9

**Tableau 2 : évolution de l'inflation en France. Source : [France Inflation.com](http://france-inflation.com)<sup>6</sup>.**

L'EIOPA, en vue d'avoir une estimation robuste et fiable de l'UFR, fixe le taux d'inflation à long terme prévue standard à 2% par an, conformément au taux cible explicite en matière d'inflation avec lequel la plupart des banques centrales travaillent<sup>7</sup>. Cependant, eu égard aux données historiques des 10-15 dernières années relatives à l'inflation actuelle, L'EIOPA a introduit deux catégories supplémentaires afin de capturer les déviations significatives en hausse ou en baisse du taux d'inflation à long terme prévue pour certains pays.

L'EIOPA préconise donc d'utiliser une valeur de 2% pour la France.

Par ailleurs, différents organismes, analysant la conjoncture économique, ont réalisé fin 2012 une étude portant sur les prévisions de l'inflation moyenne en 2012<sup>8</sup>. Ils prévoient une baisse de l'inflation en 2012. Pour l'INSEE, la baisse mi-2012 devrait être assez forte : l'inflation est appelée à diminuer sensiblement pour atteindre 1,4% courant juin 2012, en raison du recul significatif des prix de de l'énergie et des produits alimentaires. L'effet hausse de la TVA ne serait que de 0,1% en juin.

Organisme	2011	2012	2013
Société Générale	2,2%	2,0%	1,5%
NATIXIS	2,1%	1,9%	1,8%
BNP PARIBAS	2,2%	1,6%	1,8%
Crédit Agricole	2,1%	1,4%	1,1%
OCDE	2,1%	1,7%	1,8%
FMI	2,2%	2,0%	1,5%

**Tableau 3 : Inflation anticipée par différents organismes. Source : [France Inflation.com](http://france-inflation.com)<sup>9</sup>.**

Afin d'effectuer une prévision de l'inflation en 2012, les deux facteurs clés sont :

1. L'évolution des prix de l'énergie,
2. L'évolution des prix alimentaires.

La Figure 3 illustre la prééminence de ces deux postes depuis 2000. Par ailleurs, il faut souligner que les prévisions de baisse d'inflation projetées pour 2012 anticipent une baisse significative de ces deux postes. La concomitance de l'augmentation de ceux-ci explique l'envolée de l'inflation mi-2008 ainsi que la poussée actuelle fin 2011. Le passé récent a enseigné aux spécialistes que l'évolution du prix du pétrole est malaisée à anticiper ; c'est pourquoi la circonspection est de rigueur sur ce type de questions. Si les régimes politiques en place dans les pays producteurs voient leur instabilité s'amplifier, le prix du pétrole pourrait grimper et l'inflation suivrait.

<sup>6</sup> [http://france-inflation.com/prevision\\_inflation\\_en\\_france.php](http://france-inflation.com/prevision_inflation_en_france.php)

<sup>7</sup> C'est d'ailleurs l'objectif de la Banque Centrale Européenne.

<sup>8</sup> Source : <http://france-inflation.com/index.php>.

<sup>9</sup> [http://france-inflation.com/prevision\\_inflation\\_en\\_france.php](http://france-inflation.com/prevision_inflation_en_france.php)

## INFLATION PAR GRANDS CONTRIBUTEURS

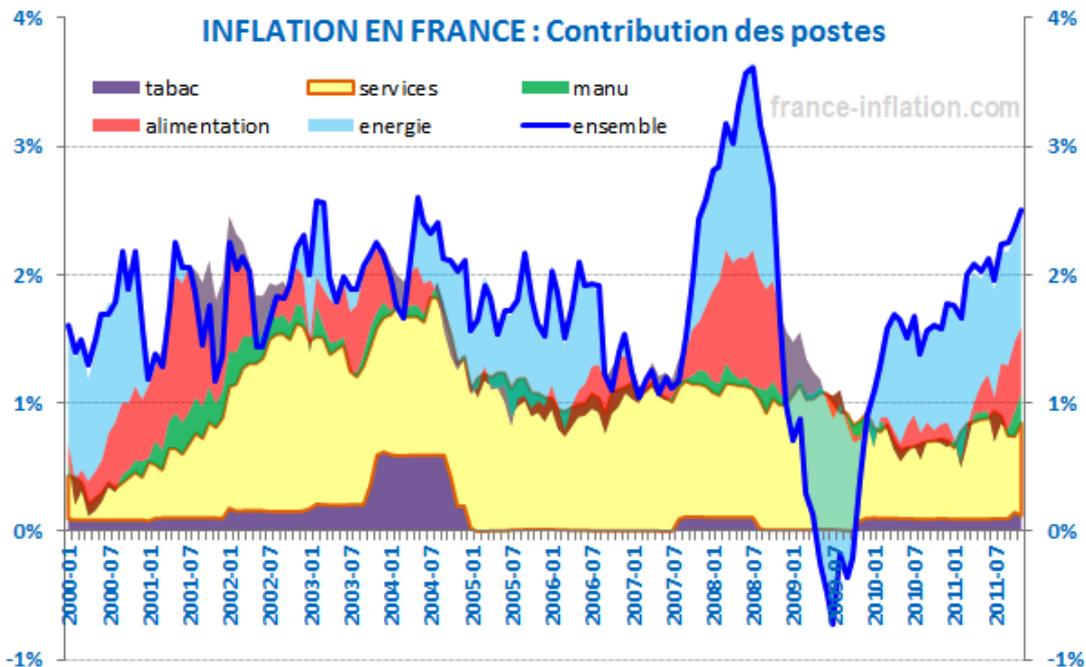


Figure 3 : Inflation en France, contribution des postes. Source : [France Inflation.com](http://france-inflation.com)<sup>10</sup>.

### 2.6. Estimation du taux d'intérêt réel prévu

D'après CEIOPS [2010], les taux réels ne sont pas censés différer substantiellement à travers les différentes économies aussi loin qu'une centaine d'années. Elroy Dimson, Paul Marsh et Mike Staunton comparèrent les rendements obligataires réels de la seconde partie du 20<sup>ème</sup> siècle avec ceux de la première partie pour 12 économies : l'Italie, l'Allemagne, la France, le Japon, la Suisse, le Danemark, les Pays Bas, Le Royaume Unis, le Canada, les Etats Unis, la Suède et l'Australie. Le rendement obligataire réel moyen fut estimé à 2,3% par an au cours de la seconde partie du 20<sup>ème</sup> siècle, contre -1,1% au cours de la première partie.

<sup>10</sup> [http://france-inflation.com/prevision\\_inflation\\_en\\_france.php](http://france-inflation.com/prevision_inflation_en_france.php)

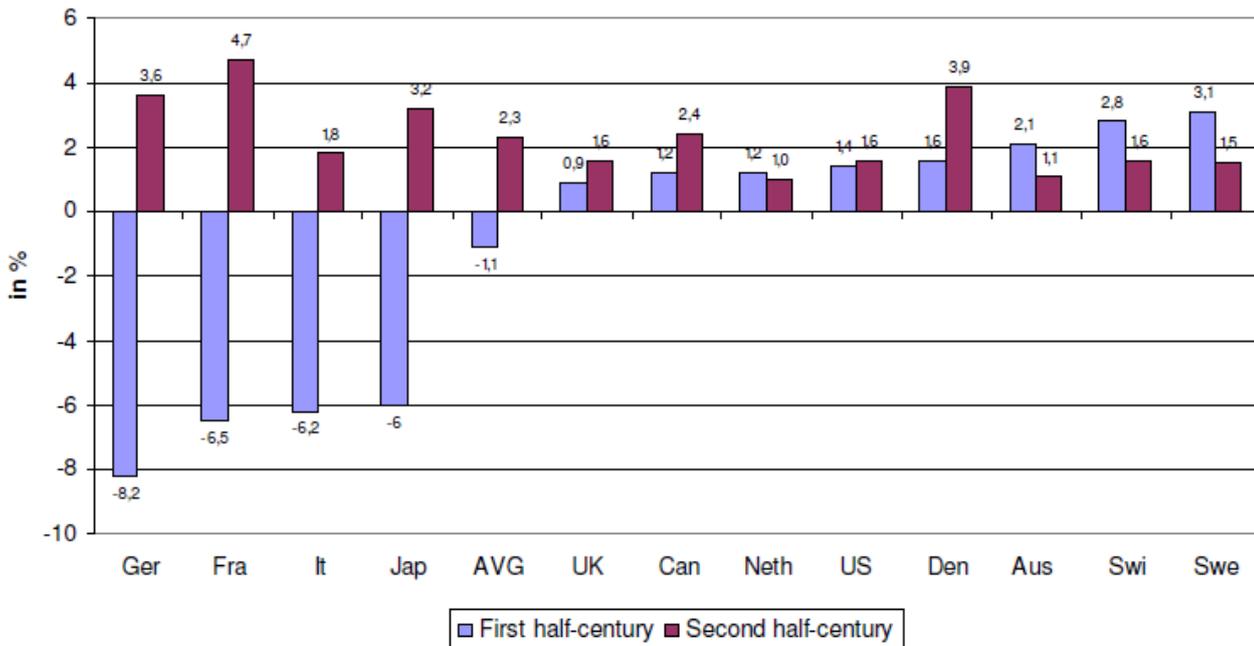


Figure 4 : Comparaison des rendements obligataires réels de la première partie du 20<sup>ème</sup> siècle avec ceux de la seconde partie<sup>11</sup>. Source : CEIOPS [2010].

A la lumière des données précédentes, l'EIOPA préconise de prendre un taux de 2,2% en guise de taux d'intérêt réel prévu.

## 2.7. Conclusion

Comme illustré à la Figure 5, l'évolution des taux d'intérêt à long terme au cours de la dernière décennie étaye la distinction entre les zones Euro, GBP et USD dans un groupe et JPY et CHF dans un autre.

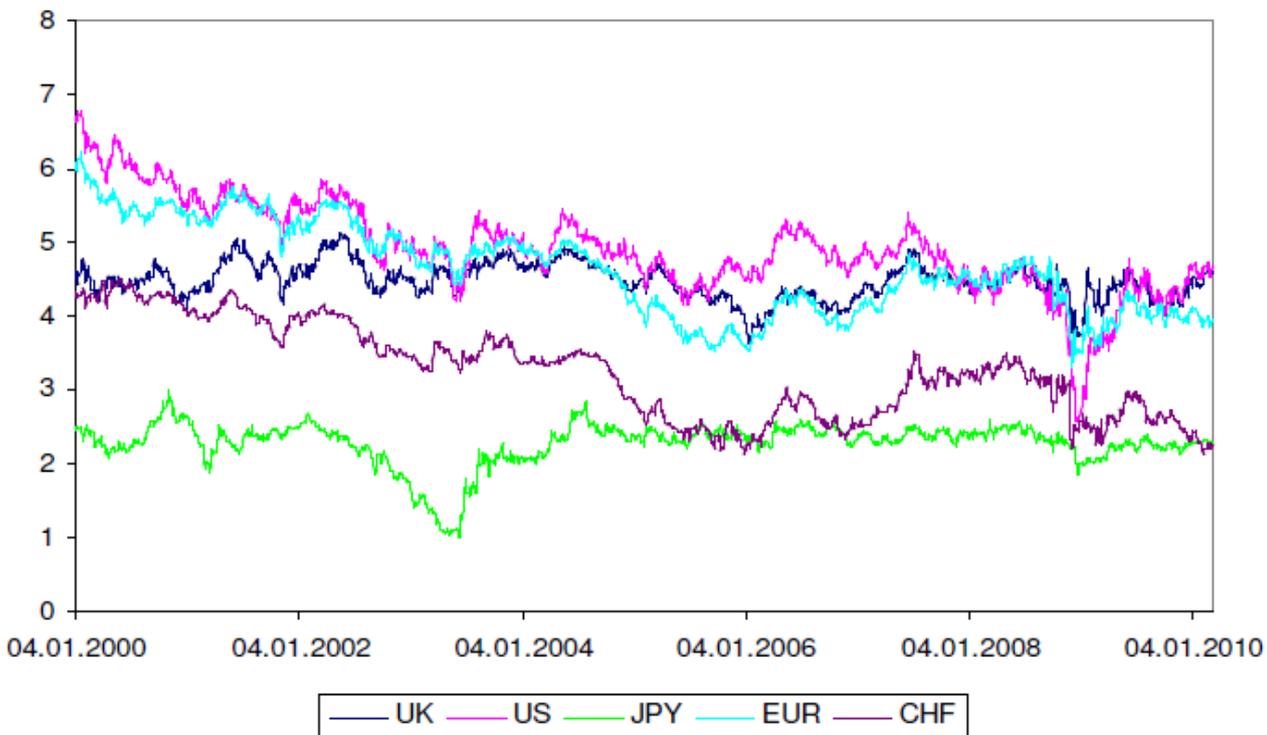


Figure 5 : Taux d'intérêt à long terme (30 ans). Source : CEIOPS [2010].

<sup>11</sup> Les données concernant l'Allemagne excluent la période 1922-23. AVG = Average.

Catégorie	Devises	UFR évalué macroéconomiquement (%)
1	JPY, CHF	3,2
2	Euro, SEK, NOK, DKK, GBP, USD, PLN, RON, HUF, ISK	4,2=2,2%+2%
3	TRY	5,2

Tableau 4 : UFR selon les différentes catégories monétaires. Source : CEIOPS [2010].

### 3. Choix des instruments de calibration

#### 3.1. Introduction

Les opérateurs en produits dérivés utilisent traditionnellement les taux swap sur Libor ou Euribor en guise de proxy pour déterminer les taux sans risque. Ils calculent une courbe des taux sans risque à l'aide des taux interbancaires, les taux futures Eurodollar (ou taux FRA<sup>12</sup>) et les taux swap. Les taux Libor et Euribor sont les taux auxquels empruntent les institutions financières notées AA. COLLIN-DUFRESNE et SOLNIK [2001] montrent que les taux *swap* sont des taux LIBOR « continuellement rafraîchis » et portent le même risque qu'une série de prêts à court terme d'institutions financières notées AA. Lorsque les taux *swap* sont utilisés pour bootstrapper la courbe du LIBOR, les taux résultants sont, dans des circonstances normales, ceux qui s'appliqueraient à des emprunts à faible risque (mais non de risque zéro). Par exemple, le risque de crédit intrinsèque à un taux *swap* de maturité 5 ans correspond au risque de crédit de 20 prêts successifs de 3 mois à des institutions financières notées AA et ce risque porte uniquement sur les intérêts, puisqu'il n'y a pas d'échange de notionnel.

L'utilisation du LIBOR en guise de proxy pour le taux sans risque est remise en question par la crise de crédit qui a démarré mi-2007. Les banques devinrent de plus en plus réticentes à se prêter les unes aux autres, soucieuses de quelque défaut éventuel. Par conséquent, les cours du Libor s'envolèrent. L'écart TED<sup>13</sup> est inférieur à 50 points de base dans les conditions normales de marché. Entre octobre 2007 et mai 2009, il passa rarement en dessous de 100 points de base et accusa des crêtes au-dessus de 450 points de base en octobre 2008.

La plupart des opérateurs en produits dérivés préfèrent désormais utiliser le taux OIS au Libor comme taux d'actualisation lorsqu'il s'agit de valoriser des portefeuilles collatéralisés. LCH.Clearnet, une des plus importantes chambres de compensation dans le domaine des transactions de gré à gré, est elle-aussi passé du taux Libor au taux OIS pour les *swaps* de taux d'intérêt. La raison généralement invoquée expliquant ce glissement vers le taux OIS comme taux d'actualisation est que ce taux est tiré du taux des fonds fédéraux américains et que ce dernier est le taux payé sur le collatéral. Le taux des fonds fédéraux américains et le taux OIS constituent ainsi le taux de financement approprié pour les transactions garanties. Pour ce qui est des transactions non garanties, la plupart des opérateurs continuent à utiliser le Libor comme taux d'actualisation. La raison étant que ces transactions ne sont pas garanties, le Libor constitue une meilleure estimation du coût bancaire de financement que le taux OIS.

HULL et WHITE [2012] préconisent d'utiliser le taux OIS aussi bien pour les transactions garanties que pour les transactions non garanties. La raison n'a rien à voir avec le coût de financement supporté par l'opérateur, mais plutôt avec le fait que ce taux est le meilleur proxy en matière de taux sans risque et que ce dernier doit être utilisé comme taux d'actualisation lorsque l'on doit procéder à une évaluation risque neutre, comme ce sera le cas dans ce mémoire (cf. chapitre « Le risque de taux : le modèle de Hull et White »).

#### 3.2. Taux au jour le jour

Les banques peuvent emprunter de l'argent sur le marché au jour le jour avec ou sans garantie. La dette garantie en dollar américain peut être levée sous la forme de pensions (*repurchase agreement* ou *repo*)<sup>14</sup>

Le taux au jour le jour, qu'il s'agisse du taux des fonds fédéraux américains ou du Libor au jour le jour, est un taux sur un emprunt non garanti, et, en cela, il ne peut être considéré comme un taux sans risque.

Une fraction importante des prêts des fonds fédéraux passent par des courtiers. Ces derniers transmettent quotidiennement les taux d'intérêt qu'ils pratiquent à la Federal Reserve Bank of New York (FRBNY). Celle-ci, à

<sup>12</sup> *Forward Rate Agreement*.

<sup>13</sup> Le « TED spread » (Treasury-Eurodollar spread) correspond à l'écart (en points de base) entre le LIBOR à trois mois et le taux d'intérêt des bons du Trésor américain à trois mois. Toute hausse de cet indice est interprétée comme un accroissement du risque de défaillance des banques.

<sup>14</sup> Il s'agit, sous la forme juridique de deux transactions au comptant en sens inverse et décalées dans le temps, d'une cession suivie d'un rachat au terme de l'opération, du refinancement d'actifs financiers négociables (obligations, BTAN, certificats de dépôt, actions, etc.) à un taux d'intérêt négocié entre les deux parties contractantes, le prêteur des titres et le prêteur du numéraire.

partir de ces données, calcule chaque jour le taux d'intérêt moyen pratiqué sur les prêts des fonds fédéraux. Cette moyenne est appelée « taux effectif des fonds fédéraux ».

HULL et WHITE [2012] ne considèrent pas le taux repo à un jour comme une meilleure mesure que le taux effectif des fonds fédéraux. En effet, ils imputent les différences entre ces deux catégories de taux à la microstructure intrinsèque des marchés. Entre, l'écart entre le taux des fonds fédéraux et le taux Libor à un jour est essentiellement dû à des éléments autres que le risque de crédit.

Sur le marché de la zone euro, le taux techniquement équivalent au taux effectif des fonds fédéraux pratiqué sur le marché nord-américain est L'EONIA (Euro Overnight Interest Average). Pour de plus amples informations, le lecteur se reportera à la section 1 de l'annexe.

### 3.3. Swaps sur indice au jour le jour et swaps sur Libor/Euribor

Les contrats de *swap* indexé sur le taux à un jour (*Overnight Index Swaps*) tendent à être de courte durée (le plus souvent moins de trois mois). Néanmoins, les transactions qui durent entre cinq et dix ans se généralisent. Les *swaps* de maturité inférieure ou égale à un an comportent un simple paiement à l'échéance, égal à la différence entre le taux de la jambe fixe et le taux variable composé et multipliée par le notional et la fraction courue. Si le taux fixe s'avère supérieur au taux variable composé, on a affaire à un paiement de la part du payeur de taux fixe au payeur de taux variable, autrement, on a affaire à un paiement de la part du payeur de taux variable au payeur de taux fixe. Similaires aux swaps sur Libor, les *swaps* OIS sont divisés en sous-périodes de trois mois et un paiement est fait à la fin de chacune d'entre elles.

Nous avons évoqué précédemment l'argument énoncé par COLLIN-DUFRESNE et SOLNIK [2001] et selon lequel les taux *swap* sont des taux LIBOR « continuellement rafraîchis ». Ceci montre que le taux *swap* de maturité 5 ans dans le cadre d'une transaction à travers laquelle les paiements sont échangés trimestriellement équivaut au taux de 20 prêts consécutifs de maturité 3 mois et dont la contrepartie est notée AA au début de chaque prêt. Un argument similaire s'applique à un taux OIS. Ce taux est le taux d'intérêt qui serait versé aux prêteurs sur le marché au jour le jour dans le cadre de prêts au jour le jour continuellement rafraîchis.

Il y a deux sources de risque de crédit qui affectent un OIS :

1. Le risque de crédit qui entache un emprunt de fonds fédéraux. Mais il est très faible.
2. Le risque de crédit provenant d'un éventuel défaut d'une des deux contreparties. Cette éventualité peut mener à un réajustement du taux fixe, dont la taille dépend de la pente de la gamme des taux, de la probabilité de défaut, de la volatilité des taux d'intérêt, de la vie du *swap* et du fait que la transaction soit garantie ou non. La taille de ce réajustement est généralement très faible pour les transactions « à la monnaie » où les deux parties ont la même qualité de crédit et lorsque la gamme des taux est plate. On peut supposer cette taille nulle dans le cas des transactions garanties.

Compte tenu de ces arguments, HULL et WHITE [2012] concluent que le taux *swap* OIS constitue un proxy convenable pour un taux sans risque à long terme.

Le *spread* entre le taux Libor 3 mois et le taux OIS reflète la différence entre le risque de crédit affectant un prêt de 3 mois à une banque considérée d'une qualité de crédit convenable et le risque de crédit affectant des prêts d'un jour continuellement rafraîchis à des banques également considérées de qualité de crédit convenable. D'après HULL et WHITE [2012], dans des conditions financières normales, ce *spread* vaut environ 10 points de base. Cependant, il atteint un pic de 364 points de base en octobre 2007. L'année suivante, il revint à des niveaux plus raisonnables, il s'éleva à 30 points de base en juin 2010 et 50 points de base fin 2011 en raison des préoccupations soulevées par les dettes souveraines européennes.

Une courbe des zéro-coupons peut être extraite par bootstrap à partir des taux *swap* OIS, de la même façon qu'elle le serait à partir des taux *swap* sur Euribor. Si la courbe des zéro-coupon est requise pour des maturités supérieures à la maturité maximale observée, une approche naturelle est de supposer que l'écart entre la courbe des zéro-coupons déduite des taux OIS et celle déduite des taux *swap* sur Euribor reste constant au-delà de la maturité maximale observée des taux OIS. Retrancher cet écart de la courbe de zéro-coupons déduite des taux *swap* sur Euribor permet ainsi de construire une courbe sans risque.

En revanche, JAKOBSEN [2011] déconseille d'utiliser la méthode de Smith et Wilson à partir de bons du Trésor américain, car la courbe des taux forward instantanés arbore une forme déchiquetée. En outre, il n'existe pas de courbe gouvernementale commune au sein de la zone euro.

JAKOBSEN [2011] compare les swaps sur indice au jour le jour et les swaps sur Libor :

- Le QIS 5 utilise les contrats de *swap* sur des taux Libor ou Euribor.

- Les taux Libor reflètent le risque de crédit lié à la perte du principal.
- Or, il n'y a pas de risque sur le principal dans un contrat *swap*. Un taux fixe plus élevé sert à compenser la prime de risque sur la jambe variable.
- Comme souligné précédemment par HULL et WHITE [2012], les *swaps* sur indice au jour le jour sont plus proches de la « véritable » courbe de taux sans risque.
- Les contrats OIS sont moins liquides et de plus court terme selon le CRO Forum.
- Pendant une période de crise, le choix du Libor basé sur les taux *swap* à la place des taux OIS a pour effet de réduire le SCR.
- Si la liquidité des contrats OIS s'améliorent, les taux tirés de ces contrats constitueront le choix idéal pour construire une courbe des taux sans risque.

Par ailleurs, dans l'un de ses documents techniques, CNO [2012], le Comité de Normalisation Obligataire<sup>15</sup> énonce les principaux éléments de la procédure de calcul :

- *La structure des taux zéro-coupon calculée est celle associée à la structure des taux de swaps taux fixe contre Euribor 6 Mois publiée par ICAP<sup>16</sup>.*
- *Elle est fournie par valeurs ponctuelles pour des maturités exprimées en années civiles entre un à soixante ans. Les valeurs intermédiaires peuvent être obtenues par interpolation.*
- *Les taux de swaps sont considérés comme les taux coupon au pair exacts associés à la structure zéro-coupon calculée.*
- *Les taux zéro-coupon sont calculés par une procédure récurrente de pas annuel.*
- *Cette procédure nécessite de calculer les valeurs annuelles manquantes de la structure des taux de swap. Les valeurs manquantes (31 ans, 32 ans, 33 ans ...) sont déterminées par interpolation cubique, c'est-à-dire en considérant que la fonction qui fait correspondre un taux de swap à une échéance dans l'intervalle compris entre les deux échéances de marché qui encadrent l'échéance manquante est un polynôme de degré 3, spécifique pour chaque intervalle, et respectant les valeurs du swap et celles des dérivées du premier ordre à chaque extrémité de l'intervalle.*

Nous verrons à la section 4 que la méthode d'interpolation utilisée par le CNO n'est pas cohérente dans la mesure où elle peut entraîner une fonction de prix croissante localement.

Maturité	Taux swap sur Euribor 3 mois	Taux swap sur Euribor 6 mois	Taux swap sur EONIA
1Y	1.251	1.575	0.975
2Y	1.2115	1.467	0.993
3Y	1.336	1.554	1.143
4Y	1.522	1.7155	1.345
5Y	1.721	1.9	1.556
6Y	1.901	2.067	1.746
7Y	2.053	2.202	1.905
8Y	2.175	2.323	2.034
9Y	2.278	2.4175	2.142
10Y	2.37	2.503	2.237
15Y	2.693	2.802	2.324
20Y	2.755	2.847	2.405
30Y	2.677	2.754	2.574
40Y	2.744	2.744	2.643
50Y	2.768	2.768	2.768
60Y	2.779	2.779	2.779

**Tableau 5 : cotations des taux swap sur EONIA, Euribor 3 moi et Euribor 6 mois en date du 2 novembre 2011 (heure de clôture : 17:02:08). On remarquera que le taux croît avec la durée du taux de référence, mais que les taux tendent à se rejoindre pour les maturités très long terme (50 ans).**

### 3.4. Choix final

La reconstitution de la courbe des taux peut être réalisée simplement en extrayant les taux de rendement d'obligations zéro-coupons présentes sur le marché. Cependant, les obligations zéro-coupon possédant les

<sup>15</sup> <http://www.cnofrance.org/>

<sup>16</sup> ICAP est le broker de référence sur le marché des swaps, en concurrence avec Tullett Prebon et BGC Partners.

caractéristiques requises ont une trop faible liquidité sur le marché et sont insuffisantes pour reconstituer une gamme complète de taux d'intérêt à une date donnée.

La courbe peut aussi être construite à partir des OAT (Obligations Assimilables du Trésor). Malheureusement, il n'est pas toujours possible de trouver l'OAT correspondante pour certaines maturités ou celles-ci ne sont pas liquides.

Par contre, les taux swap ont l'avantage concret d'être liquides sur le marché. Nous opterons donc pour ces derniers. En outre, par souci de conformité avec les directives de l'EIOPA, nous suivrons les recommandations du CNO et nous choisirons, dans cette optique, les taux *swaps* sur indice Euribor 6 mois.

## 4. Méthodes d'interpolation

### 4.1. Généralités

Le choix du modèle paramétrique doit permettre de reconstituer de manière réaliste (au sens des propriétés statistiques observées) les chocs sur l'ensemble de la courbe des taux. Dans cette perspective, il existe un large éventail de modèles.

HAGAN et WEST [2006] avancent plusieurs critères à considérer :

1. Est-il possible de construire une courbe empirique exacte avec peu d'instruments disponibles ? Dans le cas où un large éventail d'instruments est disponible, l'algorithme converge-t-il assez rapidement et avec une erreur suffisamment faible ?
2. Les taux forward sont-ils positifs et continus ? Comme l'ont indiqué MAC CULLOCH et KOCHIN [2000], « *a discontinuous forward curve implies either implausible expectations about future short-term interest rates, or implausible expectations about holding period returns* ». Par conséquent, il est préférable d'éviter de telles méthodes, particulièrement lorsque la valorisation de produits dérivés dépend des valeurs des taux forward.
3. L'interpolation est-elle locale ? Quel impact a la modification d'un argument en entrée sur la courbe ? L'impact se cantonne-t-il au voisinage ou bien provoque-t-il un effet de bord ?
4. Les taux forward sont-ils stables ?

Par ailleurs, rappelons que, pour une maturité donnée  $t$ , le taux forward instantané  $f(t)$  et le prix  $P(t)$  sont liés par la formule :

$$f(t) = -\frac{\partial \ln P(t)}{\partial t} = -\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} \quad (3)$$

L'extrapolation consiste à estimer les taux forward dont la maturité est supérieure à la maturité la plus élevée observée sur le marché. Ces derniers seront en général compris entre le taux forward correspondant à la maturité la plus élevée parmi ceux observés et l'UFR.

Les méthodes d'interpolation linéaires ont pour principal défaut de présenter des problèmes de continuité, ce qui les rend leur utilisation déconseillée lorsqu'il est nécessaire d'avoir une courbe lisse. Les méthodes d'interpolation par splines cubiques ou quadratiques présentent l'inconvénient de produire, pour certaines combinaisons de taux forward instantanés, une fonction de taux forward négative pour certaines maturités, donc une fonction de prix croissante pour ces mêmes maturités (cf. équation (3)). Un autre reproche fréquemment formulé à l'encontre de ces modèles est qu'ils sont des boîtes noires et possèdent des propriétés économiques indésirables (SEBER et WILD [2005]), ce qui occasionne de nombreux problèmes opérationnels. En outre, comme le souligne SHEA [1985], ces méthodes d'estimation de la structure à terme forcent la courbe à la hausse ou à la baisse sur les maturités de long terme. Ainsi donc ces techniques ne sont pas utilisables pour la prévision des taux futurs. Certes, ces modèles donnent de très bons résultats pour l'interpolation, cependant les résultats de la prévision des taux futurs ne sont pas pour autant satisfaisants. La courbe obtenue à partir de tels modèles n'est pas suffisamment lisse, elle varie trop brutalement et donne une mauvaise approximation des taux au-delà d'une certaine maturité.

Certaines méthodes utilisent la même approche pour toutes les maturités, tandis que d'autres mettent en œuvre différentes approches selon que les taux spots sont supputés dans la partie liquide ou dans la partie extrapolée de la structure par termes. Les exemples les plus représentatifs de la première procédure sont la méthode de Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]) et celle de Svensson (SVENSSON [1994]), lesquelles mettent en œuvre la même forme paramétrique pour reconstituer l'intégralité de la courbe. Quant à la seconde procédure, on

peut citer BARRIE & HIBBERT [2008], qui appliquent des splines pour la partie liquide et extrapolent la courbe des taux au moyen de la méthode de Nelson et Siegel.

Par ailleurs, il est préférable d'utiliser la même fonction d'interpolation pour toutes les maturités afin d'obtenir une courbe uniforme et d'éviter d'éventuelles incohérences. Par exemple, si les segments court terme et long terme de la courbe des taux sans risque étaient tous les deux construits à l'aide d'une fonction différente, il y aurait un risque de voir apparaître une discontinuité au niveau du point de jonction (maturité 1 an) de ces deux segments. Ces derniers ne sont pas manipulés par les mêmes intervenants, le segment court terme faisant partie du marché monétaire, le segment long terme du marché des swaps. Ils ne sont donc pas soumis exactement aux mêmes lois financières. De même, certaines méthodes réalisent l'interpolation et l'extrapolation séparément, chacune de ces deux opérations étant fondées sur des principes différents et utilisant des fonctions distinctes. Cela peut entraîner des incohérences entre la partie interpolée et la partie extrapolée de la même courbe ainsi qu'au cours du temps pour chaque partie de la courbe<sup>17</sup>.

## 4.2. Méthodes d'interpolation linéaires et par splines

HAGAN et WEST [2006] décrivent les méthodes d'interpolation linéaire et celles par splines cubiques et quadratiques.

Notons :

- $\tau_1, \dots, \tau_n$  les maturités observées.
- $d(\tau) = \exp(-r(\tau)\tau)$  la fonction d'actualisation.
- $d_i$  la fonction d'actualisation correspondant à la maturité  $\tau_i$ .

### 4.2.1. Interpolation linéaire

La méthode d'interpolation la plus simple est l'interpolation linéaire. La linéarité peut porter sur diverses variables :

1. Linéarité sur les facteurs d'escompte :

$$d(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} d_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} d_i \quad (4)$$

Le taux forward s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} r(\tau)\tau \\ &= \frac{d_i - d_{i+1}}{(\tau - \tau_i)d_{i+1} + (\tau_{i+1} - \tau)d_i} \end{aligned} \quad (5)$$

2. Linéarité sur les taux au comptant :

$$r(\tau) = -\frac{1}{\tau} \ln \left[ \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} d_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} d_i \right] \quad (6)$$

Le taux forward s'écrit alors :

$$f(\tau) = \frac{2\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} - 2\tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_i \quad (7)$$

3. Linéarité sur les logarithmes des taux :

<sup>17</sup> Si cette incohérence est due, par exemple, à une plus grande liquidité au niveau de la portion à long terme de la courbe, le point d'entrée pour l'extrapolation change significativement d'une période à l'autre, les taux pour les maturités comprises entre ces deux points dans le temps seront alors estimés à l'aide de méthodes différentes d'une période à l'autre.

$$\ln r(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_i \quad (8)$$

Le taux forward s'écrit alors :

$$f(\tau) = r(\tau) \left[ \frac{\tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + 1 \right] \quad (9)$$

Ces méthodes sont dérivables par morceaux et ont donc pour principal défaut de ne pas être dérivables aux dates d'observation, ce qui occasionne l'apparition de points anguleux à ces endroits-là ; c'est pourquoi elles sont déconseillées lorsqu'il est nécessaire d'avoir une courbe lisse.

#### 4.2.2. Interpolation par splines cubiques

Le principe consiste à déterminer les coefficients  $(a_i, b_i, c_i, d_i)$ , avec  $1 \leq i \leq n-1$ , de la fonction polynomiale :

$$r(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)^2 + d_i(\tau - \tau_i)^3, \quad \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1} \quad (10)$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} r'(\tau) &= b_i + 2c_i(\tau - \tau_i) + 3d_i(\tau - \tau_i)^2 & \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \\ r''(\tau) &= 2c_i, \quad \tau_i < \tau < \tau_{i+1} & \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \\ r'''(\tau) &= 6d_i & \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \end{aligned} \quad (11)$$

En notant  $h_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ , les contraintes communes à toutes les méthodes sont :

- $a_i = r_i$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ .
- $a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3 = r_n = a_n$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ .
- $a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = a_{i+1}$ , pour  $i = 1, \dots, n-2$ .
- $b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$ , pour  $i = 1, \dots, n-2$ .

Le système ainsi constitué comporte donc  $3n-4$  équations et  $4n-4$  inconnues.

Une raison fondamentale de la contrainte de la différentiabilité est la nécessité d'avoir une fonction forward continue :  $f(\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln d(\tau)$ . Il vient alors :

$$f(\tau) = a_i + b_i(2\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)(3\tau - \tau_i) + d_i(\tau - \tau_i)^2(4\tau - \tau_i) \quad (12)$$

Avec :

$$\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$$

On définit  $b_n$  comme la dérivée à droite de la fonction forward au dernier point observé :

$$b_n = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 \quad (13)$$

L'avantage de ces méthodes tient à leur grande flexibilité qui leur permet de reconstruire toutes les formes de courbe rencontrées sur le marché.

Note : On utilise la notation introduite dans l'ouvrage de PRESS et al. [2007] et concernant les matrices par bandes (bandwidth matrix) .

Il existe plusieurs méthodes d'interpolation par splines cubiques.

1. La fonction à splines cubiques naturels comporte les deux conditions supplémentaires ci-dessous :
  - La fonction est deux fois différentiable en tout point :  $c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n-2$ .
  - La dérivée seconde vaut 0 au niveau de chaque extrémité.
2. La fonction par splines cubiques de Bessel comporte les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 - \quad b_1 &= \frac{1}{\tau_3 - \tau_1} \left[ \frac{(\tau_3 + \tau_2 - 2\tau_1)(r_2 - r_1)}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{(\tau_2 - \tau_1)(r_3 - r_2)}{\tau_2 - \tau_1} \right] \\
 - \quad b_i &= \frac{1}{\tau_{i+1} - \tau_{i-1}} \left[ \frac{(\tau_{i+1} - \tau_i)(r_i - r_{i-1})}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{(\tau_i - \tau_{i-1})(r_{i+1} - r_i)}{\tau_{i+1} - \tau_i} \right], \text{ avec } i \in 1, n \\
 - \quad b_n &= \frac{1}{\tau_n - \tau_{n-2}} \left[ \frac{(\tau_n + \tau_{n-1})(r_{n-1} - r_{n-2})}{\tau_{n-1} - \tau_{n-2}} - \frac{(2\tau_n - \tau_{n-1} - \tau_{n-2})(r_n - r_{n-1})}{\tau_n - \tau_{n-1}} \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

3. La fonction d'interpolation par splines cubiques financiers est définie par le système ci-dessous. Ici, la matrice est écrite sous la forme 2-1-1.

Le système est une matrice par bandes (*bandwidth matrix*) avec des largeurs de 2 et 1 et s'écrit sous la forme  $[A \| x \| b]$ , où  $Ax = b$  et  $A$  est une matrice  $3(n-1) \times 4$  écrite sous forme 2-1-1 :

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 \times & \times & 0 & 1 & b_1 & 0 & & \\
 \times & h_1 & h_1^2 & h_1^3 & c_1 & a_2 - a_1 & & \\
 & 2h_1 & 3h_1^2 & -1 & d_1 & 0 & & \\
 & 3h_1 & 0 & -1 & b_2 & 0 & & \\
 & h_2 & h_2^2 & h_2^3 & c_2 & a_3 - a_2 & & \\
 1 & 2h_2 & 3h_2^2 & -1 & d_2 & 0 & & \\
 1 & 3h_2 & 0 & -1 & b_3 & 0 & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 1 & 3h_{n-2} & 0 & -1 & b_{n-1} & 0 & & \\
 0 & h_{n-1} & 3h_{n-1}^2 & h_{n-1}^3 & c_{n-1} & a_n - a_{n-1} & & \\
 1 & 2h_{n-1} & 3h_{n-1}^2 & \times & d_{n-1} & 0 & & 
 \end{array} \tag{15}$$

4. Les splines cubiques peuvent également porter sur la fonction  $r(\tau)\tau$ .
5. Il est possible également de définir des splines quadratiques naturels.
6. En outre, il est possible de définir une méthode par splines cubique qui préserve la monotonie locale (géométrie des points de données).  
 On définit d'abord :  $b_1 = b_n = 0$ .  
 Si la courbe n'est pas localement monotone, on définit :  $b_i = 0$ .  
 Sinon, on définit :

$$b_i = \frac{3m_{i-1}m_i}{\max(m_{i-1}, m_i) + \min(m_{i-1}, m_i)}, \text{ pour } 1 < i < n \tag{16}$$

Ensuite, on introduit l'ajustement suivant pour s'assurer qu'aucun extremum factice n'est introduit dans cette procédure :

$$b_i = \begin{cases} \min(\max(0, b_i), 3 \min(m_{i-1}, m_i)) & \text{si la courbe est localement croissante en } i \\ \max(\min(0, b_i), 3 \max(m_{i-1}, m_i)) & \text{si la courbe est localement décroissante en } i \end{cases} \quad (17)$$

### 4.2.3. Méthode par splines quadratiques

L'objectif est de rechercher les coefficients  $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ , pour  $1 \leq i \leq n-1$ , de la fonction des taux forward instantanés  $f$  :

$$f(\tau) = a_i + b_i\tau + c_i\tau^2 + d_i\tau^3 + e_i\tau^4, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1} \quad (18)$$

Il s'ensuit :

$$\begin{cases} f'(\tau) = b_i + 2c_i\tau + 3d_i\tau^2 + 4e_i\tau^3 \\ f''(\tau) = 2c_i + 6d_i\tau + 12e_i\tau^2 \\ f'''(\tau) = 6d_i + 24e_i\tau \end{cases} \quad (19)$$

La contrainte de continuité conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} f_i & = & a_i + b_i\tau_i + c_i\tau_i^2 + d_i\tau_i^3 + e_i\tau_i^4 & 1 \leq i \leq n-1 \\ f_{i+1} & = & a_i + b_i\tau_{i+1} + c_i\tau_{i+1}^2 + d_i\tau_{i+1}^3 + e_i\tau_{i+1}^4 & 1 \leq i \leq n-1 \\ b_i + 2c_i\tau_{i+1} + 3d_i\tau_{i+1}^2 + 4e_i\tau_{i+1}^3 & = & b_i + 2c_{i+1}\tau_{i+1} + 3d_{i+1}\tau_{i+1}^2 + 4e_{i+1}\tau_{i+1}^3 & 1 \leq i \leq n-2 \\ 2c_i + 6d_i\tau_{i+1} + 12e_i\tau_{i+1}^2 & = & 2c_{i+1} + 6d_{i+1}\tau_{i+1} + 12e_{i+1}\tau_{i+1}^2 & 1 \leq i \leq n-2 \\ 6d_i + 24e_i\tau_{i+1} & = & 6d_{i+1} + 24e_{i+1}\tau_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{cases} \quad (20)$$

Les auteurs définissent trois conditions supplémentaires, portant ainsi le nombre d'équations à  $5(n-1)$  pour le même nombre d'inconnues :

$$\begin{cases} f''(\tau_1) = 0 \\ f'(\tau_n) = 0 \\ f''(\tau_n) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Le système est une matrice par bandes (bandwidth matrix) avec des largeurs de 2 et 6 et s'écrit sous la forme  $[A||x||b]$ , où  $Ax = b$  et  $A$  est une matrice  $5(n-1) \times 9$  écrite sous forme 2-1-6 :

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc}
\times & \times & 0 & 0 & 2 & 6\tau_1 & 12\tau_1^2 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\
\times & 1 & \tau_i & \tau_i^2 & \tau_i^3 & \tau_i^4 & 0 & 0 & 0 & b_i & f_i \\
1 & \tau_{i+1} & \tau_{i+1}^2 & \tau_{i+1}^3 & \tau_{i+1}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_i & f_{i+1} \\
-1 & -2\tau_{i+1} & -3\tau_{i+1}^2 & -4\tau_{i+1}^3 & 0 & 1 & 2\tau_{i+1} & 3\tau_{i+1}^2 & 4\tau_{i+1}^3 & d_i & 0 \\
-2 & -6\tau_{i+1} & -12\tau_{i+1}^2 & 0 & 0 & 2 & 6\tau_{i+1} & 12\tau_{i+1}^2 & 0 & e_i & 0 \\
-6 & -24\tau_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 6 & 24\tau_{i+1} & 0 & 0 & a_{i+1} & 0 \\
\vdots & \vdots \\
1 & 2\tau_n & 3\tau_n^2 & 4\tau_n^3 & \times & \times & \times & \times & \times & d_{n-1} & 0 \\
2 & 6\tau_n & 12\tau_n^2 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & e_{n-1} & 0
\end{array} \quad (22)$$

L'interpolation par spline courbe quadratique cherche les coefficients  $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i)$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  de la fonction de taux :

$$r(\tau) = \frac{a_i}{\tau} + b_i + c_i\tau + d_i\tau^2 + e_i\tau^3 + g_i\tau^4, \text{ avec } \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$$

$$\begin{cases} f''(\tau_1) = 0 \\ f'(\tau_n) = 0 \\ f''(\tau_n) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
f(\tau) &= b_i + 2c_i\tau + 3d_i\tau^2 + 4e_i\tau^3 + 5g_i\tau^4 & \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1} \\
f'(\tau) &= 2c_i + 6d_i\tau + 12e_i\tau^2 + 20g_i\tau^3 & \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1} \\
f''(\tau) &= 6d_i + 24e_i\tau + 60g_i\tau^2 & \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1} \\
f'''(\tau) &= 24e_i + 120g_i\tau & \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}
\end{aligned} \quad (24)$$

La contrainte de continuité de toutes les fonctions ci-dessus conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
r_i &= \frac{a_i}{\tau_i} + b_i + c_i\tau_i + d_i\tau_i^2 + e_i\tau_i^3 + g_i\tau_i^4 & 1 \leq i \leq n-1 \\
r_{i+1} &= \frac{a_i}{\tau_{i+1}} + b_i + c_i\tau_{i+1} + d_i\tau_{i+1}^2 + e_i\tau_{i+1}^3 + g_i\tau_{i+1}^4 & 1 \leq i \leq n-1 \\
b_i + 2c_i\tau_{i+1} + 3d_i\tau_{i+1}^2 + 4e_i\tau_{i+1}^3 + 5g_i\tau_{i+1}^4 &= b_i + 2c_i\tau_{i+1} + 3d_i\tau_{i+1}^2 + 4e_i\tau_{i+1}^3 + 5g_i\tau_{i+1}^4 & 1 \leq i \leq n-2 \\
2c_i + 6d_i\tau_{i+1} + 12e_i\tau_{i+1}^2 + 20g_i\tau_{i+1}^3 &= 2c_{i+1} + 6d_{i+1}\tau_{i+1} + 12e_{i+1}\tau_{i+1}^2 + 20g_{i+1}\tau_{i+1}^3 & 1 \leq i \leq n-2 \\
6d_i + 24e_i\tau_{i+1} + 60g_i\tau_{i+1}^2 &= 6d_{i+1} + 24e_{i+1}\tau_{i+1} + 60g_{i+1}\tau_{i+1}^2 & 1 \leq i \leq n-2 \\
24e_i + 120g_i\tau_{i+1} &= 24e_{i+1} + 120g_{i+1}\tau_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2
\end{aligned} \quad (25)$$

Les auteurs ajoutent quatre des six contraintes ci-dessous, ce qui ramène à un système de  $6n-6$  équations et du même nombre d'inconnues :

$$\begin{cases} f''(\tau_1) = 0 \\ f'(\tau_n) = 0 \\ f''(\tau_n) = 0 \\ f'''(\tau_n) = 0 \\ f'(\tau_1) = 0 \\ r(\tau_1) = f(\tau_1) \text{ si } \tau_1 \downarrow 0 \end{cases} \quad (26)$$

Le système est une matrice par bandes (bandwidth matrix) avec des largeurs de 2 et 8 et s'écrit sous la forme  $[A||x||b]$ , où  $Ax = b$  et  $A$  est une matrice  $6(n-1) \times 11$  écrite sous forme 2-1-8 :

$$\begin{array}{cccccccccccc|cc|cc} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 6 & 24\tau_1 & 60\tau_1^2 & 0 & 0 & 0 & a_i & 0 \\ \times & \tau_i^{-1} & 1 & \tau_i & \tau_i^2 & \tau_i^3 & \tau_i^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_i & r_i \\ \tau_{i+1}^{-1} & 1 & \tau_{i+1} & \tau_{i+1}^2 & \tau_{i+1}^3 & \tau_{i+1}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_i & r_{i+1} \\ -1 & -2\tau_{i+1} & -3\tau_{i+1}^2 & -4\tau_{i+1}^3 & -5\tau_{i+1}^4 & 0 & 1 & 2\tau_{i+1} & 3\tau_{i+1}^2 & 4\tau_{i+1}^3 & 5\tau_{i+1}^4 & d_i & 0 \\ -2 & -6\tau_{i+1} & -12\tau_{i+1}^2 & -20\tau_{i+1}^3 & 0 & 0 & 2 & 6\tau_{i+1} & 12\tau_{i+1}^2 & 20\tau_{i+1}^3 & 0 & e_i & 0 \\ -6 & -24\tau_{i+1} & -60\tau_{i+1}^2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 24\tau_{i+1} & 60\tau_{i+1}^2 & 0 & 0 & g_i & 0 \\ -24 & -120\tau_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120\tau_{i+1} & 0 & 0 & 0 & a_{i+1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 6\tau_n & 12\tau_n^2 & 20\tau_n^3 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 6 & 24\tau_n & 60\tau_n^2 & \times & e_{n-1} & 0 \\ 0 & 24 & 120\tau_n & \times & g_{n-1} & 0 \end{array} \quad (27)$$

L'interpolation dans une région doit accorder plus d'importances aux données voisines.

### 4.3. La méthode de Nelson, Siegel et Svensson

L'intérêt majeur de la méthode de Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]) et de son extension par Svensson (SVENSSON [1994]) est l'interprétation financière explicite qu'il peut être fait des coefficients. Il est à signaler que cette méthode a été adoptée par la banque de France.

#### 4.3.1. Description du modèle

Nelson et Siegel ont exposé leur méthode paramétrique dans un article paru en 1987 (NELSON et SIEGEL [1987]). Ils définissent le taux à terme instantané comme suit :

$$f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) + \beta_3 \frac{\tau}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) + \beta_4 \frac{\tau}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_2}\right) \quad (28)$$

Svensson a, quant à lui, étendu la méthode de Nelson et Siegel en 1994 en rajoutant un paramètre supplémentaire  $\beta_4$  (on verra plus tard qu'il s'agit d'un second facteur de courbure) :

$$R(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_1}} + \beta_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) \right] + \beta_4 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_2}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_2}\right) \right] \quad (29)$$

L'utilisation des taux à terme instantanés présente l'avantage de conduire à la condition nécessaire et suffisante d'absence d'opportunité d'arbitrage, qui est la positivité de tous les taux à terme.

Les coefficients ne sont pas supposés constants au cours du temps. Leur impact respectif sur la forme de la courbe peut être décrit comme suit :

- Le paramètre  $\beta_1$ , qui doit être strictement positif, appelé facteur de niveau, est la valeur asymptotique du taux forward instantané  $f(\tau)$ . La courbe tendra vers cette asymptote lorsque la maturité  $\tau$  tendra vers l'infini. Ce paramètre est indépendant de la date d'échéance. BARRIE & HIBBERT [2008] l'assimilent à l'UFR.
- Le paramètre  $\beta_2$  est appelé facteur de pente. On peut remarquer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1 - \exp\left(-\tau/\lambda_1\right)}{\tau/\lambda_1} = 1 \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp\left(-\tau/\lambda_1\right)}{\tau/\lambda_1} = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent, l'influence de  $\beta_2$  s'exerce essentiellement sur la portion à court terme de la courbe. Ce paramètre détermine la valeur de départ (ou court-terme) de la courbe en termes de déviation par rapport à l'asymptote. Il définit de surcroît la vitesse de base avec laquelle la courbe tend vers le régime à long-terme. La courbe aura une pente négative si ce paramètre est positif et vice versa. Il est à noter que la somme de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  est l'intersection verticale. Le terme  $-\beta_2$  peut être considéré comme le *spread*.

- Le paramètre d'échelle  $\lambda_1$ , qui doit être strictement positif car homogène à un temps, spécifie la position de la première courbure (ou forme en U) de la courbe. Il contrôle donc la vitesse de convergence de la courbe vers l'UFR.
- Le paramètre  $\beta_3$  est appelé premier facteur de courbure (ou convexité). On peut remarquer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\tau/\lambda_1\right)}{\tau/\lambda_1} - \exp\left(-\tau/\lambda_1\right) \right] = 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\tau/\lambda_1\right)}{\tau/\lambda_1} - \exp\left(-\tau/\lambda_1\right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

Le paramètre  $\beta_3$  vaut 0 pour  $\tau = 0$ , croît puis décroît de nouveau vers 0 au fur et à mesure que  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Il détermine l'amplitude et la direction de la courbure. S'il est positif, une bosse apparaîtra à  $\lambda_1$  ; par contre, s'il est négatif, c'est un creux qui apparaîtra à  $\lambda_1$ . Il influence essentiellement le segment moyen terme.

- Le second paramètre d'échelle  $\lambda_2$ , qui doit être strictement positif, spécifie la position de la seconde courbure (ou forme en U) de la courbe. Tout comme  $\lambda_1$ , il contrôle également la vitesse de convergence de la courbe vers l'UFR.
- Le paramètre  $\beta_4$ , de manière analogue à  $\beta_3$ , détermine l'amplitude et la direction de la seconde courbure. S'il est positif, une bosse se produira à  $\lambda_2$ , sinon, ce sera un creux. Tout comme  $\beta_3$ , il influence essentiellement le segment moyen terme.

Par ailleurs,  $r = \beta_1 + \beta_2 = \beta_1 - (-\beta_2)$  est le taux court instantané.

Les taux à longue échéance sont plus persistents et moins volatiles que les taux à courte échéance. Le segment long terme dépend seulement de  $\beta_1$ , tandis que le segment court terme de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

En résumé, ce modèle possède les contraintes implicites suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1 > 0 \\ \beta_1 + \beta_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases} \quad (30)$$

La fonction d'actualisation se déduit du taux zéro-coupon ainsi calculé, en notant ce dernier  $R(t, \tau)$  pour la maturité  $\tau$  à la date  $t$  :

$$P(t) = e^{-R(t, \tau) \cdot \tau} \quad (31)$$

Les courbes ci-dessous illustrent l'influence de chacun de ces paramètres sur la forme de la courbe. Dans cet exemple, les valeurs prises sont :

- $\beta_1 = 3$
- $\beta_2 = -2$
- $\beta_3 = 6$
- $\beta_4 = -9$
- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 1$

### Composante $\beta_1$

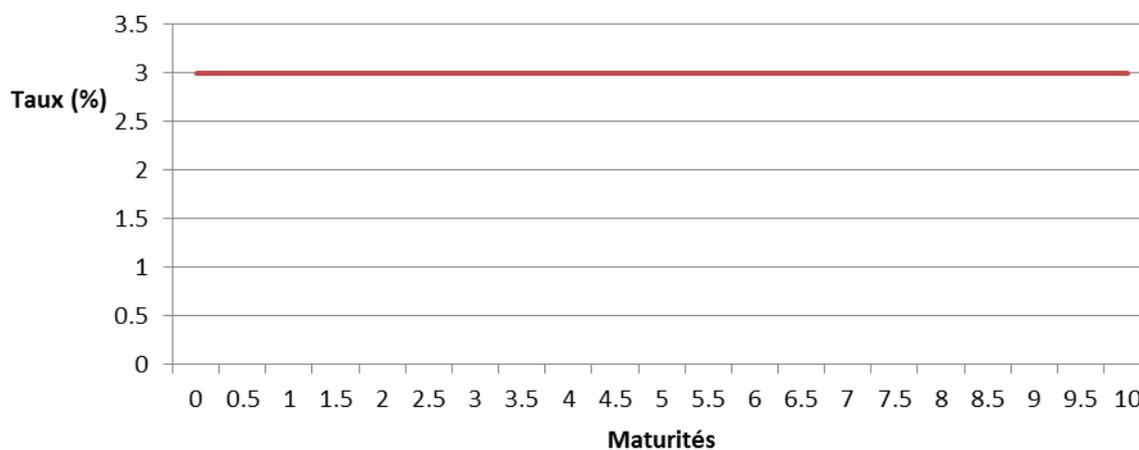


Figure 6 : Influence du facteur de niveau.

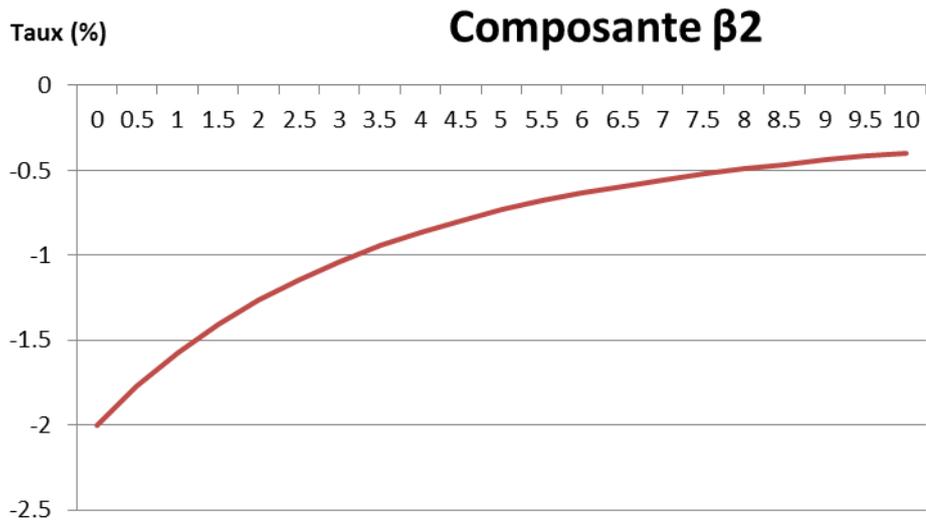


Figure 7 : Influence du facteur de pente  $\beta_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\tau/\lambda_1}$ .

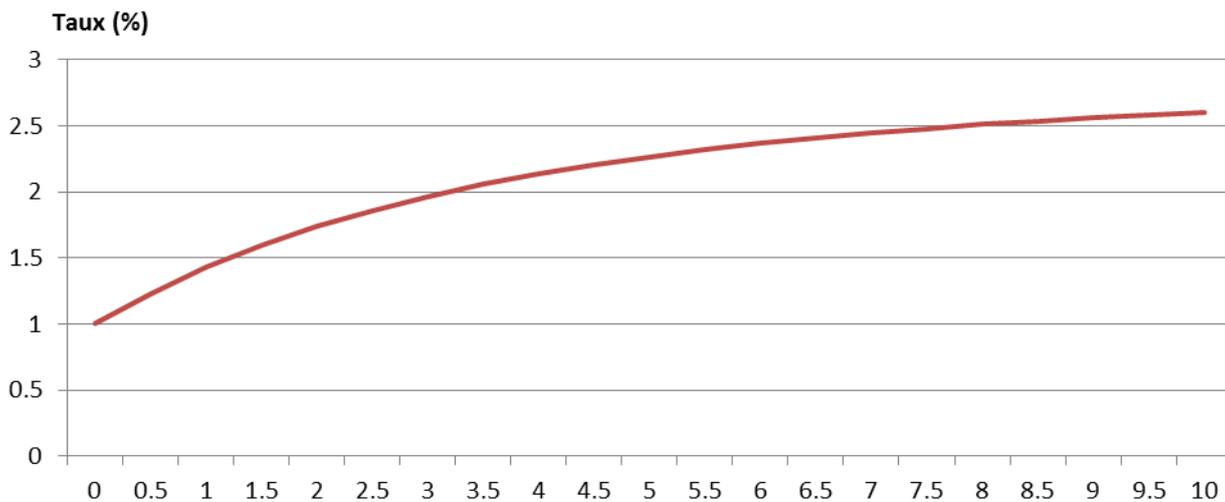


Figure 8 : courbe  $R(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\tau/\lambda_1}$ .

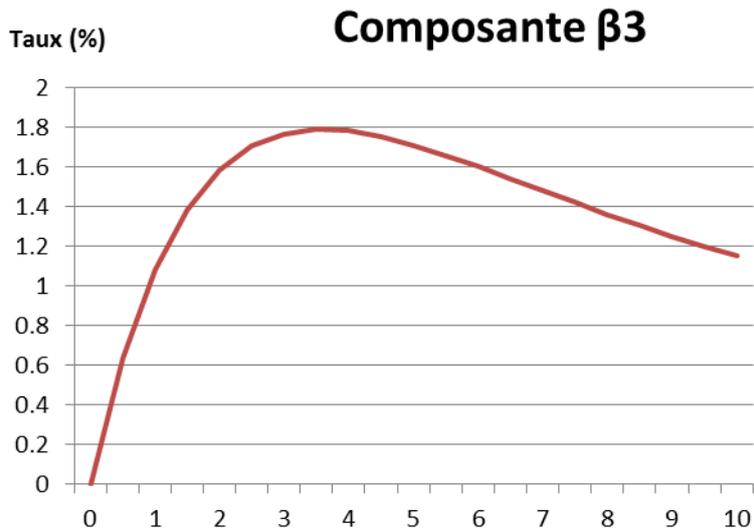


Figure 9 : Influence du premier facteur de courbure  $\beta_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\tau/\lambda_1} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) \right]$ .

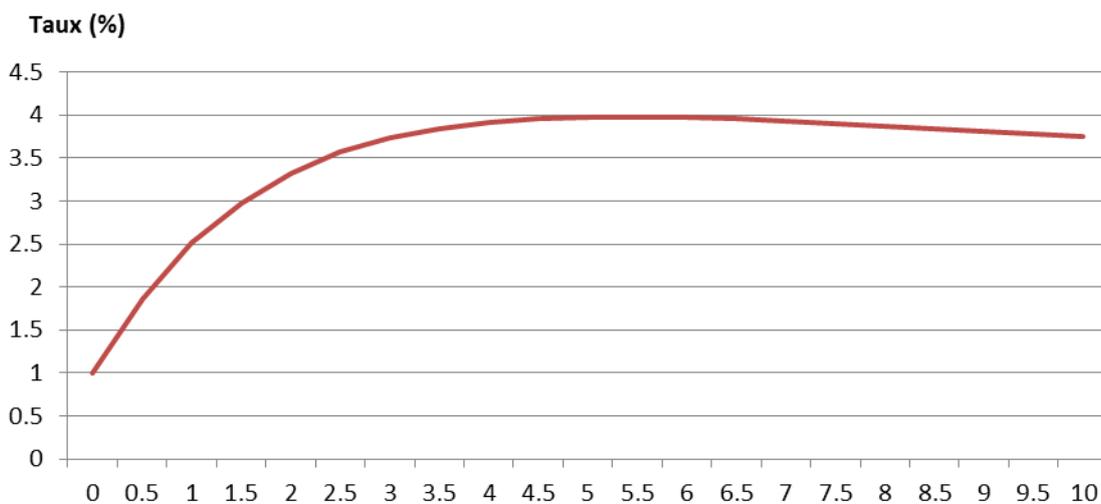


Figure 10 : courbe  $R(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\tau/\lambda_1} + \beta_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\tau/\lambda_1} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) \right]$ .

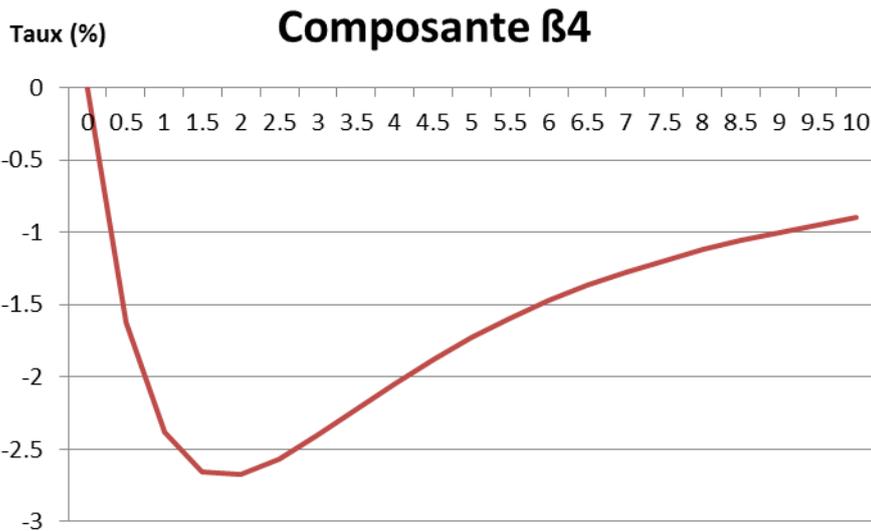


Figure 11 : Influence du second facteur de courbure  $\beta_4 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\tau/\lambda_2\right)}{\tau/\lambda_2} - \exp\left(-\tau/\lambda_2\right) \right]$ .

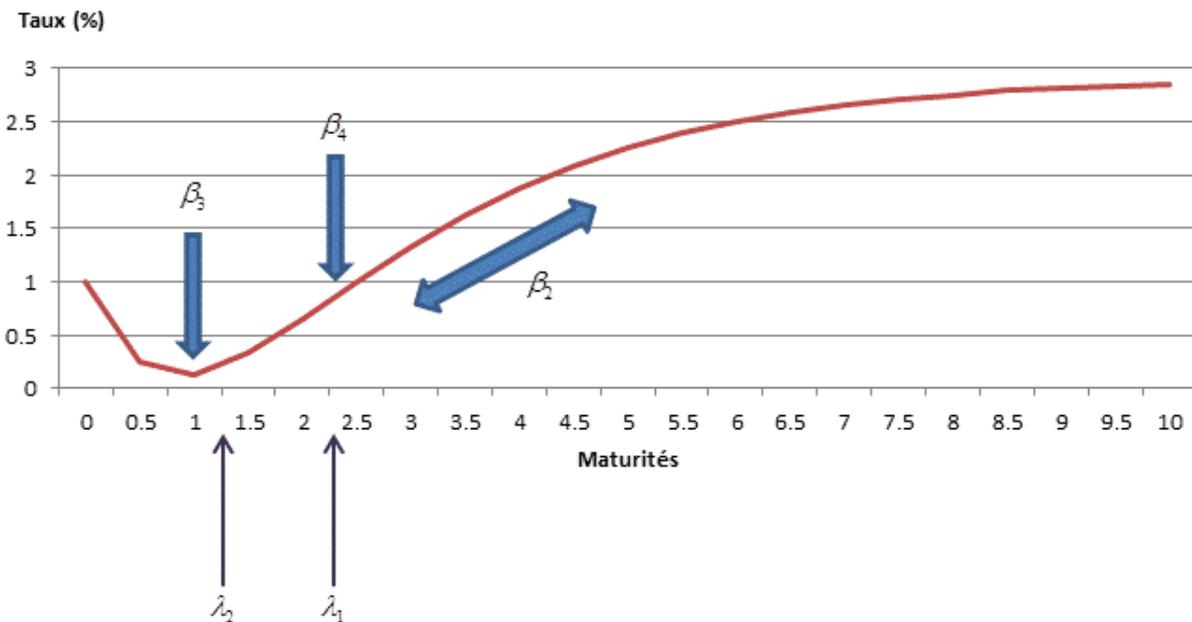


Figure 12 : Courbe résultante  $R(\tau)$ .

Il est à noter que, sur un marché doté d'un large panel de données, la courbe estimée ne sera pas exactement ajustée aux données correspondantes. Par ailleurs, la méthode de Nelson et Siegel et celle de Svensson peuvent être utilisées comme des méthodes macroéconomiques si le paramètre de niveau de la courbe est pris comme UFR. Les autres paramètres seront estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Un avantage de ce type de modèles est que ceux-ci se prêtent beaucoup mieux à l'introduction d'une dynamique temporelle pour déformer la courbe : il suffit de mettre des processus à la place des coefficients, comme par exemple dans BONNIN et al. [2011].

### 4.3.2. Calibrage des paramètres à l'aide d'un algorithme d'évolution différentielle

La principale difficulté de la méthode de Nelson et Siegel et celle de Svensson est l'estimation des paramètres. La fonctionnelle mise en œuvre, bien que linéaire par rapport aux facteurs de pente et de courbure, ne l'est pas par rapport aux facteurs d'échelle. Le principe consiste à minimiser la fonction de perte :

$$f = \sum_{i \in I} (R_t(\tau_i) - R_t^M(\tau_i))^2 \quad (32)$$

Avec :

- $R_t(\tau_i)$  le taux calculé par le modèle pour la maturité  $\tau_i$  à la date  $t$  ;
- $R_t^M(\tau_i)$  le taux observé sur le marché pour la maturité  $\tau_i$  à la date  $t$  ;
- $I$  l'ensemble des taux disponibles sur le marché à la date  $t$ .

Cette difficulté procède de la coexistence de minima locaux à côté du minimum global. Pour atteindre ce dernier, plusieurs valeurs de départ seront nécessaires et une certitude absolue concernant le résultat requerrait de considérer toutes les combinaisons possibles, ce qui est, bien entendu, inenvisageable. Il existe différentes approches pour surmonter cet écueil. La section 4 de l'annexe détaille les algorithmes d'optimisation les plus pertinents.

BONNIN et al. [2011] procèdent à l'aide de régressions linéaires. BOLDER et STRELISKI [1999], quant à eux, font reposer les mécanismes de l'estimation sur deux aspects :

1. La fonction objectif, qui peut être :
  - a. Le log-vraisemblance,
  - b. La somme des erreurs au carré.
2. L'algorithme d'optimisation qui peut être basé :
  - a. Sur une recherche globale,
  - b. Sur une recherche partielle.

Pour de plus amples explications, on consultera la section 4 de l'annexe. Nous n'utiliserons pas ces méthodes, car elles sont complexes à mettre en œuvre et il en existe de plus simple.

Dans ce mémoire, nous choisissons de recourir à un algorithme d'évolution différentielle (section 5.3 de l'annexe). Pour les raisons de ce choix, le lecteur se reportera à la section 5.4 de l'annexe.

En outre, nous implémenterons uniquement la version étendue de la méthode de Nelson et Siegel, c'est-à-dire celle de Nelson, Siegel, Svensson et Svensson.

Comme évoqué à la section 2.4, l'EIOPA préconise d'intégrer l'UFR dans le processus de construction de la courbe des taux sans risque. Dans le cas de la méthode de Nelson et Siegel et de celle de Svensson, il s'agirait alors de contraindre le paramètre  $\beta_1$  à une valeur constante, celui-ci étant assimilé à l'UFR. Or, il n'est pas coutume d'imposer une valeur constante à l'un des paramètres lors de la calibration de la méthode de Nelson et Siegel ou de sa version étendue. C'est pourquoi, par souci de comparaison, nous déclinons l'approche en deux sous-approches (dans tous les cas, le paramètre  $\beta_1$  est assimilé à l'UFR) :

1. L'une considérant l'UFR comme endogène, celui-ci étant alors calculé par l'algorithme à partir des données de calibration.
2. L'autre considérant l'UFR comme exogène, celui-ci voyant sa valeur imposée par l'entremise du paramètre  $\beta_1$ .

Une fois cela fait, nous retiendrons la sous-approche ayant donné les meilleurs résultats en termes de réalisme de la courbe obtenue et de qualité d'ajustement de cette courbe par rapport à celle observée sur le marché.

### 4.3.3. Critique du modèle

GILLI et al. [2010] déroulent 500 fois un algorithme de recherche par gradient à partir de différentes valeurs des paramètres  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1$  et  $\lambda_2$ , tout en imposant à ces derniers les contraintes de bornes suivantes :

$$\begin{cases} 0 < \beta_1 < 15 \\ -15 < \beta_2 < 30 \\ -30 < \beta_3 < 30 \\ -30 < \beta_4 < 30 \\ 0 < \lambda_1 < 30 \\ 0 < \lambda_2 < 30 \end{cases}$$

Ils constatent une forte instabilité des paramètres ainsi estimés au cours du temps, bien que la courbe obtenue s'ajuste avec une précision tout à fait correcte à celle observée sur le marché. Il existe en réalité deux raisons à cela :

1. La fonction objectif n'est pas convexe et, comme dit précédemment, elle comporte plusieurs minima locaux. Il s'agit du problème d'optimisation.
2. Les spécifications du problème engendrent une colinéarité.

Les auteurs reprennent les suggestions de DIEBOLD et LI [2006] : prendre le taux de maturité 10 ans  $R_t^M(10)$  comme facteur de niveau, la différence entre le taux de maturité 10 ans et le taux de maturité 3 mois  $R_t^M(10) - R_t^M(1/4)$  comme facteur de pente et  $2R_t^M(2) - R_t^M(1/4) - R_t^M(10)$  comme facteur de courbure. Ils calculent pour chaque coupe transversale ces facteurs et constatent qu'ils sont faiblement corrélés.

Par ailleurs, pour les maturités  $\tau_1, \dots, \tau_m$  et en fixant  $\lambda_1$ , le problème revient à résoudre l'un des systèmes d'équations linéaires ci-dessous selon qu'il s'agit du modèle de Nelson et Siegel ou du modèle de Svensson. Comme ces systèmes sont suridentifiés, les auteurs cherchent à minimiser la norme des résidus.

Dans le cas du modèle de Nelson et Siegel, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - \exp(-\tau_1/\lambda_1)}{\tau_1/\lambda_1} & \frac{1 - \exp(-\tau_1/\lambda_1)}{\tau_1/\lambda_1} - \exp(-\tau_1/\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - \exp(-\tau_i/\lambda_1)}{\tau_i/\lambda_1} & \frac{1 - \exp(-\tau_i/\lambda_1)}{\tau_i/\lambda_1} - \exp(-\tau_i/\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - \exp(-\tau_m/\lambda_1)}{\tau_m/\lambda_1} & \frac{1 - \exp(-\tau_m/\lambda_1)}{\tau_m/\lambda_1} - \exp(-\tau_m/\lambda_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_t^M(\tau_1) \\ \vdots \\ R_t^M(\tau_i) \\ \vdots \\ R_t^M(\tau_m) \end{pmatrix} \quad (33)$$

Dans le cas du modèle de Nelson, Siegel et Svensson, on a :

$$\begin{pmatrix}
1 & \frac{1-\exp\left(-\tau_1/\lambda_1\right)}{\tau_1/\lambda_1} & \frac{1-\exp\left(-\tau_1/\lambda_1\right)}{\tau_1/\lambda_1}-\exp\left(-\tau_1/\lambda_1\right) & \frac{1-\exp\left(-\tau_1/\lambda_2\right)}{\tau_1/\lambda_2}-\exp\left(-\tau_1/\lambda_2\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & \frac{1-\exp\left(-\tau_i/\lambda_1\right)}{\tau_i/\lambda_1} & \frac{1-\exp\left(-\tau_i/\lambda_1\right)}{\tau_i/\lambda_1}-\exp\left(-\tau_i/\lambda_1\right) & \frac{1-\exp\left(-\tau_i/\lambda_2\right)}{\tau_i/\lambda_2}-\exp\left(-\tau_i/\lambda_2\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & \frac{1-\exp\left(-\tau_m/\lambda_1\right)}{\tau_m/\lambda_1} & \frac{1-\exp\left(-\tau_m/\lambda_1\right)}{\tau_m/\lambda_1}-\exp\left(-\tau_m/\lambda_1\right) & \frac{1-\exp\left(-\tau_m/\lambda_2\right)}{\tau_m/\lambda_2}-\exp\left(-\tau_m/\lambda_2\right)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\beta_1 \\
\beta_2 \\
\beta_3 \\
\beta_4
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
R_i^M(\tau_1) \\
\vdots \\
R_i^M(\tau_i) \\
\vdots \\
R_i^M(\tau_m)
\end{pmatrix} \quad (34)$$

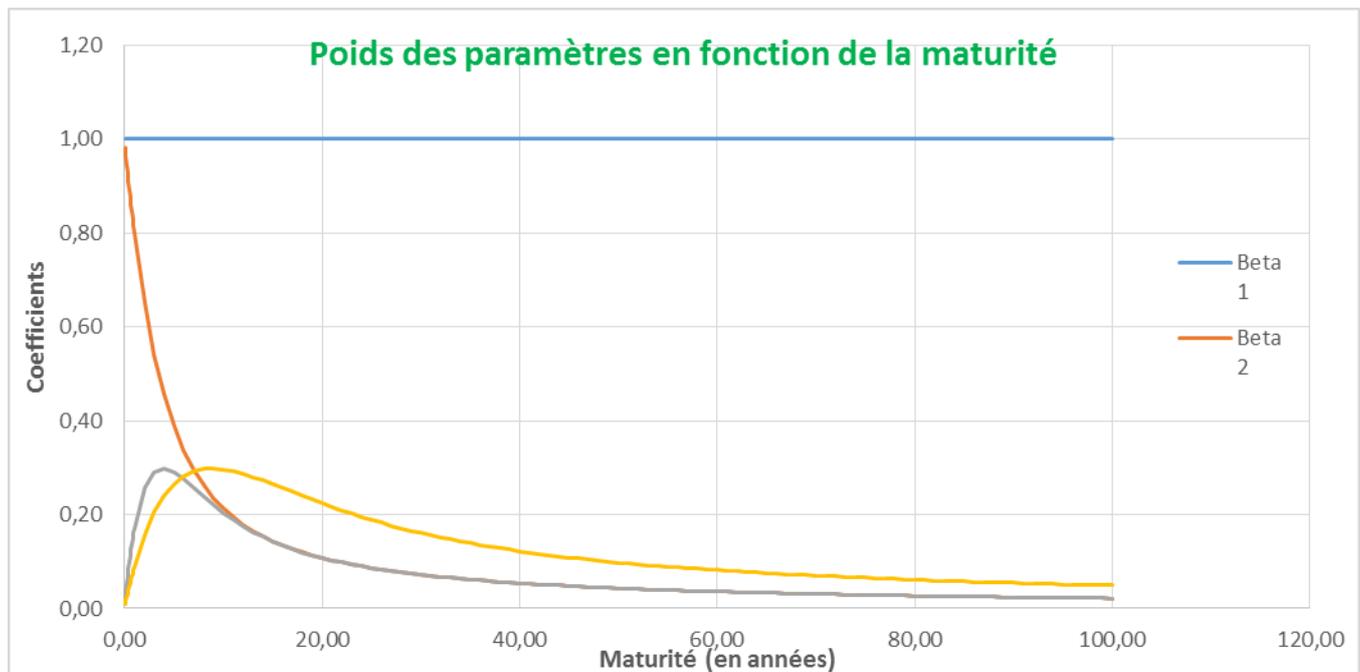
GILLI et al. [2010] évoquent un problème de sur-ajustement ou sur-apprentissage. Selon eux, cela est dû au fait que le problème est mal conditionné : de petites variations dans les données de taux entraînent de fortes perturbations sur les paramètres estimés.

Pour nombre de valeurs des paramètres d'échelle, les paramètres de pente et de courbure sont corrélés, ce qui complique d'autant l'attribution d'une forme particulière de la courbe à un facteur spécifique. De telles corrélations ne sont pas cohérentes, car les paramètres jouent tous un rôle économique particulier dans la forme de la courbe des taux. Ce problème est inhérent au modèle de Nelson, Siegel et Svensson : les coefficients respectifs des paramètres de pente et de courbure représentent les poids de ces derniers et ils ne dépendent que des paramètres d'échelle. Selon les valeurs de ces derniers, ce modèle peut poser des problèmes de colinéarité et conséquemment d'identification des paramètres de pente et de courbure.

En effet, examinons le comportement des coefficients lorsque les paramètres d'échelle tendent vers zéro ou l'infini :

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \frac{1-\exp\left(-\tau/\lambda_i\right)}{\tau/\lambda_i} &= 0 & \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \frac{1-\exp\left(-\tau/\lambda_i\right)}{\tau/\lambda_i}-\exp\left(-\tau/\lambda_i\right) &= 0 \\
\lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \frac{1-\exp\left(-\tau/\lambda_i\right)}{\tau/\lambda_i} &= 1 & \lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \frac{1-\exp\left(-\tau/\lambda_i\right)}{\tau/\lambda_i}-\exp\left(-\tau/\lambda_i\right) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{avec } i \in \{1, 2\} \quad (35)$$

Lorsque l'un des paramètres d'échelle tend vers zéro, la pente et les deux courbures de la courbe ne sont presque plus identifiables puisque les coefficients sont presque nuls. Quand l'un des paramètres d'échelle tend vers l'infini, les coefficients respectifs des deux facteurs de courbure deviennent négligeables, tandis que le coefficient de la pente tend vers 1. Par conséquent, quand les deux paramètres d'échelle prennent des valeurs trop faibles ou trop fortes, des problèmes d'identifications apparaissent et les autres paramètres prennent des valeurs extrêmes. La Figure 13 illustre ce phénomène.



**Figure 13 : Poids des paramètres en fonction de la maturité.**

Pour des valeurs faibles de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$ , le modèle devient colinéaire, le problème est mal conditionné et les paramètres  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  et  $\beta_4$  deviennent difficilement identifiables.

Cependant, pour nombre de valeurs de  $\lambda_1$ , les paramètres  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  et  $\beta_4$  sont fortement corrélés, ce qui peut compliquer l'attribution d'une forme particulière de la courbe à un facteur spécifique. Le cas le plus évident est l'égalité entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :  $\beta_3$  et  $\beta_4$  ont alors le même coefficient de saturation et les régresseurs sont parfaitement colinéaires.

Considérons un autre exemple. Si le poids du paramètre  $\beta_2$  est très faible, celui-ci, lors du processus de calibrage, sera susceptible de prendre une valeur très élevée de manière à favoriser l'ajustement de la courbe aux taux observés, ce qui induirait alors une très forte pente, impliquant ainsi une transition brutale entre les segments à court terme (marché monétaire) et à long terme (marché obligataire) de la courbe. Les bêtas ayant un sens économique, ils ne doivent donc pas prendre de valeurs aberrantes.

Bien qu'une corrélation élevée entre les paramètres ne nuise pas nécessairement à un processus de prédiction, cela peut s'avérer problématique voire dirimant, comme le démontrent DIEBOLD et LI [2006] et GILLI et al. [2010], si l'on souhaite prédire non pas les taux de rendements mais les paramètres eux-mêmes pour ensuite prédire les taux de rendement.

Nous reproduisons deux schémas illustrant ce phénomène. Sur la Figure 14, on peut voir que la corrélation vaut 1 lorsque  $\lambda_1$  vaut 0 et décroît rapidement -1 lorsque  $\lambda_1$  croît. Les auteurs obtiennent des résultats analogues pour le modèle de Svensson. La Figure 15 montre que, pour des valeurs de  $\lambda_1$  supérieures à 5, la corrélation atteint 1 ou -1. Ces analyses montrent que les résultats des estimations seront sensibles à de petits changements au sein des données.

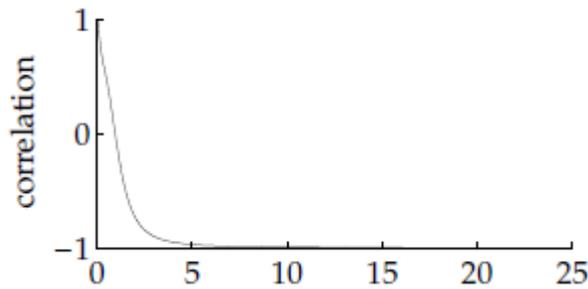


Figure 14 : Corrélations entre les coefficients de saturation de  $\beta_2$  et  $\beta_3$  pour différentes valeurs de  $\lambda_1$  dans le cadre du modèle de Nelson et Siegel.

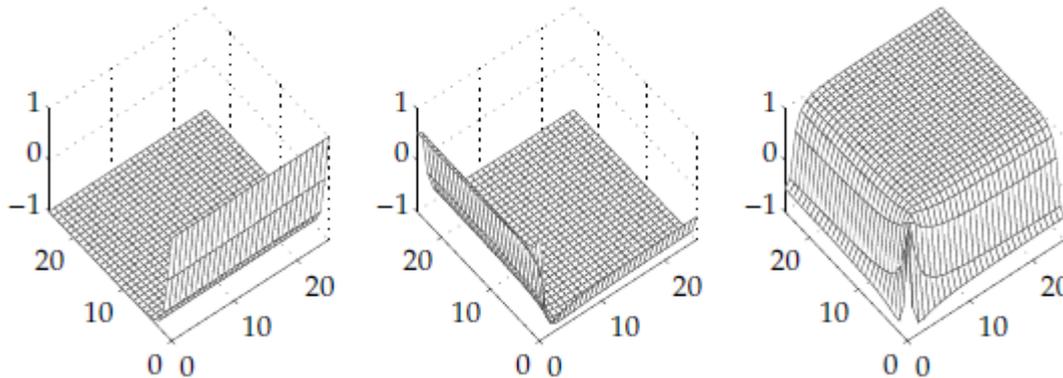


Figure 15 : Corrélations entre les coefficients de saturation respectivement de  $\beta_2$  et  $\beta_3$ , de  $\beta_2$  et  $\beta_4$ , et de  $\beta_3$  et  $\beta_4$  pour différentes valeurs de  $\lambda_1$  dans le cadre du modèle de Svensson.

Ensuite, les auteurs lancent une régression pour chaque coupe transversale des taux (372 coupes transversales au total) et obtiennent ainsi des séries temporelles des bêtas, qu'ils modélisent sous forme de processus AR(1) en prenant tour à tour deux valeurs différentes de  $\lambda_1$  : 1,4 et 10. Ils constatent que, pour la seconde valeur de  $\lambda_1$ , les séries temporelles des différents bêtas sont significativement corrélées entre elles, en sus d'être fortement volatiles.

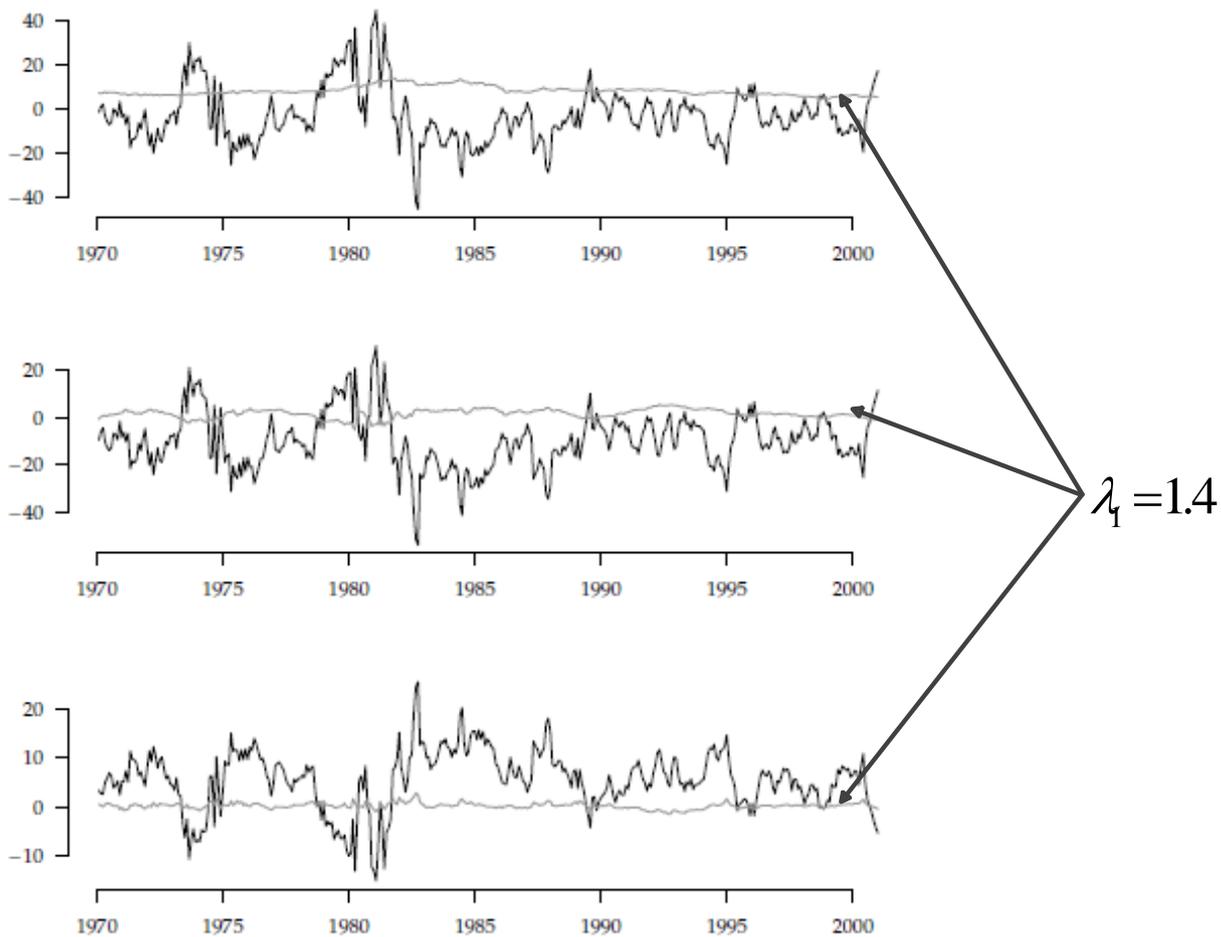


Figure 16 : Séries temporelles de  $\beta_1$ ,  $-\beta_2$  et  $0.3\beta_3$  pour une valeur de  $\lambda_1$  fixée à 10.

Pour contrecarrer cet écueil, les paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  doivent être restreints à un intervalle réduit. Les chercheurs DIEBOLD et LI [2006] ont fait le choix de fixer  $\lambda_1$  à 1,368363, ce qui impose une corrélation de 0,33 entre les composantes. La matrice de corrélations des estimateurs des paramètres issus de la méthode de Diebold-Li est ci-dessous.

$$\text{Corrélation}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & -0.23 & 0.02 \\ -0.23 & 1 & 0.32 \\ 0.02 & 0.32 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Au final, la méthode de DIEBOLD et LI [2006] permet de contourner le problème de surajustement en imposant une faible corrélation entre les paramètres du modèle. En posant des restrictions supplémentaires sur  $\lambda_1$ , les problèmes liés à la colinéarité disparaissent. Pareillement, on applique des restrictions analogues au second paramètre d'échelle  $\lambda_2$ .

#### 4.4. La méthode de Smith-Wilson

##### 4.4.1. Généralités

Cette méthode (SMITH et WILSON [2001]) participe d'une approche macroéconomique : une courbe de taux au comptant (i.e. zéro-coupon) est ajustée selon les prix observés d'instruments financiers, avec le taux forward à long terme ultime en guise de paramètre d'entrée. L'objectif est d'estimer la fonction de prix  $P(t)$  pour toutes les maturités  $t > 0$ . Elle est préconisée par CEIOPS [2010], raison pour laquelle elle fait l'objet d'une étude dans ce mémoire.

Dans sa forme la plus générale, les données en entrée peuvent consister en un large panel de différents instruments de taux. Dans un premier temps, nous limiterons notre étude aux prix des obligations zéro-coupons. Les formules dans ce cas simple sont aisées à comprendre et à implémenter. Ensuite, nous étendrons notre étude au cas général, qui prend en entrée un large panel d'instruments financiers arbitraires.

Tout instrument spécifié via :

- Son prix de marché à la date de valeur,
  - Les dates de paiement de cash jusqu'à la maturité,
  - Le montant de ces flux de cash à ces dernières dates,
- Peut être un argument d'entrée pour la méthode de Smith et Wilson.

Les équations sont posées de manière à ce que  $P$  satisfasse aux propriétés requises d'une fonction de prix, à savoir :

- $P$  est une fonction positive.
- $P$  est une fonction strictement décroissante du temps.
- $P(t=0) = 1$ .
- $P$  passe par tous les points observés.
- $P$  est lisse jusqu'à un certain degré.
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$ .

En outre, la fonction de prix  $P(t)$  est définie, pour tout  $t > 0$ , comme la somme :

- D'un terme  $e^{-UFR \cdot t}$  pour le comportement asymptotique à long terme du facteur d'actualisation.
- D'une combinaison linéaire de  $N$  fonctions noyau<sup>18</sup>  $K_i(t)$ ,  $i=1, \dots, N$  (le nombre  $N$  correspondant au nombre d'instruments en entrée), dont la formule analytique est donnée par l'équation (39). Chacune d'entre elles prend en compte les données de marché ainsi que deux autres arguments :
  - o Le taux forward ultime (UFR),
  - o La vitesse de convergence de la courbe des taux forward vers la valeur UFR, en l'occurrence  $\alpha$ .

Si  $N$  instruments sont envoyés en entrée, c'est que  $N$  prix de marché sont connus, et il est alors possible d'établir un système de  $N$  équations linéaire. Dans la majorité des cas, celui-ci peut être résolu automatiquement, c'est-à-dire sans interférence avec l'extérieur. L'injection de la solution de ce système dans la fonction de prix de Smith et Wilson permet de connaître pour toute maturité  $t$  la fonction d'actualisation, et subséquentement la courbe des taux au comptant.

#### 4.4.2. Technique dans le cas de titres zéro-coupon

Supposons que la courbe à reconstituer soit connue pour les  $N$  maturités suivantes :  $u_1, \dots, u_N$ .

Par ailleurs, selon que les calculs prennent en compte des taux continus  $\tilde{R}_t$  ou des taux capitalisés annuellement  $R_t$ , la relation entre le taux au comptant et le facteur d'escompte s'écrit :

- $\tilde{R}_t = \frac{1}{t} \cdot \ln \left( \frac{1}{P(t)} \right)$  pour des taux continus,
- $R_t = \left( \frac{1}{P(t)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$  pour des taux capitalisés annuellement.

La relation entre les deux types de taux s'écrit ainsi :  $\tilde{R}_t = \ln(1 + R_t)$ .

La fonction de prix proposée par Smith et Wilson se réduit à la simple formule ci-dessous :

$$P(t) = e^{-UFR \cdot t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(t, u_j), \quad t \geq 0 \quad (37)$$

<sup>18</sup> L'idée présidant au choix de ces fonctions noyau est exposée dans l'article de SMITH et WILSON [2001].

Les fonctions symétriques  $W(t, u_j)$  sont définies de la manière suivante :

$$\forall j \in 1, N, W(t, u_j) = e^{-UFR \cdot (t+u_j)} \cdot \left\{ \alpha \cdot \min(t, u_j) - 0.5 \cdot e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \cdot \left( e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \min(t, u_j)} \right) \right\} \quad (38)$$

On note :

- $N$ , le nombre d'obligations zéro-coupon, dont le prix est connu ;
- $m_i (i=1, \dots, N)$ , les prix de marché respectifs des titres zéro-coupons ;
- $u_i (i=1, \dots, N)$ , les maturités respectives de ces derniers ;
- $t$ , la maturité à terme de la fonction de prix ;
- $UFR$ , le taux forward ultime, composés continument ;
- $\alpha$ , la réversion moyenne, une mesure de la vitesse de convergence de la courbe vers l'UFR.
- $\zeta_i (i=1, \dots, N)$ , les paramètres à ajuster par rapport à la courbe des taux de rendement actuelle.

Les fonctions noyau  $K_i(t)$  sont définies selon la formule ci-dessous :

$$K_j(t) = W(t, u_j), \forall j \in 1, N, \forall t > 0 \quad (39)$$

Par ailleurs, on peut remarquer que ces fonctions dépendent seulement des paramètres en entrée ainsi que des données issues des titres zéro-coupon. Pour chacun de ces titres, une fonction noyau particulière est calculée à partir de sa définition. Le principe sous-jacent de la méthode de Smith et Wilson est de considérer la fonction  $P(t)$  comme une combinaison linéaire de toutes les fonctions noyau. Cela rejoint la méthode de Nelson et Siegel, qui considère la fonction du taux forward comme la somme de trois processus, un processus de niveau, un processus de pente et un processus de convexité, ainsi que celle de Svensson, qui, elle, outre ces trois processus, prend en compte un second processus de convexité.

Les paramètres inconnus requis pour calculer la fonction  $P(t)$ ,  $(\zeta_i)_{i \in 1, N}$ , sont les solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} m_1 = P(u_1) = e^{-UFR \cdot u_1} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(u_1, u_j) \\ \vdots \\ m_i = P(u_i) = e^{-UFR \cdot u_i} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(u_i, u_j) \\ \vdots \\ m_N = P(u_N) = e^{-UFR \cdot u_N} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(u_N, u_j) \end{cases} \quad (40)$$

En notations vectorielles, ces relations se reformulent de la façon suivante :

$$m = p = \mu + W\zeta \quad (41)$$

Avec :

$$\begin{cases} m = (m_1, \dots, m_N)^T \\ p = (P(u_1), \dots, P(u_j))^T \\ \mu = (e^{-UFR \cdot u_1}, \dots, e^{-UFR \cdot u_N})^T \\ \zeta = (\zeta_i, \dots, \zeta_N)^T \\ W = (W(u_i, u_j))_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, N} \end{cases}$$

Il s'ensuit :

$$\zeta = W^{-1}(p - \mu) = W^{-1}(m - \mu) \quad (42)$$

Il ne reste plus qu'à injecter les paramètres ainsi calculés dans la fonction de prix pour obtenir la valeur du prix d'un titre zéro-coupon à toutes les maturités  $t$  pour lesquelles il n'existe aucune donnée observée :

$$P(t) = e^{-UFR \cdot t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(t, u_j), \quad t > 0 \quad (43)$$

On en déduit enfin les taux au comptant selon les formules :

$$\begin{aligned} - \tilde{R}_t &= \frac{1}{t} \cdot \ln \left( \frac{1}{P(t)} \right) \text{ pour des taux continus} \\ - R_t &= \left( \frac{1}{P(t)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \text{ pour des taux capitalisés annuellement.} \end{aligned} \quad (44)$$

#### 4.4.3. Technique dans le cas général

Supposons que les entrées issues de la portion liquide de la courbe soient constituées de  $N$  instruments de taux et que  $J$  soit le nombre de dates de versement de cash relatif à l'un de ces instruments. L'ensemble des arguments en entrée sera constitué des éléments suivants :

- Les prix de marché  $m_i$  des instruments  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) à la date de valuation.
- Les dates des paiements de cash  $u_1, \dots, u_J$  relatifs aux instruments.
- Les flux de cash  $c_{i,1}, \dots, c_{i,J}$  dus pour l'instrument  $i$  aux dates respectives  $u_1, \dots, u_J$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Si aucun paiement de cash n'a lieu à la date  $t = u_j$ , on pose  $c_{i,j} = 0$ .

La fonction de pricing à la date de valeur s'écrit :

$$P(t) = e^{-UFR \cdot t} + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot W(t, u_j) \right), \quad t \geq 0 \quad (45)$$

On pose :

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot W(t, u_j), \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (46)$$

Comme précédemment,  $K_i(t)$  est appelée la fonction noyau.

Chaque calcul d'une fonction noyau spécifique correspond à un instrument en entrée. Comme précédemment, le principe repose sur l'estimation de la fonction  $P(t)$  comme une combinaison linéaire de toutes les fonctions noyau.

Par ailleurs, puisque les facteurs d'actualisation  $P(u_1), \dots, P(u_j)$  et les flux de cash  $c_{i,1}, \dots, c_{i,J}$  aux dates respectives  $u_1, \dots, u_j$  sont connus, le prix d'un instrument  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) vaut :

$$m_i = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot P(t, u_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (47)$$

On en déduit le système d'équations linéaires ci-dessous :

$$\begin{cases} m_1 = \sum_{j=1}^J c_{1,j} \cdot P(u_j) = \sum_{j=1}^J c_{1,j} \cdot \left( e^{-UFR \cdot u_j} + \sum_{l=1}^N \left( \zeta_l \cdot \sum_{k=1}^J c_{l,k} \cdot W(u_j, u_k) \right) \right) \\ \vdots \\ m_i = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot P(u_j) = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \left( e^{-UFR \cdot u_j} + \sum_{l=1}^N \left( \zeta_l \cdot \sum_{k=1}^J c_{l,k} \cdot W(u_j, u_k) \right) \right) \\ \vdots \\ m_N = \sum_{j=1}^J c_{N,j} \cdot P(u_j) = \sum_{j=1}^J c_{N,j} \cdot \left( e^{-UFR \cdot u_j} + \sum_{l=1}^N \left( \zeta_l \cdot \sum_{k=1}^J c_{l,k} \cdot W(u_j, u_k) \right) \right) \end{cases} \quad (48)$$

Après réarrangement des termes, celui-ci devient :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J c_{1,j} \cdot P(u_j) = \sum_{j=1}^J c_{1,j} \cdot e^{-UFR \cdot u_j} + \sum_{l=1}^N \left( \sum_{k=1}^J \left( \sum_{j=1}^J c_{1,j} \cdot W(u_j, u_k) \right) \cdot c_{l,k} \right) \cdot \zeta_l \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot P(u_j) = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot e^{-UFR \cdot u_j} + \sum_{l=1}^N \left( \sum_{k=1}^J \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot W(u_j, u_k) \right) \cdot c_{l,k} \right) \cdot \zeta_l \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^J c_{N,j} \cdot P(u_j) = \sum_{j=1}^J c_{N,j} \cdot e^{-UFR \cdot u_j} + \sum_{l=1}^N \left( \sum_{k=1}^J \left( \sum_{j=1}^J c_{N,j} \cdot W(u_j, u_k) \right) \cdot c_{l,k} \right) \cdot \zeta_l \end{cases} \quad (49)$$

En notation vectorielle, il s'écrit :

$$m = Cp = C\mu + (CWC^T)\zeta \quad (50)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = (m_1, \dots, m_N)^T \\ p = (P(u_1), \dots, P(u_J))^T \\ C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,j} & \dots & c_{1,J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,j} & \dots & c_{i,J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N,1} & \dots & c_{N,j} & \dots & c_{N,J} \end{bmatrix} \\ \mu = (e^{-UFR \cdot u_1}, \dots, e^{-UFR \cdot u_J}) \\ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)^T \\ W = \begin{bmatrix} w(u_1, u_1) & \dots & w(u_1, u_j) & \dots & w(u_1, u_J) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(u_i, u_1) & \dots & w(u_i, u_j) & \dots & w(u_i, u_J) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(u_J, u_1) & \dots & w(u_J, u_j) & \dots & w(u_J, u_J) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$C = (c_{i,j})_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, J}$  est la matrice  $N \times J$  des flux de paiement et  $W = (w(u_i, u_j))_{i=1, \dots, J; j=1, \dots, J}$  est la matrice  $J \times J$  des fonctions de Wilson.

On en tire enfin :

$$\zeta = (CWC^T)^{-1} (m - C\mu) \quad (51)$$

Il ne reste plus désormais qu'à injecter les paramètres  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  dans la fonction de pricing  $P(t)$  pour obtenir la fonction d'actualisation pour toutes les maturités et ainsi les taux au comptant.

#### 4.4.4. Taux forward instantané

Rappelons la formule du taux forward instantané (cf. équation (3)) :

$$f(t) = -\frac{\partial \ln P(t)}{\partial t} = -\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} \quad (52)$$

Une fois que l'on a calculé la dérivée  $\frac{\partial W}{\partial t}(t, u_j)$ , nous obtenons le taux instantané forward.

Dans le cas d'une calibration à partir de titres zéro-coupon, la dérivée du prix s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t) = -UFR \cdot e^{-UFR \cdot t} + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \frac{\partial W}{\partial t}(t, u_j) \quad (53)$$

Et dans le cas général, la dérivée du prix s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t) = -UFR \cdot e^{-UFR \cdot t} + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}(t, u_j) \right) \quad (54)$$

La méthode de Smith et Wilson fournit une formule analytique pour le taux forward instantané, car la fonction  $W(t, u_j)$  est de classe  $C^1$  (elle est même de classe  $C^2$ ). Nous allons démontrer cela.

Tout d'abord, d'après l'équation(38), la fonction  $W(t, u_j)$  est continue en tout point  $t$ , y compris aux points  $u_j (j \in 1, N)$  :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow u_j \\ t < u_j}} W(t, u_j) = \lim_{\substack{t \rightarrow u_j \\ t > u_j}} W(t, u_j) = W(u_j, u_j) \quad (55)$$

Ensuite, la dérivée de  $W(t, u_j)$  par rapport à  $t$  s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, u_j) = -UFR \cdot W(t, u_j) + e^{-UFR(t+u_j)} \cdot \frac{\partial A}{\partial t}(t, u_j) \quad (56)$$

En posant :

$$A(t, u_j) = \left[ \alpha \min(t, u_j) - \frac{1}{2} e^{-\alpha \max(t, u_j)} \left( e^{\alpha \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \min(t, u_j)} \right) \right]$$

Plus précisément :

$$A(t, u_j) = \begin{cases} \alpha t - \frac{1}{2} \left( e^{-\alpha(u_j-t)} - e^{-\alpha(u_j+t)} \right) & t < u_j \\ \alpha u_j - \frac{1}{2} \left( e^{-\alpha(t-u_j)} - e^{-\alpha(t+u_j)} \right) & t > u_j \end{cases}$$

Nous pouvons déjà affirmer que  $A(t, u_j)$  est dérivable en tout point  $t$  autre que  $u_j$ . Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t, u_j) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha u_j} \left( e^{\alpha t} - e^{-\alpha t} \right) \right) & t < u_j \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t} \left( e^{\alpha u_j} - e^{-\alpha u_j} \right) & t > u_j \end{cases} \quad (57)$$

Les dérivées à droite et à gauche de  $A(t, u_j)$  par rapport à  $t$  au point  $u_j$  se formulent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow u_j \\ t < u_j}} \frac{\partial A}{\partial t}(t, u_j) = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha u_j} \left( e^{\alpha u_j} - e^{-\alpha u_j} \right) \right) = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - e^{-2\alpha u_j} \right) \\ \lim_{\substack{t \rightarrow u_j \\ t > u_j}} \frac{\partial A}{\partial t}(t, u_j) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha u_j} \left( e^{\alpha u_j} - e^{-\alpha u_j} \right) = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - e^{-2\alpha u_j} \right) \end{cases} \quad (58)$$

Puisque les dérivées à gauche et à droite de  $A(t, u_j)$  sont égales, la fonction  $\frac{\partial A}{\partial t}(t, u_j)$  est continue au point  $u_j$  et elle vaut :

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t}(t, u_j) \right|_{t=u_j} = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - e^{-2\alpha u_j} \right) \quad (59)$$

De surcroît, la fonction  $W(t, u_j)$  est de classe  $C^2$ , car la fonction  $A$  est deux fois dérivable en tout point  $t$  :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t, u_j) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha^2 \left[ e^{-\alpha(u_j-t)} - e^{-\alpha(u_j+t)} \right] & t < u_j \\ -\frac{1}{2}\alpha^2 \left[ e^{-\alpha(t-u_j)} - e^{-\alpha(t+u_j)} \right] & t > u_j \end{cases} \quad (60)$$

En effet, c'est bien le cas pour les points  $u_j$ , puisque :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow u_j \\ t < u_j}} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t, u_j) = \lim_{\substack{t \rightarrow u_j \\ t > u_j}} W \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t, u_j) = -\frac{1}{2}\alpha^2 (1 - e^{-2\alpha u_j}) \quad (61)$$

Cela nous permet donc de poser :

$$\left. \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t, u_j) \right|_{t=u_j} = -\frac{1}{2}\alpha^2 (1 - e^{-2\alpha u_j}) \quad (62)$$

#### 4.4.5. Avantages et inconvénients

Les avantages de cette méthode d'extrapolation peuvent être résumés comme suit :

- Il s'agit d'une méthode qui appartient au domaine public. Aussi bien les formules que les outils de calcul peuvent être obtenus sur la page de l'[EIOPA](https://eiopa.europa.eu/)<sup>19</sup>. Par conséquent, la méthode est pleinement transparente et accessible à toute compagnie et à tout instant.
- Cette méthode, en sus d'être très flexible en matière d'instruments en entrée, est aisée à implémenter. La structure à terme des taux sans risque peut être estimée à partir d'un ensemble d'obligations (avec ou sans coupons) ou à partir des taux de swap, le tout nécessitant une simple feuille Excel.
- La courbe ainsi estimée est en parfaite adéquation avec les données liquides du marché, contrairement à celle produite par d'autres méthodes, lesquelles opèrent un compromis entre précision et régularité. La méthode de Smith et Wilson prend en compte toutes les données pertinentes et liquides issues du marché, point n'est besoin d'appliquer quelque opération de lissage. Les pondérations  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  sont calculées de sorte que, pour les maturités  $u_1, \dots, u_N$ , les prix des titres zéro-coupon correspondants  $P(u_1), \dots, P(u_N)$  du modèle soient compatibles avec le marché. Cette méthode est donc capable de reproduire n'importe quelle courbe observée sur le marché. Le lissage se fait ainsi dans le choix arbitraire du noyau.
- Cette méthode consiste tout simplement à résoudre analytiquement un système d'équations linéaires, contrairement aux autres méthodes fondées sur la minimisation de l'erreur de la somme des moindres carrées, susceptibles de conduire à des sauts « catastrophiques », lorsque la minimisation saute d'un ensemble de paramètres à un autre ensemble de paramètres significativement différents. Cette pierre d'achoppement résulte de la non linéarité de la formule des moindres carrées, qui peut engendrer plusieurs minima locaux.
- Cette méthode peut être appliquée directement à des données brutes issues des marchés financiers. Point n'est besoin de bootstrapping ou d'autres méthodes pour transformer préalablement les taux swap au pair en taux zéro coupon, comme c'est le cas pour la méthode d'interpolation linéaire, lorsque c'est nécessaire.
- Elle est d'une remarquable simplicité et aisée à implémenter. Son exécution requiert un temps calcul faible, car elle ne consiste qu'en une succession d'inversions linéaires, contrairement à la méthode de Nelson, Siegel et Svensson dont la calibration nécessite la mise en œuvre d'algorithmes complexes et coûteux en temps de calcul (cf. section 5.2.3).
- Cette méthode participe d'une approche uniforme en ce qu'elle opère à la fois une interpolation entre les données liquides du marché et une extrapolation au-delà de la dernière donnée observée. Comme évoqué à la section 4.1, cela évite l'apparition d'incohérences ou de discontinuités.
- Le taux forward ultime (UFR) est atteint asymptotiquement. La vitesse à laquelle celui-ci est atteint dépend du comportement des taux situés dans la partie liquide de la courbe ainsi que d'un paramètre exogène  $\alpha$ . Les taux forward extrapolés convergent d'autant plus rapidement vers l'UFR que  $\alpha$  est élevé, autrement dit les données de la portion liquide de la courbe auront d'autant moins d'impact sur celles de la portion extrapolée.

<sup>19</sup> <https://eiopa.europa.eu/>

Néanmoins, la méthode de Smith et Wilson présente quelques inconvénients :

- Le paramètre  $\alpha$  doit être choisi hors du modèle. Par conséquent, le jugement d'un expert sera requis pour l'estimer et ce pour chaque devise et chaque point dans le temps de façon séparée. Dans le but d'avoir une approche uniformisée pour toutes les devises, ce paramètre<sup>20</sup> est initialisé à 0.1. Si celui-ci s'avère inapproprié, il sera augmenté de façon itérative jusqu'à ce qu'il soit conforme aux critères donnés.
- Rien ne contraint la fonction d'actualisation  $P(t)$  à décroître. Dans la portion liquide de la courbe, peuvent se présenter des cas où  $P(t)$  est une fonction décroissante pour certaines données observées mais croissante localement sur la partie interpolée. Ceux-ci peuvent se produire si une courbe lisse est ajustée entre deux points observés voisins pour lesquels les valeurs de  $P(t)$  sont proches. Cependant, maintes autres méthodes rencontrent ce même écueil.
- Au-delà de la partie liquide de la courbe, la fonction  $P(t)$  peut devenir négative, notamment lorsque le dernier taux forward observé est élevé comparé à la somme de l'UFR et de  $\alpha$ . Le cas échéant, il sera nécessaire de prendre une valeur de  $\alpha$  plus élevée. En revanche, les méthodes paramétriques ne connaissent pas cet écueil, puisqu'elles sont fondées sur des formules du taux au comptant, qui ne peuvent, par définition, produire des valeurs négatives.
- Dans certaines situations, lorsque les données en entrée sont biaisées ou que les équations à résoudre sont linéairement ou presque linéairement dépendantes<sup>21</sup>, un jugement de la part de l'opérateur sera requis.

De surcroît, cette méthode comporte un inconvénient majeur : rien ne contraint la fonction d'actualisation  $P(t)$  à décroître. Dans la portion liquide de la courbe, peuvent se présenter des situations où  $P(t)$  est une fonction décroissante pour certaines données observées mais croissante localement sur la partie interpolée. Celles-ci peuvent se produire si une courbe lisse est ajustée entre deux points observés voisins pour lesquels les valeurs de  $P(t)$  sont proches<sup>22</sup> (cependant, maintes autres méthodes rencontrent ce même écueil). Cela constitue donc une violation des contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Pour le montrer, commençons par réécrire l'équation (38) sous la forme ci-dessous :

$$W(t, u_j) = e^{-UFR \cdot t} \cdot e^{-UFR \cdot u_j} \cdot \left\{ \alpha \cdot \min(t, u_j) - 0.5 \cdot e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \cdot \left( e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \min(t, u_j)} \right) \right\}$$

En posant :

$$\tilde{W}(t, u_j) = e^{-UFR \cdot u_j} \cdot \left\{ \alpha \cdot \min(t, u_j) - 0.5 \cdot e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \cdot \left( e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \min(t, u_j)} \right) \right\} \quad (63)$$

Nous obtenons :

$$W(t, u_j) = e^{-UFR \cdot t} \cdot \tilde{W}(t, u_j) \quad (64)$$

L'équation (37) peut s'écrire alors comme suit :

$$P(t) = e^{-UFR \cdot t} \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right), \forall t \geq 0 \quad (65)$$

En utilisant un développement limité à l'ordre 1 de la fonction exponentielle (on suppose la somme  $\sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \tilde{W}(t, u_j)$  négligeable par rapport à 1), nous pouvons écrire :

<sup>20</sup> Des valeurs plus élevées de  $\alpha$  confèrent d'avantage de poids au taux forward ultime, tandis que des valeurs plus faibles confèrent plus de poids aux données liquides.

<sup>21</sup> Certaines données devront être alors retirées afin qu'une solution valide soit calculée. La fonction  $W(t, u)$  peut être interprétée comme la fonction de covariance du modèle de la courbe des taux de rendement intégrée d'Ornstein-Uhlenbeck. Cette dépendance linéaire procède subséquemment de la présence de plusieurs instruments de même maturité.

<sup>22</sup> Cela se produit surtout pour des valeurs élevées du facteur de convergence.

$$e^{\sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot \tilde{W}(t, u_j)} \simeq 1 + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot \tilde{W}(t, u_j), \forall t \geq 0 \quad (66)$$

Nous obtenons alors l'approximation :

$$P(t) \simeq e^{-UFR \cdot \left( t - \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right)}, \forall t \geq 0 \quad (67)$$

Pareillement pour le cas général, un développement limité à l'ordre 1 de la fonction exponentielle (on suppose la somme  $\sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right)$  négligeable par rapport à 1), donne l'expression suivante :

$$e^{\sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right)} \simeq 1 + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right), \forall t \geq 0 \quad (68)$$

L'équation (45) se reformule alors sous la forme approchée suivante :

$$P(t) \simeq e^{-UFR \cdot \left( t - \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right) \right)}, \forall t \geq 0 \quad (69)$$

Au regard de ce qui précède, la présence du terme  $e^{-UFR \cdot t}$  peut se justifier par le caractère non nécessairement décroissant de la fonction  $\tilde{W}(t, u_j)$ , car elle permet de rendre décroissante la fonction de prix  $P(t)$  en fonction de la maturité. Comme nous l'observerons à la section 6.3, les paramètres  $\zeta_j$  ( $j \in \{1, \dots, N\}$ ) n'ont pas de signe particulier. C'est pourquoi rien ne garantit que les deux sommes  $\sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \tilde{W}(t, u_j)$  et  $\sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \left( \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot \tilde{W}(t, u_j) \right)$  soient décroissantes, donc que la fonction de prix le soit également.

En outre, la fonction de prix n'est en réalité pas parfaitement cohérente. En effet :

- Elle ne permet pas un processus de bootstrap (au sens d'une inversion par étapes successives).
- Pour chaque maturité  $t$ , le prix du zéro-coupon correspondant s'exprime dans une base de noyaux, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire de fonctions noyau centrées en les maturités observées.
- Au final, le taux zéro-coupon ainsi calculé dépend de tous les produits utilisés dans la reconstruction, ce qui n'est pas très cohérent par rapport à l'évaluation des produits de taux en l'absence d'opportunité d'arbitrage, lesquels ont une fonction de prix vérifiant la relation :

$$P(t') = P(t) \cdot e^{\int_t^{t'} f(u) du}, \forall t' > t > 0 \quad (70)$$

#### 4.4.6. Récapitulatif

Le tableau ci-dessus récapitule les procédures à suivre selon les instruments figurant en entrée.

Instruments	Prix de marché	Dates de paiement de cash	Matrice des flux de cash
Obligations zéro-coupon	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prix de marché des <math>N</math> instruments figurant en entrée, donnés sous forme de</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Les dates de paiement de cash sont les dates de maturité des <math>N</math> titres zéro-coupon en entrée (i.e. <math>J = N</math>).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Une matrice <math>N \times N</math> avec comme entrées : <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <math>c_{i,i} = 1</math>,</li> </ul> </li> </ul>

Instruments	Prix de marché	Dates de paiement de cash	Matrice des flux de cash
	<p>pourcentage du montant du notionnel.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Les prix de marché des titres zéro-coupon sont convertis immédiatement en taux au comptant pour les maturités en entrée.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li><math>c_{i,j} = 0</math> si <math>i \neq j</math>.</li> <li>Remarque : la matrice <math>C</math> est réduite à une matrice identité. Le cas général se réduit alors au cas particulier de titres zéro-coupon.</li> </ul>
Obligations avec coupons	<ul style="list-style-type: none"> <li>Prix de marché des <math>N</math> obligations avec coupons, sous forme de pourcentage du notionnel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Les dates de paiement de cash sont, en sus des dates de maturité, toutes les dates de détachement de coupon.</li> <li>Ordonner les <math>J</math> dates de paiement par ordre croissant : <math>u_1 &lt; \dots &lt; u_N</math>.</li> <li>Ordonner les obligations selon leur maturité : <math>u_{t(i)} &lt; \dots &lt; u_{t(N)} = u_J</math>, avec <math>t(i)</math> la maturité de la <math>i^{\text{ème}}</math> obligation.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Une matrice <math>N \times J</math> composée des éléments suivants : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c_{i,j} = r_C(i)/s, j &lt; t(i)</math></li> <li>,</li> <li><math>c_{i,t(i)} = 1 + r_C(i)/s</math>,</li> <li><math>c_{i,j} = 0</math>, si <math>j &gt; t(i)</math>.</li> </ul> </li> <li>Avec <math>r_C(i)</math> le taux de coupon de la <math>i^{\text{ème}}</math> obligation et <math>s</math> la fréquence de règlement.</li> </ul>
Taux swap au pair	<ul style="list-style-type: none"> <li>Les prix de marché des <math>N</math> swaps au pair en entrée sont unitaires.</li> <li>Un taux fixe et un taux variable sont échangés à chaque date de paiement. Initialement, un montant est investi et à la maturité, celui-ci est désinvesti.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Les dates de paiement de cash sont, en sus des dates de maturité des différents swaps, toutes les dates de paiement de taux.</li> <li>Ordonner les <math>J</math> dates de paiement par ordre croissant : <math>u_1 &lt; \dots &lt; u_J</math>.</li> <li>Ordonner les swaps selon leur maturité : <math>u_1 = u_{1,t(1)} &lt; \dots &lt; u_{N,t(N)} = u_J</math>, avec <math>u_{i,t(i)}</math> la maturité du <math>i^{\text{ème}}</math> swap.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Une matrice <math>N \times J</math> composée des éléments suivants : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c_{i,j} = r_C(i)/s, j &lt; t(i)</math></li> <li>,</li> <li><math>c_{i,t(i)} = 1 + r_C(i)/s</math>,</li> <li><math>c_{i,j} = 0, j &gt; t(i)</math>.</li> </ul> </li> <li>Avec <math>r_C(i)</math> le taux du <math>i^{\text{ème}}</math> swap et <math>s</math> la fréquence de règlement.</li> </ul>

## 5. Implémentation

Nous implémentons les méthodes de Nelson, Siegel et Svenson (SVENSSON [1994]) et de Smith et Wilson (SMITH et WILSON [2001]). À des fins de comparaison, nous implémentons la méthode d'interpolation linéaire, l'interpolation la plus simple.

### 5.1. Collecte des données

Nous utilisons des données issues de Reuters et s'étendant du 05/10/2009 (heure de clôture 19:09:34) au 30/12/2011 (heure de clôture 15:28:54). Les différents types sont les suivants :

- FRA sur Euribor 6 mois, disponibles à partir du 1<sup>er</sup> mars 2010 (heure de clôture : 17:00:51) ;
- FRA sur Euribor 3 mois ;
- Taux Euribor de maturité 1 mois à 12 mois ;
- Swaps sur Euribor 3 mois ;
- Swaps sur Euribor 6 mois.

Les maturités observées pour les swaps sont les suivantes :

- Maturités de 1 an à 10 ans,
- Maturité 15 ans,
- Maturité 20 ans,
- Maturité 30 ans,
- Maturité 40 ans,
- Maturités 50 et 60 ans, disponibles à partir du 1<sup>er</sup> décembre 2010 (heure de clôture : 18:16:53).

Le segment long terme sera généré à partir des swaps sur Euribor 3 mois ou 6 mois, tandis que le segment court terme sera généré à partir des Euribor et des FRA sur Euribor 3 mois ou 6 mois.

Par ailleurs, puisque les maturités 1 an à 10 ans sont toutes disponibles (il n'y a pas de « trous »), nous calculons les taux zéro-coupon pour ces maturités-là à partir des taux swap (sur Euribor 3 mois ou 6 mois) correspondants via la méthode du bootstrap (cf. section 3 de l'annexe).

## 5.2. Algorithmes de calibration

En raison des différences entre les marchés, le CFO Forum préconise de prendre temporairement comme maturité minimale observée la maturité 1 an des taux *swaps*. Néanmoins, dans le cas de la méthode de Nelson, Siegel et Svensson, nous effectuerons deux calibrations : l'une ne se fondant que sur les taux à long terme, l'autre intégrant également les taux à court terme. Dans tous les cas, les courbes des taux zéro-coupon sont construites à partir des taux de swap.

### 5.2.1. Méthode d'interpolation linéaire

Les taux *swaps* manquants sont interpolés linéairement. La courbe des zéro-coupons est obtenue par bootstrap des taux *swaps* ainsi calculés. Le principe du bootstrap est expliqué à la section 3 de l'annexe.

### 5.2.2. Méthode de Smith et Wilson

JAKOBSEN [2011] remarque que la méthode de Smith et Wilson extrapole correctement le segment à court terme, mais que les résultats pourraient être améliorés en ajoutant quelques taux supplémentaires à courte échéance, ce qui conférerait à la courbe résultante une forme plus réaliste et réduirait la volatilité non anticipée à court terme engendrée par les changements au niveau des pentes dans le segment à long terme. Quoiqu'il en soit, nous nous limiterons aux taux à long terme observés sur le marché.

Nous effectuons deux séries de calibration :

1. L'une utilisant les taux swap sur Euribor 3 mois,
2. L'autre utilisant les taux swap sur Euribor 6 mois.

Les deux séries suivent la procédure expliquée à la section 0 dans le cas de swaps. Nous testons différentes valeurs de  $\alpha$ , allant de 0,01 à 0,99 avec un pas de 0,01.

### 5.2.3. Méthode de Nelson, Siegel et Svensson

#### 5.2.3.1 Prise en compte uniquement des taux à long terme

Tout comme dans le cas de la méthode de Smith et Wilson, nous effectuons deux séries de calibration :

3. L'une utilisant les taux *swap* sur Euribor 3 mois,
4. L'autre utilisant les taux *swap* sur Euribor 6 mois.

Comme vu à la section 2.2.3 de l'annexe, un *swap*, en date de démarrage, peut être considéré comme une obligation à coupons cotée au pair. Son prix vaut alors 100.

La première façon de calibrer qui vient à l'esprit est de le faire directement à partir des prix des obligations (tous égaux à 100, puisque l'on a affaire à des *swaps* prêts à être initiés).

Notons :

- $S_1, \dots, S_N$  les swaps disponibles sur le marché.
- $b^{(obs)} = (b_1^{(obs)} \dots b_j^{(obs)} \dots b_N^{(obs)})$  les prix des swaps observés sur le marché.
- $b^{(mod)} = (b_1^{(mod)} \dots b_j^{(mod)} \dots b_N^{(mod)})$  les prix des swaps fournis par le modèle.
- $\tau_1, \dots, \tau_M$  les dates où a lieu au moins un paiement.
- $y_i^{(mod)} (\forall i \in \{1, \dots, M\})$  le taux zéro-coupon de maturité  $\tau_i$  proposé par le modèle à une génération donnée. Son expression est donnée par l'équation (29) :

$$y_i^{(mod)} = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau_i}{\lambda_1}\right)}{\frac{\tau_i}{\lambda_1}} + \beta_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau_i}{\lambda_1}\right)}{\frac{\tau_i}{\lambda_1}} - \exp\left(-\frac{\tau_i}{\lambda_1}\right) \right] + \beta_4 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau_i}{\lambda_2}\right)}{\frac{\tau_i}{\lambda_2}} - \exp\left(-\frac{\tau_i}{\lambda_2}\right) \right] \quad (71)$$

- $R_j$  le taux de la jambe fixe du swap  $S_j, \forall j \in \{1, \dots, N\}$ .
- $DF = (DF_1 \dots DF_i \dots DF_M)$  le vecteur des facteurs d'actualisation, avec :
  - o  $DF_i = \frac{1}{(1 + y_i^{(mod)})^{\tau_i}}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$
  - o  $\tau_i = i, \forall i \in \{1, \dots, M\}$

En outre, nous représentons l'ensemble des flux générés par ces obligations sous la forme d'une matrice  $CF$ , où les colonnes représentent les obligations et les lignes les dates de paiement :

$$CF = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_j & \dots & b_N \\ F_{1,1} & \dots & F_{1,j} & \dots & F_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{i,1} & \dots & F_{i,j} & \dots & F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{M,1} & \dots & F_{M,j} & \dots & F_{M,N} \end{pmatrix} \begin{matrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_i \\ \vdots \\ \tau_M \end{matrix}$$

Avec :

$$\forall j \in 1, N, F_{i,j} = \begin{cases} R_j & \text{si } i < M_j \\ 1 + R_j & \text{si } i = M_j \\ 0 & \text{si } i > M_j \end{cases}$$

Comme les swaps sont en date de démarrage, ils peuvent être assimilés à des obligations au pair et leur prix vaut alors 100 :

$$b^{(obs)} = (b_1^{(obs)} \dots b_j^{(obs)} \dots b_N^{(obs)}) = (100 \dots 100 \dots 100) \quad (72)$$

Le vecteur  $b^{(mod)}$  des prix des obligations résultant des taux actuariels  $y_1^{(mod)}, \dots, y_N^{(mod)}$  générés par le modèle se formule ainsi :

$$\begin{aligned}
b^{(\text{mod})} = DF \cdot CF &= \left( \sum_{i=1}^M DF_i \cdot F_{i,1} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^M DF_i \cdot F_{i,j} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^M DF_i \cdot F_{i,N} \right) \\
&= \left( \sum_{i=1}^M \frac{F_{i,1}}{(1 + y_i^{(\text{mod})})^{\tau_i}} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^M \frac{F_{i,j}}{(1 + y_i^{(\text{mod})})^{\tau_i}} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^M \frac{F_{i,N}}{(1 + y_i^{(\text{mod})})^{\tau_i}} \right) \quad (73)
\end{aligned}$$

Le problème consiste à déterminer les paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1, \lambda_2)$  ou  $(\beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1, \lambda_2)$  selon le caractère endogène ou exogène de l'UFR qui minimisent l'erreur suivante :

$$\xi_{LT} = \|b^{(\text{mod})} - b^{(\text{obs})}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N (b_j^{(\text{mod})} - b_j^{(\text{obs})})^2} \quad (74)$$

Néanmoins, d'après GILLI et al. [2011] (pages 445-503), cette méthode peut engendrer des erreurs d'ajustement significatives et ce pour deux raisons :

1. L'algorithme ne minimise non pas des différences entre des taux mais entre des prix.
2. Pour des obligations à courte échéance, toute valeur raisonnable de taux d'intérêt donne une bonne approximation du prix. Les obligations à courte échéance ont une faible durée ; par conséquent, les fluctuations du taux ont peu de répercussion sur les prix. Inversement, un faible changement dans le prix de l'obligation peut engendrer un changement important dans le taux d'intérêt. Si, ensuite, les taux d'intérêt sont utilisés pour valoriser d'autres instruments, cela peut s'avérer problématique. Pour surmonter cet écueil, la première solution qui vient à l'esprit serait de pondérer les différentes obligations (selon leur maturité ou inversement à leur durée). Une autre solution peut être de calibrer les paramètres par rapport aux taux de rendement jusqu'à échéance (*yields-to-maturity*). D'ailleurs, cette dernière solution est mise en œuvre dans plusieurs banques centrales.

La procédure suit les étapes suivantes :

1. Calculer la courbe de rendement actuariel à l'aide du modèle de Nelson, Siegel et Svensson :

$$y^{(\text{mod})} = (y_1^{(\text{mod})} \quad \dots \quad y_N^{(\text{mod})}).$$

2. Calculer les prix théoriques des obligations à coupons :  $b^{(\text{mod})} = (b_1^{(\text{mod})} \quad \dots \quad b_N^{(\text{mod})})$ .

3. Calculer les rendements actuariels théoriques jusqu'à l'échéance pour chacun des *swaps*  $S_1, \dots, S_N$  :

$$r^{(\text{mod})} = (r_1^{(\text{mod})} \quad \dots \quad r_N^{(\text{mod})}).$$

4. Calculer l'écart entre les rendements actuariels théoriques  $r^{(\text{mod})}$  jusqu'à l'échéance et les rendements actuariels observés  $r^{(\text{obs})}$  jusqu'à l'échéance :  $r^{(\text{mod})} - r^{(\text{obs})}$ .

L'inconvénient de cette approche est qu'elle est plus coûteuse que celle consistant à ajuster directement les prix des obligations. À chaque itération, il est désormais nécessaire de calculer le taux de rendement interne pour chaque obligation.

Une alternative serait de séparer les données en deux catégories :

1. Les taux *swap* de maturité 1 an à 10 ans. Puisque toutes les maturités entières sont disponibles, il est possible d'en déduire les taux zéro-coupon par bootstrap.
2. Les taux *swap* de maturité supérieure à 11 ans.

La calibration se composerait de deux sous-calibrations :

1. L'une utiliserait les taux zéro-coupon précédemment calculés. Elle serait beaucoup plus simple et plus rapide. Le taux actuariel  $r_j^{(\text{mod})}$  se calculerait alors comme le taux de la jambe fixe d'un *swap* selon la formule<sup>23</sup> :

<sup>23</sup> Le lecteur trouvera une démonstration de cette formule dans BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 1-22).

$$r_j^{(\text{mod})} = \frac{P(\tau_1) - P(\tau_j)}{\sum_{i=1}^{\tau_j} (\tau_i - \tau_{i-1}) P(\tau_i)}, \forall j \in 1, 10 \quad (75)$$

Avec :

- $P(\tau_i)$  le prix du zéro-coupon de maturité  $\tau_i$ ,
- $\tau_0 = 0$ .

2. L'autre utiliserait les taux *swap* de maturité supérieure à 11 ans.

La calibration ainsi réalisée serait un peu plus rapide. Cependant, la courbe comporterait deux segments calibrés différemment et des incohérences pourraient apparaître. Par soucis d'homogénéité, nous nous limiterons à une seule calibration.

Chaque taux actuariel  $r_j^{(\text{mod})}$  est calculé de la façon suivante :

$$r_j^{(\text{mod})} = \underset{r}{\text{argmin}} \left| -b_j^{(\text{mod})} + \sum_{i=1}^{M_j} \frac{F_{i,j}}{(1+r)^{\tau_i}} \right|, \forall j \in 1, N \quad (76)$$

Avec :

$$b_j^{(\text{mod})} = \sum_{i=1}^{M_j} \frac{F_{i,j}}{(1+y_i^{(\text{mod})})^{\tau_i}}$$

Ensuite, nous calibrons à partir des taux actuariels (qui correspondent au taux de la jambe fixe, puisque nous avons affaire à des obligations à coupon au pair) au lieu des prix. Le problème consiste à déterminer les paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1, \lambda_2)$  ou  $(\beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1, \lambda_2)$  selon le caractère endogène ou exogène de l'UFR qui minimisent l'erreur suivante (erreur absolue) :

$$\xi_{\text{LTI}} = \|r^{(\text{mod})} - r^{(\text{obs})}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N (r_j^{(\text{mod})} - r_j^{(\text{obs})})^2} \quad (77)$$

Par ailleurs, comme le jeu d'essai est constitué d'obligations à coupons au pair (*swaps* en date de démarrage), le taux actuariel observé  $r_j^{(\text{obs})}$  est égal au taux  $R_j$  de la jambe fixe du *swap*  $S_j$  ( $j \in \{1, \dots, N\}$ ).

A titre d'exemple, le Tableau 6 affiche les taux *swaps* en date du 30 décembre 2011 (heure de clôture : 15:28:54). Nous avons  $N = 16$  et  $M = 60$ . Nous lançons l'algorithme d'évolution différentielle pour calculer les paramètres de la fonction d'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène. Les tableaux suivants contiennent les valeurs numériques prises par les différentes variables évoquées précédemment.

Maturité du swap	Duration de l'Euribor	
	3 mois	6 mois
1 an	1,09	1,423
2 ans	1,05	1,315
3 ans	1,16	1,376
4 ans	1,345	1,544
5 ans	1,557	1,725
6 ans	1,747	1,915
7 ans	1,921	2,071
8 ans	2,058	2,19
9 ans	2,18	2,296
10 ans	2,265	2,389
15 ans	2,584	2,675
20 ans	2,64	2,692
30 ans	2,498	2,562
40 ans	2,553	2,553
50 ans	2,57	2,57
60 ans	2,576	2,576

Tableau 6 : taux swap observés le30/12/2011 (heure de clôture 15:28:54).

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
2,3760415	-0,4855328	-5,5588468	4,3998206	2,1634428	5,0000020

Tableau 7 : Paramètres calculés.

Nous remarquons, d'après le

Tableau 7, que la valeur de 2,16 trouvée pour le premier paramètre d'échelle  $\lambda_1$  est proche de celle choisie arbitrairement par BONNIN et al. [2011] et qui est égale à 2, ce qui montre le caractère réaliste de ce choix.

Maturité du swap	$r^{(mod)}$	$r^{(obs)}$
1 an	1,423	1,423
2 ans	1,314998	1,315
3 ans	1,388918	1,376
4 ans	1,544003	1,544
5 ans	1,723955	1,725
6 ans	1,899173	1,915
7 ans	2,056135	2,071
8 ans	2,190054	2,19
9 ans	2,300364	2,296
10 ans	2,389009	2,389
15 ans	2,60801	2,675
20 ans	2,650736	2,692
30 ans	2,625026	2,562
40 ans	2,591757	2,553
50 ans	2.57	2.57
60 ans	2.55584	2.55584

Tableau 8 : Taux actuariels observés et calculés.

Maturité (année)	$DF_i$
1	0,9859697
2	0,9742235
3	0,9594487
4	0,9404008
5	0,9176347
6	0,8923093
7	0,8656078

Maturité (année)	$DF_i$
8	0,8385033
9	0,8117029
10	0,7856707
11	0,7606792
12	0,7368613
13	0,7142549
14	0,6928379
15	0,6725522
16	0,6533214
17	0,6350613
18	0,6176875
19	0,6011196
20	0,5852829
21	0,5701099
22	0,5555405
23	0,5415216
24	0,5280067
25	0,514955
26	0,5023312
27	0,4901047
28	0,4782487
29	0,4667399
30	0,4555581
31	0,4446854
32	0,4341062
33	0,4238066
34	0,4137744
35	0,4039985
36	0,394469
37	0,385177
38	0,3761142
39	0,367273
40	0,3586466
41	0,3502284
42	0,3420123
43	0,3339928
44	0,3261643
45	0,3185218
46	0,3110604
47	0,3037754
48	0,2966623
49	0,2897168
50	0,2829349
51	0,2763124
52	0,2698455
53	0,2635304
54	0,2573635
55	0,2513412
56	0,2454601
57	0,2397168
58	0,234108
59	0,2286306
60	0,2232815

**Tableau 9 : facteurs d'actualisation calculés.**

Swaps															
1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans	15 ans	20 ans	30 ans	40 ans	50 ans	60 ans
101,423	1,315	1,376	1,544	1,725	1,915	2,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	101,315	1,376	1,544	1,725	1,915	2,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	101,376	1,544	1,725	1,915	2,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	101,544	1,725	1,915	2,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	101,725	1,915	2,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	101,915	2,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	102,071	2,19	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	102,219	2,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	102,296	2,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,389	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,675	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,692	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,562	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,553	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,57	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,257	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576

Swaps															
1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans	15 ans	20 ans	30 ans	40 ans	50 ans	60 ans
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102,576

Tableau 10 : matrice CF observée.

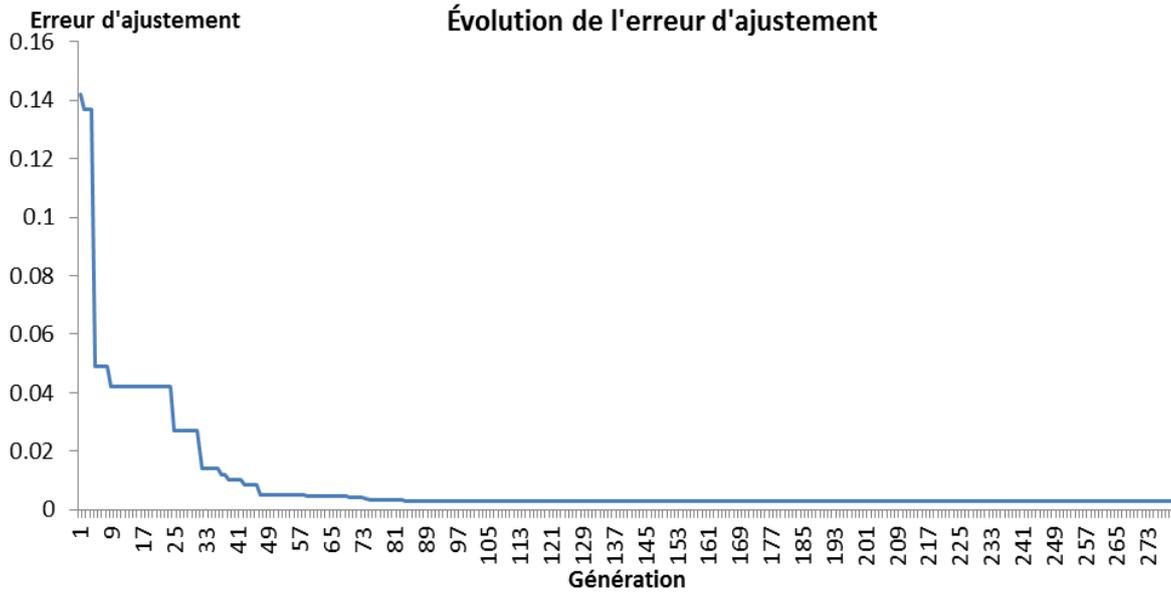


Figure 17 : évolution de l'erreur d'ajustement au cours du déroulement de l'algorithme.

Etant donné que nous appliquons le même algorithme sur toutes les dates  $t_1, \dots, t_{Nd}$  de la période étudiée, il apparaît judicieux d'utiliser à la date  $t_{i+1}$  comme population initiale  $(\theta_1^{(0)}(t_{i+1}), \dots, \theta_d^{(0)}(t_{i+1}))$  la population solution  $(\theta_1^*(t_i), \dots, \theta_d^*(t_i))$  trouvée à la date précédente  $t_i$  (cf. Figure 18). Ainsi, moins d'itérations seront nécessaires pour que l'algorithme converge, d'où alors un gain en temps de calcul.

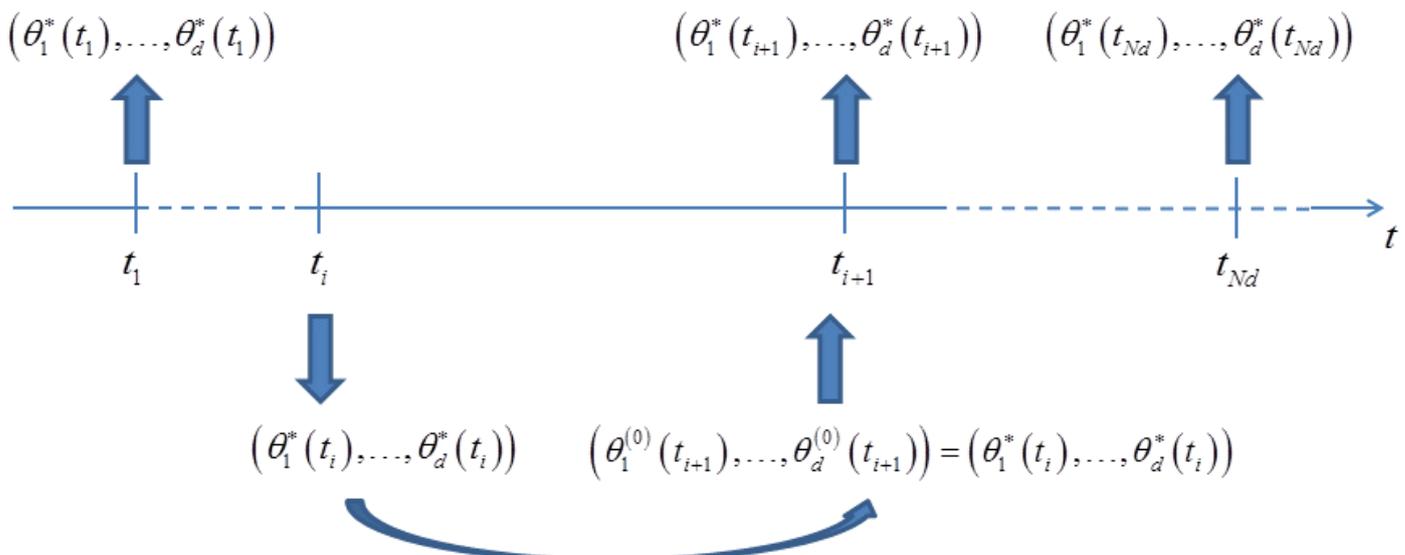


Figure 18 : la population est initialisée à l'instant  $t_{i+1}$  avec la solution trouvée à l'instant  $t_i$ .

En vue de la satisfaction aux contraintes (30) imposées aux paramètres, nous utilisons une fonction de pénalité (cf. section 5.3.5.1 de l'annexe).

Enfin, nous utilisons le paramétrage suivant :

Nombre d'itérations à la date initiale $t_1$	:	$n_G = 280$
Nombre d'itérations aux autres dates $t_i (i \in 1, Nd)$	:	$n_G/2 = 140$
Taille de la population $n_p$	:	$n_p = 100$
Taille du pas $F$	:	$F = 0,5$
Probabilité de permutation $CR$	:	$CR = 0,99$

### 5.2.3.2 Prise en compte des taux à court terme

Le segment long terme est traité comme évoqué à la section ci-dessus. En revanche, le segment court terme est généré à partir des FRA sur Euribor 3 mois ou 6 mois, les taux correspondant aux maturités manquantes sont complétés par les taux Euribor équivalents. Le Tableau 11, le Tableau 12 et le Tableau 13 affichent les taux FRA respectivement sur Euribor 3 mois et 6 mois.

Date de démarrage	Bid	Ask	Moyenne des deux cours
1X4	1,195	1,245	1,2200
2X5	1,095	1,145	1,1200
3X6	1,033	1,083	1,0580
4X7	0,988	1,038	1,0130
5X8	0,95	0,97	0,9600
6X9	0,93	0,96	0,9450
7X10	0,9	0,92	0,9100
8X11	0,877	0,927	0,9020
9X12	0,89	0,91	0,9000

**Tableau 11 : taux FRA sur Euribor 3 mois observés le30/12/2011 (heure de clôture 15:28:54).**

Date de démarrage	Taux
1X7	1,44
2X8	1,35
3X9	1,29
4X10	1,24
5X11	1,19
6X12	1,17

**Tableau 12 : taux FRA sur Euribor 6 mois observés le30/12/2011 (heure de clôture 15:28:54).**

Maturité	Taux
1 mois	1,024
2 mois	1,178
3 mois	1,356
4 mois	1,435
5 mois	1,518
6 mois	1,617
7 mois	1,675
8 mois	1,737
9 mois	1,791
10 mois	1,844
11 mois	1,895
12 mois	1,947

**Tableau 13 : taux Euribor observés le30/12/2011 (heure de clôture 15:28:54).**

Une question qui vient à l'esprit concerne le choix du taux court terme : faut-il utiliser uniquement les taux Euribor ou doit-on les combiner avec les taux FRA sur indice Euribor 3 mois ou 6 mois ? La Figure 19 affiche les taux

zéro-coupon court terme tirés des FRA sur indice Euribor 3 mois, des FRA sur indice Euribor 6 mois et des taux Euribor. La partie court terme de la courbe des taux sans risque est irrégulière et les taux Euribor semblent comporter un *spread* implicite. C'est pourquoi nous optons pour les taux FRA.

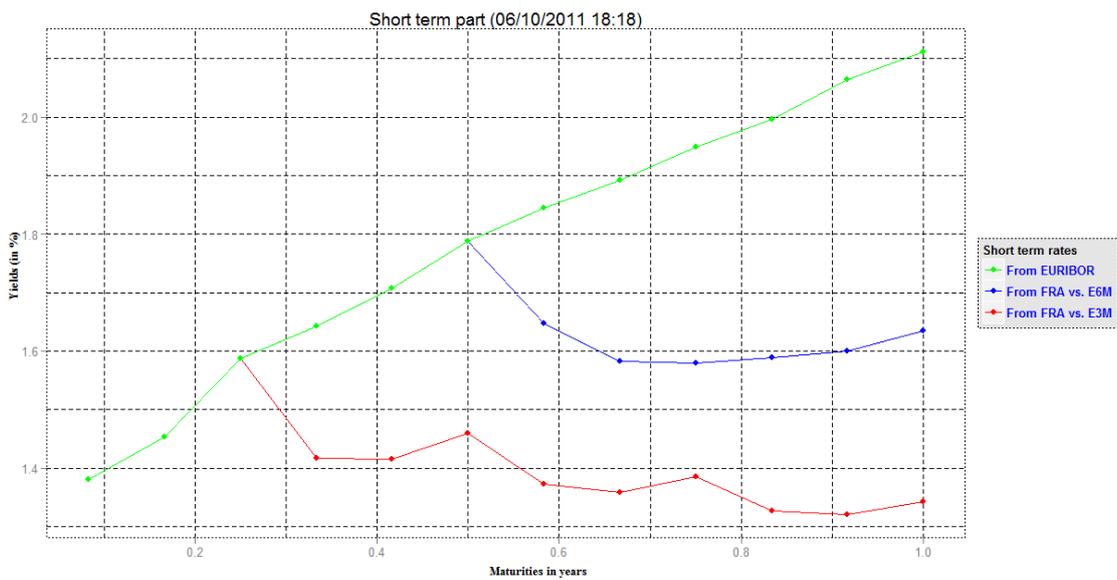
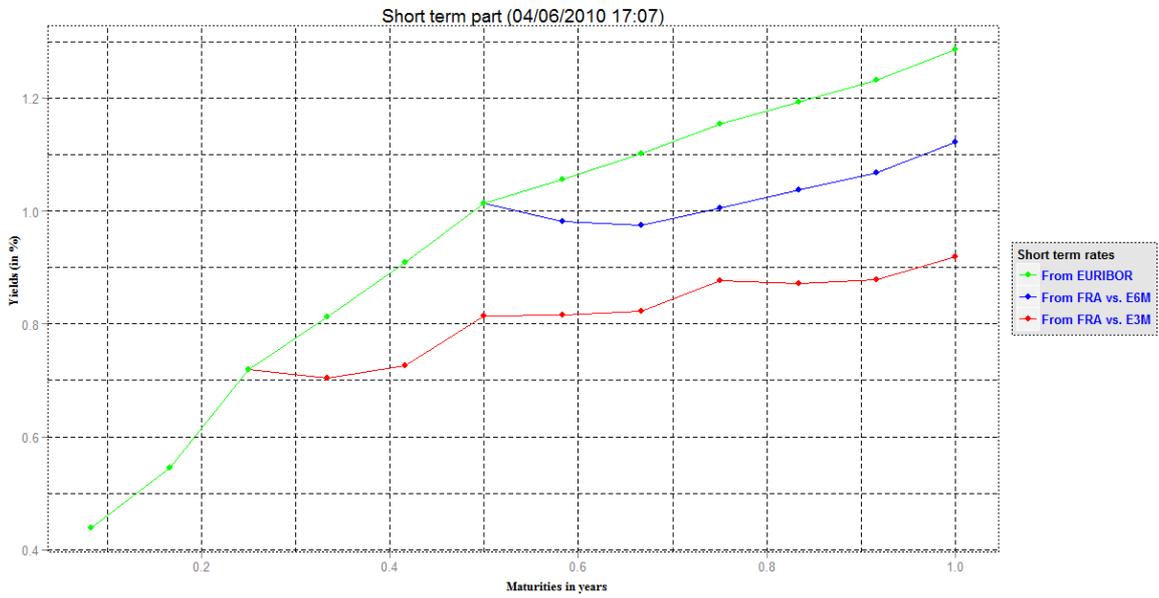
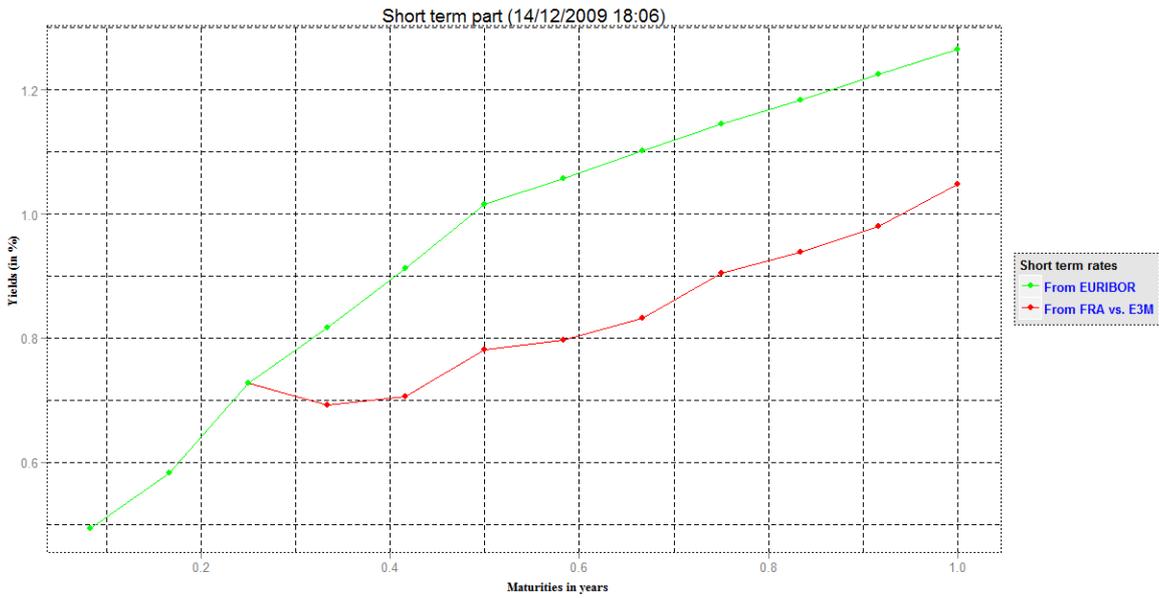


Figure 19 : Segments court terme.

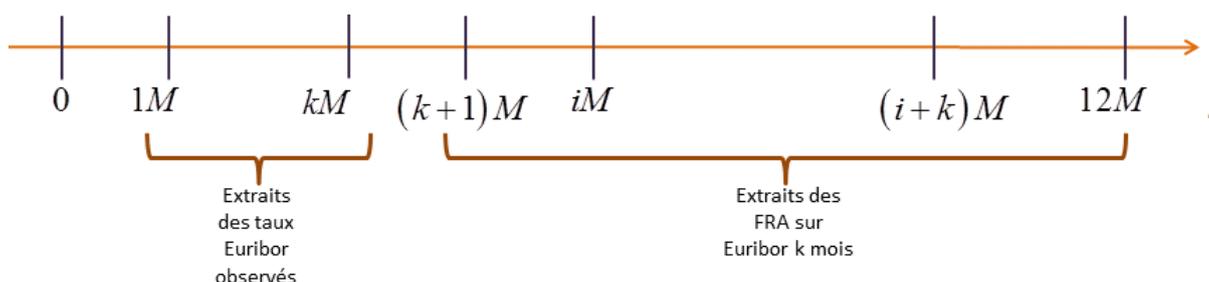
Les taux court terme (c'est-à-dire de maturité inférieure à 1 an) sont des taux proportionnels et sont cotés en base exacte sur 360. Il faut donc les convertir préalablement en taux actuariels (ou composés) en base exacte sur 365 pour obtenir les taux zéro-coupon recherchés. En revanche, nous ne distinguons pas les jours ouverts des jours fermés. Une formule plus fine prendrait en compte uniquement les jours ouverts, les jours fermés étant les jours fériés et les weekends. La conversion du taux proportionnel  $TE(d)$  de maturité  $d$  en un taux actuariel  $ZC(d)$  de même maturité s'effectue selon la formule ci-dessous :

$$1 + ZC(d) = \left( 1 + \frac{d}{N_{a_1}} TE(d) \right)^{\frac{N_{a_2}}{d}} \quad (78)$$

Avec :

- $N_{a_1} = 360$  jours
- $N_{a_2} = 365$  jours

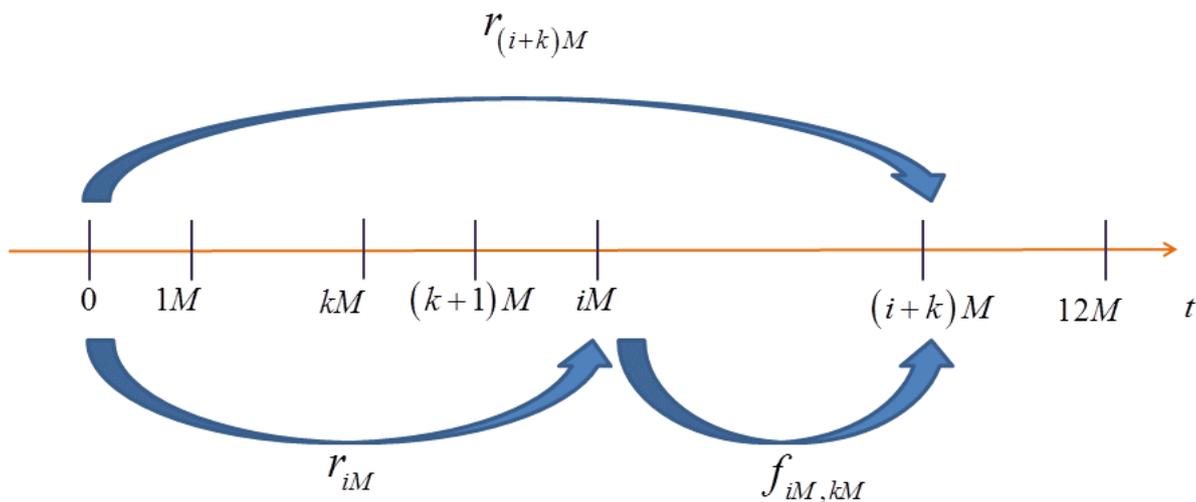
Considérons un FRA sur Euribor  $k$  mois ( $k$  étant égal à 3 ou 6). Les taux qui correspondent aux maturités  $1M$  à  $kM$  sont directement tirés des taux Euribor, tandis que ceux qui correspondent aux maturités  $(k+1)M$  à  $(12-k)M$  sont bootstrappés à partir des taux FRA. La Figure 20 et la Figure 21 illustrent ce processus.



**Figure 20 : origines des taux zéro-coupon.**

Chaque taux  $r_{(k+i)M}$  ( $i \in 1, 2, \dots, 12-k$ ) est bootstrappé à partir du taux  $r_{iM}$  bootstrappé à une étape précédente et du taux FRA  $f_{iM, kM}$  coté, qui démarre dans  $i$  mois et sur une durée de  $k$  mois, selon l'équation (79) :

$$r_{(k+i)M} = (1 + r_{iM})^{\frac{i}{(k+i)}} (1 + f_{iM, kM})^{\frac{k}{(k+i)}}, \forall i \in 1, 2, \dots, 12-k \quad (79)$$



**Figure 21** : calcul du taux  $r_{(i+k)M}$  à partir du taux  $r_{iM}$  et du taux forward  $f_{iM, kM}$ .

Une fois la courbe des zéro-coupons obtenue pour les maturités de 1 à 12 mois, la calibration consiste à minimiser l'erreur quadratique  $\xi$ , somme des erreurs quadratiques  $\xi_{ST}$  et  $\xi_{LT}$  :

$$\xi = \xi_{ST} + \xi_{LT} \quad (80)$$

L'erreur  $\xi_{LT}$  est déterminée selon l'équation (77), comme expliqué à la section 5.2.3.1, tandis que l'erreur  $\xi_{ST}$  est la différence quadratique entre les taux zéro-coupons observés  $y^{(obs)}(iM)$  et les taux zéro-coupons  $y^{(mod)}(iM)$  calculés selon l'équation (29) :

$$\xi_{ST} = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \left( y^{(mod)}(iM) - y^{(obs)}(iM) \right)^2} \quad (81)$$

## 6. Analyse des résultats

### 6.1. Segment long terme

#### 6.1.1. Interpolation linéaire

Comme attendu, la courbe obtenue par interpolation linéaire est anguleuse (cf. Figure 22).

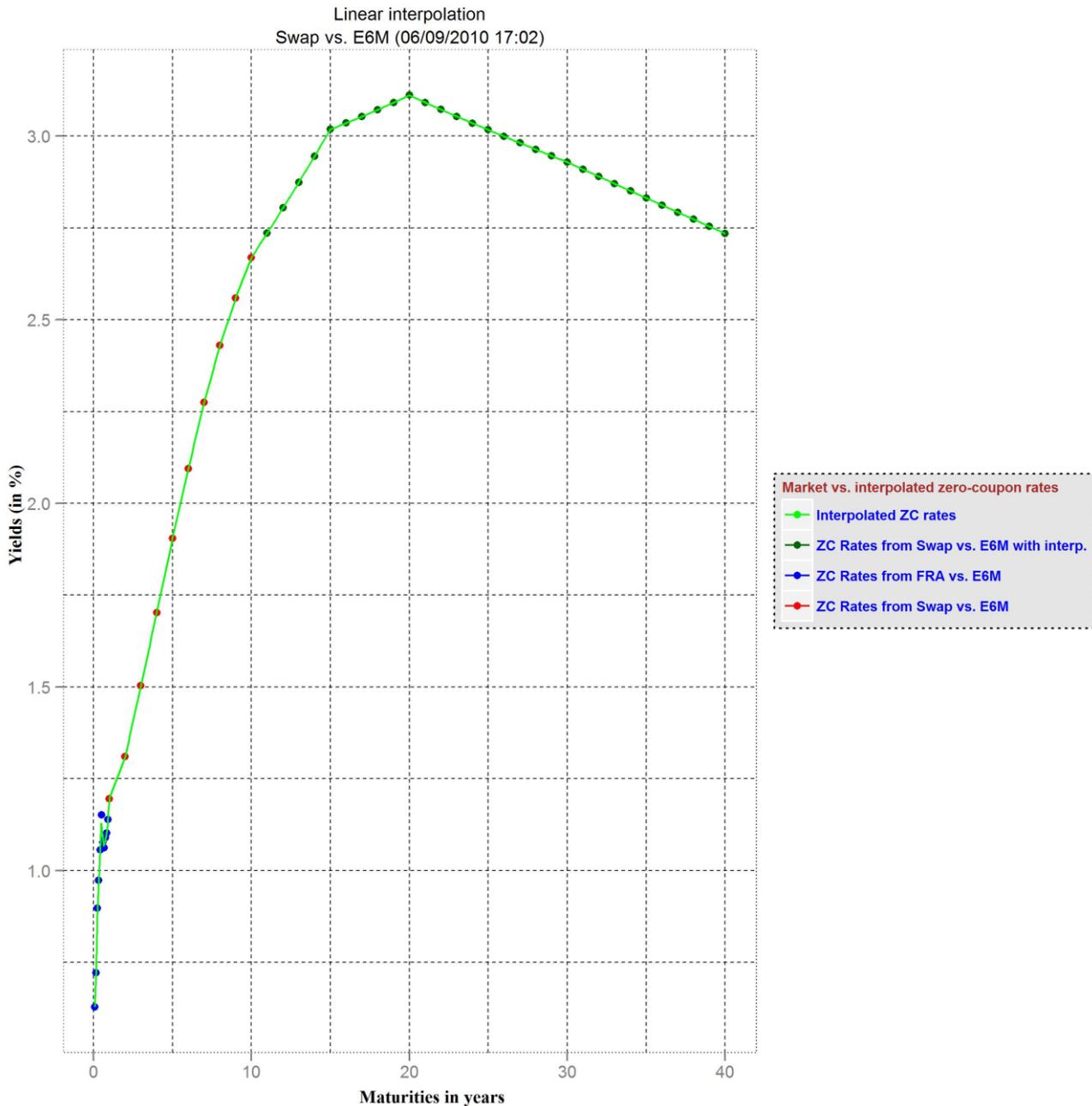


Figure 22 : courbe de taux construite par simple interpolation linéaire.

### 6.1.2. Interpolation de Smith et Wilson

La convergence asymptotique de la courbe vers l'UFR est d'autant plus rapide que le paramètre  $\alpha$  est élevé. En outre, la courbe a tendance à devenir instable ou saccadée pour les valeurs élevées de  $\alpha$ . C'est pourquoi il est préférable de ne pas prendre une valeur trop élevée pour ce paramètre. En outre, une valeur trop faible ferait converger trop lentement la courbe des taux sans risque. La courbe est lisse jusqu'à la maturité 20 ans, puis est agitée de soubresauts au-delà. Ce caractère « tempétueux » ou « volatile » s'accroît avec des valeurs hautes de  $\alpha$ , comme on peut le voir notamment sur la Figure 23 et la Figure 24. Les courbes ainsi obtenues ne seront pas conformes aux directives de l'EIOPA, qui déconseille de mettre en œuvre une méthode d'interpolation susceptible de créer de fortes fluctuations au niveau du segment long terme (cf. paragraphe b de la section 2.3).

Si le segment court terme a une forme régulière, l'interpolation s'effectue correctement. En revanche, s'il a une forme « déchetée », l'interpolation est de piètre qualité, comme en témoigne, par exemple, la courbe en date du 1<sup>er</sup> juillet 2011 affichée par la Figure 23.

Au regard des considérations ci-dessus, nous retenons comme valeur  $\alpha = 0.17$  pour interpolation toutes les courbes de la période considérée.

Nous pouvons considérer que l'interpolation de Smith et Wilson donne des résultats satisfaisants pour construire la courbe de taux sans risque, ce qui n'est pas le cas pour construire la courbe des taux forward instantanés, comme on le verra à la section 6.3 de ce chapitre.

Plusieurs courbes sont disponibles à la section 8.1.1 de l'annexe.

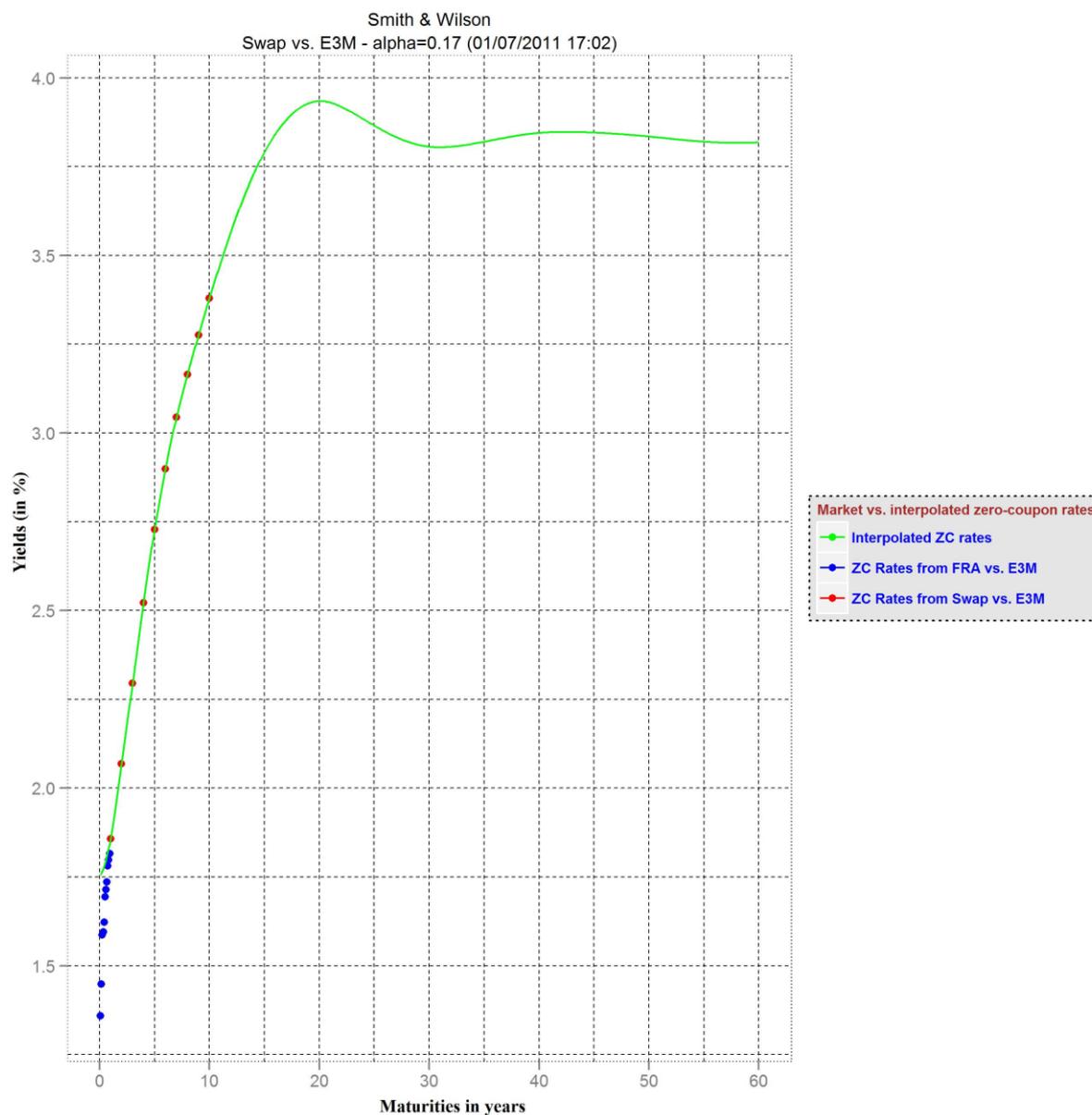
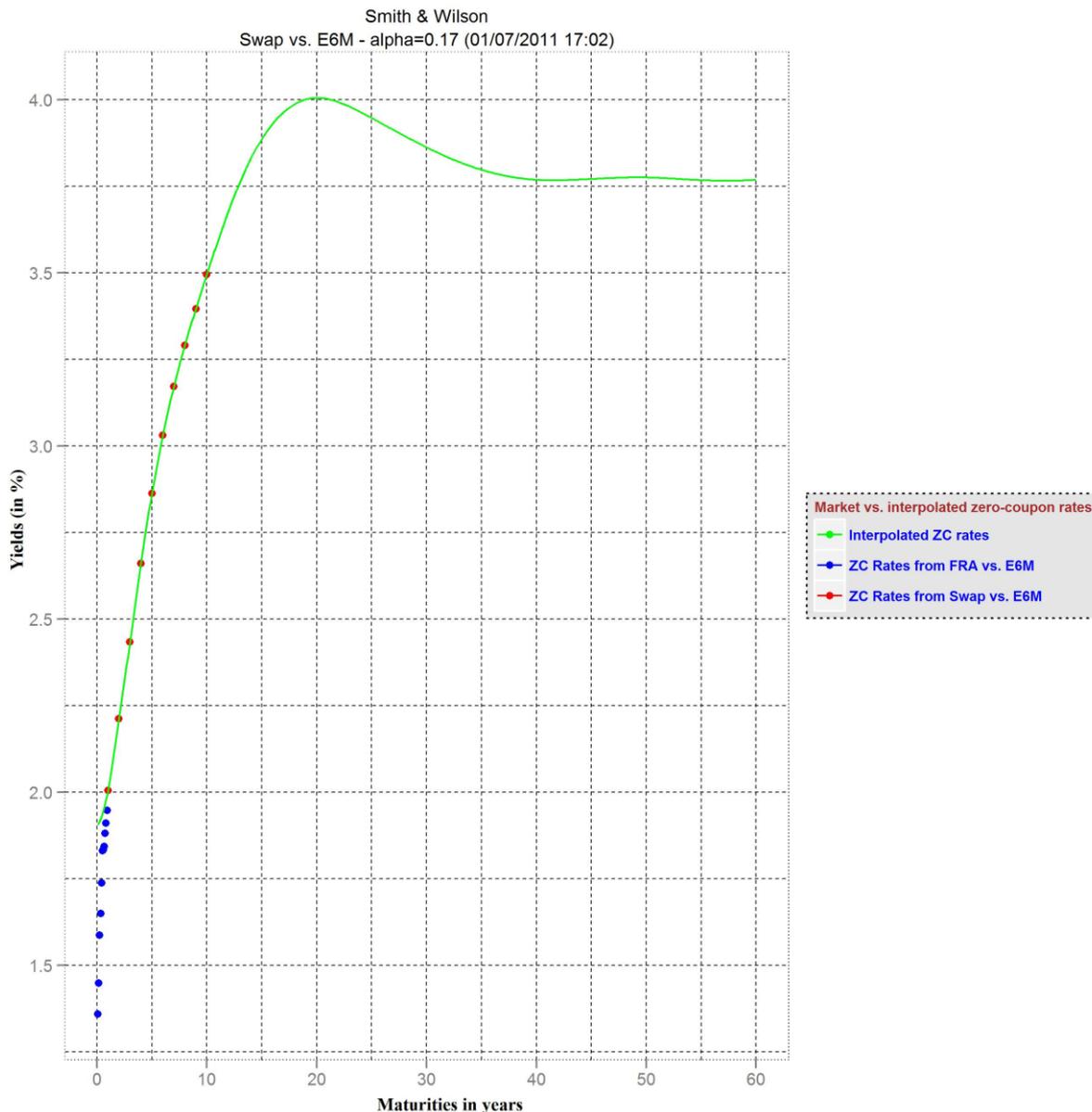


Figure 23 : courbe de taux interpolée avec la méthode Smith et Wilson. Les taux swap vs. Euribor 3 mois sont également affichés.



**Figure 24 : courbe de taux interpolée avec la méthode Smith et Wilson. Les taux zéro-coupon issus des taux swap vs. Euribor 6 mois sont également affichés.**

### 6.1.3. Interpolation de Nelson, Siegel et Svensson

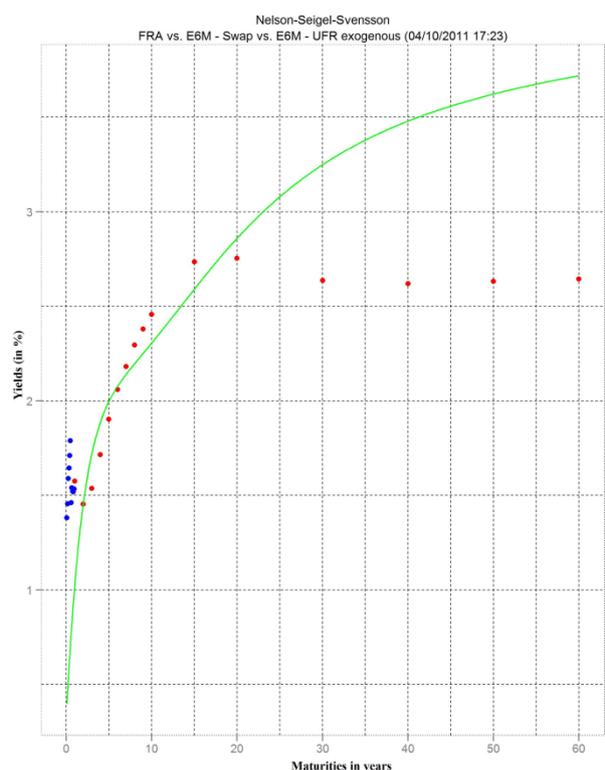
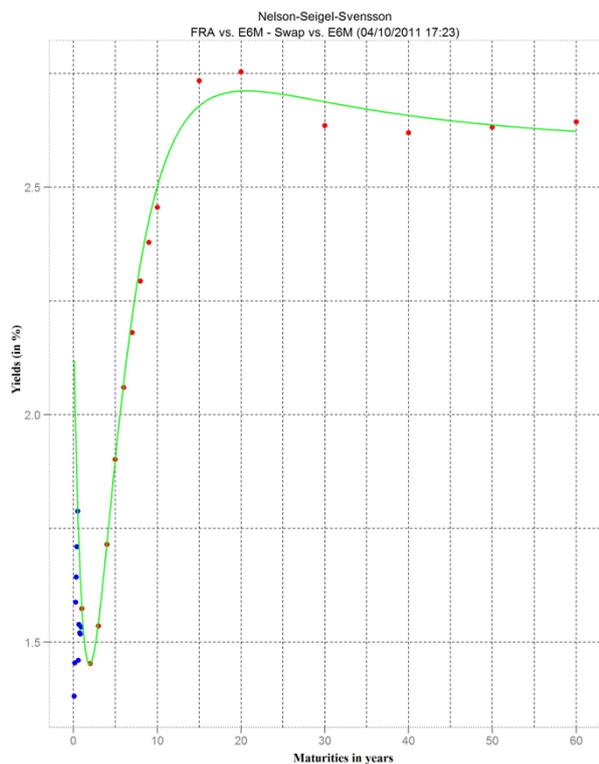
L'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène produit une courbe beaucoup plus harmonieuse que celle produite par l'interpolation de Smith et Wilson.

La convergence asymptotique vers l'UFR est observée dans le cas où l'UFR est exogène. Elle est atteinte à partir de la maturité 60 ans. En outre, comme on le verra à la section 4.1 de ce chapitre, il n'y a pas de convergence asymptotique vers l'UFR, lorsque celui-ci est capturé par l'entremise des données de swaps.

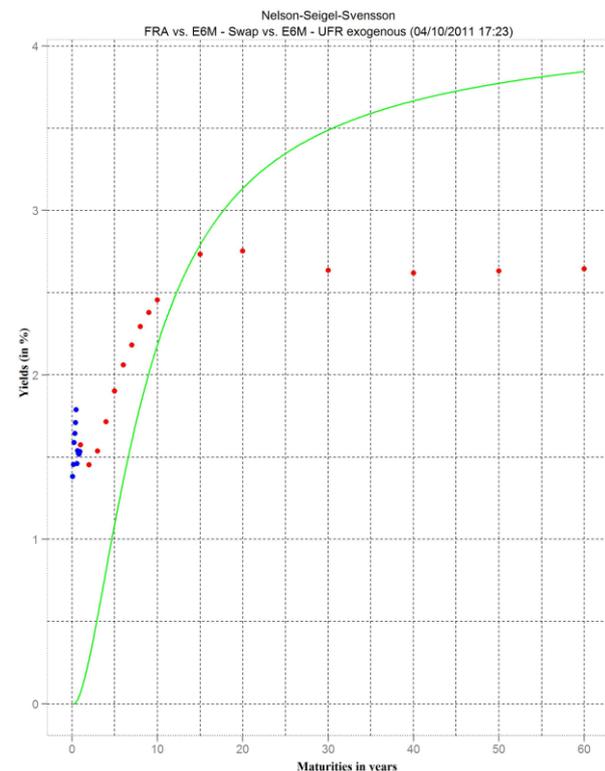
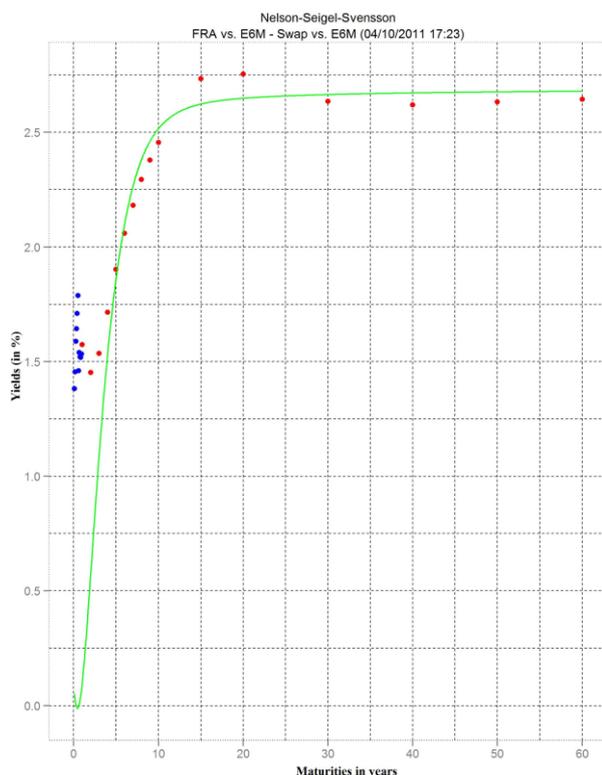
Paradoxalement, comme le montre la Figure 25, la prise en compte des taux à court terme dans le processus de calibration donne une courbe mal ajustée pour les maturités à court terme. En outre, si l'UFR est exogène, l'ajustement est de piètre qualité également pour les maturités à long terme.

Si l'UFR est endogène, dans tous les cas, la courbe est lisse et on ne retrouve pas les soubresauts qui agitent le segment long terme, lorsque la courbe est construite à l'aide de la méthode de Smith et Wilson (cf. 6.1.2).

D'autres courbes sont disponibles à la section 8.1.2 de l'annexe.



Les taux à court terme n'ont pas été pris en compte dans le processus d'interpolation.



Les taux à court terme ont été pris en compte dans le processus d'interpolation.

Figure 25 : Courbes de taux interpolées à l'aide de la méthode de Nelson, Siegel et Svensson. Les taux FRA vs. Euribor 6 mois et les taux Swap vs. Euribor 6 mois sont affichés. La date d'observation est le 4 octobre 2011.

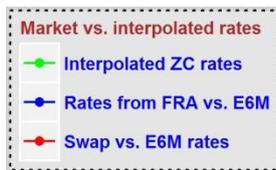


Figure 26 : légendes des courbes.

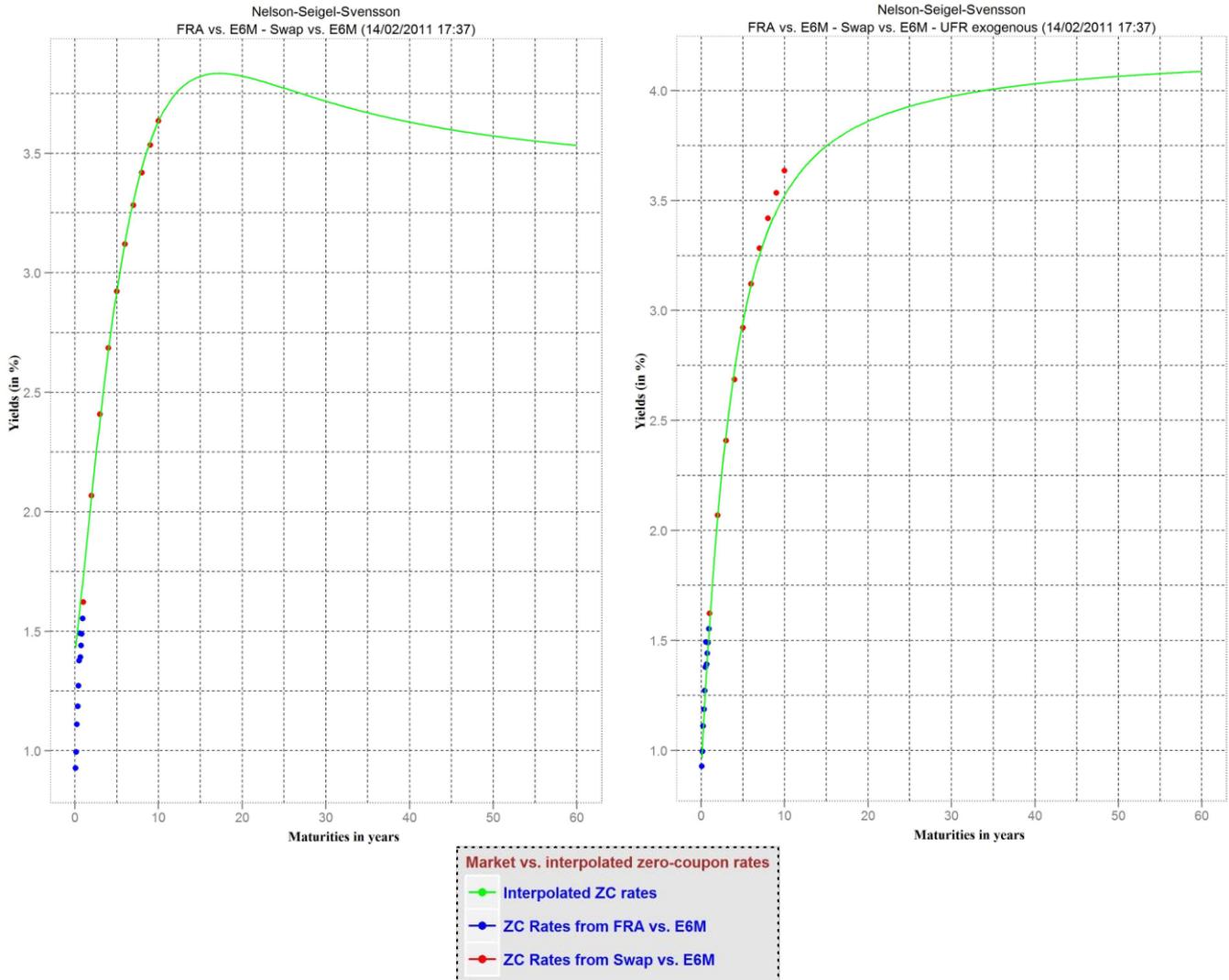
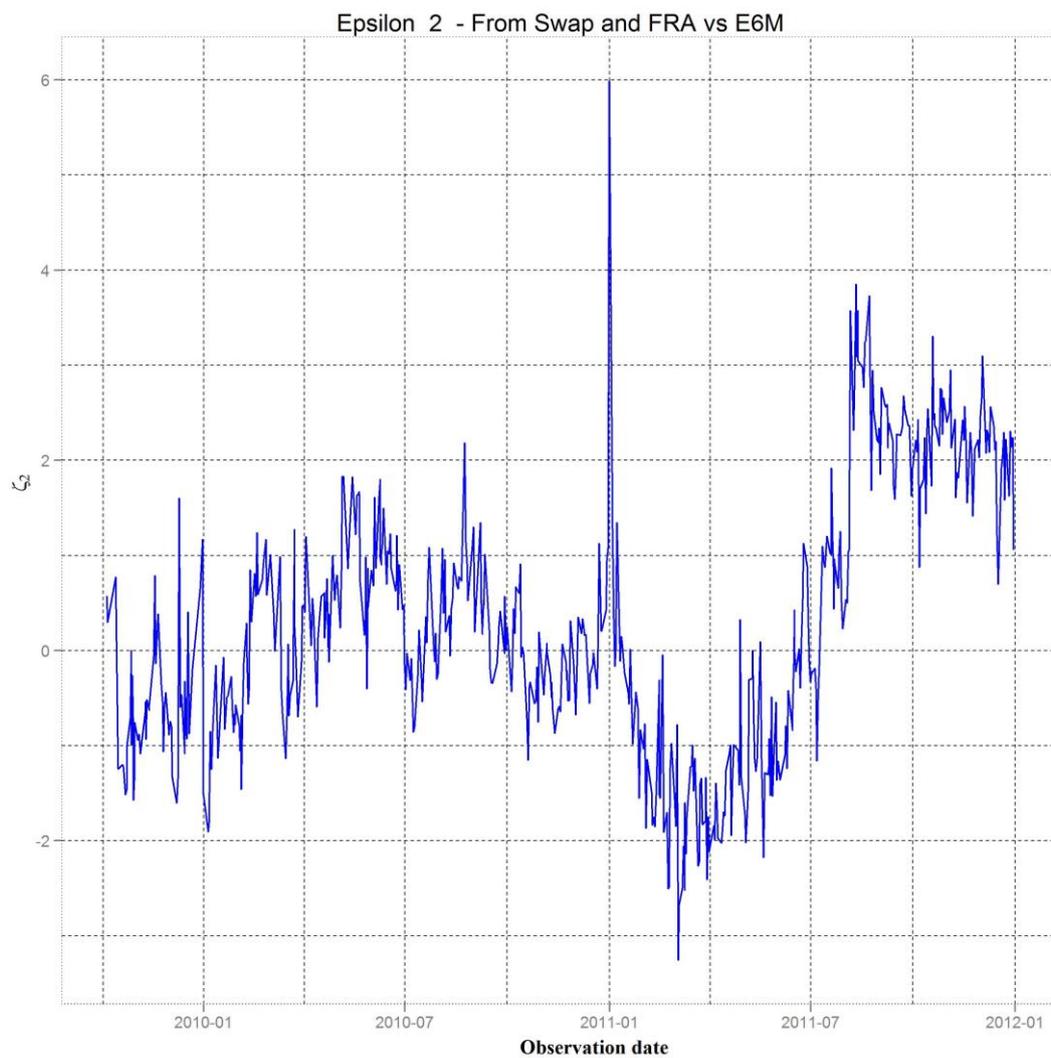


Figure 27 : courbes de taux interpolées à l'aide de la méthode de Nelson, Siegel et Svensson. Les taux zéro-coupon bootstrappés à partir des taux FRA vs. Euribor 6 mois et des taux Swap vs. Euribor 6 mois sont affichés.

## 6.2. Stabilité des paramètres

### 6.2.1. Smith et Wilson

Les paramètres de la fonction noyau  $\zeta_j (j \in \{1, \dots, N\})$  n'ont pas de signe particulier, comme nous pouvons le voir sur la Figure 28 et la Figure 29.



**Figure 28 : évolution du paramètre  $\zeta_2$  durant la période considérée.**

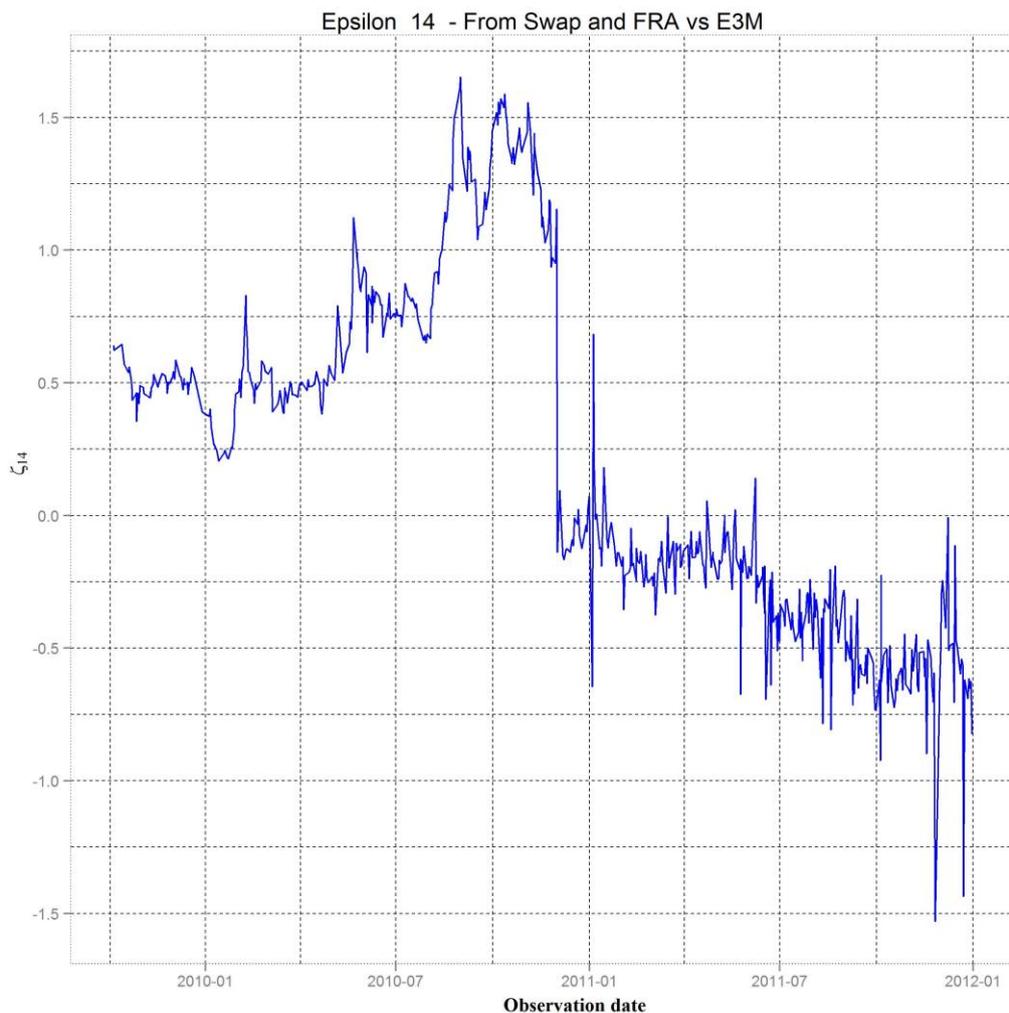


Figure 29 : évolution du paramètre  $\zeta_{14}$  durant la période considérée.

### 6.2.2. UFR endogène

Comme le montrent la Figure 30 et la Figure 31, les évolutions des paramètres ont la même allure, que la courbe soit construite à partir des taux swap sur Euribor 3 mois ou 6 mois. C'est pourquoi nous limiterons notre analyse à la calibration à partir de taux *swap* sur Euribor 6 mois, les valeurs étant affichées dans les tableaux ci-dessous.

Le paramètre  $\beta_1$  n'oscille pas autour de l'UFR. Les prévisions macro-économiques ne sont pas reflétées par les données sur les taux de *swap* sur Euribor. Nous distinguons trois grandes tendances. Les taux à long terme affichent une tendance baissière jusqu'en mai 2010, puis une tendance haussière jusqu'en juillet 2011 et enfin de nouveau une tendance baissière jusqu'en décembre 2011.

Le paramètre  $\beta_2$  (respectivement le spread  $-\beta_2$ ) exhibe une tendance haussière (respectivement baissière) tout au long de la période étudiée. L'écart ne cesse donc de se combler entre les taux à long terme et ceux à court terme, pour atteindre, vers la fin de la période, la valeur de 0,6881.

Les paramètres de courbure  $\beta_3$  et  $\beta_4$  évoluent de façon opposée de façon plus ou moins prononcée et ont leurs évolutions respectives sont marquées par les mêmes dates clés. Le premier paramètre  $\beta_3$  est négatif tout au long de la période, ce qui implique que la première courbure est un creux. Le second paramètre  $\beta_4$  est, quant à lui, positif tout au long de la période, ce qui implique que la seconde courbure est une bosse. D'octobre à Mai 2010,  $\beta_3$  affiche une tendance baissière, tandis que  $\beta_4$  affiche une tendance haussière. De mai 2010 à janvier 2011, les choses sont beaucoup plus nuancées :  $\beta_3$  affiche une tendance légèrement haussière, tandis que  $\beta_4$  a une trajectoire en creux, dont le point le plus bas atteint 3,2 courant septembre 2010. Ensuite, de nouveau un

revirement de tendances, de janvier 2011 à mai 2011,  $\beta_3$  a une tendance haussière et  $\beta_4$  a une tendance baissière. De mai 2011 à juillet 2011,  $\beta_3$  a une trajectoire décroissante et  $\beta_4$  a une trajectoire légèrement croissante. Enfin, de juillet 2011 jusqu'à décembre 2011, les deux paramètres n'ont pas de tendance spécifique :  $\beta_3$  oscille entre -5,5 et -2,5, et  $\beta_4$  entre 2 et 5. La première courbure est plus accentuée pendant cette dernière période.

Les paramètres d'échelle  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont remarquablement stables jusqu'en juillet 2011. Le premier paramètre d'échelle  $\lambda_1$  est très proche de 2,5, tandis que le second paramètre est voisin de 5. La première courbure, qui est une crevasse, se produit aux alentours de la maturité 2,5 ans, alors que la seconde courbure, qui est, quant à elle, une bosse, se produit au voisinage de la maturité 5 ans. En revanche, de juillet 2011 jusqu'à la fin de la période, le paramètre  $\lambda_1$  diminue pour osciller de façon plus erratique entre 1,6 et 2, autrement dit la première courbure se produit plus tôt, entre les maturités 1,6 et 2 ans. Au cours de la même période, le paramètre  $\lambda_2$  conserve la même valeur, toutefois avec des pics baissiers intermittents, dont le plus bas descend à 4,636. En outre, à chaque date, les paramètres d'échelle ont des valeurs bien distinctes.

Les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont telles que les poids des bêtas (*factor loadings*) ne prennent pas des valeurs extrêmes (proches de 0 ou très grandes). Aucun problème d'identification des bêtas ne se pose donc et la corrélation entre ces derniers est faible (cf. 4.3.3).

Une explication à ces résultats « remarquables » résiderait dans « l'astuce » introduite dans le processus de calibrage, qui consiste à utiliser comme valeurs initiales des paramètres à une date donnée la solution trouvée à la date précédente (cf. 5.2.3.1). Comme les taux varient peu d'un jour à l'autre, il en est de même pour les paramètres optimaux. Si, dès la première date, la solution est cohérente, les solutions trouvées aux dates suivantes le seront également.

Jusqu'en juillet 2011, la courbe garde la même forme, ce qui change, ce sont la pente et l'asymptote, étirant ou contractant la courbe au gré des attaques spéculatives contre la monnaie européenne. Au-delà de cette date, la courbe devient plus changeante. Cependant, la première courbure est un creux, tandis que la seconde courbure est une bosse.

L'erreur d'ajustement  $\varepsilon$  est de l'ordre du millième. Elle affiche une tendance baissière d'octobre 2009 à juin 2010, puis une tendance haussière jusqu'à avril 2011, de nouveau une tendance baissière jusqu'à juillet 2011, et enfin se stabilise tout au long du reste de la période pour osciller entre 0,002287 et 0,0045. Curieusement, l'ajustement s'avère meilleure à partir de juillet 2011, moment à partir duquel les deux paramètres d'échelle ont un comportement « houleux ». On peut observer cela sur la Figure 38.

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
$\beta_1$	2,333	2,831	3,258	3,256	3,625	4,289	0,4789376
$\beta_2$	-3,959	-2,311	-1,967	-2,071	-1,434	-0,6881	0,811345
$\beta_3$	-6,633	-4,84	-4,129	-3,757	-2,548	-0,5976	1,412286
$\beta_4$	1,08	2,771	3,631	3,713	4,553	7,827	1,358164
$\lambda_1$	1,532	2,498	2,5	2,353	2,5	2,5	0,2892895
$\lambda_2$	4,636	4,999	5	4,993	5	5	0,03582829
$\varepsilon$	0,002287	0,003152	0,004034	0,00445	5,57E-03	8,14E-03	0,001543721

**Tableau 14 : courbes des taux zéro-coupons à partir des swaps sur indice Euribor 3 mois. UFR endogène.**

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
$\beta_1$	2,264	2,786	3,165	3,201	3,555	4,3	0,4900304
$\beta_2$	-3,73	-2,118	-1,7	-1,773	-1,141	-0,169	0,8738926
$\beta_3$	-6,701	-4,857	-4,259	-3,851	-2,642	-0,6839	1,359903
$\beta_4$	1,481	3,22	4,168	4,14	4,842	8,23	1,303465
$\lambda_1$	1,538	2,499	2,5	2,357	2,5	2,5	0,291396
$\lambda_2$	4,707	4,999	5	4,995	5	5	0,02405879
$\varepsilon$	0,002475	0,003587	0,004432	0,004866	0,005925	0,00882	0,001582907

Tableau 15 : courbes des taux zéro-coupons à partir des swaps sur indice Euribor 6 mois. UFR endogène.

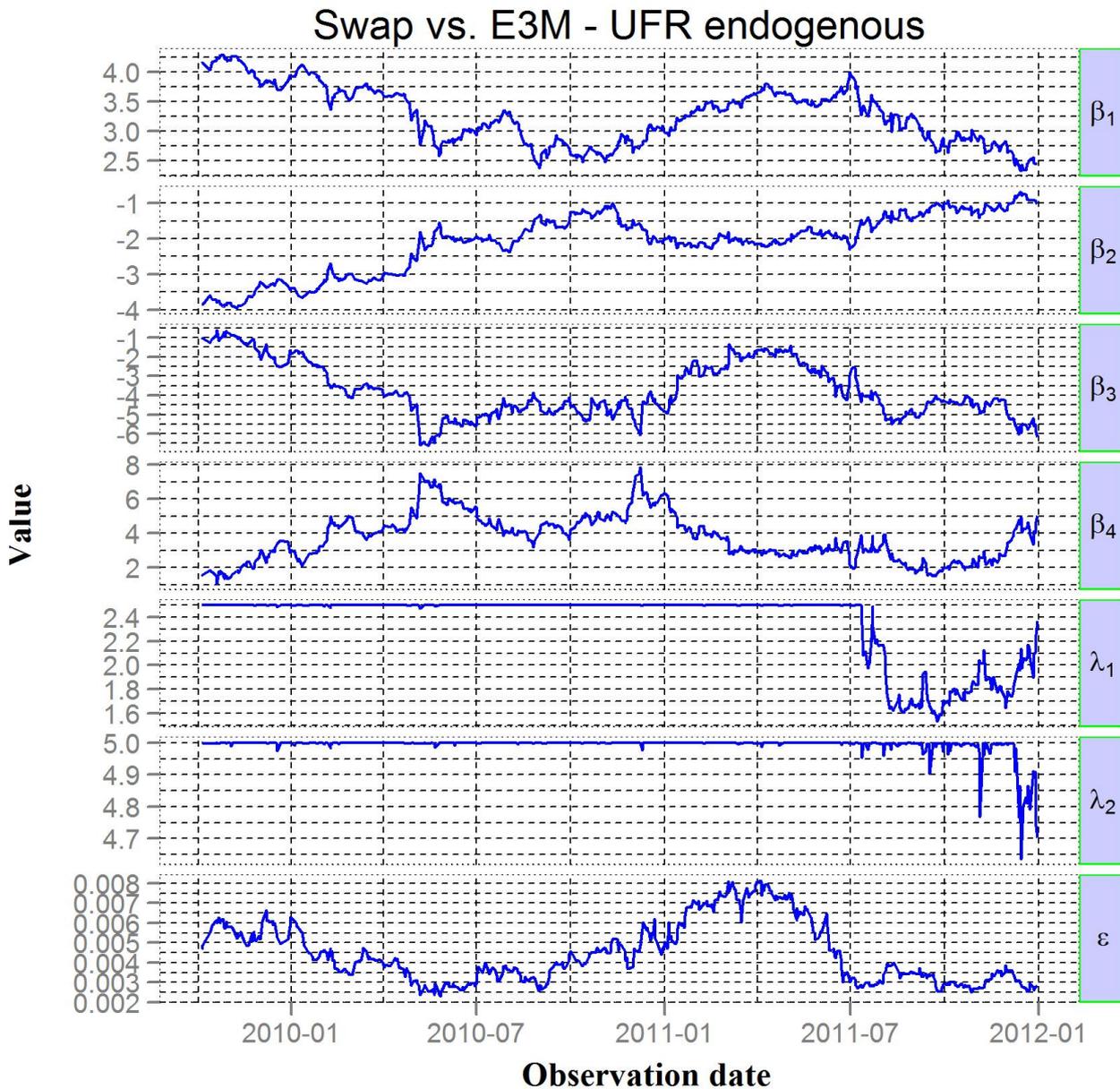


Figure 30 : évolution des paramètres de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène, dans le cas de courbes générées à partir des taux swap vs. Euribor 3 mois.

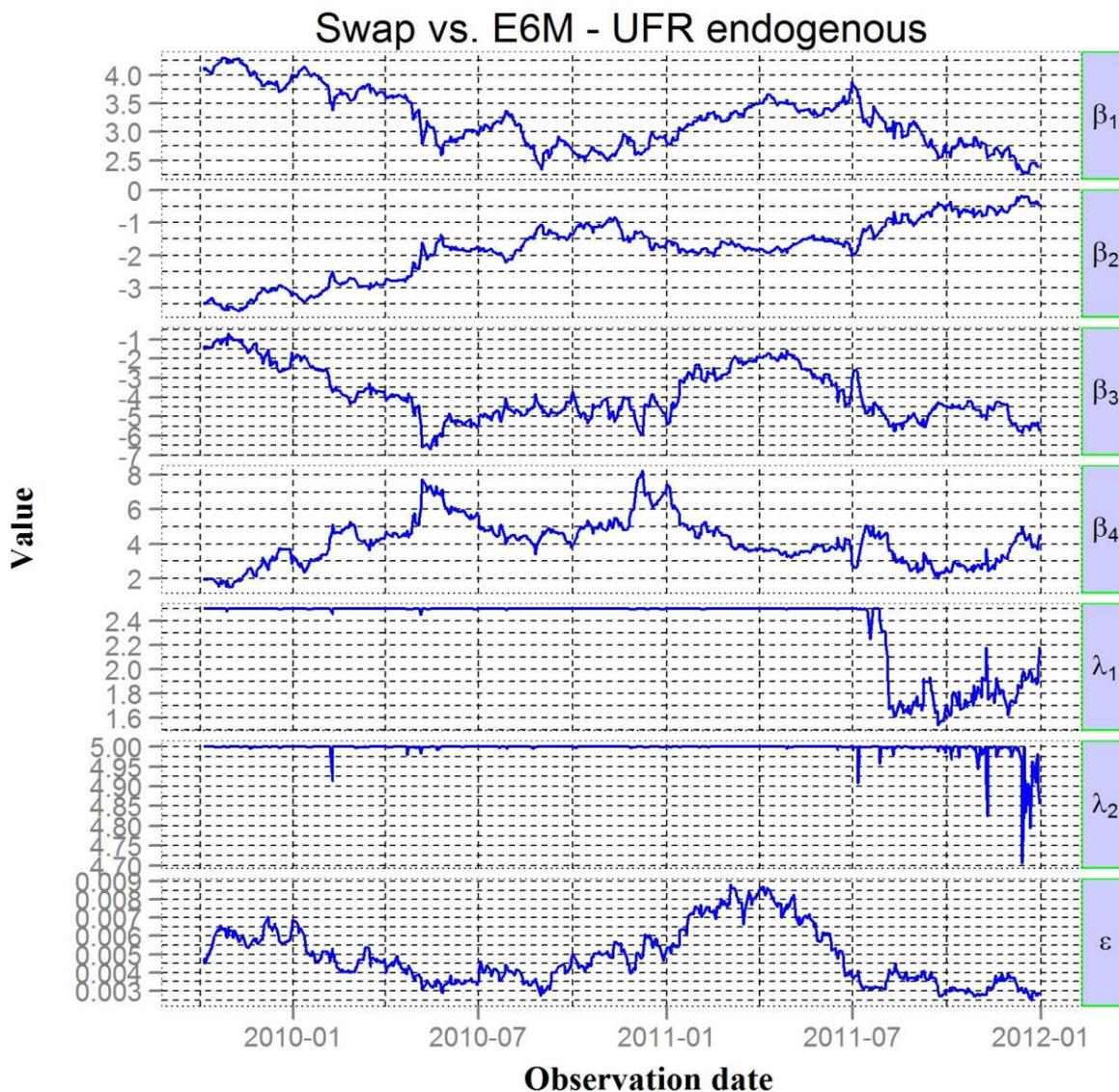


Figure 31 : évolution des paramètres de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène, dans le cas de courbes générées à partir des taux swap vs. Euribor 6 mois.

### 6.2.3. UFR exogène

On peut faire la même observation lorsque l'UFR est exogène. Comme le montrent la Figure 32 et la Figure 33, les évolutions des paramètres ont la même allure, que la courbe soit construite à partir des taux *swap* sur Euribor 3 mois ou 6 mois. C'est pourquoi nous limiterons notre analyse à la calibration à partir de taux *swap* sur Euribor 6 mois, les valeurs étant affichées dans les tableaux ci-dessous.

Bien entendu, contraindre le paramètre  $\beta_1$  à l'UFR a pour effet d'augmenter l'erreur d'ajustement  $\varepsilon$ , qui est alors de l'ordre du centième.

La tendance haussière (respectivement baissière) qu'exhibait auparavant le *spread*  $-\beta_2$  exhibe tout au long de la période étudiée est moins marquée. L'écart ne cesse donc de se creuser entre les taux à long terme et ceux à court terme.

La tendance haussière (respectivement baissière) qu'exhibait précédemment le paramètre  $\beta_2$  (respectivement le *spread*  $-\beta_2$ ) tout au long de la période étudiée est moins marquée ; elle est entachée de baisses (respectivement de hausses) comme en avril 2010, en janvier 2011, en octobre 2011, en novembre 2011 ou en décembre 2011. En outre, l'écart type est presque deux fois moindre : il vaut 0,4720644, alors que, dans le cas

où l'UFR est endogène, il vaut 0.811345. L'écart a tout de même tendance à combler entre les taux à long terme et ceux à court terme. Vers la fin de la période, il atteint 3,8.

Le premier paramètre d'échelle  $\lambda_1$  est remarquablement stable tout au long de la période, bien qu'il affiche une certaine instabilité caractérisée par des pics baissiers (néanmoins négligeables), dont le plus profond descend à 2,485. La première courbure, qui est une bosse, se produit au voisinage de la maturité 2,5 ans. Le second paramètre d'échelle  $\lambda_2$ , quant à lui, est étonnamment stable jusqu'en juillet 2011, malgré plusieurs perturbations entre août et novembre 2010, où la valeur oscille entre 2,5 et 3,1. La seconde courbure, qui est également une bosse, se produit à la maturité 2,5 ans (les deux courbures sont alors confondues). Après juillet 2011, le paramètre  $\lambda_2$  est fortement perturbé et les fluctuations varient entre 2,5 et 4,757. De plus, les variations de  $\lambda_2$  sont 100 fois plus étendues que celles de  $\lambda_1$ , l'écart type du premier paramètre valant 0,001758826 et celui du second paramètre 0.4610178. En outre, les paramètres d'échelle prennent des valeurs bien distinctes.

Comme dans le cas où l'UFR est endogène, les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont telles que les poids des bêtas (*factor loadings*) ne prennent pas des valeurs extrêmes (proches de 0 ou très grandes). Aucun problème d'identification des bêtas ne se pose donc et la corrélation entre ces derniers est faible (cf. 4.3.3).

Nous donnons la même explication à ces résultats « remarquables » que dans le cas où l'UFR est endogène.

Le premier paramètre  $\beta_3$  est positif tout au long de la période, ce qui implique que la première courbure est une bosse. Le second paramètre  $\beta_4$  est, quant à lui, négatif tout au long de la période, ce qui implique que la seconde courbure est un creux. Dans le cas où l'UFR est endogène, on a l'inverse qui se produit. Les paramètres  $\beta_3$  et  $\beta_4$  n'affichent pas de tendance particulière. Leurs trajectoires respectives sont constituées de pics successifs, ceux de  $\beta_3$  ayant une tendance opposée à ceux de  $\beta_4$  pour une même date de cotation. En revanche, ces deux trajectoires « tempétueuses » sont marquées par deux « accalmies », l'une d'août à octobre 2010, l'autre de septembre à novembre 2011. Au cours de ces deux périodes, la trajectoire de  $\lambda_1$  ne comporte pas de pics, alors qu'elles coïncident avec les deux périodes d'instabilité de  $\lambda_1$ .

L'erreur d'ajustement  $\varepsilon$  est stable jusqu'en juillet 2011, puis augmente jusqu'à la fin de la période considérée. Elle est, comme on devait s'y attendre, plus élevée que lorsque l'UFR est endogène : dans le premier cas, elle vaut en moyenne 0,004866 et dans le second 0,0201, soit un rapport de 20.

Jusqu'en juillet 2011, la courbe garde la même forme, ce qui change, ce sont la pente et l'asymptote, étirant ou contractant la courbe au gré des attaques spéculatives contre la monnaie européenne. Au-delà de cette date, la courbe devient plus changeante. La forme de la courbe résultante est en quelque sorte l'inverse de la courbe résultante lorsque l'UFR est endogène : la première courbure est une bosse et la seconde un creux lorsque l'UFR est exogène, la première courbure est un creux et la seconde une bosse lorsque l'UFR est endogène.

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ème</sup> quartile	Maximum	Écart type
$\beta_1$	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0
$\beta_2$	-4,443	-4,046	-3,566	-3,577	-3,103	-2,689	0,4979101
$\beta_3$	2,841	4,022	6,388	8,569	11,53	29,48	5,90437
$\beta_4$	-29,19	-11,91	-7,133	-9,759	-6,115	-2,621	5,623673
$\lambda_1$	2,471	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	0,001758826
$\lambda_2$	2,5	2,5	2,5	2,694	2,546	4,757	0,4610178
$\varepsilon$	0,007815	0,01263	0,01488	0,01858	0,021	0,04774	9,05E-03

**Tableau 16 : courbes des taux zéro-coupons à partir des swaps sur indice Euribor 3 mois. UFR exogène.**

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
$\beta_1$	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0
$\beta_2$	-4,261	-3,817	-3,312	-3,363	-2,944	-2,559	0,4720644
$\beta_3$	2,566	3,769	5,941	8,186	10,46	29,27	5,847958
$\beta_4$	-29,63	-11,17	-6,644	-9,167	-5,711	-2,412	5,519989
$\lambda_1$	2,485	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	0,00102999
$\lambda_2$	2,5	2,5	2,5	2,65	2,504	4,81	0,3910816
$\varepsilon$	0,009975	0,01419	0,01628	0,0201	0,02221	0,05083	0,009141316

**Tableau 17 : courbes des taux zéro-coupons à partir des swaps sur indice Euribor 6 mois. UFR exogène.**

## Swap vs. E3M - UFR exogenous

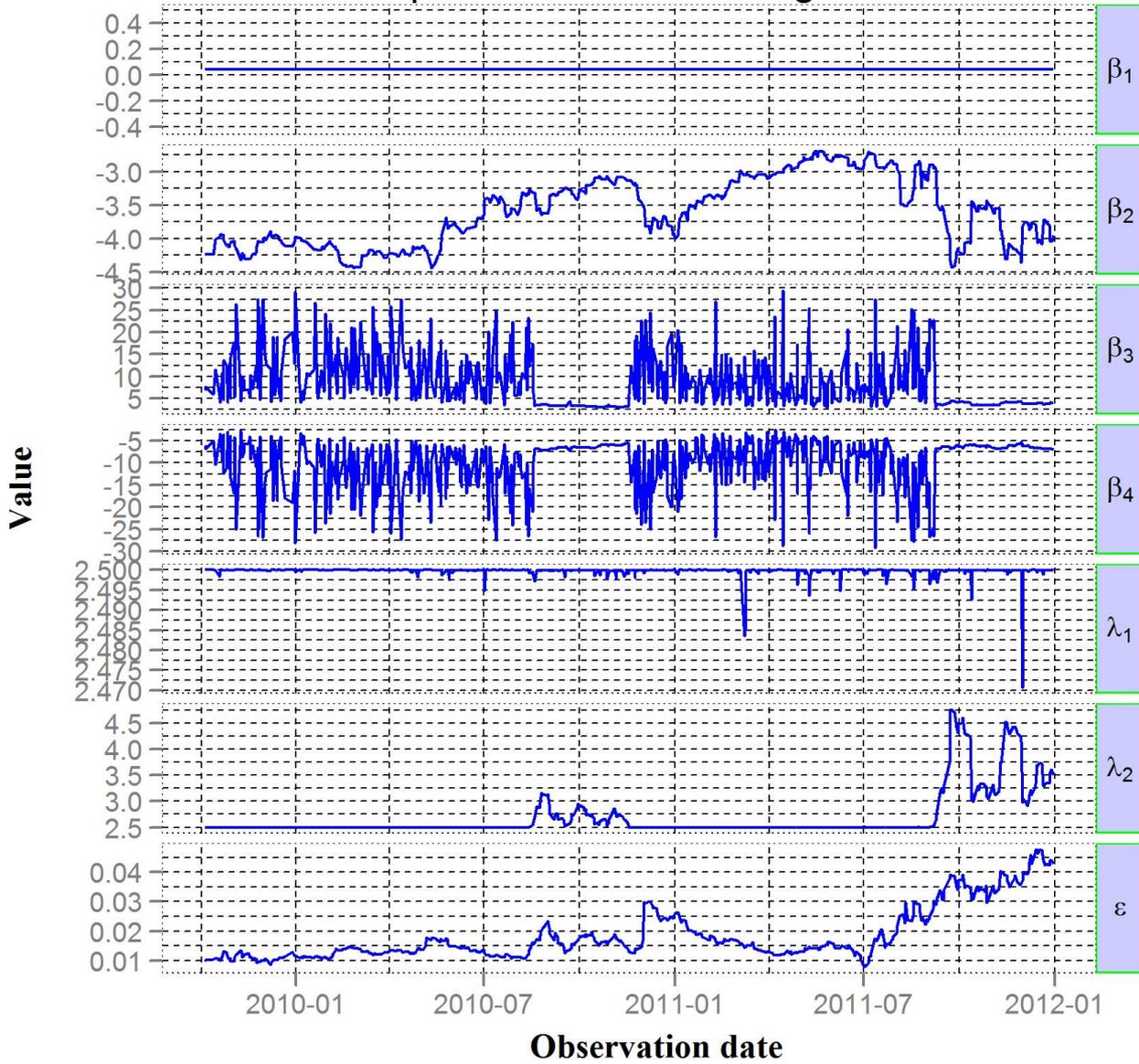


Figure 32 : évolution des paramètres de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR exogène, dans le cas de courbes générées à partir des taux swap vs. Euribor 3 mois.

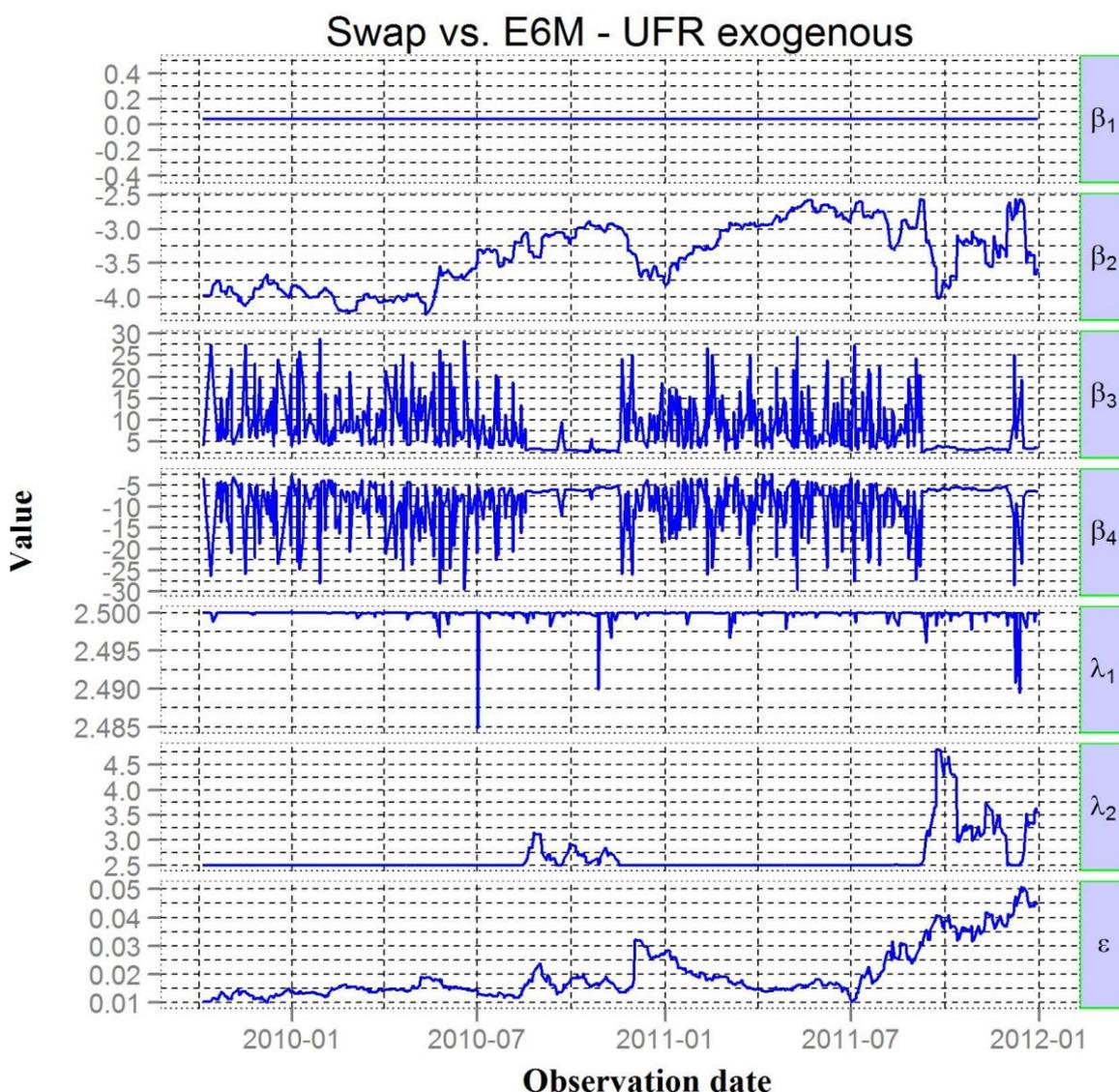


Figure 33 : évolution des paramètres de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR exogène, dans le cas de courbes générées à partir des taux swap vs. Euribor 6 mois.

### 6.3. Choix de la méthode d'interpolation

On décide de ne pas tenir compte des maturités à court terme afin d'obtenir une courbe plus lisse, même si c'est au détriment de la précision.

Un des principaux avantages de la méthode de Nelson, Siegel et Svensson est que ses paramètres sont interprétables économiquement (cf. 4.3.1), contrairement à la méthode de Smith et Wilson.

L'interpolation de Smith et Wilson donne une courbe irrégulière et saccadée des taux forward instantanés, ce qui rejoint les conclusions de JAKOBSEN [2011]. Les courbes de prix des zéro-coupons présentent toutes un changement de convexité au voisinage de la maturité 34 ans. Néanmoins, au cours de la période considérée, aucune croissance locale de la fonction de prix n'a été observée et le taux forward instantané est toujours strictement positif, malgré la remarque soulevée à la section 4.4.5. Les deux aspects sont liés, puisque d'après l'équation (52), la stricte positivité des taux forward instantanés entraîne le caractère strictement croissant de la fonction de prix par rapport à la maturité. Cela est peut-être dû au fait que les courbes de taux ont toutes une structure « normale » et que le facteur de convergence n'est pas trop élevé.

L'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR exogène présente de forts écarts aux maturités à court terme. La courbe ainsi générée tend asymptotiquement vers l'UFR par valeurs supérieures, contrairement à la courbe générée par la même méthode mais avec UFR endogène, qui, elle, tend vers une valeur différente selon la date considérée.

En outre, l'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène présente une meilleure qualité d'ajustement et une forme plus réaliste. En effet, celle avec UFR exogène génère des taux forward instantanés anormalement élevés au voisinage de la maturité 2,5 ans (pouvant dépasser 11%), comme illustré sur les figures ci-dessous.

Au vu des résultats de cette section, nous choisissons l'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène. L'extrapolation du segment à court terme ne se fondera que sur les taux à long terme. Les données utilisées seront les taux *swap* sur indice Euribor 6 mois.

D'autres courbes sont disponibles à la section 8.1.3 de l'annexe.

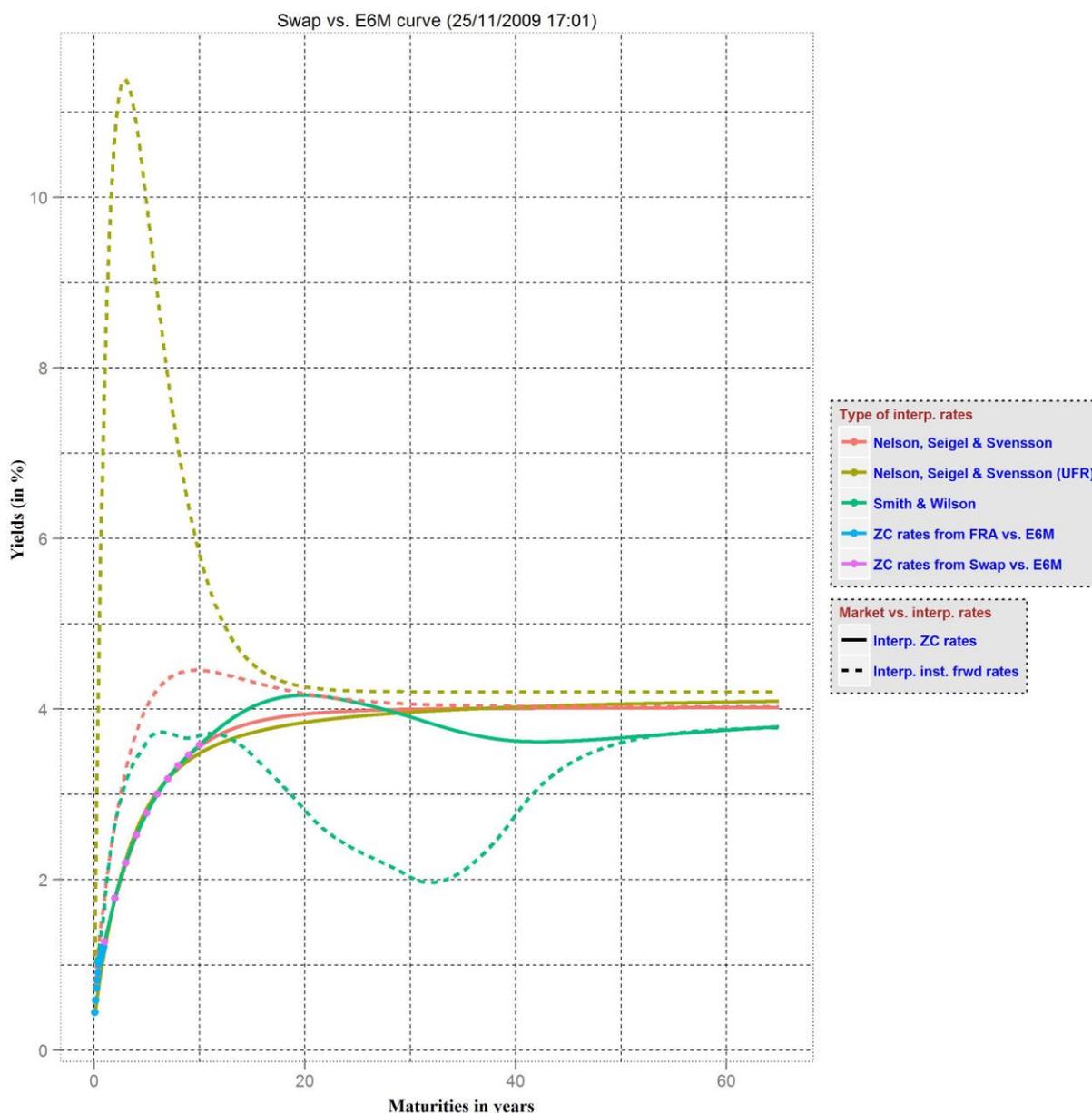


Figure 34 : courbes de taux sans risque en date du 25 novembre 2009 selon différentes méthodes d'interpolation.

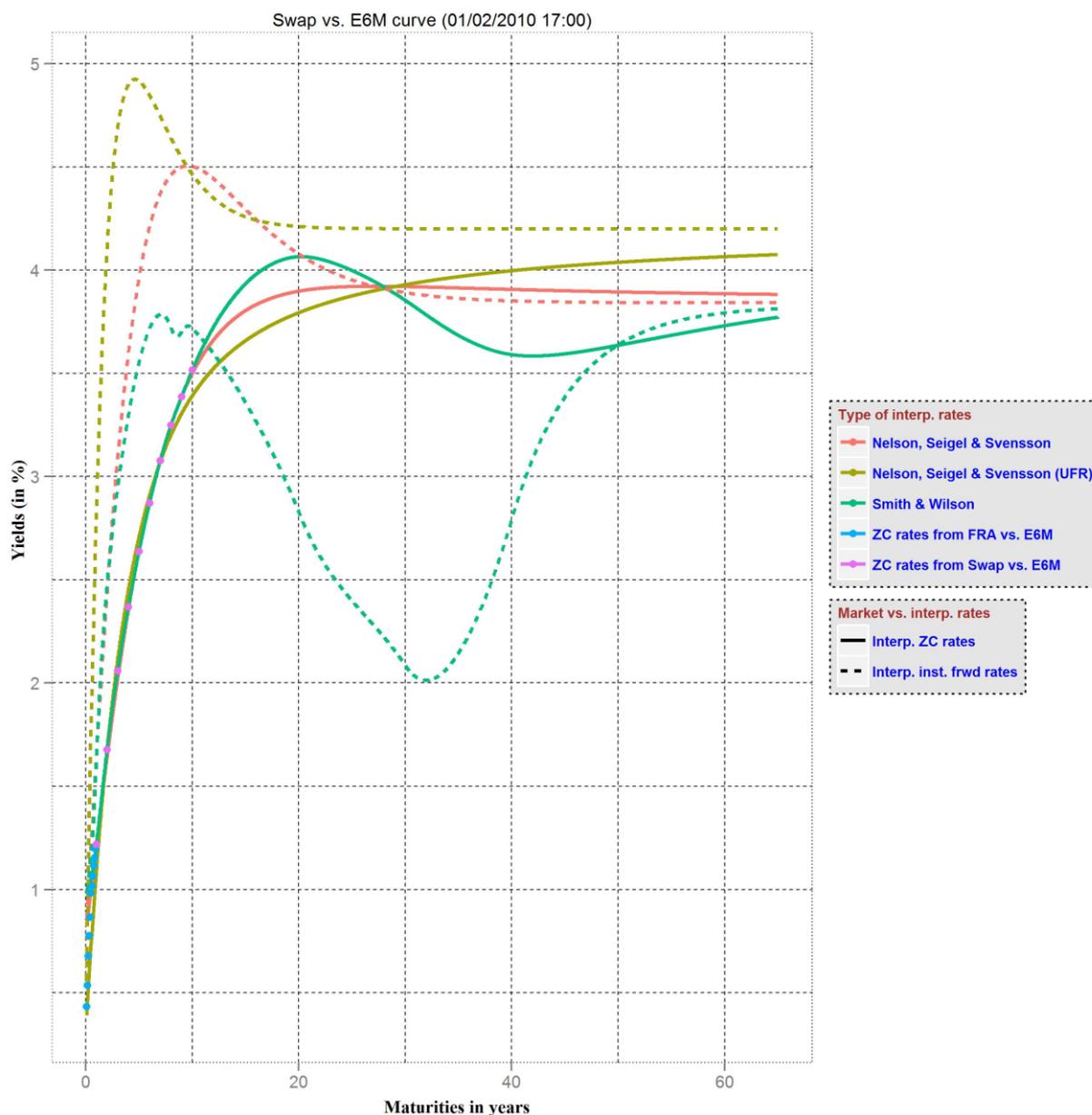
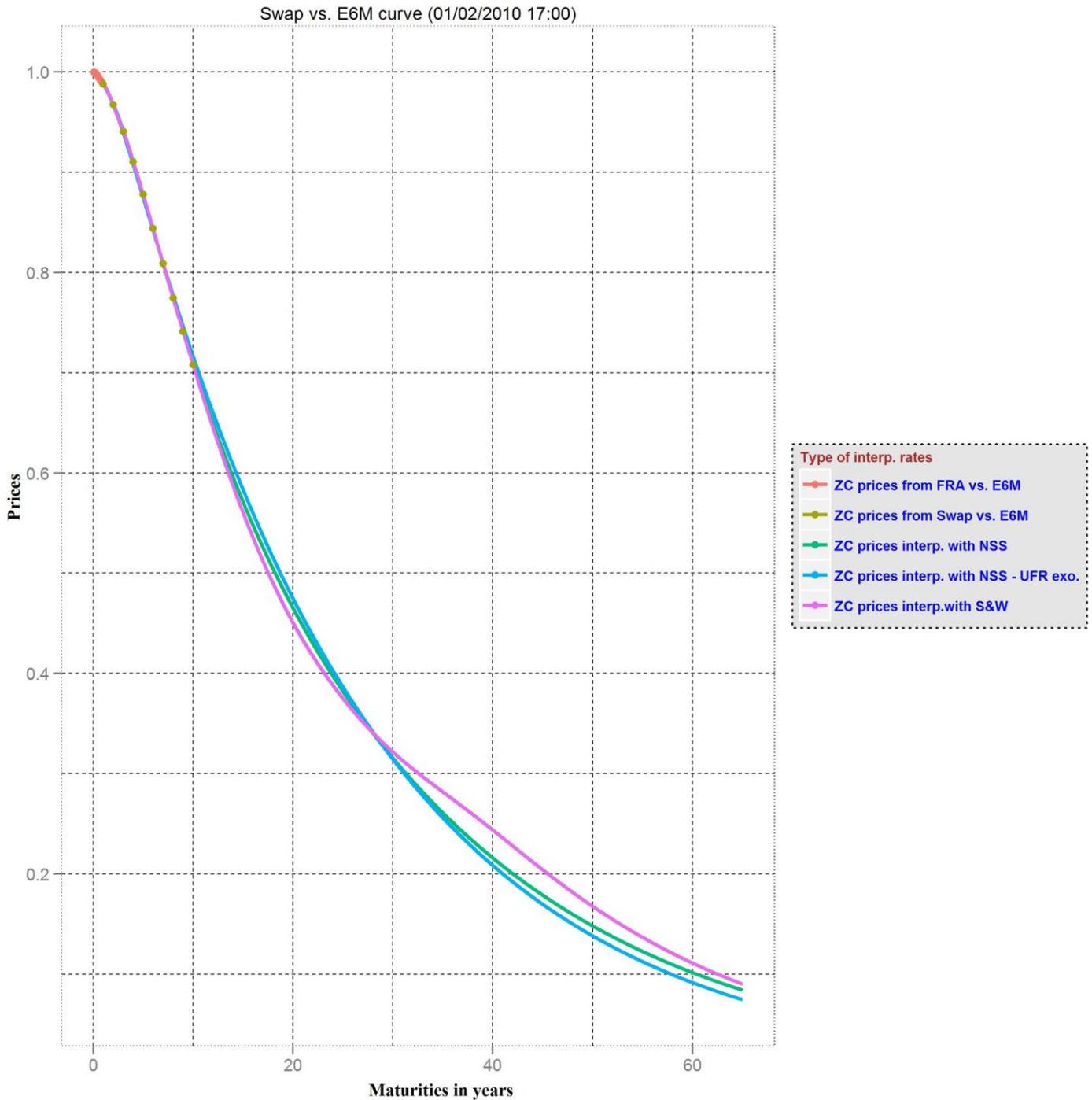
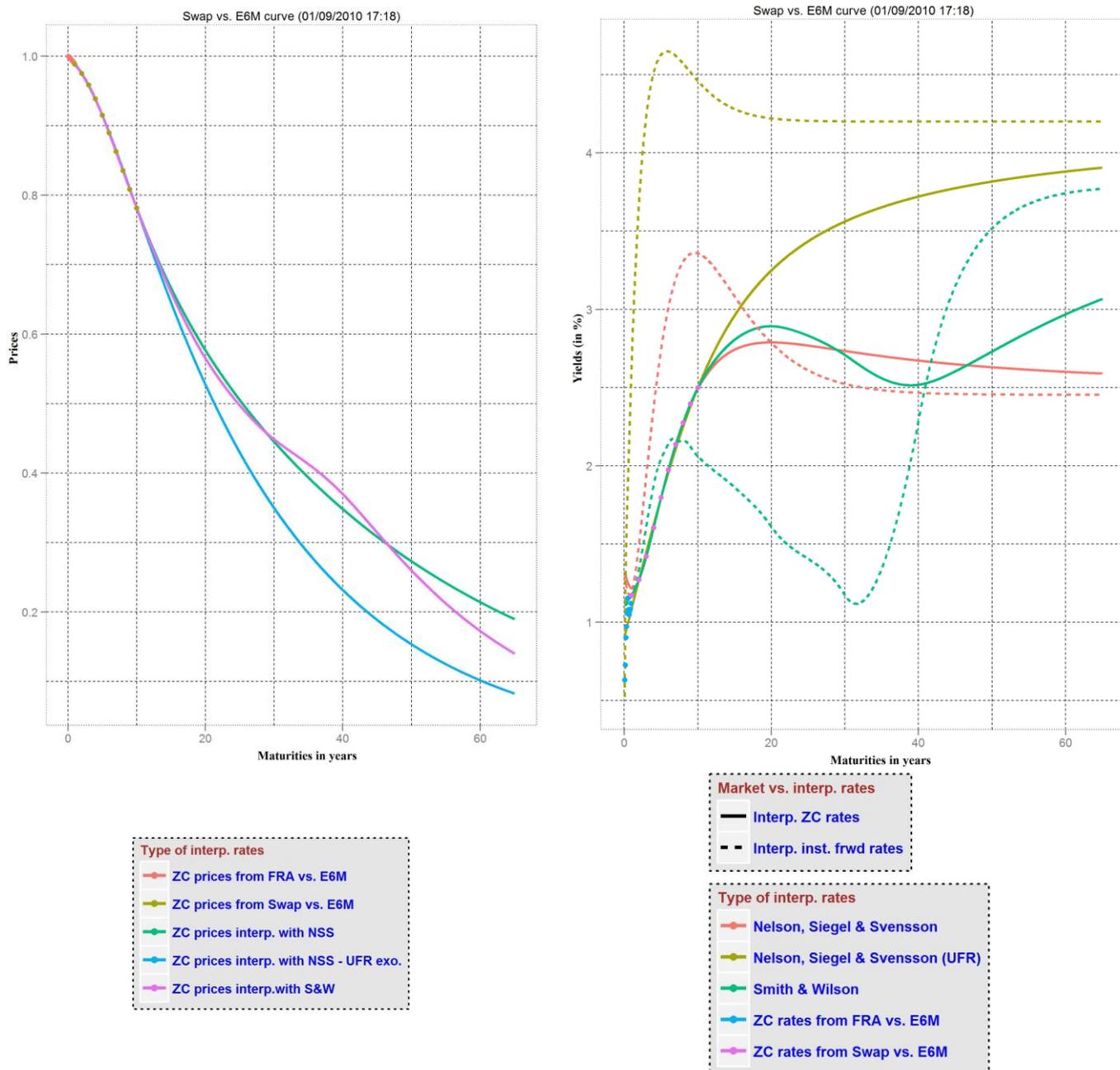


Figure 35 : courbes de taux sans risque en date du 1<sup>er</sup> février 2010 selon différentes méthodes d'interpolation.

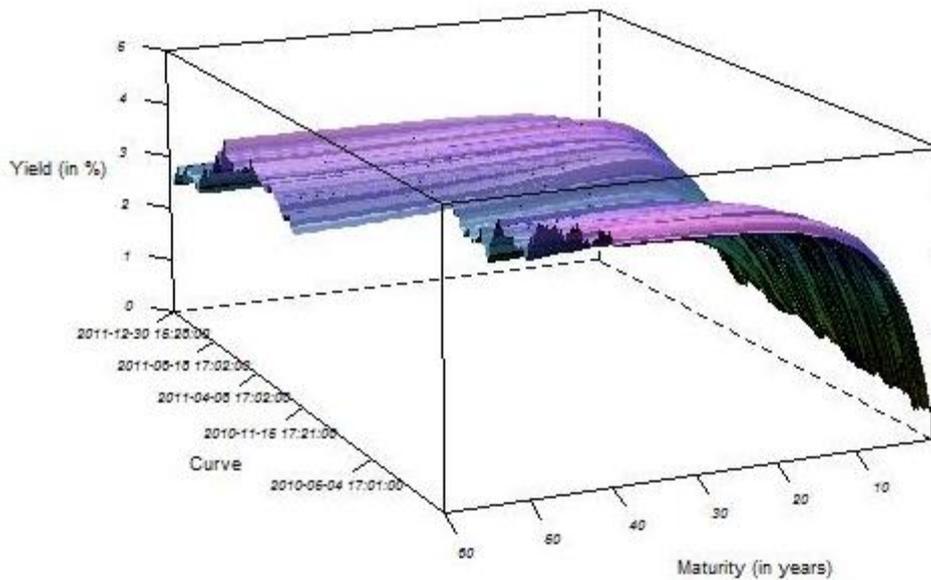


**Figure 36 : courbes de prix en date du 1<sup>er</sup> février 2010 générées selon différentes méthodes d'interpolation. On remarquera la légère « bosse » qui apparaît au voisinage de la maturité 40 ans dans le cas de la courbe de prix générée selon la méthode de Smith et Wilson.**

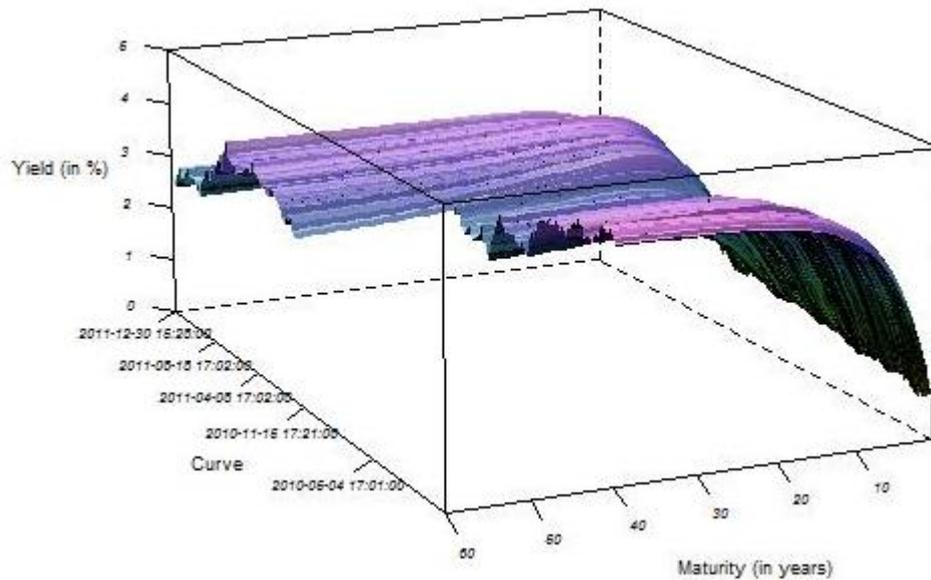


**Figure 37 : comparaison des courbes de prix (à gauche) et des courbes des taux forward instantanés (à droite) en date du 1<sup>er</sup> septembre 2010. En ce qui concerne la méthode de Smith et Wilson, nous relierons la forme houleuse de la courbe des taux forward instantané à la forme légèrement bosselée de la courbe des prix. Le changement de tendance de la courbe des taux forward instantanés au voisinage de la maturité 34 ans (elle était croissante et devient décroissante) explique le changement de convexité de la courbe des prix au voisinage de cette maturité.**

Les formes des courbes sont relativement homogènes, comme le montre la Figure 38. En ce qui concerne la zone euro, la crise économique actuelle agit essentiellement sur les taux à long terme, tendant à les faire augmenter. Ainsi, la force principale à l'œuvre agit sur l'amplitude de la courbe. C'est pourquoi les courbes de la période considérée arborent toutes une structure « classique » et non une structure « dégénérée » (cf. description donnée à la section 6.2.2).



Courbes de taux sans risque obtenues à partir des taux swaps vs. Euribor 3 mois.



Courbes de taux sans risque obtenues à partir des taux swaps vs. Euribor 6 mois.

Figure 38 : vision 3D des courbes de taux sans risque sur la période étudiée. La méthode d'interpolation retenue celle de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène. Note : les maturités 50 et 60 ans sont disponibles uniquement à partir du 1<sup>er</sup> décembre 2010.

## 6.4. Test de prédictibilité

Notons :

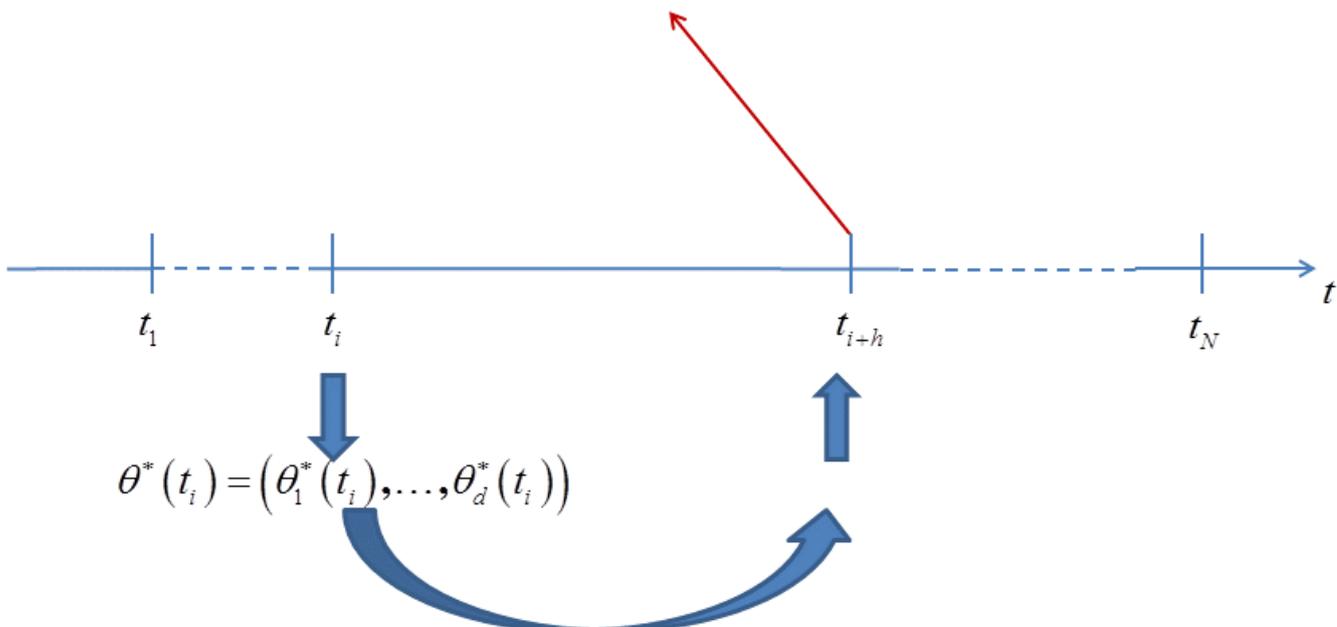
- $t_1, \dots, t_N$  l'ensemble des dates de la période considérée.
- $h$  le pas en nombre de jours.
- $M_{i+h}$  le nombre de maturités consécutives observées à la date  $t_{i+h}$ .
- $\theta^*(t_i) = (\theta_1^*(t_i), \dots, \theta_d^*(t_i))$  le vecteur des paramètres d'interpolation calculés à la date  $t_i$ .
- $r_j^{(obs)}(t_{i+h})$  le taux zéro-coupon de maturité  $j \in 1, M_{i+h}$  observé à la date  $t_{i+h}$ .
- $r_j^{(mod)}(t_{i+h}, \theta^*(t_i))$  le taux zéro-coupon de maturité  $j \in 1, M_{i+h}$  calculé à la date  $t_{i+h}$  à l'aide du vecteur paramétrique  $\theta^*(t_i)$ .
- $C(t_{i+h})$  la courbe interpolée à la date  $t_{i+h}$ .

Pour une méthode d'interpolation donnée (Nelson, Siegel et Svensson ou Smith et Wilson), le principe consiste à calculer à la date  $t_{i+h}$  la courbe des taux sans risque  $C(t_{i+h})$  à l'aide des paramètres déterminés lors de la calibration entreprise à la date  $t_i$ . On réitère le processus à toutes les dates  $t_i$ . Une fois cela fait, on entreprend une régression linéaire de tous les taux observés sur la période étudiée par rapport à ceux ainsi calculés, autrement dit, on recherche la pente  $\beta_1$  et l'ordonnée à l'origine  $\beta_0$  qui satisfont à la relation ci-dessous :

$$r_j^{(obs)}(t_{i+h}) = \beta_1 r_j^{(mod)}(t_{i+h}, \theta^*(t_i)) + \beta_0, \forall i \in h, N, \forall j \in 1, M_{i+h} \quad (82)$$

La Figure 39 illustre ce processus.

$$\begin{cases} r_1^{(obs)}(t_{i+h}) = \beta_1 r_1^{(mod)}(t_{i+h}, \theta^*(t_i)) + \beta_0 \\ \vdots \\ r_j^{(obs)}(t_{i+h}) = \beta_1 r_j^{(mod)}(t_{i+h}, \theta^*(t_i)) + \beta_0 \\ \vdots \\ r_{M_{i+h}}^{(obs)}(t_{i+h}) = \beta_1 r_{M_{i+h}}^{(mod)}(t_{i+h}, \theta^*(t_i)) + \beta_0 \end{cases}$$



**Figure 39 : régression linéaire des taux sans risque observés par rapport à ceux calculés à l'aide des paramètres déterminés lors de la calibration d'une période passée de  $h$  jours.**

Nous avons réalisé une projection de 1 jour ( $h = 1$ ) et une projection d'une semaine ( $h = 7$ ).

Les taux varient peu d'un jour à l'autre, ce qui explique les résultats favorables du test de Newey-West. Bien entendu, leur qualité diminue avec le pas. Les tableaux sont consultables à la section 8.1.4 de l'annexe.

## 7. Conclusion

Nous choisissons donc l'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène. L'extrapolation du segment à court terme ne se fondera que sur les taux à long terme. Les données utilisées seront les taux swap sur indice Euribor 6 mois.

# Le risque de taux : le modèle de Hull et White

## 1. Modélisation de la dynamique des taux d'intérêt

### 1.1. Introduction

Au cours des dernières décennies, plusieurs modèles ont été élaborés en vue d'estimer les prix et la sensibilité au risque des dérivés de taux. Ceux-ci se répartissent en trois catégories : ceux qui se fondent sur la dynamique des taux au comptant, ceux qui se fondent sur la dynamique des taux forward et ceux qui se fondent sur une approche des taux de marché discrets et observables. La première catégorie inclut les modèles de VASICEK [1977], de HULL et WHITE [1990] et de BLACK et KARASINSKI [1991]. Le modèle de Ho-Lee est un précurseur d'une modélisation basée sur des taux forward. Plutôt que modéliser la dynamique des prix des titres zéro-coupons ou celle du taux court instantané, HEATH et al. [1992] ont modélisé la dynamique des taux forward dans un cadre très général (framework de Heath, Jarrow et Morton ou HJM). Les modèles de marché constituent une sous-classe du framework HJM et retranscrivent l'évolution de taux directement observables sur le marché. Tous ces modèles ont leurs forces et faiblesses. Les modèles fondés sur la dynamique du taux au comptant sont aisés à interpréter et à implémenter, néanmoins, ils ne fournissent pas une large marge de manœuvre dans le choix de la structure de volatilité. Le framework HJM est populaire en raison de sa souplesse en termes de nombre de facteurs utilisables et permet différentes structures de volatilité pour différentes maturités de taux forward. Cependant, la pierre d'achoppement est que les taux forward instantanés ne sont pas directement observables sur le marché et subséquemment les modèles fonctionnant sous ce framework sont malaisés à calibrer. Les modèles de marché surmontent ces limitations, mais sont complexes et coûteux comparés à ceux fondés sur la dynamique des taux au comptant. A l'heure actuelle, ce sont les modèles de HULL et WHITE [1990] et de BLACK et KARASINSKI [1991] qui reçoivent le plus de suffrages.

### 1.2. Modèles d'équilibre général

	Dynamique	$r > 0$	Loi de $r$	Formule analytique pour les obligations zéro-coupon	Formule analytique pour les options
Vasicek	$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$	Non	$N$	Oui	Oui
Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$	Oui	$NC_{\chi^2}$	Oui	Oui
Dothan	$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$	Oui	$LN$	Oui	Non
Vasicek Exponentiel	$dr(t) = r(t)[\eta - a \ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t)$	Oui	$LN$	Non	Non
Hull et White	$dr(t) = k[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma dW(t)$	Non	$N$	Oui	Oui
Black et Karasinski	$dr(t) = r(t)[\eta_t - a \ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t)$	Oui	$LN$	Non	Non
Mercurio et Moraleda	$dr(t) = r(t)\left[\eta_t - \left(\lambda - \frac{\gamma}{1 + \gamma t}\right) \ln r(t)\right]dt + \sigma r(t)dW(t)$	Oui	$LN$	Non	Non
CIR++	$r(t) = x(t) + \varphi(t), dx(t) = k[\theta - x(t)]dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t)$	Oui (dans des conditions appropriées)	$SNC_{\chi^2}$	Oui	Oui
Vasicek Exponentiel Étendu	$r(t) = x(t) + \varphi(t), dx(t) = x(t)[\eta - a \ln x(t)]dt + \sigma x(t)dW(t)$	Oui (dans des conditions appropriées)	$SLN$	Non	Non

**Tableau 18 : récapitulatif des principaux modèles fondés sur le taux court instantané.**

### 1.3. Modèle de Hull et White

HULL et WHITE [1990] supposèrent que le taux court instantané suit un processus qui suit, dans l'univers risque neutre, la loi suivante :

$$dr(t) = [\theta(t) - \alpha(t)r(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (83)$$

Où :

- $\theta(t)$  est une fonction positive dépendant du temps, choisie pour s'ajuster à la gamme des taux d'intérêts. Ce paramètre est appelé le « drift » ou la « dérive ».
- $\alpha(t)$  est une constante strictement positive dépendant également du temps, quantifiant/contrôlant la vitesse de retour ou force de rappel du taux spot vers sa valeur moyenne. Ce paramètre est appelé « *mean reverting* » ou « *retour à la moyenne* ».
- $\sigma$  est une constante strictement positive qui représente le paramètre de volatilité ou diffusion.

Nous rappelons que, d'une part,  $dr$  correspond à l'accroissement du taux court  $r$  durant l'intervalle  $dt$ , et que, d'autre part,  $dW$  désigne un processus de Wiener.

Un tel modèle peut être ajusté à la structure par termes des taux d'intérêt et à la structure par termes des volatilités des taux spot et des taux forward. Néanmoins, si une calibration exacte à la courbe des taux est une caractéristique souhaitable, l'ajustement parfait peut s'avérer dangereux et doit être examiné avec la plus grande prudence. La raison est double :

1. Les volatilités cotées sur le marché ne sont pas toutes significatives. Certains secteurs financiers sont peu liquides, les cotations associées sont ni précises ni fiables.

2. Les structures de volatilité implicites risquent d'être irréalistes en ce qu'elles ne se conforment pas aux formes typiques de marché, comme l'ont remarqué HULL et WHITE [1995] eux-mêmes.

Nous nous concentrons donc, dans ce mémoire, sur l'extension suivante du modèle de Vasicek étudiée par HULL et WHITE [1994] :

$$dr(t) = [v(t) - \alpha r(t)] dt + \sigma dW(t) \quad (84)$$

Où  $\alpha$  et  $\sigma$  sont dorénavant des constantes positives et  $\theta$  est choisi de manière à s'ajuster parfaitement à la gamme des taux d'intérêt observée sur le marché.

On note  $f^M(0, T)$  le taux forward instantané à la date 0 de maturité  $T$ , c'est-à-dire :

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial \ln P^M(0, T)}{\partial T} \quad (85)$$

On peut remarquer que, en cas d'utilisation de la méthode d'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson (cf. section 4.3 du chapitre précédent) pour construire la courbe des taux sans risque, l'équation (28) donne une formule analytique du taux forward.

BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 51-135) montrent que :

$$v(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial t} + \alpha f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (86)$$

L'intégration de l'équation (84) donne :

$$r(t) = r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \beta(s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW(u) \quad (87)$$

Où :

$$\beta(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2 \quad (88)$$

Corolairement,  $r(t)$  conditionnellement à  $F_s$  suit une loi normale dont l'espérance et la variance sont données respectivement par les formules :

$$\begin{cases} E[r(t)|F_s] = r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\alpha(t-s)} \\ V[r(t)|F_s] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(t-s)}] \end{cases} \quad (89)$$

Remarquons que si l'on définit le processus  $x$  par la formule :

$$dx(t) = -\alpha x(t) dt + \sigma dW(t), \text{ avec } x(0) = 0 \quad (90)$$

On obtient immédiatement pour tout  $s < t$  :

$$x(t) = x(s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW(u) \quad (91)$$

Il est alors possible d'écrire :  $r(t) = x(t) + \alpha(t)$  et ce pour tout  $t$ .

Le dernier terme de l'équation (86) est généralement relativement faible. Si nous le négligeons, dans l'équation (84), le drift du processus  $r(t)$  devient :

$$\frac{\partial f^M(0,t)}{\partial t} + \alpha(f^M(0,t) - r(t)) \quad (92)$$

On peut voir que, en moyenne,  $r(t)$  suit la pente de la courbe initiale des taux forward instantanés. Lorsqu'il dévie de cette courbe, il y retourne avec la « vitesse »  $\alpha$ . Ce processus est illustré sur la Figure 40.

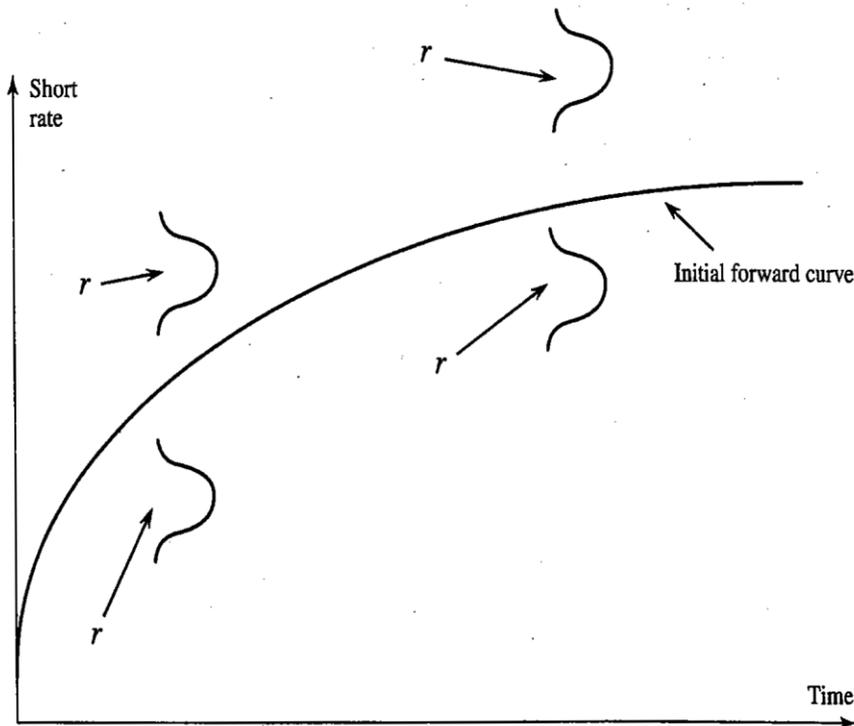


Figure 40 : le modèle de Hull et White. Source : HULL [2004] (pages 579-649).

Comme évoqué précédemment, la possibilité théorique que le taux  $r$  devienne négatif est un inconvénient majeur de ce modèle. La probabilité en univers risque-neutre que le taux soit négatif à la date  $t$  est donnée par la formule explicite :

$$P(r(t) < 0) = \Phi \left( - \frac{\beta(t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2at}]}} \right) \quad (93)$$

Où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Cependant, une telle probabilité est négligeable en pratique.

Dans un souci de simplification, nous considérerons les paramètres  $\theta(t)$  et  $\sigma(t)$  comme constants.

**Remarque :** Le modèle est décrit dans l'univers risque-neutre. Comme les calculs sont plus simples dans le monde risque-neutre que dans le monde réel et que les formules d'évaluation sont identiques dans les deux univers, l'idée vint d'effectuer les calculs d'évaluation comme si le monde était risque-neutre. Il ne faut toutefois pas perdre de vue que la probabilité  $Q$  des évènements futurs dans le monde risque-neutre diffère de la

probabilité  $Q_0$  qui prévaut dans le monde réel. Il existe de ce point de vue un strict parallélisme entre le modèle continu traité ici et le modèle discret qui sera implémenté. Plus précisément, supposons que le taux spot instantané suive, sous la mesure réelle  $Q_0$ , la dynamique ci-dessous :

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^0(t) \quad (94)$$

Où  $\mu$  et  $\sigma$  sont des fonctions bien définies et  $W^0$  un mouvement  $Q_0$ -brownien. Il est possible de montrer l'existence d'un processus stochastique  $\lambda$  tel que si :

$$dP(t, T) = \mu^T(t, r(t))dt + \sigma^T(t, r(t))dW^0(t) \quad (95)$$

Alors :

$$\frac{\mu^T(t, r(t)) - r(t)P(t, T)}{\sigma^T(t, r(t))} = \lambda(t) \quad (96)$$

Pour toute maturité  $T$ ,  $\lambda$  pouvant dépendre de  $r$  mais non de  $T$ . Par ailleurs, il existe une mesure  $Q$  équivalente à  $Q_0$  et définie par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\left. \frac{dQ}{dQ_0} \right|_{F_t} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) ds - \int_0^t \lambda(s) dW^0(s)\right) \quad (97)$$

Où  $F_t$  est la quantité d'information disponible à la date  $t$ . Comme corolaire, le processus  $r$  évolue sous la mesure  $Q$  selon la loi :

$$dr(t) = [\mu(t, r(t)) - \lambda(t)\sigma(t, r(t))]dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \quad (98)$$

Où  $W(t) = W^0(t) + \int_0^t \lambda(s) ds$  est un mouvement brownien sous  $Q$ .

L'équation décrivant  $dP$  exprime la dynamique du prix d'une obligation en fonction du taux court terme  $r$ . Celui-ci est le rendement instantané d'un investissement sans risque, de telle sorte que  $\mu - r$  représente une différence de rendements. Cette différence indique le rendement supplémentaire nécessaire pour justifier le risque que représente l'investissement. Lorsque l'on divise cette quantité par  $\sigma^T$ , on la divise par le montant de risque à laquelle l'investisseur est assujéti, mesuré par la volatilité du prix de l'obligation, en l'occurrence  $\sigma^T$ . C'est pourquoi la grandeur  $\lambda$  est appelé le prix de marché du risque. Un terme alternatif serait « rendement excédentaire par rapport à un investissement sans risque par unité de risque ». Pour spécifier exhaustivement le modèle, il faut fournir  $\lambda$ . En effet, le prix de marché du risque  $\lambda$  relie la mesure dans le réel à celle dans l'univers risque-neutre, en tant qu'ingrédient principal dans l'objet  $dQ/dQ_0$  exprimant le lien entre ces deux mondes. La façon de passer d'un monde à l'autre est caractérisée par le choix de  $\lambda$ . Cependant, si l'on se préoccupe uniquement de la valorisation des produits dérivés de taux, on peut directement modéliser la dynamique du taux sous la mesure  $Q$  de façon à ce que  $\lambda$  soit implicite dans cette dynamique. On se place dans le monde  $Q$  sans se soucier de la manière de passer au monde  $Q_0$ . Le problème ne se poserait que s'il était nécessaire de se placer sous la mesure objective ; néanmoins, dans une optique de valorisation, la mesure objective n'est pas requise, ce qui nous permet de l'ignorer en toute sécurité. La valeur des paramètres du modèle dans l'univers risque-neutre  $Q$  est ce qui importe réellement dans la procédure de valorisation, étant donné que les titres zéro-coupon sont eux-mêmes des produits dérivés dans le cadre d'analyse présent. Subséquemment, on se place en priorité dans l'univers risque-neutre.

## 1.4. Obligations et options

### 1.4.1. Obligations

Le prix en l'absence d'arbitrage, dans l'univers risque-neutre, à la date  $t$  d'une créance contingente de payoff  $H_T$  à la date  $T$  est donné par :

$$H_t = E_t \left\{ e^{-\int_t^T r(s)ds} H_T \right\} \quad (99)$$

Où  $E_t$  représente conditionnelle à l'information disponible à la date  $t$ . En particulier, le prix à la date  $t$  d'un titre zéro coupon payant une unité monétaire à la date  $T$  est donnée par la formule :

$$P(t, T) = E_t \left\{ e^{-\int_t^T r(s)ds} H_T \right\} \quad (100)$$

Par ailleurs, étant donné le caractère gaussien de  $r(T)$  conditionnellement à  $F_t$ ,  $t \leq T$ ,  $\int_t^T r(u)du$  est lui-même normalement distribué. Plus précisément, BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 51-135) montrent que :

$$\int_t^T r(u)du | F_s \sim N \left( B(t, T)[r(t) - \alpha(t)] + \ln \frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2} [V(0, T) - V(0, t)], V(t, T) \right) \quad (101)$$

Où :

$$\begin{cases} B(t, T) = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(T-t)}] \\ V(t, T) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \left[ T - t + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha(T-t)} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha(T-t)} - \frac{3}{2\alpha} \right] \end{cases} \quad (102)$$

Corolairement, sous la dynamique proposée par Hull et White, ledit prix devient :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} \quad (103)$$

Où :

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left\{ B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{2\alpha t}) B(t, T)^2 \right\} \quad (104)$$

La formule du prix d'un call européen de maturité  $T$  et de strike  $X$ , sur une obligation zéro-coupon dont le principal est constitué d'une unité monétaire et de maturité  $S > T$ , est :

$$ZBC(t, T, S, X) = E \left( e^{-\int_t^T r(s)ds} (P(T, S) - X)^+ | F_t \right) \quad (105)$$

Sous la mesure forward-neutre, le prix s'écrit :

$$ZBC(t, T, S, X) = P(t, T) E^T \left( (P(t, S) - X)^+ | F_t \right) \quad (106)$$

Afin de calculer l'espérance de l'équation (106), il est nécessaire de connaître la distribution du processus  $r$  sous la mesure  $T$ -forward  $Q^T$ . BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 51-135) montrent que le processus  $x$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$dx(t) = [-B(t, T)\sigma^2 + \alpha x(t)]dt + \sigma dW^T(t) \quad (107)$$

Où le mouvement  $Q^T$ -brownien  $W^T$  est défini par  $dW^T(u) = dW(u) + \sigma B(u, T)du$  pour que, pour  $s \leq t \leq T$ , on ait :

$$x(t) = x(s)e^{-\alpha(t-s)} - M^T(s, t) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW^T(u) \quad (108)$$

Avec :

$$M^T(s, t) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} [1 - e^{-\alpha(t-s)}] - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} [e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T+t-2s)}] \quad (109)$$

Il est aisé d'établir que la distribution du taux court  $r(t)$  conditionnellement à  $F_s$  est, sous la mesure  $Q^T$ , toujours gaussien avec et dont la moyenne et la variance valent respectivement :

$$\begin{cases} E^T \{r(t) | F_s\} &= x(s)e^{-\alpha(t-s)} - M^T(s, t) + \beta(t) \\ Var^T \{r(t) | F_s\} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(t-s)}] \end{cases} \quad (110)$$

Corollairement, le prix d'un call européen sur une obligation zéro-coupon s'écrit :

$$ZBC(t, T, S, X) = P(t, S)\Phi(h) - XP(t, T)\Phi(h - \sigma_p) \quad (111)$$

Où :

$$\begin{cases} \sigma_p &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}} B(T, S) \\ h &= \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(t, S)}{P(t, T)X} + \frac{\sigma_p}{2} \end{cases} \quad (112)$$

De manière analogue, le prix  $ZBP(t, T, S, X)$  à la date  $t$  d'un put européen de strike  $X$ , de maturité  $T$ , sur une obligation zéro-coupon arrivant à échéance à la date  $S$  se formule de la manière suivante :

$$ZBP(t, T, S, X) = XP(t, T)\Phi(-h + \sigma_p) - P(t, S)\Phi(-h) \quad (113)$$

## 1.4.2. Caps

### 1.4.2.1 Description et modèle de Black

Les caps et les floors sont des contrats de gré à gré d'échange de taux, à caractère optionnel, définis à partir des caractéristiques suivantes :

- Le montant (nominal ou notionnel), noté  $M$  ;
- La référence variable-révisable (dans ce mémoire, nous nous restreindrons à une référence variable) telle qu'un Libor ou un Euribor ;
- Un taux fixe, dit aussi taux garanti ou strike, noté  $K$  ;
- L'échéancier des règlements  $T_1, \dots, T_N$  ;

- Les dates de reset du taux variable de référence  $T_0, \dots, T_{N-1}$ .

Nous notons :

- $\tau_i = T_i - T_{i-1}$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) la durée (ou *tenor*) de la  $i^{\text{ème}}$  période exprimée en général en base 360.
- $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  la liste des durées considérées.
- $T = \{T_0, \dots, T_N\}$  la liste des dates considérées.

La fréquence des règlements, donc les durées  $\tau_i$ , sont liées à la maturité de la référence choisie de sorte que les flux sous-jacents soient vanille (par exemple 4 règlements par an, donc  $\tau_i \approx 0,25$ , pour l'Euribor 3 mois).

Le cap tire son nom du fait qu'il est souvent (mais non exclusivement) utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable ou révisable, ou celui d'un emprunt récurrent à court terme sur le marché. Supposons, par exemple, qu'une entreprise craigne une hausse de l'Euribor et souhaite se prémunir contre une hausse excessive en plafonnant le paiement à un taux  $K$ . Dans cette perspective, elle souscrit à un contrat cap de strike  $K$ . Elle paie alors sa dette basée sur la valeur  $L$  du taux Euribor à ce moment-là et reçoit le montant  $(L - K)^+$  en sa qualité de souscripteur dudit cap. Son gain final s'élèvera alors à :

$$L - (L - K)^+ = \min(L, K) \quad (114)$$

L'équation (114) implique que cette entreprise paie au plus un taux  $K$  à chaque date de règlement, puisque ses paiements variables (indexés sur l'Euribor) ont tous été plafonnés au taux garanti  $K$ .

Un cap consiste en un portefeuille de caplets presque identiques, ces derniers ne différant que par leurs dates de reset respectives. Un cap peut être vu comme une collection de *calls* européens fournissant une protection contre la hausse des taux d'intérêt sur une période future spécifique. La Figure 41 illustre la chronologie des flux générés par un cap.

Le taux  $L(T_{i-1}, T_i)$  est le taux révisable en vigueur à la date  $T_i$  et dont la date de reset est  $T_{i-1}$ . Le terme  $D(t, T_i)$  est le facteur d'actualisation stochastique à la date  $t$  d'un flux survenant à la date  $T_i$ . Le payoff du  $i^{\text{ème}}$  caplet à la date  $T_i$  vaut :

$$X(T_i) = M \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (115)$$

Le payoff actualisé de ce caplet s'écrit :

$$D(t, T_i) M \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (116)$$

Comme évoqué précédemment, un cap de taux d'intérêt peut être vu comme une collection de caplets et un caplet est une option qui, à un instant donné  $T_i$ , paiera la différence entre le taux d'intérêt courant et son taux garanti  $K$ . Le payoff actualisé d'un cap est alors la somme du prix des caplets le constituant :

$$\sum_{i=1}^N D(t, T_i) M \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (117)$$

À la date initiale  $t = 0$ , le prix  $P(0, T_i)$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  et le facteur stochastique d'actualisation  $D(0, T_i)$  sont confondus. La formule<sup>24</sup> de Black du prix d'un cap est :

<sup>24</sup> Le lecteur trouvera une démonstration de la formule au chapitre 17 de l'ouvrage de PORTAIT et PONCET [2008] (pages 595-628).

$$Cap^{(Bl)}(0, T, \tau, N, K, \sigma_T) = N \sum_{i=1}^N P(0, T_i) \tau_i Bl(K, F(0, T_{i-1}, T_i), \nu_i, 1) \quad (118)$$

Avec :

$$Bl(K, F, \nu, \omega) = \omega F \Phi(\omega d_1(K, F, \nu)) - \omega K \Phi(\omega d_2(K, F, \nu)) \quad (119)$$

Et :

$$\begin{cases} d_1(K, F, \nu) = \frac{\ln(F/K) + \nu^2/2}{\nu} \\ d_2(K, F, \nu) = \frac{\ln(F/K) - \nu^2/2}{\nu} \\ \nu_i = \sigma_T \sqrt{T_{i-1}} \end{cases} \quad (120)$$

Le paramètre commun de volatilité  $\sigma_T$  provient des cotations du marché et désigne la volatilité d'un cap avec comme échéancier de règlement  $T_1, \dots, T_N$  et comme dates de reset du taux variable de référence  $T_0, \dots, T_{N-1}$ .

Lorsque le cap ne délivre qu'un seul paiement ( $N=1$ ), celui-ci s'assimile à un simple caplet et le strike à la monnaie  $K = F(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  est égal au taux forward. Dans le cas général, le strike à la monnaie (ou « *at the money* » ou ATM) d'un cap est défini par la formule :

$$K = K_{ATM} := S_T(0) = \frac{P(0, T_0) - P(0, T_N)}{\sum_{i=1}^N \tau_i P(0, T_i)} \quad (121)$$

Autrement dit, le cap est dit à la monnaie si le strike est égal au taux forward correspondant. Par conséquent, le strike est la moyenne des taux forward couvrant les périodes de resets de règlements du cap, *i.e.* la moyenne des strikes individuels de chacun des caplets.

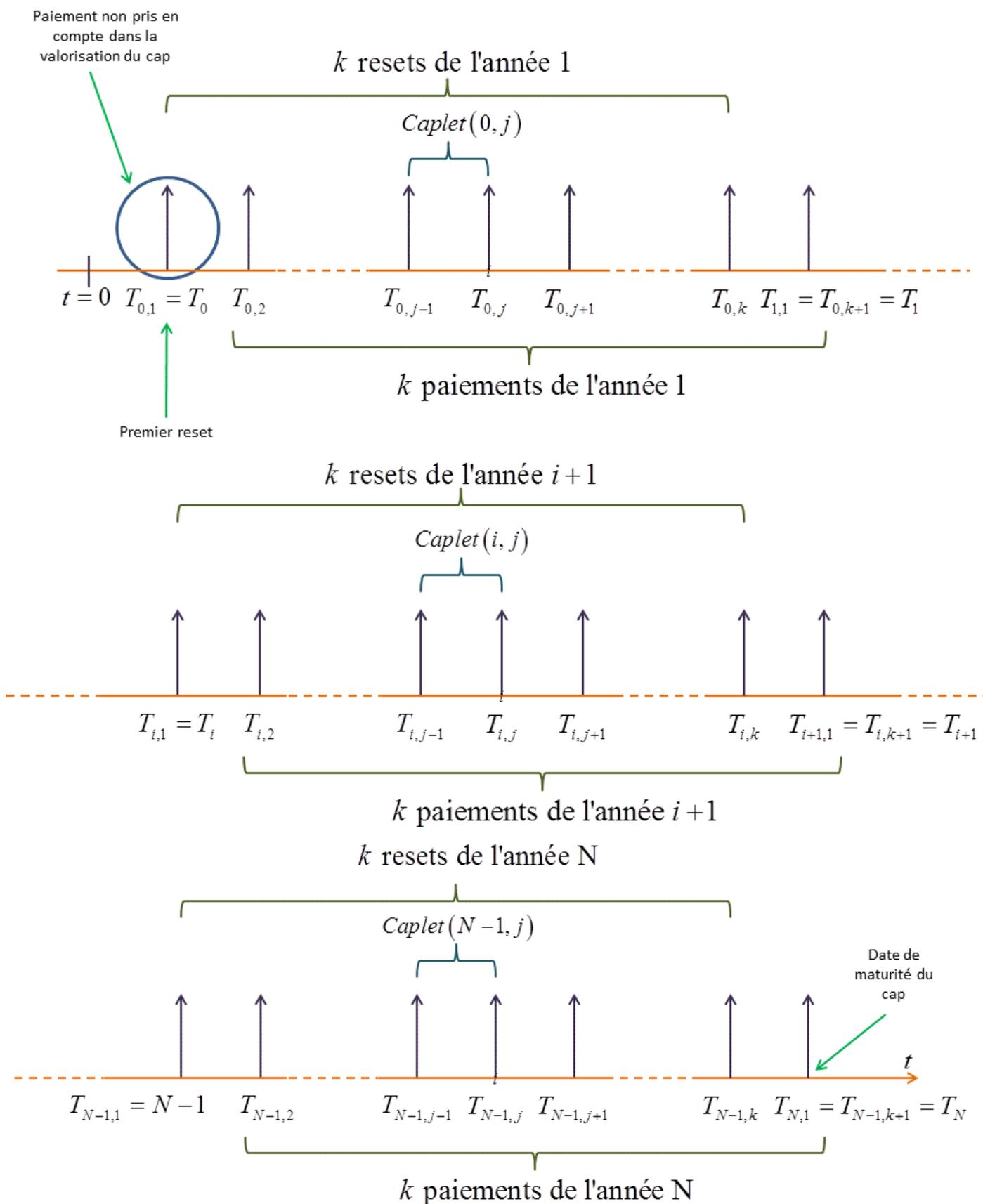


Figure 41 : chronique des flux générés par un cap de taux d'intérêt.

#### 1.4.2.2 Structure par terme des volatilités

L'équation (119) permet d'évaluer séparément chaque caplet composant un cap. Il est possible d'utiliser des volatilités différentes pour chaque caplet constituant ; on les appelle alors « volatilités spot ». Une alternative

consiste à employer les mêmes volatilités pour tous les caplets d'un cap, mais à autoriser des volatilités différentes pour des caps n'ayant pas la même durée de vie. On parle alors de volatilités plates (flat volatilities). Les volatilités utilisées sur les marchés sont habituellement plates. Néanmoins, de nombreux traders préfèrent les volatilités spot car elles leur permettent d'identifier les caplets surévalués ou sous-évalués. Les options sur futures Eurodollar (options sur FRA) sont très similaires à des caplets, et les volatilités spot employées pour les caplets sur Libor 3 mois sont fréquemment comparées à celles calculées à partir des options sur contrat futures Eurodollar. Les volatilités spot peuvent être bootstrappées à partir des volatilités plates.

La Figure 42 illustre le comportement des volatilités plates et spot en fonction de la maturité (pour la volatilité spot, la maturité est celle du caplet, tandis que, pour la volatilité plate, la maturité est celle du cap). Les volatilités plates sont proches de moyennes cumulées de volatilités spot (elles peuvent être assimilées à des intégrales) et exhibent subséquemment une volatilité plus faibles. Comme il peut être observé sur la Figure 42, les courbes présentent une « bosse » à la maturité de deux-trois ans. Cette bosse est observable aussi bien lorsque on calcule des volatilités implicites à partir des prix d'options que lorsque l'on utilise des données historiques. Il n'y a pas de consensus sur la justification de cette observation, mais une des explications possibles est la suivante. Les taux (très) courts sont contrôlés par les banques centrales, alors qu'à la maturité 2-3 ans, ce sont les opérateurs de marché qui, par leurs interventions, les déterminent. On peut alors supposer qu'ils surréagissent quand ils observent une modification des taux courts, ce qui induit une volatilité plus élevée sur les taux de maturité 2-3 ans, comparée à celle du taux court. Au-delà de 2-3 ans, le phénomène de retour à la moyenne, abordé à la section 1.3, s'enclenche, ce qui fait baisser les volatilités sur ce segment de la courbe.

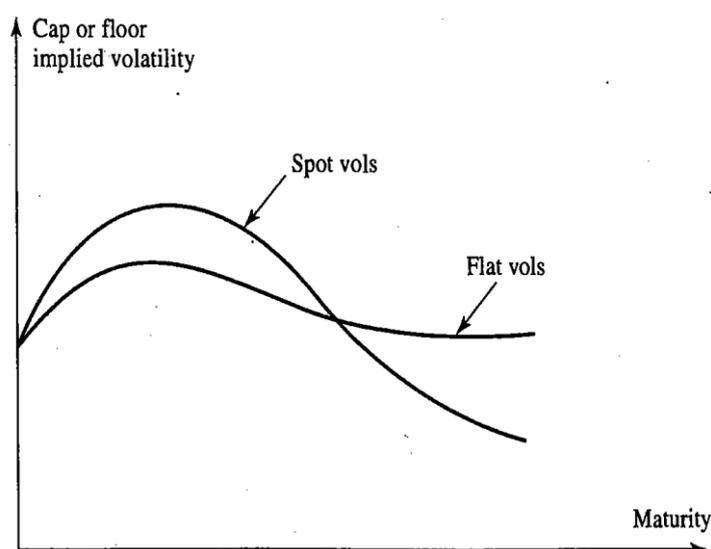
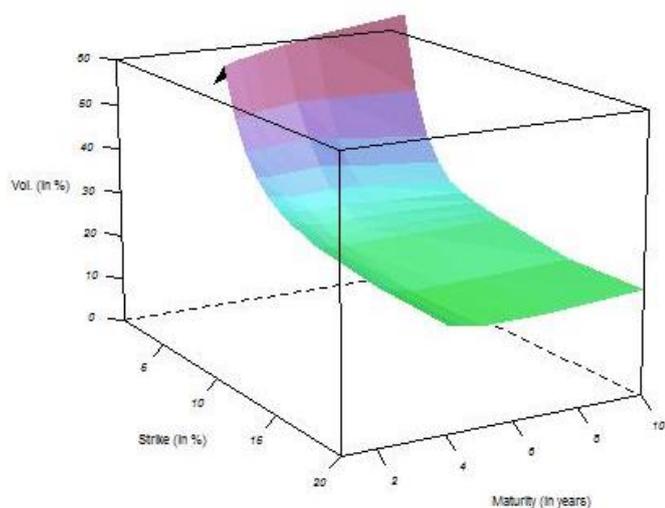


Figure 42 : courbe en bosse de la volatilité. Source : HULL [2004] (pages 579-649).

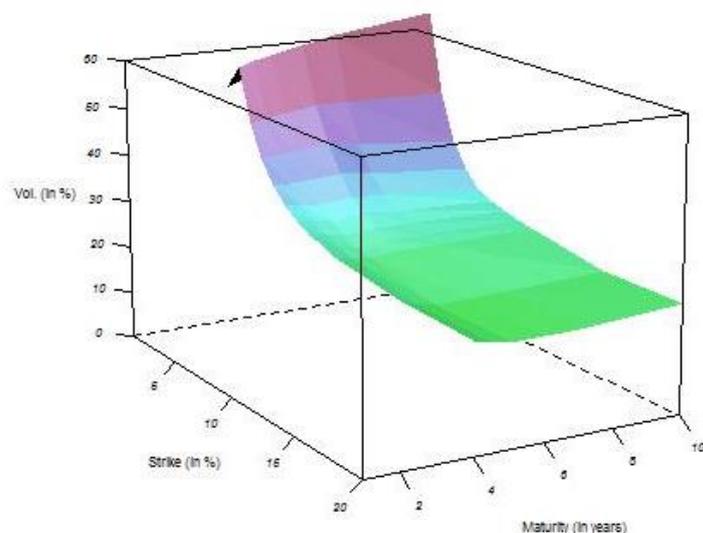
Les courtiers (ou brokers) fournissent des tables de volatilités (plates) implicites pour les caps et les floors. Les instruments utilisés pour ce calcul sont proches de la monnaie, ce qui signifie ici que le taux plafond/plancher considéré est identique à celui du swap qui a les mêmes dates de flux que l'option en question. Il s'agit du paramètre  $\sigma_{\alpha,\beta}$  injecté dans la formule d'un cap dans le modèle de Black (équation (120)). Le Tableau 19 donne un exemple de table de volatilités issues de Reuters et en vigueur au sein de la zone euro. La Figure 43 montre les courbes de volatilités plates en fonction de la maturité et du strike. On peut y observer le phénomène de bosse décrit sur la Figure 42.

	STK1	STK2	STK3	STK4	STK5	STK6	STK7	STK8	STK9	STK10	STK11	STK12	STK13	ATM
	0.010	0.015	0.020	0.023	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.060	0.070	0.100	ATM
1Y	0.418	0.398	0.415	0.426	0.437	0.457	0.475	0.490	0.504	0.516	0.536	0.549	0.585	0.404
2Y	0.509	0.489	0.491	0.495	0.500	0.511	0.523	0.535	0.546	0.556	0.574	0.593	0.629	0.488
3Y	0.489	0.433	0.418	0.414	0.410	0.409	0.413	0.420	0.428	0.437	0.454	0.433	0.432	0.419
4Y	0.494	0.429	0.401	0.391	0.384	0.372	0.369	0.372	0.378	0.385	0.400	0.375	0.361	0.389
5Y	0.492	0.424	0.388	0.374	0.363	0.345	0.334	0.331	0.333	0.338	0.351	0.329	0.314	0.359
6Y	0.487	0.417	0.377	0.361	0.347	0.326	0.311	0.303	0.301	0.304	0.314	0.298	0.285	0.334
7Y	0.481	0.411	0.368	0.350	0.335	0.312	0.293	0.282	0.278	0.278	0.287	0.274	0.269	0.313
8Y	0.474	0.404	0.360	0.341	0.326	0.301	0.281	0.267	0.260	0.259	0.266	0.256	0.257	0.295
9Y	0.469	0.399	0.353	0.334	0.318	0.292	0.271	0.256	0.248	0.245	0.251	0.244	0.250	0.281
10Y	0.465	0.394	0.348	0.329	0.312	0.285	0.264	0.247	0.237	0.234	0.239	0.234	0.242	0.269
15Y	0.429	0.366	0.321	0.303	0.287	0.259	0.238	0.221	0.209	0.202	0.202	0.200	0.214	0.232
20Y	0.408	0.348	0.306	0.289	0.273	0.248	0.228	0.213	0.201	0.195	0.195	0.195	0.211	0.221

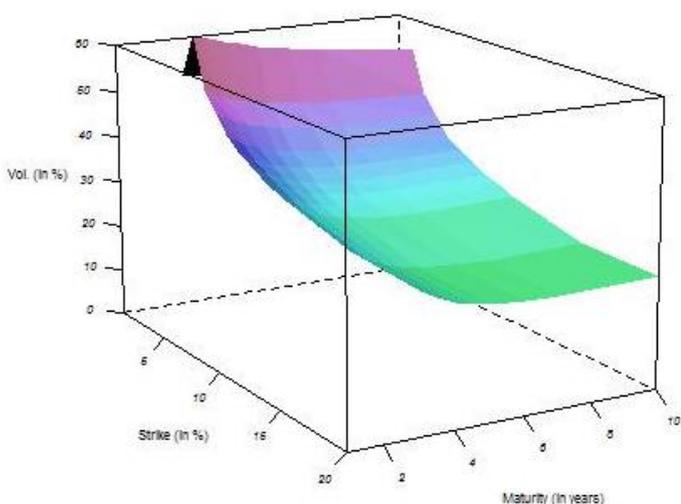
Tableau 19 : matrice de volatilités smiles en date du 3 janvier 2011 (heure de clôture : 18:46:19).



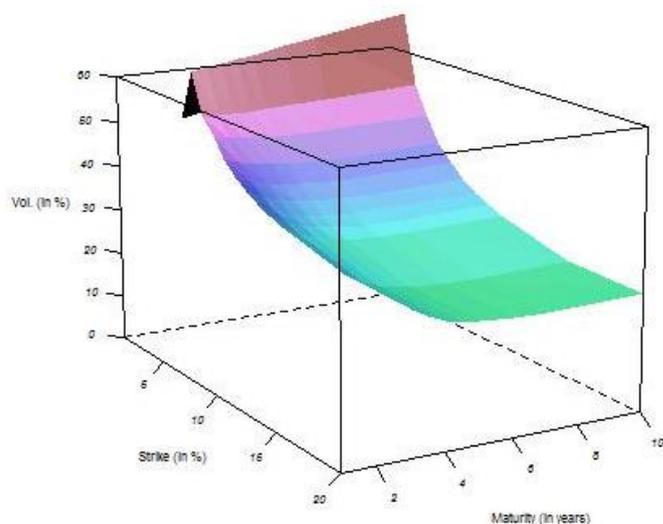
23/11/2010 16:52



01/12/2010 18:16



03/10/2011 17:35



27/12/2011 17:22

Figure 43 : matrices de volatilités smiles de caps/floors.

Dans ce mémoire, nous utiliserons des volatilités plates.

### 1.4.2.3 Modèle de Hull et White

BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 51 - 135) montrent que :

$$Cap(t, T, \tau, M, X) = M \sum_{i=1}^N (1 + K\tau_i) ZBP\left(t, T_{i-1}, T_i, \frac{1}{1 + K\tau_i}\right) \quad (122)$$

En remplaçant le terme  $ZBP\left(t, T_{i-1}, T_i, \frac{1}{1 + K\tau_i}\right)$  par son expression fournie par l'équation (111), on obtient la formule d'un cap dans le modèle de Hull et White :

$$Cap^{(HW)}(t, T, \tau, M, K, \alpha, \sigma) = M \sum_{i=1}^N \left[ P(t, T_{i-1}) \Phi(-h_i + \sigma_p^i) - (1 + X\tau_i) P(t, T_i) \Phi(-h_i) \right] \quad (123)$$

Où :

$$\begin{aligned} \sigma_p^i &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T_{i-1}-t)}}{2\alpha}} B(T_{i-1}, T_i) \\ h_i &= \frac{1}{\sigma_p^i} \ln \frac{P(t, T_i)(1 + X\tau_i)}{P(t, T_{i-1})X} + \frac{\sigma_p^i}{2} \end{aligned} \quad (124)$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$  sont les paramètres du modèle de Hull et White.

Nous définissons la volatilité implicite  $\sigma_T^{(HW)}$  induite par le modèle de Hull et White comme la volatilité implicite dans le modèle de Black et Scholles correspondant au prix  $Cap^{(HW)}(t, T, \tau, M, K, \alpha, \sigma)$  pour un couple  $(\alpha, \sigma)$  donné :

$$Cap^{(HW)}(t, T, \tau, M, K, \alpha, \sigma) = Cap^{(BS)}\left(t, T, \tau, M, K, \sigma_T^{(HW)}\right) \quad (125)$$

## 1.4.3. Swaptions

### 1.4.3.1 Description

Par définition, une swaption européenne confère à son détenteur le droit d'entrer dans un contrat de *swap* en date d'exercice  $T$  sur la base d'un taux fixe  $K$ . On distingue les options sur *swap*  $K$  donneur des options sur *swap*  $K$  receveur. Nous considérons une swaption européenne sur *swap* vanille,  $K$  payeur ou receveur, de valeur notionnelle  $M$ , de date de maturité  $T_0$ , dont les  $N$  règlements ont lieu aux dates  $T_1, \dots, T_N$ . On reprend les notations utilisées pour les caps (cf. 1.4.2).

BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 51 - 135) montrent que, dans le modèle de Black, les prix d'une option sur *swap*  $K$  payeur et d'une option sur *swap*  $K$  receveur s'écrivent respectivement :

$$PS^{(BS)}(t, T, \tau, N, K, \sigma_T) = M \cdot Bl\left(K, S_T(0), \sigma_T \sqrt{T_0}, 1\right) \sum_{i=1}^N \tau_i P(0, T_i) \quad (126)$$

$$RS^{(BS)}(t, T, \tau, N, K, \sigma_T) = M \cdot Bl\left(K, S_T(0), \sigma_T \sqrt{T_0}, -1\right) \sum_{i=1}^N \tau_i P(0, T_i) \quad (127)$$

Le paramètre commun de volatilité  $\sigma_T$  provient des cotations du marché et désigne la volatilité d'une swaption avec comme date de maturité  $T_0$  et comme échéancier de règlement  $T_1, \dots, T_N$ .

#### 1.4.3.2 Formule selon Hull et White

On note :

- $c_i = K\tau_i$  pour  $i \in 1, N-1$  et  $c_N = 1 + K\tau_N$ .
- $r^*$  la valeur du taux spot à la date  $T$  pour lequel  $\sum_{i=1}^N c_i A(T, T_i) e^{-B(T, T_i)r^*} = 1$ .
- $X_i = A(T, T_i) e^{-B(T, T_i)r^*}$  pour  $i \in 1, N-1$ .

En s'appuyant sur la décomposition de Jamshidian<sup>25</sup>, BRIGO et MERCURIO [2007] (pages 51-135) établissent, dans le modèle de Hull et White, les prix d'une option sur *swap*  $K$  payeur et d'une option sur *swap*  $K$  receveur s'écrivent respectivement :

$$PS^{(HW)}(t, T, \tau, N, K, \alpha, \sigma) = M \sum_{i=1}^N c_i ZBP(t, T, T_i, X_i) \quad (128)$$

$$RS^{(HW)}(t, T, \tau, N, K, \alpha, \sigma) = M \sum_{i=1}^N c_i ZBC(t, T, T_i, X_i) \quad (129)$$

Nous définissons la volatilité implicite  $\sigma_T^{(HW)}$  induite par le modèle de Hull et White comme la volatilité implicite dans le modèle de Black et Scholles correspondant au prix  $PS_{swaption}^{(HW)}(t, T, \tau, N, K, \alpha, \sigma)$  pour un couple  $(\alpha, \sigma)$  donné :

$$PS_{swaption}^{(HW)}(t, T, \tau, N, K, \alpha, \sigma) = PS_{swaption}^{(BS)}(t, T, \tau, N, K, \sigma_T^{(HW)}) \quad (130)$$

#### 1.4.3.3 Matrice de volatilités

Il existe divers modèles permettant de calculer le prix d'une swaption. Cependant, calculer le prix d'une swaption sur le marché ne constitue pas l'objectif premier d'un modèle de taux. En réalité, les opérateurs ont pour habitude de calculer les prix des swaptions (*plain-vanilla*) par l'entremise d'une formule de Black. Tout au plus, le modèle choisi servira à estimer le prix des swaptions illiquides ou le prix de swaptions standard pour lesquelles la volatilité de Black n'est pas cotée ou ne peut pas être considérée comme fiable. Toutefois, pour ce qui est des swaptions standard, le marché se contente de la formule de Black. Celle-ci est une « métrique » à l'aide de laquelle les opérateurs traduisent les prix en volatilités implicites.

Les traders considèrent habituellement une matrice de volatilités de swaptions à la monnaie (« *at the money* » ou ATM) selon la formule de Black, matrice dans laquelle chaque ligne est indiquée par la maturité  $T_\alpha$  de la swaption et chaque colonne est indiquée par la teneur  $T_\beta - T_\alpha$  (ou maturité du *swap* sous-jacent). La swaption  $x \times y$  correspond à la swaption dans la table dont la maturité vaut  $x$  années et la teneur  $y$ . Par exemple, la swaption  $5 \times 3$  correspond dans la table à une swaption de maturité 5 ans et de teneur 2 ans. Le Tableau 20 donne un exemple de table utilisée dans ce mémoire. Les maturités observées sont les suivantes : 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 7 ans, 8 ans, 9 ans, 10 ans et 15 ans. Les teneurs disponibles sont les suivantes : 1 an à 10 ans et 15 ans. La Figure 44 affiche quelques nappes de volatilités en fonction de la maturité et de la teneur.

<sup>25</sup> Une démonstration de la décomposition de Jamshidian peut être trouvée dans l'ouvrage de LONDON [2005] (chapitre 10, section 10.9, pages 429-431)

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	15Y
1M	0.424	0.359	0.342	0.335	0.336	0.316	0.300	0.290	0.283	0.274	0.257
3M	0.458	0.393	0.362	0.341	0.328	0.305	0.292	0.284	0.280	0.278	0.265
6M	0.441	0.396	0.358	0.334	0.316	0.296	0.284	0.276	0.270	0.267	0.252
1Y	0.488	0.390	0.350	0.321	0.298	0.280	0.268	0.260	0.254	0.252	0.237
2Y	0.404	0.325	0.297	0.278	0.264	0.251	0.243	0.238	0.233	0.229	0.218
3Y	0.326	0.273	0.256	0.244	0.236	0.229	0.223	0.219	0.215	0.213	0.202
4Y	0.266	0.237	0.225	0.217	0.212	0.206	0.203	0.199	0.198	0.197	0.189
5Y	0.234	0.216	0.206	0.201	0.196	0.192	0.189	0.188	0.188	0.188	0.183
7Y	0.20	0.19	0.19	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17
8Y	0.19	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.17
9Y	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18
10Y	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18
15Y	0.17	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19	0.20	0.20	0.20

Tableau 20 : matrice de volatilités en date du 3 janvier 2011 (heure de clôture : 18:46:19).

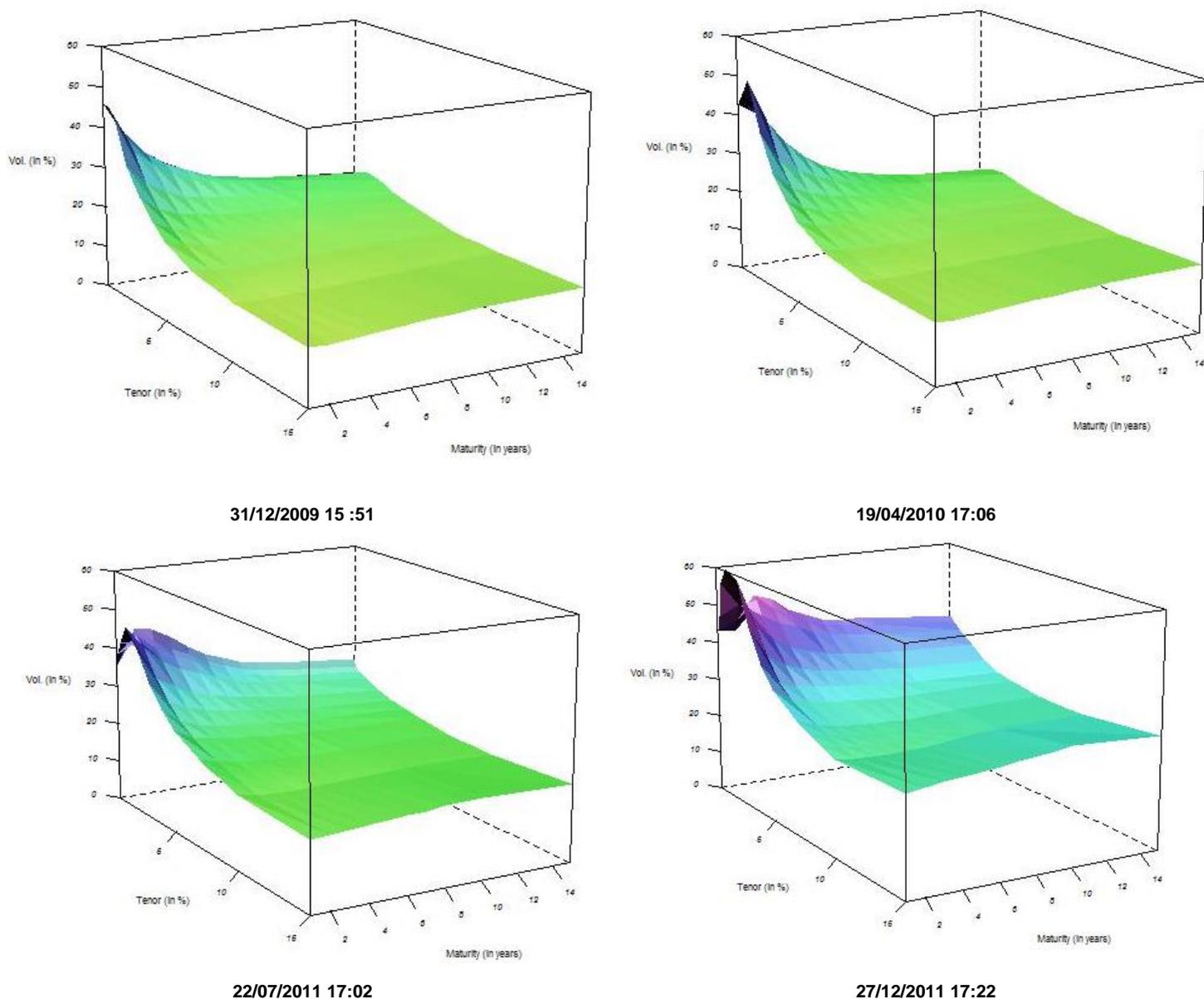


Figure 44 : Matrices de volatilités de swaptions.

## 2. Données

### 2.1. Choix des données

La norme Solvabilité II s'appliquera à tous les assureurs de l'Union européenne (hormis les fonds de pension). Ce régime prudentiel prévoit une évaluation financière des fonds propres requis, fondée sur le risque (calcul du SCR ou Solvency Capital Requirement). Il s'agira de procéder à de significatives diminutions du risque ou à la mise en place d'un nombre croissant de couvertures dynamiques et statiques à partir de dérivés dans le cadre des risques non assortis d'une prime de risque manifeste (risque de taux, de change ou de volatilité essentiellement). Par exemple, réduire le risque de volatilité équivaut à couvrir les options et les garanties présentes dans les contrats d'assurance.

Les dérivés répondent à ces exigences. Ils proposent une approche moins onéreuse et plus commode pour la gestion du risque de duration et de convexité qui se base sur l'achat et/ou la vente de diverses combinaisons de contrats sur dérivés, tels que les swaps, les calls et les puts. Les stratégies à base de dérivés permettent de mettre en oeuvre des solutions sur mesure notamment pour la couverture des événements extrêmes, l'atténuation des risques liés aux longues échéances ou la gestion des comportements non linéaires. Ces instruments financiers fournissent également une meilleure liquidité des actifs dans le cadre de la gestion actif-passif. Ils peuvent être gérés prudemment, sans ajouter de risque de contrepartie, s'ils sont négociés sur des marchés liquides ou assortis de clauses draconiennes, et ce grâce à divers mécanismes : la collatéralisation, des appels de marge systématiques, une documentation standardisée, claire et exhaustive (par exemple, *International Swaps and Derivatives Association* et *Credit Support Annex*). Il est donc tout à fait raisonnable de prévoir un emploi croissant de ce genre d'instruments dans un contexte de crise, et ce d'autant plus dans le cadre d'une comptabilité fondée sur une évaluation selon la *fair value* (valeur de marché) et soumise à une réglementation sur le plafonnement de la valeur à risque (*VaR*).

DE CASTRIES et CLAVERANNE [2010], tous deux travaillant au sein du Groupe AXA, expliquent que les dérivés constituent effectivement un outil fondamental de la gestion du risque pour tout assureur. Pour l'essentiel, les assureurs se servent de ces derniers à des fins de couverture. Ils doivent couvrir divers risques procédant à la fois des passifs et des actifs : taux d'intérêt, change, crédit, fonds propres, inflation, volatilité, longévité (même si ce dernier risque est loin de constituer un marché profond et liquide).

Dans DE CASTRIES et CLAVERANNE [2010]<sup>26</sup>, nous pouvons lire les informations concernant le Groupe AXA :

*Au 31 décembre 2009 et sur la base des montants notionnels, (i) 48 % des produits dérivés utilisés étaient des swaps, (ii) 27 % des produits optionnels, essentiellement des caps, des floors et des swaptions, (iii) 15 % des forwards et des futures, principalement hors produits de change et (iv) 10 % correspondaient à des dérivés de crédit. Les dérivés de crédit sont principalement utilisés comme un autre moyen d'investir dans les obligations d'entreprise, quand ils sont associés à des obligations d'État, mais aussi comme outil de protection contre le risque de concentration sur un émetteur privé ou un portefeuille spécifique. En 2009, le groupe a également acheté 4,4 milliards d'euros de dérivés de crédit (CDS) dans le cadre de sa stratégie de « negative basis trade ». Cette stratégie consiste à acheter (i) des obligations d'entreprise et (ii) des dérivés de crédit portant sur les mêmes émetteurs, maturités et séniorités afin de capturer la prime de liquidité associée.*

*Options : le portefeuille de produits optionnels est essentiellement constitué de caps et de floors, ainsi que de swaptions. Les caps et les floors sont des contrats par lesquels le vendeur s'engage à payer à sa contrepartie la différence (sur une base nominale) entre le taux d'intérêt lié à l'indice spécifié et le taux d'intérêt du cap ou du floor. Ces produits sont destinés à fournir une couverture en cas de hausse des taux (caps) ou de baisse des taux (floors). Ces caps et ces floors sont principalement utilisés par les activités vie, épargne, retraite qui souhaitent protéger la participation aux bénéfices des assurés et couvrir les variations des taux d'intérêt sur des produits à taux garanti. Ils servent également à anticiper l'évolution des non-renouvellements et des rachats lorsque les taux d'intérêt varient. Certains clients ont tendance à ne pas renouveler leur contrat lorsque les taux d'intérêt augmentent afin de réinvestir dans de nouveaux produits assortis de meilleures garanties. À l'inverse, les rachats ont tendance à diminuer lorsque les taux baissent, car la valeur des garanties augmente pour le client. Il en découle une convexité de notre exposition aux taux d'intérêt qui est reflétée dans nos hypothèses dynamiques sur les non-renouvellements et que ces options permettent d'équilibrer. Fin 2009, le montant notionnel des caps et des floors s'établissait à 44 milliards d'euros, soit 53 % du montant notionnel de l'intégralité des options. À la même date, les swaptions en représentaient 18 % (15 082 millions d'euros).*

<sup>26</sup>[http://www.banque-france.fr/fileadmin/user\\_upload/banque\\_de\\_france/publications/Revue\\_de\\_la\\_stabilite\\_financiere/2010/juillet-2010/revue-stabilite-financiere-de-juillet-2010-etude-04-Les-produits-derives-le-point-de-vue-d-un-assureur.pdf](http://www.banque-france.fr/fileadmin/user_upload/banque_de_france/publications/Revue_de_la_stabilite_financiere/2010/juillet-2010/revue-stabilite-financiere-de-juillet-2010-etude-04-Les-produits-derives-le-point-de-vue-d-un-assureur.pdf)

Les caps et les swaptions sont donc des instruments fortement utilisés par les assureurs et, subséquemment, constituent des instruments de choix dans le cadre de la calibration du modèle de taux que représente le modèle de Hull et White.

## 2.2. Collecte des données

Tout comme à la section 5.1 du chapitre « Les courbes de taux : méthodes de construction », nous utilisons des données issues de Reuters et s'étendant du 05/10/2009 (heure de clôture 19:09:34) au 30/12/2011 (heure de clôture 15:28:54), ce qui fait au total 570 dates de cotation. Les différents types sont les suivants :

- Matrices de volatilités de swaptions,
- Matrices de volatilités smilées de caps/floors.

Pour une quinzaine de dates, les matrices de volatilités smilées de caps/floors contiennent des données manquantes. Nous choisissons de ne pas traiter ces dates-là, à savoir :

- 12/03/2010 17:00
- 23/04/2010 17:00
- 26/05/2010 17:04
- 25/05/2010 17:00
- 20/05/2010 17:00
- 14/05/2010 17:00
- 11/05/2010 17:00
- 23/06/2010 17:00
- 09/06/2010 17:00
- 28/09/2010 17:06
- 28/04/2011 17:13
- 08/09/2011 17:02
- 20/10/2011 17:15

557 dates seront traitées pour les caps et 570 pour les swaptions.

Les maturités disponibles pour les caps sont les suivantes :

- 1 an à 10 ans,
- 15 ans,
- 20 ans.

Les strikes disponibles pour les caps sont donnés par le Tableau 21.

Strike	Valeur (%)
STK1	1,0
STK2	1,5
STK3	2,0
STK4	2,3
STK5	2,5
STK6	3,0
STK7	3,5
STK8	4,0
STK9	4,5
STK10	5,0
STK11	6,0
STK12	7,0
STK13	10,0
Strike à la monnaie (ATM)	Valeur calculée selon l'équation (121)

**Tableau 21 : strikes observés pour les caps.**

Le Tableau 22 donne un exemple de matrice de volatilités smilées de caps/floors observées sur le marché floors en date du 6 janvier 2011 (heure de clôture : 17:02:12).

Les maturités observées sont les suivantes : 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 7 ans, 8 ans, 9 ans, 10 ans et 15 ans. Les teneurs disponibles sont les suivantes : 1 an à 10 ans et 15 ans. La Figure 44 affiche quelques nappes de volatilités en fonction de la maturité et de la teneur.

Le but du mémoire est de calibrer un modèle de taux qui servira ultérieurement à générer des scénarios économiques dans l'univers risque neutre, dont l'horizon de projection est de 5 ans. Par conséquent, il s'avère judicieux de se restreindre à des instruments dont la maturité est voisine de cet horizon.

Par ailleurs, un examen de la matrice des volatilités des caps montre de grands écarts, pour une même maturité, entre les volatilités correspondant à des strikes faibles et celles correspondant à des strikes élevés. Dans un souci d'homogénéité, nous restreignons la plage des strikes utilisés.

	STK1	STK2	STK3	STK4	STK5	STK6	STK7	STK8	STK9	STK10	STK11	STK12	STK13	ATM
	0.010	0.015	0.020	0.023	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.060	0.070	0.100	ATM
1Y	0.390	0.365	0.382	0.394	0.405	0.427	0.445	0.461	0.475	0.487	0.508	0.518	0.554	0.372
2Y	0.485	0.458	0.463	0.467	0.473	0.485	0.497	0.510	0.521	0.532	0.551	0.565	0.601	0.459
3Y	0.477	0.414	0.402	0.400	0.398	0.399	0.405	0.414	0.423	0.433	0.451	0.427	0.427	0.403
4Y	0.486	0.417	0.392	0.384	0.379	0.370	0.370	0.374	0.380	0.388	0.404	0.377	0.363	0.383
5Y	0.487	0.415	0.382	0.370	0.361	0.346	0.338	0.336	0.339	0.344	0.358	0.335	0.321	0.359
6Y	0.484	0.412	0.374	0.360	0.348	0.329	0.316	0.310	0.309	0.313	0.323	0.306	0.295	0.337
7Y	0.480	0.408	0.366	0.350	0.337	0.316	0.299	0.290	0.287	0.288	0.297	0.284	0.280	0.318
8Y	0.475	0.402	0.359	0.342	0.328	0.305	0.286	0.274	0.269	0.269	0.276	0.267	0.269	0.302
9Y	0.470	0.398	0.353	0.336	0.320	0.296	0.276	0.263	0.256	0.255	0.261	0.254	0.260	0.288
10Y	0.466	0.394	0.349	0.330	0.315	0.289	0.269	0.253	0.245	0.243	0.249	0.243	0.252	0.277
15Y	0.430	0.366	0.322	0.304	0.288	0.262	0.242	0.225	0.213	0.208	0.207	0.206	0.220	0.238
20Y	0.409	0.349	0.307	0.290	0.275	0.250	0.231	0.215	0.205	0.200	0.199	0.200	0.215	0.226

**Tableau 22 : matrice de volatilités smiles de caps/floors en date du 6 janvier 2011 (heure de clôture : 17:02:12). En foncé, les données retenues.**

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	15Y
1M	0.424	0.359	0.342	0.335	0.336	0.316	0.300	0.290	0.283	0.274	0.257
3M	0.458	0.393	0.362	0.341	0.328	0.305	0.292	0.284	0.280	0.278	0.265
6M	0.441	0.396	0.358	0.334	0.316	0.296	0.284	0.276	0.270	0.267	0.252
1Y	0.488	0.390	0.350	0.321	0.298	0.280	0.268	0.260	0.254	0.252	0.237
2Y	0.404	0.325	0.297	0.278	0.264	0.251	0.243	0.238	0.233	0.229	0.218
3Y	0.326	0.273	0.256	0.244	0.236	0.229	0.223	0.219	0.215	0.213	0.202
4Y	0.266	0.237	0.225	0.217	0.212	0.206	0.203	0.199	0.198	0.197	0.189
5Y	0.234	0.216	0.206	0.201	0.196	0.192	0.189	0.188	0.188	0.188	0.183
7Y	0.20	0.19	0.19	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17
8Y	0.19	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.17
9Y	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18
10Y	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18
15Y	0.17	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19	0.20	0.20	0.20

**Tableau 23 : matrice de volatilités de swaptions en date du 5 janvier 2011 (heure de clôture : 17:02:04). En foncé, les données retenues.**

Pour les swaptions :

- Les maturités retenues sont les maturités 4 ans, 5 ans et 7 ans.
- Toutes les durations sont retenues.

Pour les caps :

- Les maturités retenues sont les maturités 4 ans, 5 ans, 6 ans et 7 ans.
- Les strikes retenus sont les strikes 0.030, 0.035, 0.040, 0.045, 0.050 et celui qui correspond aux caps à la monnaie (ATM).

### 3. Calibration

La calibration du modèle de taux s'effectue de manière similaire à la calibration du modèle de Nelson, Siegel et Svensson entreprise (cf. section 5.2.3 du chapitre précédent). Nous appliquons donc un algorithme d'évolution différentielle (cf. section 5.3 de l'annexe) pour minimiser les deux fonctions ci-dessous, l'une correspondant à la calibration par rapport à des caps, l'autre par rapport à des swaptions :

$$\xi_{cap} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_{caps}} \frac{(Cap_j^{(HW)} - Cap_j^{(Bl)})^2}{Cap_j^{(Bl)}}} \quad (131)$$

$$\xi_{swaption} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_{swaptions}} \frac{(PS_j^{(HW)} - PS_j^{(Bl)})^2}{PS_j^{(Bl)}}} \quad (132)$$

De plus, nous imposons les contraintes aux paramètres :

$$\begin{cases} 0.01 \leq a \leq 0.2 \\ 0.0001 \leq \sigma \leq 0.05 \end{cases} \quad (133)$$

En vue de la satisfaction aux contraintes (133), nous utilisons une fonction de réparation (cf. section 5.3.5.2 de l'annexe).

Nous mettons en œuvre également la même « astuce » que celle mise en œuvre dans le cadre de la construction de la courbe de taux sans risque à l'aide de l'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson (cf. section 5.2.3.1 du chapitre précédent et Figure 18). Elle consiste à utiliser comme population initiale à une date donnée la population solution trouvée à la date précédente.

Les courbes de taux sans risque utilisées sont celles générées par la méthode d'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson décrite à la section 4.3 du chapitre « *Les courbes de taux : méthodes de construction* ».

Finalement, nous utilisons le même paramétrage pour les caps et les swaptions :

Nombre d'itérations à la date initiale $t_1$	: $n_G = 20$
Nombre d'itérations aux autres dates $t_i (i \in 1, Nd)$	: $n_G/2 = 10$
Taille de la population $n_p$	: $n_p = 80$
Taille du pas $F$	: $F = 0.5$
Probabilité de permutation $CR$	: $CR = 0.99$

## 4. Analyse des résultats

### 4.1. Evolution des paramètres

Dans le cas d'une calibration à partir de swaptions, on peut observer que les paramètres sont relativement stables jusqu'en octobre 2010. Le retour à la moyenne  $\alpha_{swaption}$  et la volatilité  $\sigma_{swaption}$  affichent une tendance haussière jusqu'en février 2011, puis baissière jusqu'à la fin de la période. L'erreur d'ajustement  $\varepsilon_{swaption}$  est remarquablement stable, hormis un pic haussier en octobre 2011 qui atteint 2,671.

Dans le cas d'une calibration à partir de caps, le retour à la moyenne  $\alpha_{cap}$  et la volatilité  $\sigma_{cap}$  affichent une tendance baissière jusqu'en février 2010. Ensuite, la trajectoire de la volatilité  $\sigma_{cap}$  n'a pas de tendance particulière, tandis que le retour à la moyenne  $\alpha_{cap}$  est curieusement égal à 0. L'erreur d'ajustement  $\varepsilon_{cap}$  est du même ordre que celle dans le cas d'une calibration à partir de swaptions,  $\varepsilon_{swaption}$  jusqu'en février 2011, puis fluctue (à partir d'avril 2011, elle affiche une tendance haussière). L'erreur  $\varepsilon_{cap}$  est plus élevée que  $\varepsilon_{swaption}$ , elle vaut en moyenne en 1,2280000 ; elle est aussi deux fois plus volatile avec un écart type de 0,4484357 contre 0,2089819 pour  $\varepsilon_{swaption}$ .

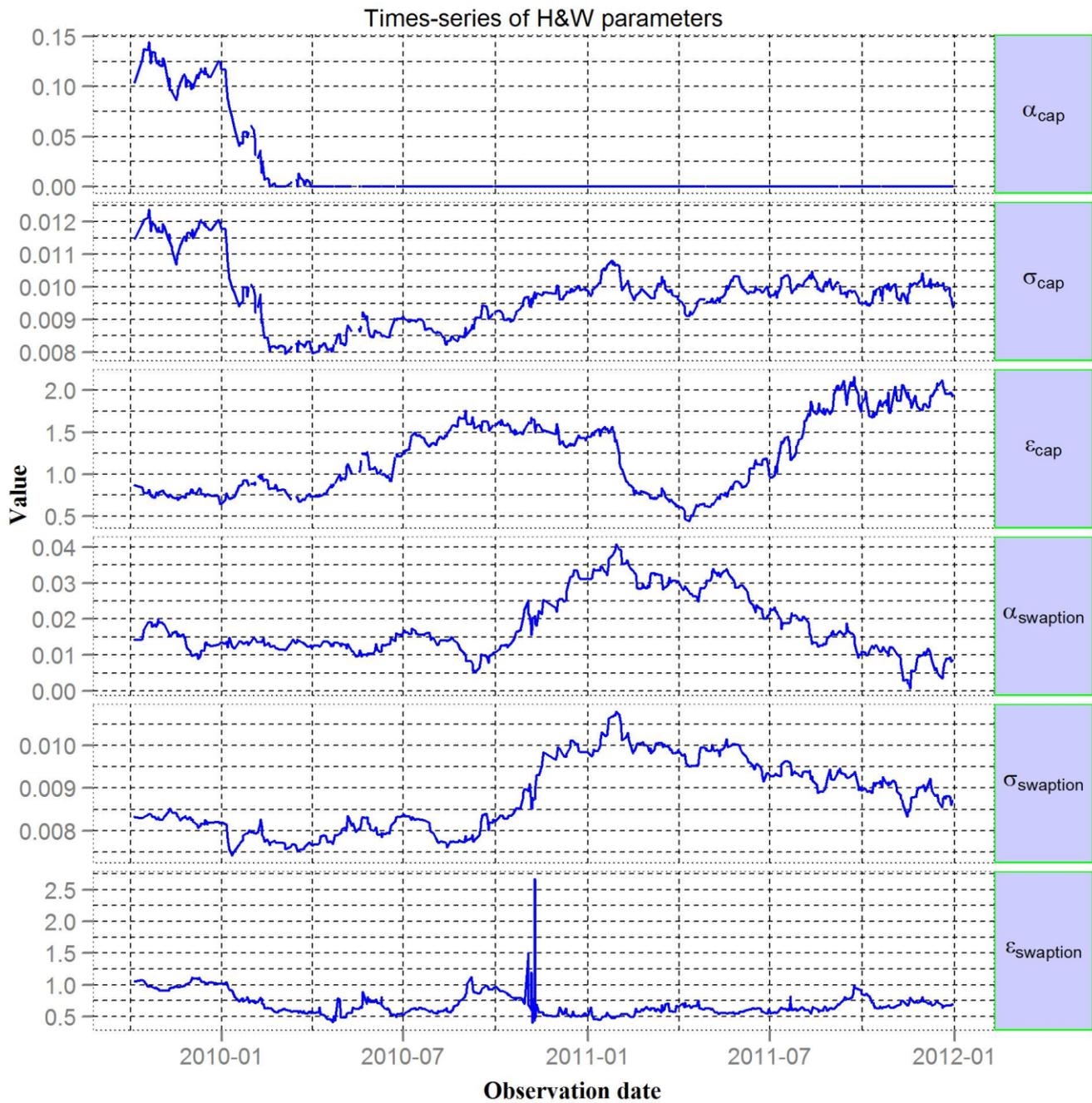


Figure 45 : évolution des paramètres au cours de la période observée.

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
$\alpha_{cap}$	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.01436000	0.00000000	0.14420000	0.03616934
$\sigma_{cap}$	7.951000e-03	9.037000e-03	9.775000e-03	9.701000e-03	1.006000e-02	1.237000e-02	9.476155e-04
$\varepsilon_{cap}$	0.4405000	0.7881000	1.2020000	1.2280000	1.5890000	2.1610000	0.4484357
$\alpha_{swaption}$	0.000689500	0.012140000	0.014900000	0.017950000	0.023140000	0.040790000	0.008460317
$\sigma_{swaption}$	0.0074110000	0.0081480000	0.0087780000	0.0088290000	0.0095400000	0.0108000000	0.0008343026
$\varepsilon_{swaption}$	0.3988000	0.5745000	0.6386000	0.6995000	0.7729000	2.6710000	0.2089819

**Tableau 24 : statistiques sur l'évolution des paramètres dans le cas de la calibration à partir de caps.**

## 4.2. Qualité d'ajustement

### 4.2.1. Qualité d'ajustement sur échantillon

Au regard du Tableau 25 et du Tableau 26, l'ajustement est bien meilleur dans le cas de la calibration à partir de swaptions : dans le cas de la calibration à partir de caps, l'écart entre la volatilité de Black et Scholes et celle de Hull et Whites vaut en moyenne 0,04593 et a un écart type de 0,04005862, tandis que, dans le cas de la calibration à partir de swaptions, celui entre la volatilité de Black et Scholes et celle de Hull et Whites vaut en moyenne 0,04593 et a un écart type de 0,04005862.

D'après la Figure 46, pour les swaptions, l'ajustement est meilleur pour les maturités 4 ans et 5 ans que pour la maturité 7 ans. Comme le montre la Figure 47, l'ajustement est de piètre qualité pour les caps. Comme illustré sur la Figure 36 de l'annexe, il se dégrade après février 2010, date à partir de laquelle  $\alpha_{cap}$  vaut 0 (cf. Tableau 35).

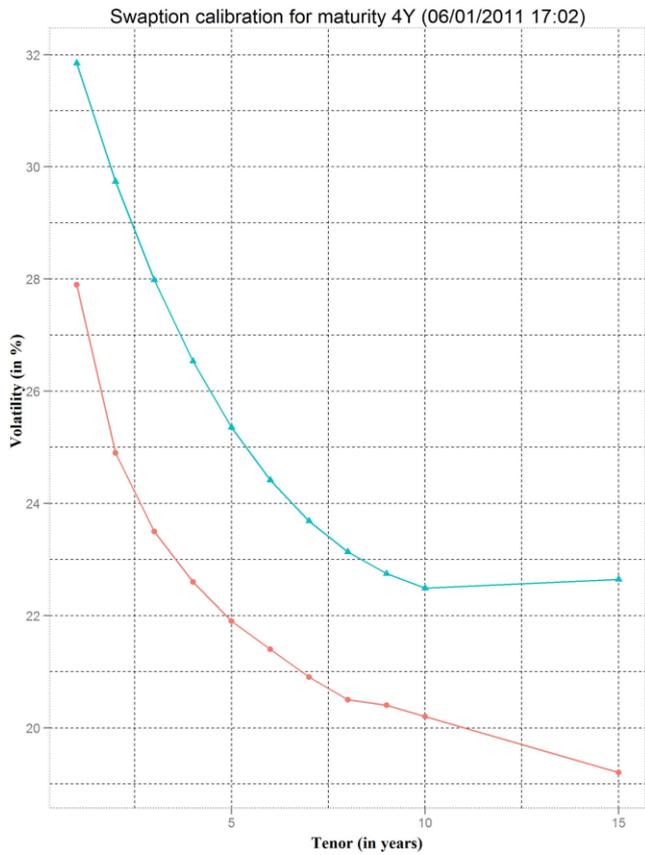
D'autres tableaux et courbes sont disponibles à la section 8.2.1 de l'annexe.

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
Volatilité de Black et Scholles	0.13500000	0.18200000	0.20500000	0.21390000	0.23900000	0.43400000	0.04455373
Volatilité de Hull et White	0.11900000	0.16550000	0.19440000	0.20700000	0.23940000	0.47040000	0.05722102
Écart	0.000003455	0.006986000	0.013590000	0.014910000	0.021080000	0.063820000	0.009996141

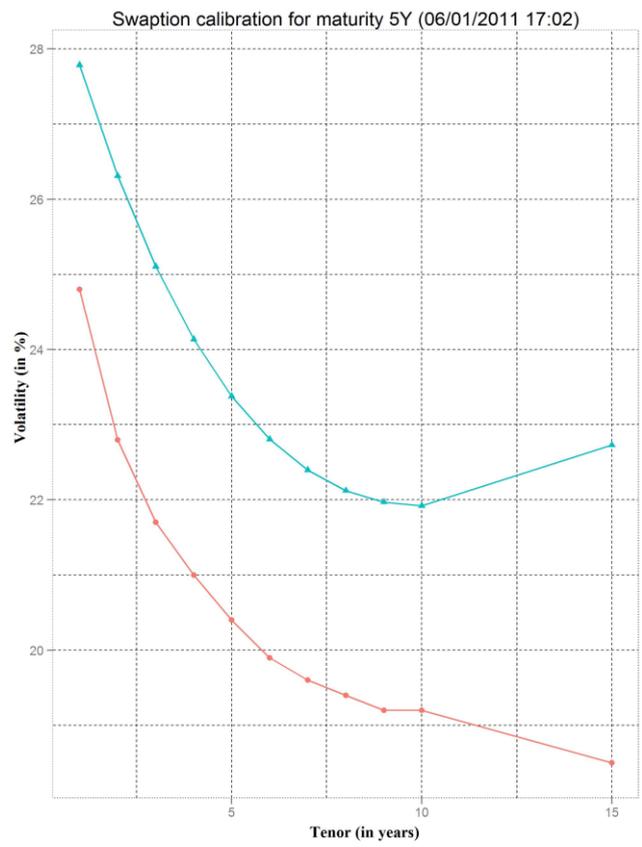
**Tableau 25 : écart entre les volatilités de swaptions observées et celles calculées.**

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
Volatilité de Black et Scholles	0.1960000	0.2860000	0.3200000	0.3260000	0.3620000	0.5130000	0.0561237
Volatilité de Hull et White	0.18820000	0.26090000	0.29380000	0.30630000	0.33530000	0.72990000	0.06915736
Écart	0.000002768	0.014650000	0.035620000	0.045930000	0.066830000	0.254700000	0.040058620

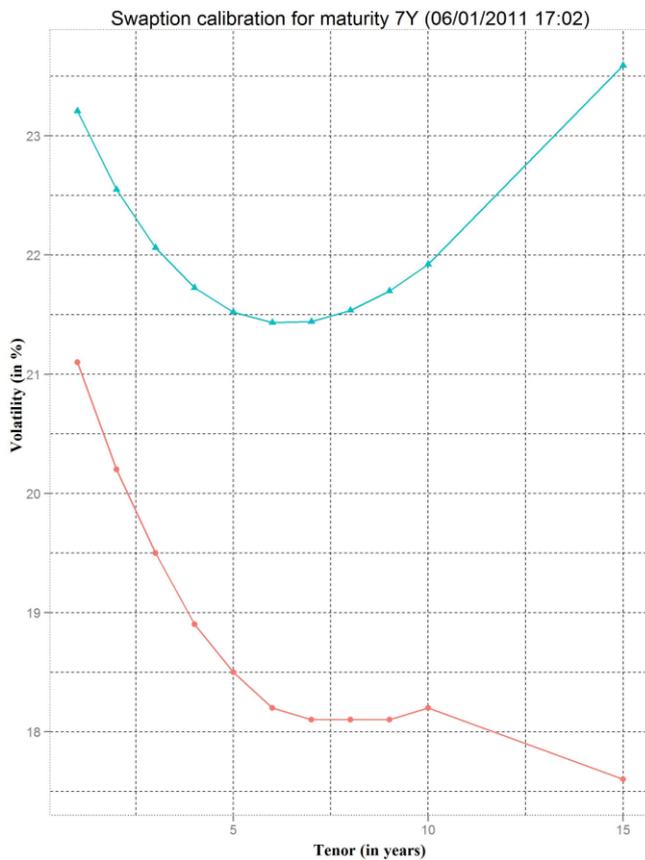
**Tableau 26 : écart entre les volatilités de caps observées et celles calculées.**



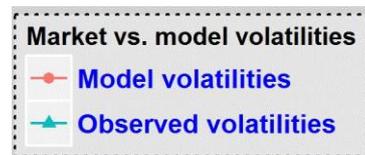
**Maturité 4 ans**



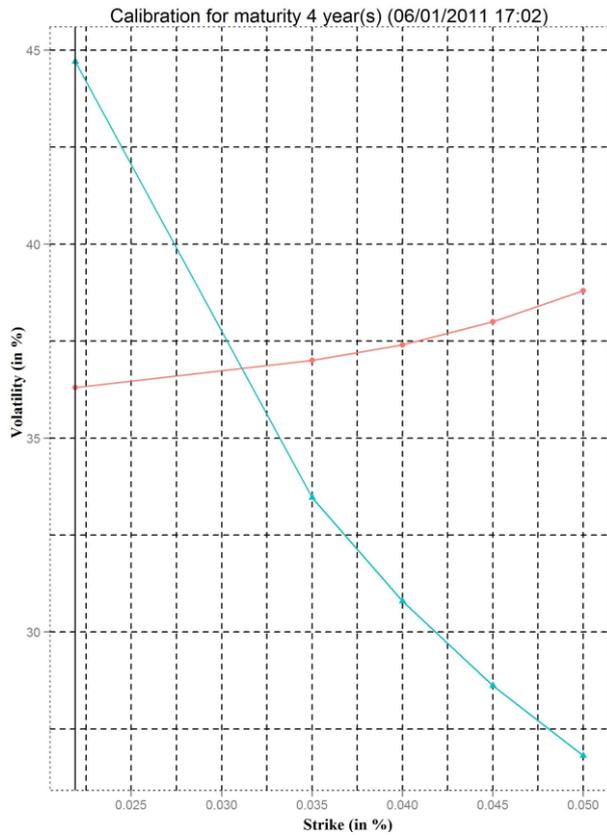
**Maturité 5 ans**



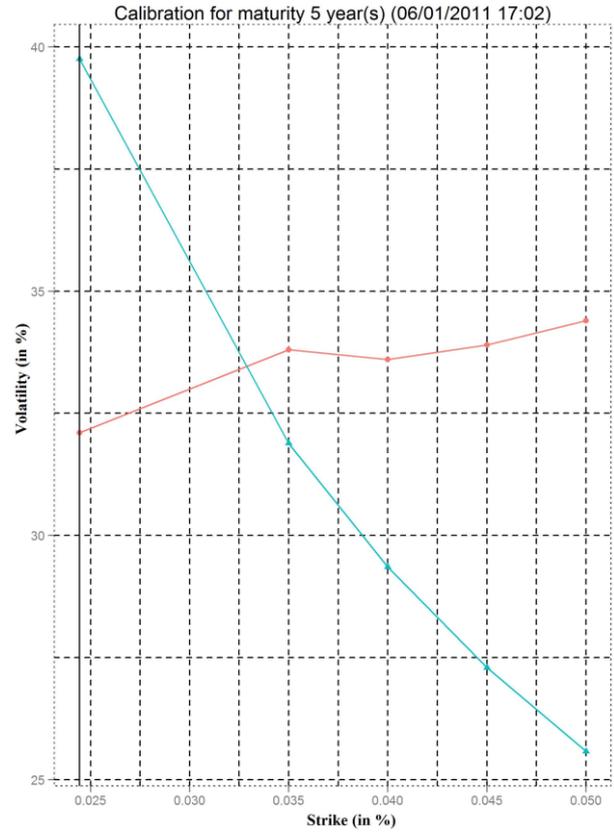
**Maturité 7 ans**



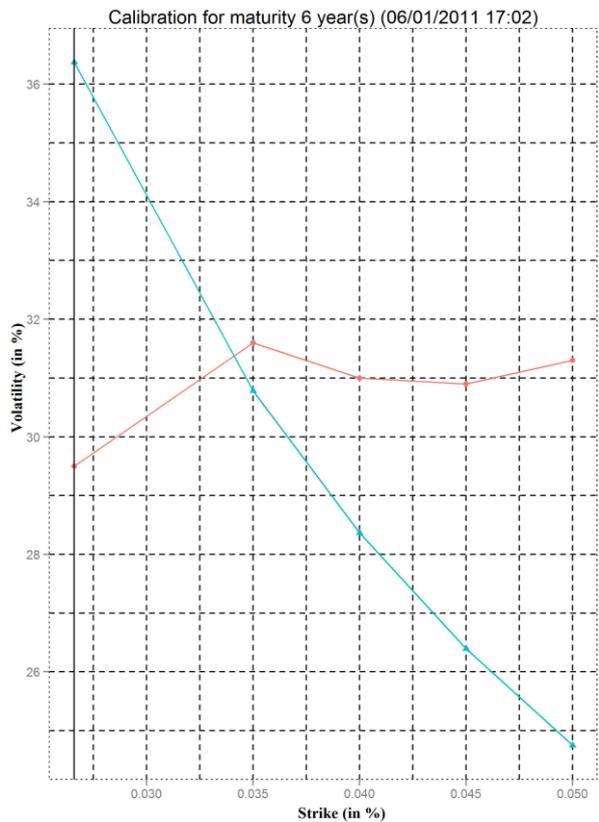
**Figure 46 : courbes de volatilités implicites de swaptions en date du 6 janvier 2011.**



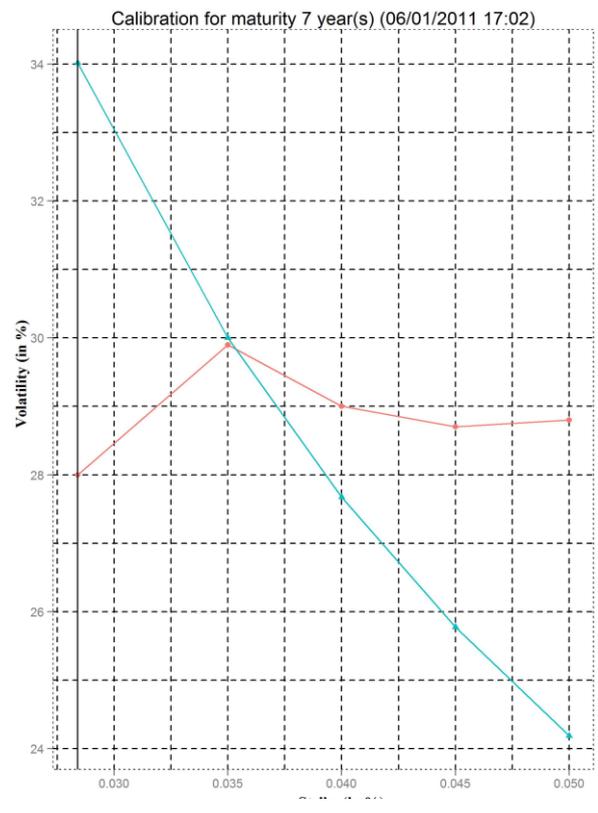
**Maturité 4 ans**



**Maturité 5 ans**



**Maturité 6 ans**



**Maturité 7 ans**

**Figure 47 : courbes de volatilités de caps implicites en date du 6 janvier 2011.**

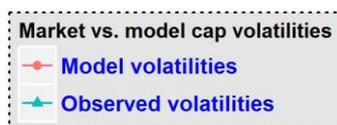


Figure 48 : légendes des courbes de volatilités de caps implicites.

#### 4.2.2. Qualité d'ajustement hors échantillon : autres instruments

Pour chaque date de cotation, nous calculons les volatilités des swaptions à l'aide des paramètres calculés lors d'une calibration à partir de caps, et nous faisons de même pour les volatilités des caps.

La qualité d'ajustement est bien entendu moindre.

Au regard du Tableau 27 et du Tableau 28, l'ajustement est bien meilleur dans le cas de la calibration à partir de swaptions : dans le cas de la calibration à partir de caps, l'écart entre la volatilité de Black et Scholles et celle de Hull et Whites vaut en moyenne 0,06369 et a un écart type de 0,04090674, tandis que, dans le cas de la calibration à partir de swaptions, celui entre la volatilité de Black et Scholles et celle de Hull et Whites vaut en moyenne 0,03522 et a un écart type de 0,02112857.

D'après la Figure 49, pour les swaptions, l'ajustement est meilleur pour les maturités 4 ans et 5 ans pour les swaptions que pour la maturité 7 ans. Comme le montre la Figure 50, l'ajustement est médiocre pour les caps.

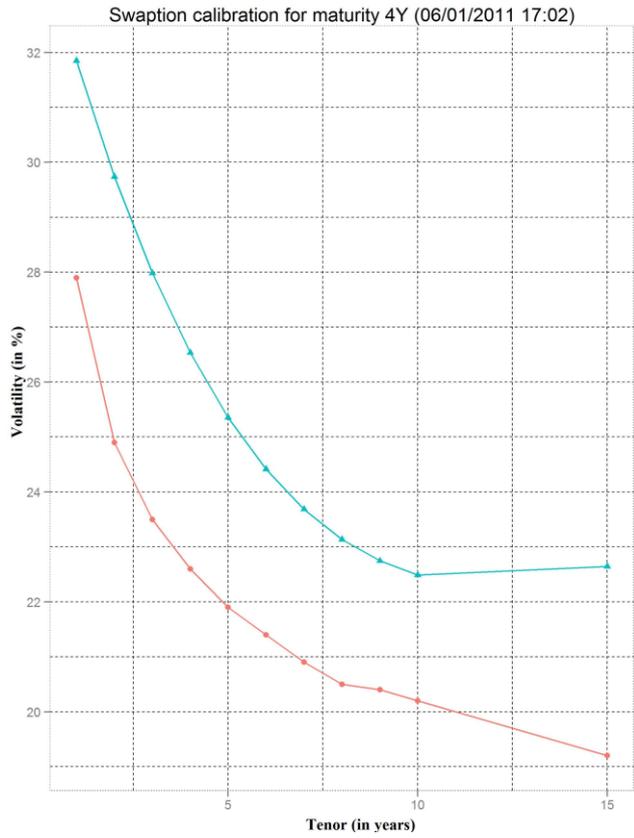
D'autres tableaux et courbes sont disponibles à la section 8.2.2 de l'annexe.

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
Volatilité de Black et Scholles	0.13500000	0.18200000	0.20500000	0.21390000	0.23900000	0.43400000	0.04455373
Volatilité de Hull et White	0.05763000	0.20200000	0.23270000	0.23850000	0.27900000	0.50880000	0.07139903
Écart	0.00002893	0.01908000	0.03291000	0.03522000	0.04912000	0.11430000	0.02112857

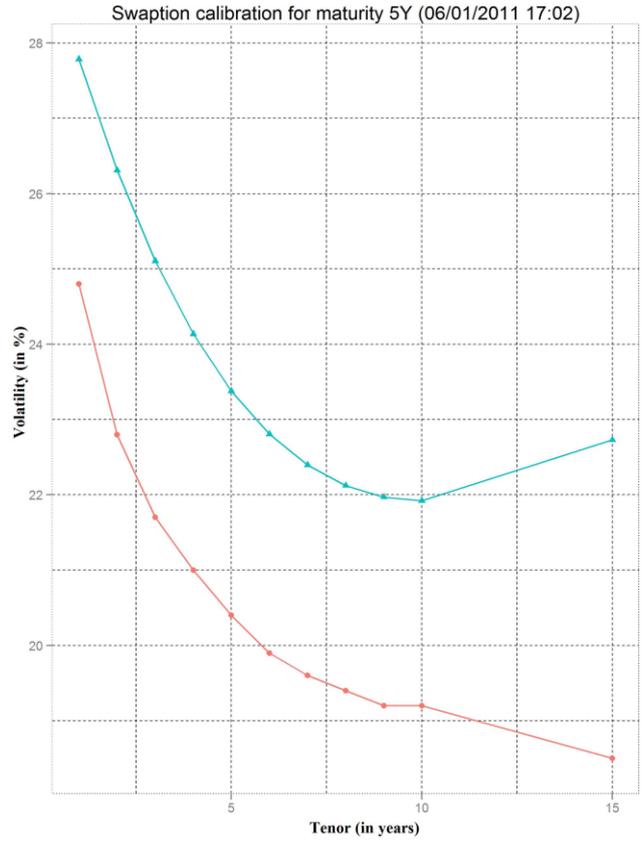
Tableau 27 : écart entre les volatilités de swaptions observées et celles calculées.

	Minimum	1 <sup>er</sup> quartile	Médiane	Moyenne	3 <sup>ième</sup> quartile	Maximum	Écart type
Volatilité de Black et Scholles	0.19600000	0.28600000	0.32000000	0.32600000	0.36200000	0.51300000	0.0561237
Volatilité de Hull et White	0.16830000	0.23420000	0.26330000	0.27500000	0.30310000	0.64090000	0.06165922
Écart	0.00001491	0.03192000	0.05698000	0.06369000	0.08895000	0.23040000	0.04090674

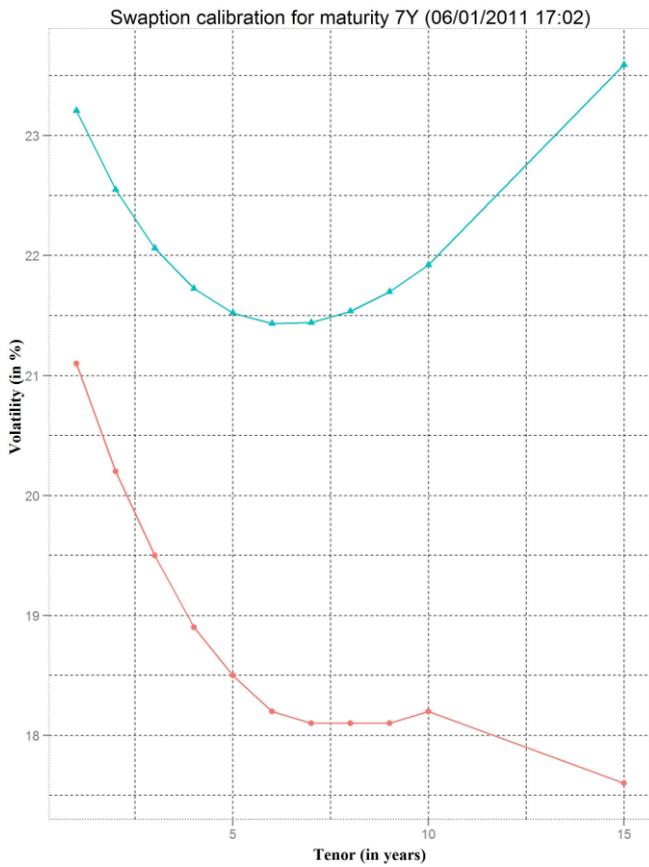
Tableau 28 : écart entre les volatilités de caps observées et celles calculées.



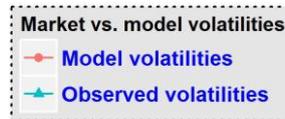
**Maturité 4 ans**



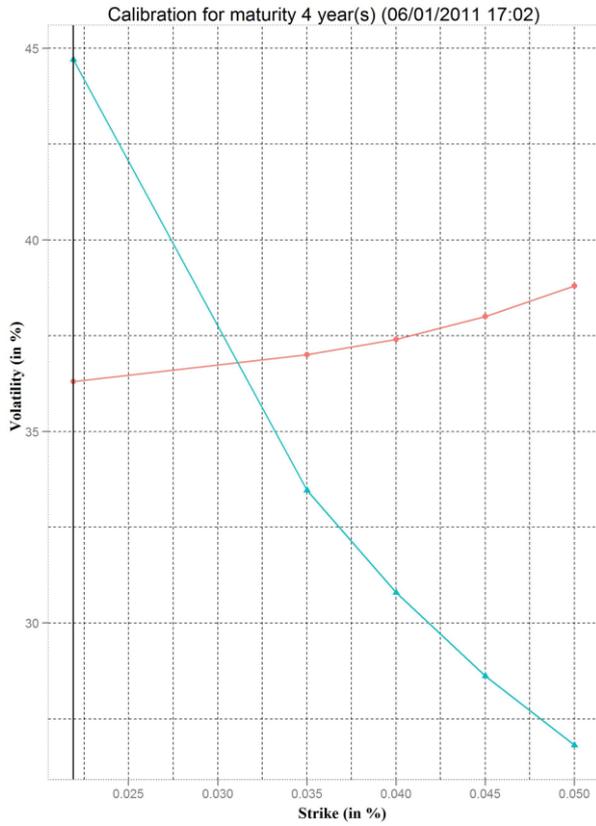
**Maturité 5 ans**



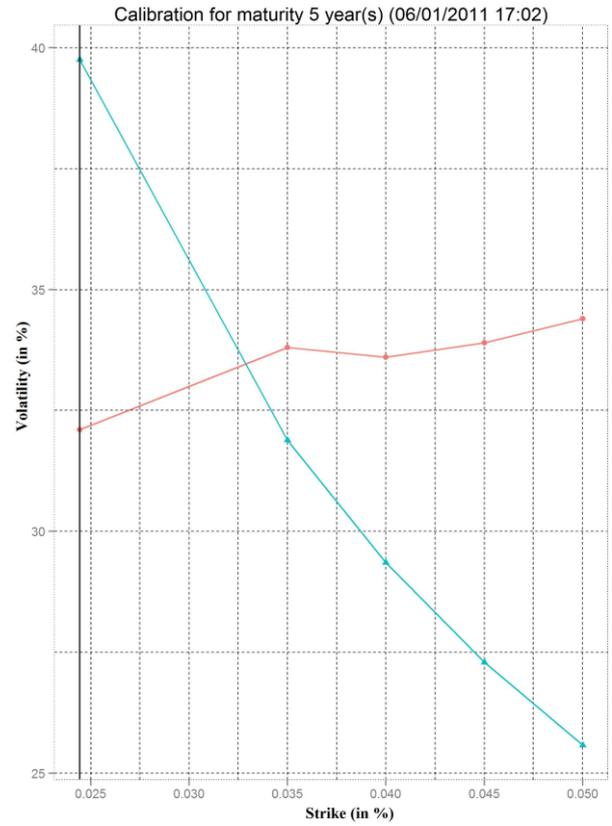
**Maturité 7 ans**



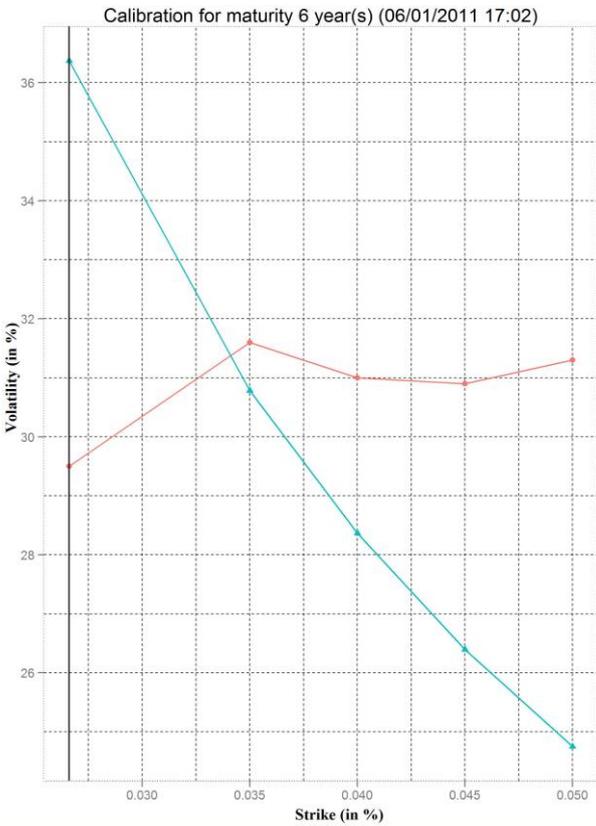
**Figure 49 : courbes de volatilités de swaptions implicites en date du 6 janvier 2011.**



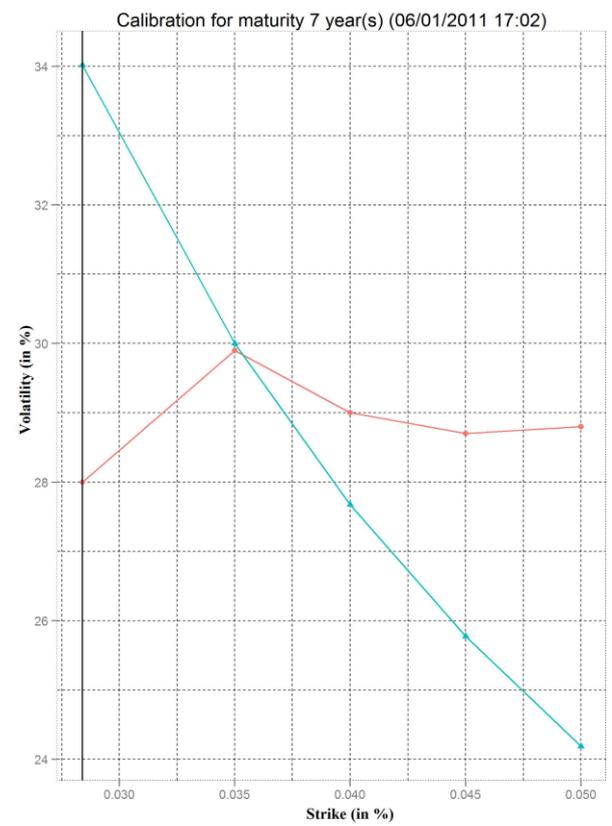
**Maturité 4 ans**



**Maturité 5 ans**



**Maturité 6 ans**



**Maturité 7 ans**

**Figure 50 : courbes de volatilités de caps implicites en date du 6 janvier 2011.**



Figure 51 : Légendes pour les courbes de volatilités de caps implicites.

#### 4.2.3. Qualité d'ajustement hors échantillon : période future

Notons :

- $t_1, \dots, t_N$  l'ensemble des dates de la période considérée.
- $\alpha_{cap}(t_i)$  et  $\sigma_{cap}(t_i)$  le retour à la moyenne et la volatilité calculés lors de la calibration à partir de caps à la date  $t_i$ .
- $\alpha_{swaption}(t_i)$  et  $\sigma_{swaption}(t_i)$  le retour à la moyenne et la volatilité calculés lors de la calibration à partir de swaptions à la date  $t_i$ .
- $h$  le pas en jours.
- $C(t_{i+h})$  la courbe des taux sans risque à la date  $t_{i+h}$ .
- $M_{i+h}^{(c)}$  le nombre de caps utilisés dans la calibration à la date  $t_{i+h}$ .
- $M_{i+h}^{(s)}$  le nombre de swaptions utilisées dans la calibration à la date  $t_{i+h}$ .
- $\sigma_T^{(c)}(t_{i+h})$  la volatilité de Black d'un cap de caractéristique  $T$  à la date  $t_{i+h}$ .
- $\sigma_T^{(s)}(t_{i+h})$  la volatilité de Black d'une swaption de caractéristique  $T$  à la date  $t_{i+h}$ .
- $Cap_j^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{cap}(t_i), \sigma_{cap}(t_i), C(t_{i+h}))$  le prix du cap  $j \in \llbracket 1, M_{i+h}^{(c)} \rrbracket$  dans le modèle de Hull et White, calculé selon la formule (123) à la date  $t_{i+h}$  à l'aide des paramètres  $\alpha_{cap}(t_i)$  et  $\sigma_{cap}(t_i)$  et de la courbe  $C(t_{i+h})$ .
- $Cap_j^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(c)}(t_{i+h}), C(t_{i+h}))$  le prix du cap  $j \in \llbracket 1, M_{i+h}^{(c)} \rrbracket$  dans le modèle de Black, calculé selon la formule (118) à la date  $t_{i+h}$ .
- $PS_j^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{swaption}(t_i), \sigma_{swaption}(t_i), C(t_{i+h}))$  le prix de la swaption  $j \in \llbracket 1, M_{i+h}^{(s)} \rrbracket$  dans le modèle de Hull et White, calculé selon la formule (128) à la date  $t_{i+h}$  à l'aide des paramètres  $\alpha_{swaption}(t_i)$  et  $\sigma_{swaption}(t_i)$  et de la courbe  $C(t_{i+h})$ .
- $PS_j^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(s)}(t_{i+h}), C(t_{i+h}))$  le prix de la swaption  $j \in \llbracket 1, M_{i+h}^{(s)} \rrbracket$  dans le modèle de Black, calculé selon la formule (126) à la date  $t_{i+h}$ .

Pour un groupe donné d'instruments (caps ou swaptions), le principe consiste à calculer à la date  $t_{i+h}$ , en utilisant la courbe des taux sans risque  $C(t_{i+h})$  en vigueur à cette même date  $t_{i+h}$ , le prix de chacun de ces instruments à l'aide des paramètres déterminés lors de la calibration réalisée à la date  $t_i$ . On réitère le processus à toutes les dates  $t_i$ . Une fois cela fait, on entreprend une régression linéaire de tous les prix observés sur la période étudiée par rapport à ceux ainsi calculés. En d'autres termes, pour les caps, on recherche la pente  $\beta_1^{(c)}$  et à l'ordonnée à l'origine  $\beta_0^{(c)}$  qui satisfont à la relation suivante :

$$Cap_j^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(c)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(c)} Cap_j^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{cap}(t_i), \sigma_{cap}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(c)}, \quad (134)$$

$$\forall i \in h, N, \forall j \in \llbracket 1, M_{i+h}^{(c)} \rrbracket$$

Et pour les swaptions, on recherche la pente  $\beta_1^{(s)}$  et à l'ordonnée à l'origine  $\beta_0^{(s)}$  qui satisfont à la relation suivante :

$$PS_j^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(s)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(s)} PS_j^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{swaption}(t_i), \sigma_{swaption}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(s)}, \quad (135)$$

$$\forall i \in h, N, \forall j \in \llbracket 1, M_{i+h}^{(s)} \rrbracket$$

La Figure 52 et la Figure 53 illustrent ce processus, la première dans le cas des caps, la seconde dans le cas des swaptions.

$$\begin{cases} Cap_1^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(c)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(c)} Cap_1^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{cap}(t_i), \sigma_{cap}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(c)} \\ \vdots \\ Cap_j^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(c)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(c)} Cap_j^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{cap}(t_i), \sigma_{cap}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(c)} \\ \vdots \\ Cap_{M_{i+h}^{(c)}}^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(c)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(c)} Cap_{M_{i+h}^{(c)}}^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{cap}(t_i), \sigma_{cap}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(c)} \end{cases}$$

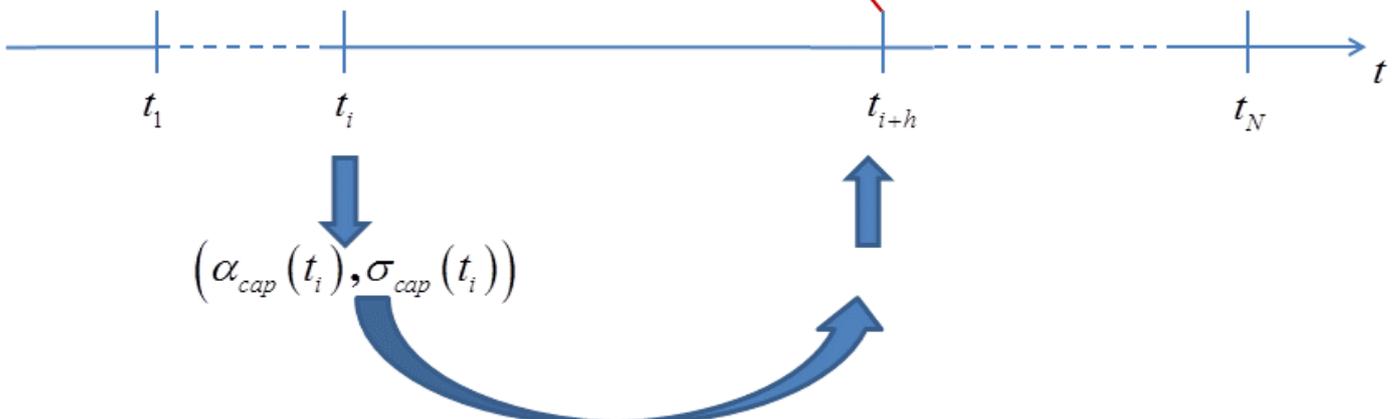
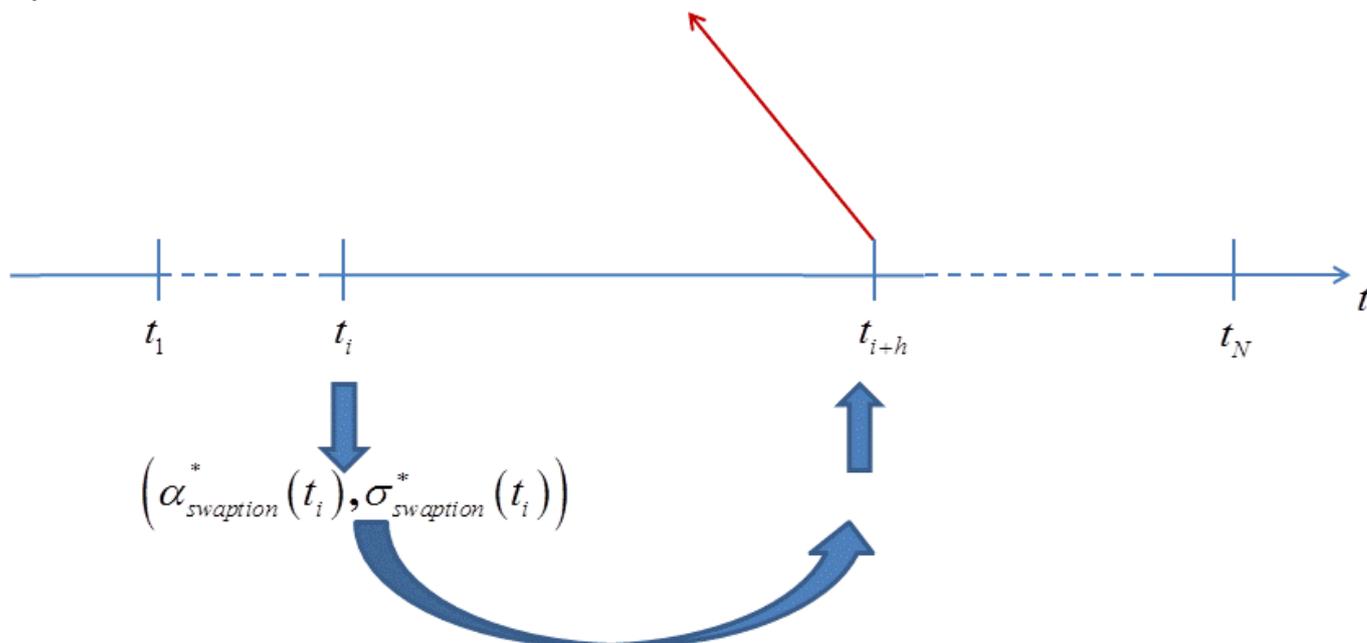


Figure 52 : régression linéaire des prix observés par rapport aux prix calculés à l'aide des paramètres déterminés lors de la calibration d'une période passée de  $h$  jours. Cas des caps.

$$\left\{ \begin{array}{l} PS_1^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(s)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(s)} PS_1^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{swaption}(t_i), \sigma_{swaption}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(s)} \\ \vdots \\ PS_j^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(s)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(s)} PS_j^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{swaption}(t_i), \sigma_{swaption}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(s)} \\ \vdots \\ PS_{M_{i+h}^{(s)}}^{(BS)}(t_{i+h}, \sigma_T^{(s)}(t_{i+h}), C(t_{i+h})) = \beta_1^{(s)} PS_{M_{i+h}^{(s)}}^{(HW)}(t_{i+h}, \alpha_{swaption}(t_i), \sigma_{swaption}(t_i), C(t_{i+h})) + \beta_0^{(s)} \end{array} \right.$$



**Figure 53 : régression linéaire des prix observés par rapport aux prix calculés à l'aide des paramètres déterminés lors de la calibration d'une période passée de  $h$  jours. Cas des swaptions.**

Au vu des résultats des tableaux de la section 8.2.3 de l'annexe, on ne peut guère parler de prédictibilité dans le cas d'une calibration de caps, tandis que la prédictibilité dans le cas d'une calibration de swaptions est acceptable. Bien entendu, elle diminue avec le pas.

### 4.3. Conclusion

La calibration à partir de volatilités de caps ne s'effectue pas correctement. En effet, l'ajustement est médiocre. Serait-ce imputable au de construire la courbe des taux sans risque à partir des taux *swap* sur Euribor 3 mois ? Cette courbe des taux sans risque contiendrait-elle un *spread* implicite ? Pourtant, la calibration à partir de volatilités de swaptions, qui, elle, utilise une courbe des taux sans risque construite à partir des taux *swap* sur Euribor 6 mois, présente une qualité d'ajustement correcte. Le chapitre suivant confirmera l'existence de *spreads* implicites contenus dans les taux *swaps* sur Euribor.

En l'état actuel des choses, mieux vaut donc calibrer le modèle de Hull et White à partir de swaptions.

# Les *spreads* de crédit : composantes et modèles d'analyse

L'objectif de ce chapitre est principalement l'étude et l'implémentation du modèle de LONGSTAFF et al. [2005].

Le taux de rendement exigé sur les obligations émises par des entreprises est sensiblement supérieur à ceux des obligations souveraines. Cette différence de taux, communément appelée *spread* de crédit, vient rémunérer l'investisseur pour les risques encourus à l'investissement dans les titres de dette de l'entreprise concernée : le risque que l'émetteur défaille (c'est-à-dire qu'il ne puisse plus honorer ses engagements pécuniaires), mais aussi – comme ce sera développé ultérieurement à l'appui de modèles – le risque de liquidité.

La liquidité sur le marché obligataire est une problématique cruciale aussi bien du point de vue de l'investisseur que de l'émetteur. Pour l'investisseur, un actif illiquide comporte un risque supplémentaire ; celui de ne pas pouvoir se débarrasser de cet actif aussi promptement qu'il le désire et au moindre coût. Dans un contexte d'illiquidité, l'investisseur sera porté à exiger une prime en compensation du risque encouru. Du point de vue de l'émetteur, sur un marché liquide, le taux de rentabilité requis par les investisseurs sera moindre. Une bonne liquidité du marché obligataire engendrera un coût du capital inférieur, toutes choses égales par ailleurs.

Se pose en outre la question décisive : comment quantifier le risque de défaut sur une obligation d'entreprise ? Ce chapitre se propose d'y répondre. Ainsi, dans une première section, nous définirons les termes et notions qui rentrent en jeu dans notre analyse. Une seconde section décrira de façon détaillée un type d'instruments, les *Credit Default Swap*, type qui sera utilisé pour déterminer les différentes composantes du *spread* d'une obligation d'entreprise. Une troisième section dressera un panorama des différentes modélisations du risque de défaut, lesquelles se répartissent en deux catégories : les modèles à intensité et les modèles structurelles. Dans la quatrième section, nous analyserons de façon circonstanciée et implémenterons un modèle à forme réduite : le modèle de LONGSTAFF et al. [2005], qui utilise des données provenant de CDS (*Credit Default Swap*) et a comme particularité de ne pas dépendre du choix du modèle de taux court. Nous analyserons alors les résultats et constaterons notamment la présence de *spreads* implicites dans la courbe de taux préconisée par l'EIOPA (taux supposés sans risque) en détectant une composante de liquidité négative dans les *spreads* des obligations d'entreprise. Cela fera écho à l'existence de plusieurs courbes de taux sans risque depuis la crise financière de 2008, existence évoquée dans le chapitre « *Les courbes de taux : méthodes de construction* ».

## 1. Risques sur le marché obligataire

### 1.1. Le *spread* compense-t-il un seul et unique risque ?

L'investissement sur le marché d'un titre de dette émis par une entreprise expose au risque que celle-ci fasse défaut. Dans une telle situation, l'entreprise émettrice se retrouve dans l'incapacité de rembourser les intérêts et/ou le principal à l'investisseur. Par ailleurs, cet investisseur pourrait très bien décider d'acquérir dans un titre de dette non risqué. Corolairement, pour que l'investisseur accepte d'investir dans un titre de dette risqué, il doit requérir un prix inférieur, autrement dit un taux de rendement à l'échéance supérieur à celui fourni par les titres de dette non risqués de maturité identique. Ce taux en excès exigé par l'investisseur est nommé le *spread* de crédit. En outre, il reste à définir le taux de référence sans risque en vue de calculer le rendement en excès.

A supposer que l'excès de rendement requis par le marché compense seulement un risque de défaut, alors l'évaluation de la dette par un modèle structurel devrait en principe aboutir à un taux de rendement requis théorique égal au taux de rendement observé empiriquement sur les marchés. Toutefois, comme le montrent J. HUANG et M. HUANG [2002], cette assertion pose un problème de conjectures jointes dans la mesure où l'on a posé deux conjectures :

1. L'évaluation du risque de crédit par un modèle structurel est parfaite.
2. L'investisseur qui décide d'acheter de la dette d'entreprise supporte un seul et unique risque<sup>27</sup>, celui que l'émetteur fasse défaut.

La littérature sur le sujet souligne qu'empiriquement, le *spread* observé sur le marché, c'est-à-dire le taux de rendement exigé observé auquel on soustrait le taux de rendement d'une obligation sans risque, est supérieur au *spread* théorique, estimé par un modèle de risque de crédit. Cette constatation pourrait conduire à réfuter l'hypothèse de validité du modèle structurel via lequel le *spread* théorique a été calculé (1), ou bien à réfuter

---

<sup>27</sup> Il faut garder à l'esprit qu'un investisseur dans des obligations supporte systématiquement un risque et ce quel que soit la notation de l'émetteur. Dans cette étude, nous nous concentrons sur le risque dit « incrémenté », c'est-à-dire le risque en excès supporté par un investisseur en obligations d'entreprises et auquel échappe un investisseur en obligations gouvernementales.

l'hypothèse selon laquelle seul le risque de défaut est pris en compte par l'investisseur lorsque ce dernier calcule l'excédent exigé par rapport au taux sans risque (2). Nous ne traiterons pas dans ce mémoire la conclusion (1) concernant la validité ou l'invalidité du modèle structurel en tant que modèle de valorisation du risque de crédit. Néanmoins une méthode de décomposition du *spread* d'une obligation émise par une entreprise sera l'objet de la section 4 de ce chapitre (conclusion (2)).

La recherche académique concernant les taux de rendements requis par le marché sur les obligations d'entreprise a montré que le risque de défaut intrinsèque à l'entreprise émettrice ne peut, à lui seul, justifier l'excès de rendement au-delà du taux sans risque. Les facteurs de risque inhérents à la firme (taux d'endettement, volatilité) pris en compte dans un modèle structurel ne suffisent donc pas à expliquer la totalité des *spreads* de crédit observés. LONGSTAFF et al. [2005] nomment *spread* résiduel la part non expliquée par le risque de défaut. Il suppose que ce *spread* résiduel pourrait être expliqué par des effets fiscaux ou des effets de liquidité. L'éventualité d'un facteur fiscal impliqué dans le *spread* résiduel s'explique par le fait qu'aux Etats-Unis les intérêts sur les obligations gouvernementales sont exonérés d'impôt sur le revenu à la fois au niveau étatique et au niveau local, alors que ce n'est pas le cas pour ceux sur les obligations d'entreprise.

Il faut souligner que les CDS sont fortement appréciés par le groupe AXA. En 2009, celui-ci a acquis pour 4,4 milliards d'euros de dérivés de crédit et a mis en place une stratégie de *negative basis trade*<sup>28</sup> en vue d'estimer la prime de liquidité associée.

À la section 4, nous détaillerons la façon dont LONGSTAFF et al. [2005] déterminent les facteurs explicatifs du *spread* résiduel.

Nous utiliserons les définitions utilisées dans le modèle de LONGSTAFF et al. [2005] :

- Le *spread* de crédit est le *spread* constaté, visant à compenser les différents risques, dont le risque de défaut. Il s'agit donc de la compensation pour l'intégralité du risque en excès du taux sans risque.
- La prime de risque de défaut correspond à la part du *spread* de crédit qui compense uniquement le risque de défaut. En théorie, un modèle structurel devrait donc renvoyer la valeur de la prime de risque de défaut.
- Le *spread* résiduel correspond au *spread* de crédit auquel on retranche la prime de risque de défaut.

## 1.2. Décomposition du *spread* de crédit

Comme abordé précédemment, le *spread* de crédit a pour rôle, entre autres, de compenser le risque de défaut de l'émetteur. À la section 4, nous verrons que, dans le modèle LONGSTAFF et al. [2005], la part résiduelle est imputable à un phénomène d'illiquidité.

Un marché liquide est un marché qui permet à ses participants de réaliser de larges transactions rapidement et avec un faible impact sur les prix<sup>29</sup>. Celui-ci peut devenir illiquide en raison de la conjoncture ou si acheteurs et vendeurs ne parviennent plus à s'accorder sur son prix de marché.

Le *bid* et l'*ask* (en français : l'offre et la demande) sont les termes employés sur les marchés financiers pour désigner le prix auquel les intervenants vendent ou achètent des actifs, en particulier les monnaies. Le *bid* est moins élevé que l'*ask*. Du côté *sell*, le *bid* correspond au prix d'achat et l'*ask* au prix de vente. Du côté *buy*, par exemple, un investisseur désirant acheter des actions d'une entreprise donnée, le *bid* correspond donc au prix de vente et l'*ask* au prix d'achat. Par exemple, pour changer des euros en dollars US dans un bureau de change, celui-ci affiche deux prix : celui auquel il est prêt à acheter vos euros (le *bid* du bureau de change) et celui auquel il souhaite vendre des euros (l'*ask* du bureau). L'écart entre ces deux prix est communément appelé *bid-ask spread* ou fourchette de prix. Traditionnellement, cet écart est considéré comme un indice de la liquidité du marché analysé, les animateurs ou faiseurs de marché (*market makers*) essayant d'empêcher cet écart.

Le risque de liquidité s'évalue à deux niveaux :

- A l'échelle de la microstructure des marchés. On peut mesurer des effets de liquidité spécifiques à une obligation donnée, à travers les données observées relatives à cette obligation. Les données pertinentes à sélectionner pour caractériser la liquidité d'une obligation sont exposées dans ce qui suit.
- A l'échelle macroscopique du marché lui-même. La liquidité sur le marché obligataire dépendra de l'offre et de la demande sur les titres. On pourrait ajouter à ces conditions de marché le facteur de confiance entre les

<sup>28</sup> Un *negative basis trade* est une opération par laquelle une banque achète sur le marché une tranche de titrisation senior, notée AAA, et demande concomitamment à un assureur également noté AAA de lui garantir le remboursement de son investissement. La banque ressort bénéficiaire de cette opération : d'un côté, elle achète un risque, relativement faible, et reçoit à cet effet une rétribution (l'intérêt versé par la tranche AAA ainsi acquise), de l'autre, elle revend aussitôt ce risque à un intervenant du marché fiable et robuste, en lui payant une prime moindre au titre de sa garantie.

<sup>29</sup> Rapport de la Banque des Règlements internationaux suite à la crise Russe (CGFS [1999]).

agents impliqués, dans le sens où la confiance est un élément déterminant au sein de toute transaction qui établit un lien de crédit. Ce facteur liquidité apparaît comme un risque systémique.

Puisque l'on a explicité les notions de liquidité à l'échelle du marché et à l'échelle de la microstructure, nous abordons désormais les mesures de liquidité à ces deux échelles.

Certains chercheurs et agences de notation ont développé des notes de liquidité, qui combinent principalement plusieurs approches. Ils combinent des mesures de l'inactivité des transactions et de la fraîcheur des cours, de la dispersion des cours moyens parmi les contributeurs ainsi que de la taille de l'écart entre l'offre et la demande pour former un indice d'illiquidité (autrement dit, la liquidité est d'autant plus faible que l'indice est élevé).

A l'échelle de la microstructure : l'effet de liquidité spécifique à une obligation peut se mesurer par des données directes et indirectes, selon LONGSTAFF et al. [2005].

Les mesures directes de liquidité sont issues de données transactionnelles, à savoir :

- Comme évoqué précédemment, l'écart entre le cours acheteur et le cours vendeur, le *bid-ask spread*. Il représente l'activité du dealer sur le titre, et en cas d'assèchement de la liquidité, le *bid-ask spread* s'étend. Cependant, dans un de ses rapports publiés en 2006, le Fonds Monétaire International (FMI) affirme que de faibles écarts entre les cours acheteur et vendeur et des volumes élevés ne sont pas des critères pertinents pour jauger la liquidité du marché secondaire. Ces mesures sont, en fait, sensibles aux flux à sens unique (c'est-à-dire impliquant uniquement des opérateurs), et ce particulièrement s'il y a un manque de diversité parmi les participants, si la recherche et les autres coûts sont substantiels, et si le coût de maintien des stocks s'avère difficile au regard de la position de financement propre de l'opérateur. TANG et HONG [2007] arguent que le maintien des positions peut imposer des restrictions aux opérateurs en présence de contraintes financières, ce qui impacte l'offre de contrats sur le marché. Plus important, si les caractéristiques de liquidité de ces contrats varient au cours du temps et que des chocs de liquidité se produisent sur ces marchés ainsi que sur les marchés sous-jacents, les investisseurs peuvent inclure une composante de liquidité dans le prix.
- CHEN et al. [2007] rajoutent comme mesure d'illiquidité le nombre de jours au cours desquels l'obligation n'a pas été échangée (*zero-trading days*). Cette mesure ne donne pas forcément de bons résultats, aboutissant même parfois à des conclusions incohérentes<sup>30</sup>.

Les mesures indirectes de liquidité portent sur la nature et les caractéristiques propres à l'obligation comme :

- Le montant nominal total disponible sur le marché des obligations provenant de la même émission. On présume effectivement que, plus ce montant est important, plus la liquidité pour une obligation de cette émission est importante ;
- L'âge moyen de l'obligation : puisque les obligations souveraines *on-the-run* sont supposées plus liquides que celles *off-the-run*, LONGSTAFF et al. [2005] soulignent qu'il en est de même pour les obligations d'entreprise et que celles émises plus récemment sont donc plus liquides que celles plus âgées ;
- La durée de vie à l'échéance de l'obligation, en supposant que les investisseurs préfèrent se tourner globalement vers les obligations de courte échéance ;
- La signature de l'émetteur, en présumant chez les investisseurs une préférence pour les obligations émises par des établissements financiers ou des entreprises très bien notées.

Par ailleurs, à l'échelle du marché : l'effet systémique de liquidité, qui affecte uniformément l'ensemble du marché obligataire, peut être appréhendé par<sup>31</sup> :

- La valeur nominale totale des émissions de dette d'entreprise sur le marché sur une période donnée. En effet, si le montant des émissions est très important une semaine donnée, la liquidité des obligations émises par le passé pourrait se détériorer ;
- Un afflux soudain de fonds sur le marché monétaire peut être corrélé, selon LONGSTAFF et al. [2005], à un accroissement du niveau de risque et à un rétrécissement de la liquidité sur le marché obligataire. Une manifestation de ce mouvement de fonds prend la forme de la variation sur une période donnée de la valeur des flux de placement sur le marché monétaire ;
- L'écart entre le taux de rendement de l'émission la plus récente « *on-the-run* » du bon du Trésor américain de maturité 5 ans et le taux de rendement moyen sur l'ensemble des obligations « *off-the-run* ». Cet écart indique, toujours selon LONGSTAFF et al. [2005], la liquidité du marché des obligations souveraines. L'hypothèse est qu'une amélioration de la liquidité de ce marché est corrélée à une augmentation du *spread* résiduel, traduisant un phénomène d'« échappée vers la qualité » (ou « *flight to quality* »).
- Le *spread* entre le taux de swap sur le Libor et le taux sans risque gouvernemental.

<sup>30</sup> Dans le cadre d'une régression sur différentes mesures de liquidité, DICK-NIELSEN et al. [2011] trouvent qu'une amélioration de la liquidité est corrélée à une augmentation de *zero-trading days*, ce qui est incohérent avec l'intuition économique.

<sup>31</sup> Les trois premières mesures sont proposées par LONGSTAFF et al. [2005].

## 2. Les CDS

Dans cette section, nous présentons un type de dérivés de crédit, les CDS. Ceux-ci serviront à décomposer le *spread* d'une obligation d'entreprise. Cette section s'inspirera des analyses issues d'une enquête publiée par la Banque Centrale Européenne en août 2009 sur les CDS et le risque de contrepartie (BCE [2009]).

### 2.1. Présentation générale

Les CDS (*swaps* de défaut ou *Credit Default Swaps*) sont les dérivés de crédit les plus courants et représentent même plus de la moitié du marché.

La partie A qui cherche à se défaire d'un risque de crédit achète une protection qu'elle paie en versant une prime périodique (le plus fréquemment trimestrielle) au vendeur de protection V. En contrepartie de cette prime, V s'engage à dédommager A en cas d'évènement de crédit affectant une entité de référence ou support du CDS. L'opération n'implique en principe aucun flux de trésorerie initial. L'acheteur de protection vend donc le risque de crédit au vendeur de protection V qui achète le risque (et qui devient ainsi long en risque).

Comme on l'a vu, les évènements de crédit (défaut du débiteur de référence, notamment) qui déclenchent de telles compensations sont prévus explicitement dans le contrat.

Il résulte de ce qui précède qu'un CDS est un instrument hors bilan sans mise de fonds initiale (*unfunded*), qui peut se ramener :

- À une option de vente de la créance de référence et, subséquemment, est nommé parfois *Credit Default Put* ;
- À un swap dont la jambe fixe est la séquence de paiements de la prime par A et la jambe variable est constituée de l'éventuelle compensation payée par V, contingente à l'évènement de crédit ; le *payoff* de la jambe variable a conséquemment le même caractère que celui d'une option.

Dans la terminologie habituelle, achat du CDS signifie achat de protection (achat de l'option et paiement de la prime).

Dans ce chapitre, nous limiterons notre étude aux CDS standards, bien que des formes plus élaborées ou plus exotiques sont proposées sur les marchés financiers, comme les CDS sur panier, tranches ou indice.

Dans les cas standards, la compensation prend l'une des deux formes suivantes :

- L'achat par V des titres de référence en défaut livrés par A, à leur valeur nominale (règlement physique ou *physical settlement*, le cas le plus fréquent en matière de CDS) ;
- Le versement en cash de la différence entre la valeur nominale et la valeur de marché des titres de référence (règlement en espèces ou *cash settlement*).

La compensation est versée par le vendeur du dérivé de crédit au bénéfice de l'acheteur en cas d'occurrence d'un évènement de crédit mentionné dans le contrat.

Règlement physique et règlement en espèces sont théoriquement équivalents à condition que la valeur de marché des titres de référence en défaut puisse être déterminée de façon précise et irréfragable<sup>32</sup>. La figure ci-dessous représente les échanges entre l'acheteur et le vendeur d'un CDS.

Ainsi le *payoff* du CDS du point de vue de l'acheteur de protection s'écrit :

$$\begin{cases} - \text{prime tant que l'actif de référence n'est pas en défaut} \\ 100 - \text{Valeur de l'actif de référence en date de défaut} \end{cases}$$

<sup>32</sup> Il faut aussi que : la valeur de l'option de choix du titre (au bénéfice de l'acheteur de protection dans certains contrats par règlement en espèces) soit négligeable ; le risque de « *squeeze* » qui affecte l'acheteur de protection (et qui est lié à l'éventualité d'un manque de liquidité des titres livrables) soit négligeables.

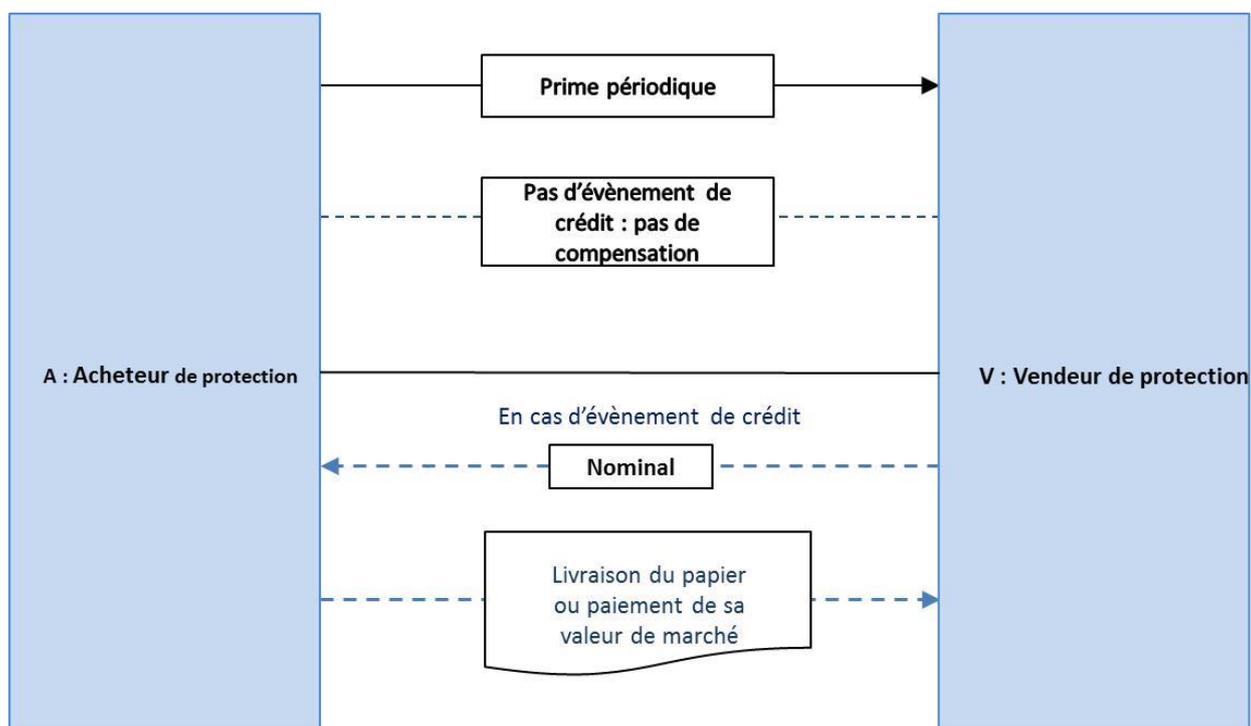


Figure 54 : diagramme des flux d'un CDS.

Précisions que :

- La compensation est versée à la date de constatation de l'évènement de crédit pour un CDS dit américain ou à l'échéance du swap pour un swap dit européen.
- La fréquence de paiement de la prime est librement fixée par les parties, mais est le plus souvent trimestrielle.
- En cas d'évènement de crédit, l'acheteur cesse de payer la prime et le dernier coupon est calculé *pro rata temporis (accrua)*.
- Dans certains contrats, l'acheteur de protection a la possibilité de choisir les titres qu'il livre parmi une liste prédéterminée de titres anonymes élus par le débiteur défaillant<sup>33</sup>.

La prime, appelée également *spread*, est décroissante avec la qualité de la signature de la référence et en général croissante avec la durée du CDS. En première approximation, elle est égale au *spread* de crédit payé par l'émetteur sur un titre à taux révisable vanille (par exemple référencé sur le Libor 3 mois) ; cette prime est donc variable dans le temps (même pour un rating donné) et diffère selon les secteurs, mais les ordres de grandeur (en points de base) sont les suivants :

Rating	3 ans	5 ans	7 ans
AA	30 pb	50 pb	60 pb
A	80 pb	100 pb	130 pb
BB	150 pb	160 pb	220 pb

Tableau 29 : exemples de primes pour différentes signatures et maturités.

Un CDS est similaire à un contrat d'assurance qui indemnise l'acheteur des pertes susceptibles d'être occasionnées par une défaillance de la part de l'entité de référence. Néanmoins, ce qui le distingue d'un véritable contrat d'assurance est le fait qu'un acheteur ne soit pas obligé de détenir des obligations émises par l'entité de référence, c'est-à-dire qu'il ne soit pas effectivement exposé au sinistre, en l'occurrence le risque de défaut. On parle alors de CDS à nu, lorsque celui-ci ne repose pas sur l'actif sous-jacent qui lui est attribué. Néanmoins, ces derniers étant utilisés à des fins purement spéculatives (puisqu'il n'est plus question de couvrir un risque), en octobre 2011, l'Union Européenne a mis en place un régime d'interdiction des CDS « à nu », avec quelques dérogations possibles pour les états, notamment lorsqu'une autorité compétente estimera que le marché de la dette souveraine ne fonctionne plus normalement et que l'interdiction pourrait de fait avoir un impact négatif sur le marché des CDS. Par ailleurs, il a été prévu un régime de transparence sur les positions accumulées à découvert tant sur les actions que sur les dettes souveraines dès lors que celles-ci deviennent significatives. Les ventes à

<sup>33</sup> Les titres ou synonymes ont des caractéristiques proches de ceux du panier en termes de durée et de taux et sont identiques en termes de séniorité.

nu des actions et obligations d'Etat ne sont pas bannies. Mais le cadre qui vient d'être défini oblige les intervenants à avoir identifié, avant la transaction, le moyen d'être en mesure de livrer les titres ainsi cédés dans le délai imparti.

Pour conclure, un contrat CDS porte sur une entité et non sur une obligation particulière émise par cette dernière. C'est en cela que le montant de la prime d'un CDS est pertinent pour jauger de la qualité de crédit d'une entité.

## 2.2. Aperçu du marché

### 2.2.1. Sources d'informations

Le Tableau 30 présente un aperçu des sources de données publiques disponibles actuellement en matière de CDS. Les statistiques de la société de dépôt et de compensation (*The Depository Trust and Clearing Corporation* ou *DTCC*) couvrent 90% des contrats sur les dérivés de crédit dans le monde, incluant plus de 95% des contrats CDS entre opérateurs en termes de nombre de contrats (plutôt que de montants notionnels). Les données étant fondées sur les instructions de règlement actuelles, cette base s'avère relativement précise. Le marché des CDS et celui des obligations étant (essentiellement) de gré à gré, la DTCC constitue une source fiable d'information.

Les données de la DTCC portant sur les montants notionnels nets (par exemple les montants notionnels nets en cours) reflètent aussi les effets des activités de netting (ou compensation) et s'avèrent subséquemment la source la plus précise pour tout ce qui a trait au risque de crédit lié aux CDS et engendré par les entités de référence. Cependant, les publications de la DTCC présentent quelques limitations :

1. La DTCC ne fournit pas d'information rétroactive sur les transactions, les statistiques qu'elle publie ne commençant que fin octobre 2008.
2. La ventilation par contrepartie n'est guère détaillée. Elle se limite aux catégories « opérateurs » et « non opérateurs ».
3. Aucune information concernant la valeur des contrats CDS n'est fournie.
4. La portée des données est réduite. En effet, les CDS sur panier et les CDS sur mesure ne sont pas couverts. Ce sont essentiellement les CDS à signature unique, les CDS sur indice et les CDS sur tranche d'indices qui sont publiés. Cependant, dans le cadre du présent mémoire, cela ne sera pas rédhibitoire.

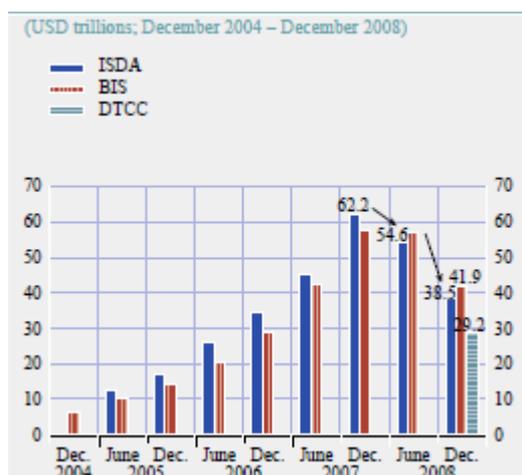
La plupart des banques européennes divulguent aux investisseurs les informations de base portant sur leurs expositions aux CDS, bien que les détails sur la signature des actifs de référence, les montants notionnels bruts et les valeurs de marché des CDS achetés et vendus et les niveaux de collatéralisation ne le soient pas systématiquement. Certaines banques européennes ne divulguent que les montants notionnels agrégés des CDS achetés et vendus. Plus généralement, l'information fournie dans les déclarations comptables varie selon l'institution, étant donné qu'il n'y a pas encore d'harmonisation en matière d'exigences de divulgation au niveau de l'Union Européenne. Le niveau final de divulgation ne permet donc pas aux investisseurs d'évaluer le niveau d'implication des différentes institutions sur la marché de crédit sur une base uniformisée comme vendeurs ou acheteurs nets, ou leurs expositions actuelles au risque, bien que la taille globale de l'exposition de ces institutions en termes de valeur notionnelle ou de valeur de marché brute est révélatrice de leur activité relative au sein du marché des CDS.

Base de données	Description	Fréquence	Début	Fin
DTCC (Depository Trust and Clearing Corporation)	La société de dépôt et de compensation ( <i>The Depository Trust and Clearing Corporation</i> ou <i>DTCC</i> ) s'est mise à publier des statistiques hebdomadaires concernant les montants nets et bruts, achetés ou vendus sur le marché des CDS en novembre 2008. Les données furent complétées par des données se rapportant à des transactions hebdomadaires en janvier 2009.	Hebdomadaire	Octobre 08	2009
International Swaps and Derivatives Association (ISDA)	L' <i>International Swaps and Derivatives Association</i> publie une enquête financière semestrielle, qui, outre d'autres produits dérivés de gré à gré, depuis décembre 1995, inclut les montants notionnels des CDS achetés et vendus, sur la base de réponses volontaires provenant d'une soixantaine d'institutions.	Semestrielle	1995	2008
Statistiques semestrielles des produits dérivés de gré à gré	Banque des règlements internationaux (BRI) réalise une enquête volontaire semestrielle sur les CDS couvrant environ 80 institutions au sein des pays du G10 et de la Suisse. L'enquête inclut les encours des montants notionnels et les valeurs de marché brutes pour les instruments à signature unique ou multiple, achetés et vendus par les personnes interrogées. De surcroît, des informations portant sur les CDS par contrepartie, secteur et signature ont été mises à disposition dès décembre 2005.	Semestrielle	Fin 2004	Fin 2008
Fitch Ratings. Enquête sur les dérivés de crédit	L'agence de notation mondiale, Fitch Ratings, a conduit une enquête annuelle sur les dérivés de crédit pour les années de référence 2003 à 2009, englobant les montants achetés et vendus par secteur industriel, type d'instrument principal et notation. Cette enquête ne fut pas conduite pour 2007. Comparativement à d'autres sources de données, cette enquête a mis en exergue les positions nettes à la vente des fonds spéculatifs ou <i>hedge funds</i> et des compagnies d'assurance, notamment <i>AIG</i> , incluant les classements des plus importants acteurs et les positions nettes par secteur en 2006. Elle a pris en compte 26 institutions en 2009 (86 en 2006).	Annuelle	1996	2006
L'Association des Banquiers Britanniques Enquête sur les dérivés de crédit	L'Association des Banquiers Britanniques réalise une enquête bisannuelle concernant les dérivées de crédit depuis 1996, couvrant des acteurs importants sur le marché mondial des dérivés de crédit. Les acteurs sondés fournissent des estimations de la croissance du marché des dérivés de crédit, réparties par type d'institution, zone géographique et type d'instrument, incluant la notations de l'actif de référence. Cette étude n'a pas été réalisée pour l'année de référence 2008.	Bisannuelle	1996	2006
La Banque des Règlements Internationaux (BRI) Statistiques sur les dérivés de gré à gré	Le BRI ( <i>Bank of International Settlement</i> ou <i>BIS</i> ) collecta également des données dans le cadre d'une étude triennale pour la première fois en décembre 2007, référençant approximativement 1 500 banques issues de 54 pays jusqu'à fin juin 2007. Chaque banque centrale participante collecte des données volontairement fournies par les banques et les opérateurs dans sa juridiction et calcule les données nationales agrégées. Les données ainsi rassemblées sont transmises à titre anonyme au BRI, qui élabore alors des agrégats globaux.	Triennale	Fin 2007	Fin 2007

**Tableau 30 : aperçu des différentes sources de données disponibles actuellement sur les CDS. Source : BCE [2009].**

### 2.2.2. Structure et taille du marché

Selon les statistiques semestrielles sur les produits dérivés de gré à gré publiées par le BRI, les dérivés de crédit comptent pour 7% du total des encours fin décembre 2008 en termes de montants nominaux (l'équivalent de 42 milliards de dollars). La valeur notionnelle brute des contrats constitue l'indicateur privilégié lorsqu'il s'agit d'estimer la taille du marché des CDS. Néanmoins, d'une part, elle a un lien assez lointain avec le risque de crédit, d'autre part, les sources fournissent des résultats divergents, bien que les tendances soient similaires (cf. Figure 55).



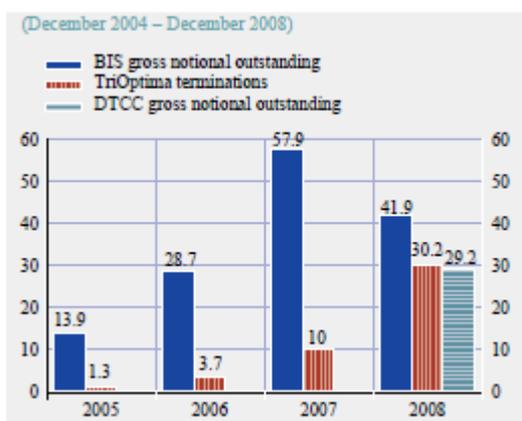
**Figure 55 : montants notionnels en cours pour les dérivés de crédit. Sources : BCE [2009].**

En termes de valeur financière brute, laquelle est une mesure plus représentative du risque inhérent au marché des produits de gré à gré, le marché des CDS est passé de 133 milliards de dollars en décembre 2007 à 5,7 billions de dollars en décembre 2008, et constitue le second plus gros marché en termes de valeur financière brute derrière celui des contrats sur les taux d'intérêt. L'accroissement en valeur financière brute en 2007 et 2008 reflète principalement l'accroissement de la volatilité et la réappréciation du risque de crédit sur le marché au cours de cette période.

Le marché des dérivés de crédit a crû beaucoup plus rapidement que les autres marchés de dérivés, et le montant notionnel brut des encours de protection par CDS vendus et achetés fin 2008 était sept fois plus élevé que celui fin 2004.

Un des facteurs de cette croissance est la nature de gré à gré des contrats CDS : ceux-ci sont souvent utilisés comme transactions compensatrices en guise de cessation ou de remplacement des anciens contrats. À la place, une chaîne d'expositions connectées les unes aux autres se met en place, à travers laquelle chaque acteur financier connaît sa contrepartie directe, mais non celles plus en aval.

En revanche, durant la seconde moitié de 2008, la taille du marché des CDS s'est rétractée significativement. En sus de la diminution des volumes des nouvelles transactions, résultant de la diminution du nombre des acteurs suite à la faillite de Lehman Brothers, un facteur déterminant fut la participation active des banques aux fins de cycle (cf. Figure 56), ce qui a conduit à la réduction des positions redondantes, principalement dans les indices de CDS, par l'intermédiaire de cessations multilatérales.



**Figure 56 : dérivés de crédit en cours et terminaisons multilatérales. Sources : BCE [2009].**

À la suite de ce phénomène, les montants notionnels des contrats de CDS en cours déclinèrent de 25% entre juin et décembre 2008 en Europe. Ce recul est similaire au recul général observé.

Les mouvements des taux de change ont probablement contribué à ce recul. En effet, les banques européennes transmettent leurs positions notionnelles à la Banque des Règlements Internationaux en unités monétaires

équivalentes au dollar américain Or, l'euro et la livre sterling se sont dépréciées respectivement de 30% et 12% par rapport au dollar américain au cours de cette période. Les expositions des banques européennes déclinent entre 4% et 25%, si l'on ajuste les montants en cours aux mouvements de devises, bien que des estimations plus précises soient difficilement réalisables, car aucune ventilation par devise n'est faite pour les montants notionnels sous-jacents.

Fin décembre 2008, les positions des banques de l'Union Européenne représentaient 40% du total des encours des CDS en termes de montants notionnels (exprimés en unités monétaires équivalentes au dollar). Les positions des cinq premières banques européennes en CDS à signature multiple représentent 45% du marché total, tandis que celles en CDS à signature simple représentent 37% du marché.

### 2.2.3. Différentes mesures du risque de contrepartie dans le cadre d'un CDS.

#### ➤ **Le montant notionnel brut.**

Cette grandeur désigne le montant nominal de la protection achetée ou vendue sur l'obligation ou prêt sous-jacent. C'est sur les montants notionnels que sont calculés les flux de paiements.

#### ➤ **Le montant notionnel net (*net notional amounts*).**

Une fois prises en compte toutes les transactions compensatrices entre les couples de contreparties (c'est-à-dire les transactions en cours associées exactement à la même entité de référence, que ce soit un emprunteur spécifique, un indice de CDS ou un tranche d'indice de CDS), le montant notionnel net sert de base de calcul du paiement de l'obligation lors d'un événement de crédit. En cas de défaut, le paiement effectué (sous la forme d'un règlement en espèces) par le vendeur de protection vaut :

$$\text{Montant notionnel} \times (1 - \text{taux de recouvrement (\%)} \text{ d'une obligation de référence})$$

La valeur notionnelle nette sert ainsi de proxy pour la contribution des CDS à l'exposition au risque d'une institution, dans la mesure où elle représente le montant maximum des fonds pouvant théoriquement être transférés du vendeur à l'acheteur de protection, supposant un taux de recouvrement nul en cas de défaillance de l'entité de référence.

Dans le cas de CDS qui référencent une tranche indicielle, la valeur notionnelle nulle représente le montant maximum d'argent à transférer que l'on pouvait demander au vendeur de protection, en supposant que les pertes dépassent le point d'attachement de la tranche.

La DTCC fournit des données agrégées sur les montants notionnels nets pour les entités de référence simples. Celles-ci comprennent la somme de la protection nette achetée (ou vendue) parmi toutes les contreparties.

#### ➤ **Valeurs de marché.**

La valeur de marché d'un CDS à une date donnée est le coût de remplacement de la transaction à cette date. La valeur de marché d'un CDS est égale à la valeur actualisée de tous les flux de paiement espérés appartenant à la tranche de défaut (c'est-à-dire le paiement que le vendeur de protection doit effectuer en cas de défaillance de l'entité de référence) et la tranche associée aux versements de la prime (c'est-à-dire la prime convenue dont l'acheteur de protection doit s'acquitter chaque trimestre), en prenant en compte la probabilité de défaut de l'entité de référence. Si celle-ci fait effectivement défaut, la valeur de marché est alors égale à la valeur notionnelle du CDS, déduite de la valeur récupérée espérée.

La BRI, dans ses statistiques sur les produits dérivés, définit la valeur de marché brute comme la valeur de tous les contrats ouverts avant toute compensation. Ainsi, la valeur de marché brute positive des contrats en cours d'une entreprise est la somme de valeurs de remplacement positives de ces derniers. Similairement, la valeur de marché négative brute est la somme de toutes les valeurs négatives des contrats d'une entreprise.

La valeur de marché brute n'est pas une mesure précise du risque de contrepartie, car elle ne prend pas en compte l'effet de la compensation pour chaque couple de contreparties. Cependant, elle reflète les changements qui affectent les valeurs de marché des transactions entre la date d'entrée et celle de clôture.

#### ➤ **Valeur de marché nette et exposition brute au risque de contrepartie contrepartie (*net market value/gross counterparty exposure*).**

Pour un opérateur donné, la valeur de marché nette n'est pas calculée seulement à partir de ses positions sur des CDS, mais de toutes ses positions sur des produits dérivés de gré à gré. Cette mesure du risque de

contrepartie brut n'est donc pas disponible pour les CDS seuls, car les opérateurs ne gèrent pas leur exposition au risque de contrepartie par classe d'actifs.

La valeur de marché nette entre contreparties est aussi désignée comme l'exposition brute au risque de crédit. Le risque de contrepartie reflète le risque de se voir forcé de remplacer ses positions sur le marché, si une contrepartie fait défaut. Les valeurs de marché nettes sont donc une mesure du risque de contrepartie, en supposant qu'il n'y a pas de collatéralisation.

Malheureusement, cependant, ni les valeurs nettes ni les valeurs brutes de marché des contrats de CDS ne sont actuellement disponibles auprès de la DTCC

➤ **L'exposition nette au risque de contrepartie (*net counterparty exposure*).**

L'exposition au risque de contrepartie qui demeure après collatéralisation représente le véritable risque de contrepartie. Cependant, en raison de la nature des données disponibles, il est difficile de quantifier ce risque de contrepartie.

#### **2.2.4. Conclusions**

La principale préoccupation des banques de l'Union Européenne est le risque de contreparties.

Trois conclusions peuvent en être tirées :

1. Les grandes poches concentrant un risque de contrepartie au sein du système financier ne peuvent être estimées à l'aide des données agrégées, puisque les données disponibles ne sont pas ventilées par niveau de contreparties. Des informations supplémentaires de la part des diverses organisations concernant leurs expositions les plus importantes (en termes de contreparties, d'instruments et de montants vendus et achetés) seraient nécessaires pour entreprendre des analyses plus poussées.
2. Les données publiées par la BRI et la DTCC ne sont pas en ligne, ce qui pourrait compromettre leur utilisation en tant qu'instrument de régulation efficient. En effet, des travaux plus poussés pourraient être entrepris en matière de méthodologie et de métadonnées afin de rapprocher les différents référentiels comptables, ce qui faciliterait alors le recoupement des agrégats statistiques pour l'intégralité du marché des CDS et améliorerait la qualité et la portée des données.
3. Une autre piste d'amélioration possible est de renforcer la publication de l'information. Les organisations les plus actives pourraient régulièrement divulguer leurs montants notionnels bruts totaux et leurs valeurs de marché brutes pour les CDS achetés et vendus, ainsi que leurs valeurs de marché nettes pour les transactions sur des dérivés non collatéralisés. Ces informations pourraient aussi être fournies par les positions des plus importantes contreparties de ces organisations et divulguées aux régulateurs ou incluses dans leurs rapports publics.

#### **2.3. Risque de contrepartie et problématiques sur la stabilité financière**

Les contrats CDS sont communément considérés comme un jeu à somme nulle aux yeux des acteurs financiers, puisqu'il y a toujours un acheteur pour chaque vendeur, comme c'est le cas pour tous les autres contrats de produits dérivés de gré à gré. Les récents soubresauts économiques ont montré, cependant, que vendeurs et acheteurs pouvaient tous deux pâtir de l'occurrence de risque de contrepartie. En effet, dans le cadre d'un CDS, les deux parties sont exposées au risque de contrepartie, lequel reflète la probabilité que la contrepartie ne soit pas en mesure de satisfaire à ses obligations pécuniaires. En d'autres termes, le risque de contrepartie reflète le risque de se voir contraint à remplacer ses positions sur le marché, une contrepartie dût-elle faire défaut.

Le coût de remplacement est du même ordre pour les deux contreparties, seul le signe diffère. Par exemple, si la qualité de crédit de l'entité de référence sous-jacente se détériore (*i.e.* si les primes augmentent), une transaction aura une valeur positive pour l'acheteur de protection (celui-ci étant « dans la monnaie »), puisque la protection que ce dernier a déjà acquise vaudra désormais plus.

Cette valeur positive est le coût additionnel de reconduction d'une transaction rigoureusement identique. Concrètement, une valeur de 10 milliards de dollars signifierait qu'un acheteur devrait payer une somme supplémentaire de 10 millions de dollars pour convaincre un vendeur de souscrire à la même transaction avec la prime originelle (qui est inférieure à la prime actuelle eu égard au nouvel état du marché). Pareillement, un vendeur de protection par CDS est « en dehors de la monnaie » de 10 millions de dollars, puisque cette partie requerrait 10 millions de dollars pour entrer dans la transaction originale avec la prime originelle. Si le vendeur devait faire défaut, l'acheteur serait alors en droit d'exiger auprès de lui le coût de remplacement de la transaction : en l'occurrence 10 millions de dollars. Pareillement, si l'acheteur devait faire défaut, le vendeur se verrait contraint à lui payer 10 millions de dollars. Cette obligation de payer même si l'argent est dû à la partie en défaut est une obligation juridique dirimante dans la convention cadre de l'ISDA.

Les opérateurs couvrent leur exposition au risque de marché procédant d'un CDS en compensant les transactions avec une autre partie. Si une seconde partie est aussi un opérateur réalisant des transactions de couverture supplémentaires, une chaîne d'expositions liées se mettra en place, au sein de laquelle chaque participant, en tant que maillon, connaîtra ses contreparties indirectes, mais non celles plus en aval ou en amont.

Plusieurs caractéristiques structurelles du marché des CDS ont contribué à transformer le risque de contrepartie en risque systémique :

- La majeure partie du marché des CDS demeure concentrée aux mains d'un groupe réduit d'opérateurs.
- L'épisode Lehman Brothers a montré que la nature interconnectée de ce marché articulée autour des opérateurs peut coûter cher aux intervenants du marché en termes de remplacement de transaction, en cas de défaillance d'un opérateur.
- Au sein de la zone euro, les banques semblent être devenues vendeuses nettes de contrats CDS standards sur signature unique ou sur indice (quoique pour des montants limités), ce qui impliquerait une exposition au risque de marché en cas d'accroissement général des primes de CDS – par exemple lors d'une défaillance d'un opérateur. Etant donné les valeurs nettes limitées, ceci pourrait changer prochainement, bien que la position nette des banques de la zone euro demeurât négative à la fin de juin 2009. En sus de ce phénomène (ces institutions sont acheteuses nettes), il est à noter que les banques semblent avoir été vendeuses nettes de protection en CDS souverains, ce qui, dans certains cas, constitue un risque de corrélation. Enfin, les faibles niveaux de liquidité résultant de la crise et les niveaux élevés actuels de concentration sur le marché ont tous deux augmenté les coûts de remplacement de transaction, ce qui a entraîné des écarts significatifs entre le cours acheteur et le cours vendeur pour les opérateurs financiers, notamment pour ceux qui ne sont pas opérateurs.

### 2.3.1. Concentration

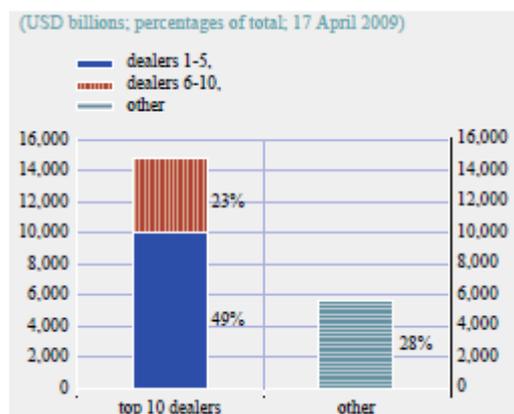
Les résultats de l'enquête indiquent une concentration excessive en termes de rareté des vendeurs. Ce risque, conjointement avec le risque de liquidité, est la principale préoccupation des banques européennes en ce qui concerne le risque de contrepartie lié aux CDS. Un nombre restreint de contreparties accroît le risque de concentration et, corollairement, le risque systémique.

En 2008, les cinq plus importants opérateurs en CDS étaient le groupe Goldman Sachs, Morgan Stanley, la Deutsche Bank et le groupe Barclays.

Une étude récente indique que 96% des expositions en dérivés de crédit fin 2009 parmi les entreprises sondées étaient aux mains de JP Morgan, Goldman Sachs, Citigroup, Morgan Stanley et de la Bank of America.

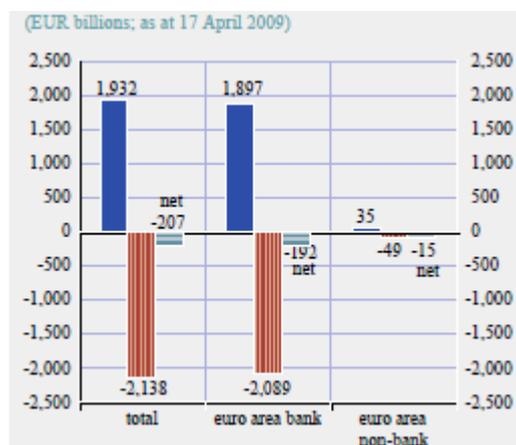
Selon les données de la société de dépôt et de compensation américaine (*Depository Trust and Clearing Corporation*), les cinq plus importants opérateurs en CDS étaient les contreparties de près de la moitié de l'encours notionnel le 17 avril 2009 et les dix plus importants opérateurs en CDS étaient les contreparties de 72% des opérations.

Selon les données du BRI, la part de marché des acteurs majeurs semble être plus importante en Europe que sur le marché mondial total.



**Figure 57 : Montants notionnels totaux des CDS en cours vendus par les opérateurs dans le monde, ventilés par classement. Source : BCE [2009].**

Qui sont les vendeurs nets de protection ? Un aspect intéressant est que les banques de la zone euro apparaissent comme vendeuses nettes depuis avril 2009 selon les statistiques de la DTCC (cf. Figure 58), alors qu'avant la crise, les banques mondiales étaient plutôt acheteuses nettes de protection. Cependant, ces ventes nettes ne sont guère élevées et plutôt ponctuelles. Elles pourraient être associées à des positions courtes sur actions ou refléter une insuffisance relative de CDS achetés à des fins de protection en raison du niveau élevé des primes. En revanche, le prix du risque de crédit peut s'avérer assez élevé pour certaines entités, ce qui peut inciter les banques à vendre de la protection par CDS.



**Figure 58 : CDS achetés et vendus par les opérateurs bancaires et non bancaires au sein de la zone euro. Source : BCE [2009].**

### 2.3.2. Interconnexion

Tout d'abord, lorsque l'entité de référence sous-jacente est une institution financière, l'effet de risque de contrepartie peut s'avérer significatif, dans la mesure où les intermédiaires sur le marché des CDS sont d'autres institutions financières. En particulier, les valeurs des grands établissements financiers mondiaux fluctuent de conserve, ceux-ci devant leur interconnexion à la globalisation des marchés. Le fait que de telles institutions soient liées les unes aux autres à travers une succession de contrats portant sur des dérivés de gré à gré implique que le défaut de l'une d'entre elles entraîne la hausse des primes de CDS sur les autres institutions, compliquant d'autant la tâche des investisseurs pour distinguer le risque de crédit du débiteur du risque de contrepartie d'un CDS.

Ensuite, la corrélation entre les contreparties a pris une nouvelle dimension dans les pays où le secteur a été soutenu par les autorités publiques. Il est difficile pour les investisseurs de séparer le risque de crédit du débiteur du risque de contrepartie du CDS. Le marché des CDS souverain pour les pays développés a émergé à la suite des opérations de renflouement de banques nationales.

Enfin, il a été montré que les participants du marché n'ayant pas été perçus comme des acteurs majeurs au sein du marché des CDS, en termes de montants notionnels bruts, avant l'éclatement de la crise, étaient trop importants pour faire défaut, en raison de leurs liens avec d'autres participants majeurs. Ce fut le cas, par exemple, pour AIG. D'après une étude publiée en 2006 par Fitch, cette compagnie d'assurance occupait le 20<sup>ième</sup> rang parmi les participants financiers, son exposition notionnelle brute totale avoisinant seulement le 10<sup>ième</sup> de celle d'un acteur important. Eu égard à sa situation de vendeur unidirectionnel, néanmoins, la compagnie d'assurance AIG s'avéra être trop importante et trop interconnectée pour faire défaut, ce qui contraignit le trésor américain à intervenir afin d'éviter de graves répercussions sur le système financier.

En matière de circularité du risque, comme mentionné précédemment, la première conséquence notable est que ce marché a observé une demande croissante en matière de garanties contre la défaillance des établissements financiers. En termes de montants notionnels nets (c'est-à-dire de montants maximaux à risque), six opérateurs figuraient parmi les dix premières entités de référence non souveraines à la fin de juillet 2009, contre sept à la fin de 2008. De plus, une ventilation des positions nettes des entités de la zone euro indiquent que les banques sont vendeuses nettes pour les entités financières ainsi que pour les gouvernements souverains (cf. Figure 59).

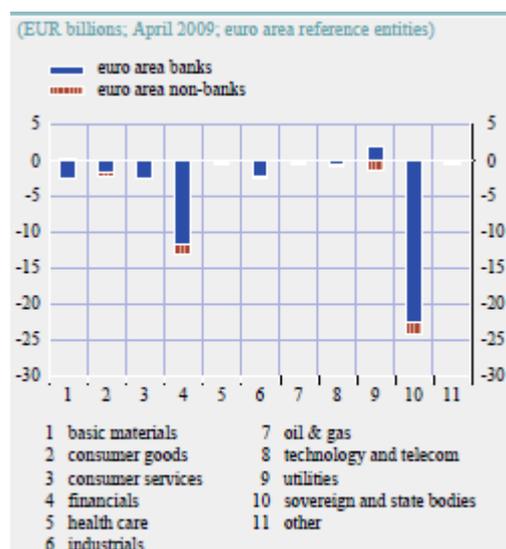


Figure 59 : positions nettes des résidents de la zone euro. Source : BCE [2009].

Au sujet des entités de référence souveraines et du risque de corrélation, l'accroissement du phénomène de corrélation entre les entités de référence et les vendeurs de protection par swap sur défaillance (CDS) amoindrit l'efficacité du transfert convenable du risque et amplifie l'effet de cette interconnexion. Ce risque de corrélation se produit lorsque la qualité de crédit d'une entité de référence d'un CDS est corrélée avec celle de la contrepartie de ce même CDS. Il pourrait s'appliquer, par exemple, aux filiales d'un groupe de sociétés, mais également à des entités légales totalement distinctes mais exposées à des risques externes ou économiques similaires. Un exemple extrême serait celui où des banques vendraient des CDS dont l'entité de référence serait leur état hôte. Une banque qui bénéficierait de plans de sauvetage de la part du pays où se trouverait la maison mère et qui vendrait concomitamment une protection sur le risque de crédit de cet état-là constituerait un cas d'école pour le risque de corrélation. En réalité, une banque peut tout à fait vendre une protection par CDS contre une défaillance de son propre gouvernement (cf. Figure 60), bien que, bien entendu, sa capacité à honorer ses engagements dépende étroitement de la santé financière dudit gouvernement et de sa survie en cas de défaillance de ce dernier. La banque peut arguer que le prix de marché du risque de crédit de son état hôte était excessivement élevé au moment de la vente et qu'il est douteux que les conditions économiques se détériorent au point de provoquer une défaillance souveraine. Il peut alors être rentable pour cette banque de vendre des CDS sur son état hôte et d'accepter ainsi le risque de crédit. Dans une certaine mesure, on pourrait considérer cette banque comme une force stabilisatrice au sein du marché, atténuant les effets de la spéculation portant sur l'augmentation des primes des CDS souverains.

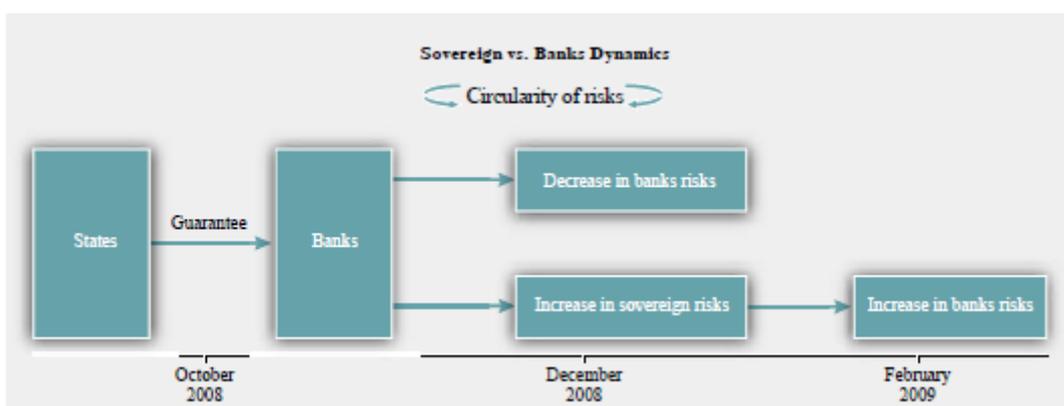


Figure 60 : circularité des banques et risque souverain. Source : BCE [2009].

Le montant actuel du risque de corrélation en cours ne peut être supputé précisément sans des détails supplémentaires au niveau de la transaction et concernant les vendeurs de protection, les entités de référence ainsi que les montants vendus et achetés. La société de dépôt et de compensation américaine a mené une investigation sur la base d'une définition restreinte du risque de corrélation pour les banques qui avaient vendu des protections par CDS sur leur gouvernement hôte. Cette investigation révèle un montant notionnel de 10 millions d'euros de contrats CDS vendus par les banques contre leur gouvernement hôte le 17 avril 2009, dont 7

millions par des banques de l'Union Européenne et de Suisse. Bien que ce montant puisse sembler relativement faible en comparaison des montants nominaux en cours sur l'ensemble du marché, des données complémentaires fournies par la DTCC et portant sur les banques de la zone euro indiquent que celles-ci sont actuellement vendeuses nettes de CDS contre des gouvernements de cette même zone.

CONT et al. [2004], dans leur article « *Measuring systematic risk in financial networks* », ont montré que l'ampleur de la contagion financière dépend plus de la structure du réseau constituant le marché que de la taille de ses participants les plus importants. Le marché des CDS peut être considéré comme un réseau informel de relations bilatérales entre différentes contreparties et de risques de crédit dynamiques, dont la taille et la distribution sont étroitement liées aux marchés d'actifs importants. Cette chaîne de relations est intrinsèquement complexe et malaisée à traiter. De surcroît, le degré élevé d'interconnexion entre les participants du marché a également entraîné une augmentation de leurs primes respectives après la chute de Lehman Brothers.

La diffusion du risque systémique au sein du réseau des institutions financières a été modélisée sous la forme de liens contingents introduits par les CDS à signature unique, liens qui se matérialisent lors de l'occurrence d'un événement de crédit. Ces nouveaux liens rattachent l'acheteur de protection à sa contrepartie, indiquant l'engagement en cas de survenue d'un événement de crédit qui affecterait l'entité de référence. Là où l'acheteur de protection n'avait aucune exposition initiale à l'entité de référence en défaut, l'évènement de crédit génère un nouveau lien au sein du réseau, dont la valeur peut atteindre un montant considérable.

Il fut découvert que les CDS intensifient la répercussion d'un défaut d'une grande institution ainsi que la probabilité qu'un tel défaut ait quelque répercussion, donc le risque systémique. L'étude des trois chercheurs a aussi souligné le fait que le ratio des contrats CDS spéculatifs au montant total des CDS en cours n'affecte pas la répercussion en termes de risques systémiques.

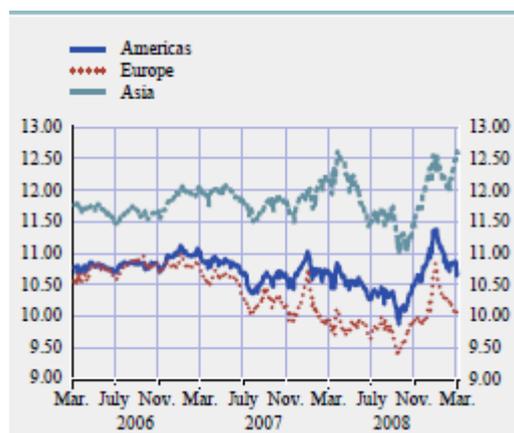
Par ailleurs, il faut considérer certains aspects spécifiques du calcul des marges de risque pour les CDS : la volatilité variant au cours du temps (ou hétéroscédasticité) des mouvements des *spreads*, ainsi que le haut degré d'asymétrie et les brusques variations haussières des *spreads* (sous la forme d'une épaisse queue à droite). Le potentiel de défaillance de l'actif sous-jacent est un risque spécifique aux CDS à signature unique, qui doit être considéré dans la gestion du risque d'une chambre de compensation. Selon les auteurs, cela peut être fait uniquement en mutualisant les positions sur des CDS à signature unique et sur des indices de CDS au sein d'une chambre de compensation.

### 2.3.3. Liquidité

Comme évoqué à la section 1.2 de ce chapitre, le risque de liquidité est une problématique délicate.

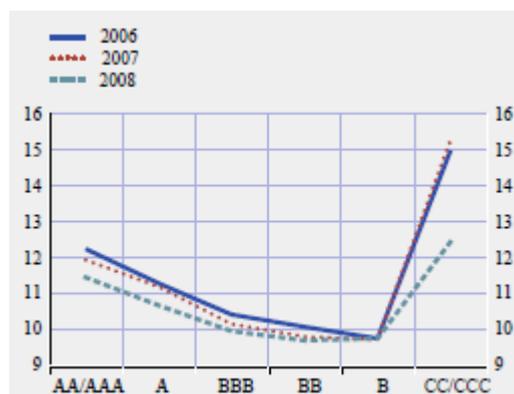
Les opérateurs jouent un rôle important sur les marchés de produits dérivés gré-à-gré, intervenant comme courtiers de premier ordre, courant un risque de contrepartie, structurant des produits et fournissant de la liquidité. La liquidité d'un marché est un prérequis à son efficacité et une détérioration de la liquidité peut dégénérer en un risque systémique. Une des pierres d'achoppement les plus fallacieuses serait de s'attendre à ce que la liquidité du marché étudié se maintienne. Cette illusion dénote une confiance excessive de la part des participants financiers en leur aptitude à dénouer des transactions ou à couvrir leurs positions avec souplesse et diligence afin de faire face à des méchefs économiques, attitude susceptible de les inciter à prendre des risques inconsidérés. Par exemple, dans le cas d'AIG, il est fortement improbable que les contreparties de la compagnie d'assurance aient pu entreprendre une novation, étant donné l'écroulement total du marché des CDO auxquels étaient liés les CDS sur mesure d'AIG.

Une détérioration de la liquidité pu être observée seulement lors du quatrième trimestre de 2008, suivant la défaillance de Lehman Brother's. Durant de cette période, les primes de CDS augmentèrent très rapidement, reflétant le sentiment des acteurs financiers selon lequel il était fortement plausible que d'autres défaillances suivraient. Dans ce contexte, la valorisation et la cotation des prix des CDS devinrent ardues, ce qui impacta la liquidité au sein de ce marché (cf. Figure 61).



**Figure 61 : évolution des indices de liquidité. Source : BCE [2009].**

Les indices d'illiquidité montrent que la liquidité des CDS n'est pas strictement corrélée à la qualité de crédit et qu'un certain degré de risque de crédit doit exister afin de faciliter la négociation des contrats de CDS (cf. Figure 62). Toutefois, la liquidité des CDS disparaît si la probabilité de défaut devient trop élevée, les acteurs financiers étant réticents à établir des cotations pour un CDS dont l'entité de référence a une trop forte probabilité de faire défaut. Cette hypothèse est étayée par les observations des participants du marché qui ont suivi l'effondrement de Lehman Brothers. Selon les indices de liquidité disponibles, il semble que la liquidité du marché des CDS n'ait guère changé au cours du temps.



**Figure 62 : indices d'illiquidité par rating. Source : BCE [2009].**

En revanche, les entretiens avec les participants du marché réfutent cette assertion. Bien que les acteurs les plus importants ne se plaignent pas de rencontrer des problèmes de liquidité, ce n'est pas le cas des plus petits. Les réponses de l'enquête indiquent que les produits indiciaires standards, tels que l'iTRAXX Main ou le CDX.IG, ainsi que les CDS sur signature unique dont l'entité de référence est une grande entreprise tendent à être relativement liquides, avec des flux bidirectionnels. Les tailles des transactions se sont généralement réduites, particulièrement pour les titres à haut rendement, tandis que certains faiseurs de marché ne cotent plus de tels titres.

D'une part, le marché semble actuellement mieux équilibré pour les maturités long terme, comme cinq et dix ans. D'autre part, il y a eu un manque d'acheteurs pour les CDS à signature unique de maturité inférieure à un an, hormis ceux dont l'entité de référence comportait un risque de défaut immédiat. Il est donc possible que ce manque de liquidité pour les maturités court terme reflète des contraintes en matière de liquidité.

L'interconnexion et les hauts niveaux de concentration parmi un groupe réduit d'opérateurs sur le marché a contribué à l'augmentation du risque de liquidité sur ce marché. Ceci a aussi conduit à élargir les écarts entre les cours acheteur et vendeur.

### 2.3.4. Conclusions

Tout d'abord, il faudrait fournir davantage d'informations aux autorités de surveillance en matière de risque de contrepartie, informations incluant des indicateurs de diversification/dispersion aussi bien au niveau du marché que des institutions (comme des détails concernant les expositions les plus élevées aux vendeurs de protection ou aux industries) pour évaluer le niveau de concentration au sein du marché. Des informations devraient être

également divulguées publiquement, bien qu'une harmonisation soit nécessaire pour satisfaire à une telle transparence et assurer ainsi des règles du jeu équitables.

En outre, le partage et la centralisation de l'information idoine et disponible sur les CDS parmi les autorités de régulation devraient être entrepris dans le cadre des régimes juridiques nationaux, car c'est le seul moyen d'appréhender correctement le risque de contrepartie. Les données fournies volontairement par les institutions individuelles pourraient aussi être accessibles à tout corps régulateur qui en aurait besoin, ce qui allégerait subséquemment d'autant les obligations de déclaration des banques.

### 3. Choix du modèle de défaut

L'investisseur cherche à attribuer un prix au risque de défaut, et ce afin d'estimer le taux de rendement à l'échéance requis applicable à la dette émise par une entreprise donnée. Les méthodes d'évaluation du risque de défaut s'appuient sur deux grands types de modèles :

1. Les modèles à forme réduite, où le défaut est un événement exogène représenté par l'entremise d'un processus
2. Les modèles structurels, qui trouvent leurs origines dans les travaux de Merton (1974). À travers le cadre d'analyse de la théorie des options, ils permettent d'évaluer la probabilité de défaut et de valoriser la dette émise par une entreprise.

Les modèles structurels et ceux à intensité relèvent de logiques différentes. Alors que les premiers sont basés sur une représentation de la cause du défaut (les actifs de l'entreprise ne sont pas suffisants pour honorer les engagements), les modèles à intensité représentent le défaut à l'aide d'un processus de Poisson *ad hoc*. D'un point de vue théorique, l'approche structurelle est donc plus rigoureuse. Cependant, sur le plan empirique, les modèles structurels pâtissent d'une grande faiblesse mais qui n'affecte pas les modèles à intensité : ils sous-estiment fortement les probabilités de défaut sur les premières périodes, donc les *spreads* de crédit appliqués aux produits d'échéance courte. Ce défaut est inhérent à la continuité du processus censé régir la valeur  $V(t)$  des actifs. En raison de cette continuité, sur un court intervalle  $[0, T]$ , la probabilité est très faible (même rapportée à la durée  $T$  de l'intervalle) que  $V(t)$  baisse d'un montant  $V(0) - V_d$  et atteigne ainsi le seuil de défaut  $V_d$  : à la limite, cette continuité implique qu'un *junk bond* (obligation « pourrie » à très haut risque de défaut) à très court terme doit être négociée au même taux qu'un titre d'État, ce qui est contourné par les faits observés. C'est pourquoi les professionnels n'utilisent guère ces modèles. En revanche, dans un modèle à intensité, des sauts sont possibles à tout instant, avec une probabilité  $\lambda(t)$  par unité de temps qui peut être calibrée pour s'ajuster aux *spreads* observés, même pour les titres à court terme.

Parmi les modèles structurels, il est important de distinguer les modèles statiques et dynamiques. Si l'on considère un modèle statique de type Merton et un modèle dynamique à barrière, les deux modèles sont caractérisés par la même dynamique des actifs et le même seuil de défaut. Non seulement la synchronisation du défaut diffère dans les deux modèles (dans le modèle statique, il n'est déclaré qu'en date  $T$ ), mais la probabilité de défaut obtenue avec le modèle statique est inférieure à celle obtenue avec le modèle dynamique. En effet, contrairement à ce dernier modèle, le modèle statique autorise un ou plusieurs dépassements du seuil de défaut en des dates  $t < T$  ( $V(t) < V_d$ ) suivis chacun d'un redressement de situation qui permet à l'entreprise de finir en date  $T$  avec une valeur d'actifs supérieure audit seuil ( $V(t) < V_d$ ). Selon le problème abordé, un modèle statique pourra suffire, sinon il faudra envisager un modèle dynamique. Par exemple, dans le cas d'une entreprise avec une seule dette, de type zéro-coupon, le modèle statique sera pertinent ; il le sera encore dans le cas de dettes à échéances très rapprochées dans le temps ; néanmoins, il ne le sera plus dans le cas d'une structure d'endettement hétérogène impliquant des dettes à court, moyen et long terme, ainsi que de nombreuses échéances de coupons et de remboursements de capital étalées dans le temps.

Par ailleurs, le calcul d'un *spread* de défaut se fondant sur le modèle de Merton nécessite d'avoir accès aux données des bilans des firmes considérées (structure de capital, durée de la dette, valeur de la firme et la volatilité de ses actifs), données pas systématiquement disponibles.

De surcroît, dans certains modèles dynamiques, le seuil de défaut est lui-même endogène : la cessation de paiement des coupons ou des remboursements du principal intervient au moment choisi opportunément par les actionnaires, lesquels, par exemple, peuvent avoir intérêt à payer des coupons, même si la valeur des actifs est inférieure à la valeur nominale de la dette, dans la perspective d'une évolution plus favorable intervenant avant les prochaines échéances.

Pour conclure, nous opterons dans ce mémoire pour un modèle à intensité. Une approche plus sophistiquée, en l'occurrence celle élaborée par LONGSTAFF et al. [2005], sera donc étudiée à la prochaine section. Elle est d'ailleurs mise en œuvre au sein du groupe AG2R La Mondiale. En guise d'approches alternatives, nous citerons GATFAOUI [2002] et DELIANEDIS et GESKE [2001].

#### 4. Implémentation du modèle de Longstaff, Mithal et Neis (2005)

Une méthode alternative permettant de déterminer la part du spread attribuable au risque de défaut consiste à faire intervenir les credit default swap pour obtenir l'information sur le risque de défaut d'un émetteur. L'intérêt de l'approche « *model-independant* » proposée par LONGSTAFF et al. [2005] (modèle dit LMN) réside dans le fait que sont exploitées des données de marché pour déterminer le spread de défaut. Ils ne se heurtent donc pas à des considérations relatives aux choix d'un modèle d'évaluation du risque de défaut.

Les données sur les primes de CDS indiquent la part du risque de défaut de l'obligation. Le *spread* sur l'obligation par rapport au taux sans risque peut donc se décomposer en la part risque de défaut, donnée par la prime du swap. Ils en dégagent un spread résiduel. Ils cherchent ensuite à déterminer les variables significativement explicatives du spread résiduel.

En sus du caractère « *Market-Consistent* » de ce modèle, nous retiendrons celui-ci pour les raisons suivantes :

- Il existe des formules analytiques pour calculer le prix d'un zéro-coupon d'entreprise, ce qui facilite d'autant l'implémentation facilitée du fait des formules fermées pour calculer le prix du ZC
- Il est compatible avec tous les modèles de taux sans risque. Les formules qui en sont tirées ne dépendent pas du choix d'un modèle de taux sans risque particulier.
- Il peut être employé comme un input externe au modèle ALM.

##### 4.1. Description du modèle

À l'instar des autres modèles à forme réduite, le modèle LMN n'explique pas directement la cause du défaut. Il s'intéresse plutôt à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises, défaut pouvant survenir à tout moment. La Figure 63 illustre le principe du calcul du flux de paiement d'une obligation d'entreprise à une date de détachement de coupon. On note :

- $V(t_0)$ , la valeur du flux à la date  $t_0$ ,
- $C$ , la valeur du coupon,
- $c$ , la valeur en pourcentage du coupon,
- $M$ , le montant principal.
- $t_1, \dots, t_N$ , les dates des futurs détachements de coupon.
- $t_{-M}, \dots, t_{-1}$ , les dates des détachements passés de coupon.
- $\delta$ , le délai entre deux coupons successifs, délai présumé constant.
- $t_0$ , la date d'aujourd'hui.
- $t_N$ , la date de maturité de l'obligation.

On peut écrire :  $C = cM$  et  $M + C = M(1 + c)$ .

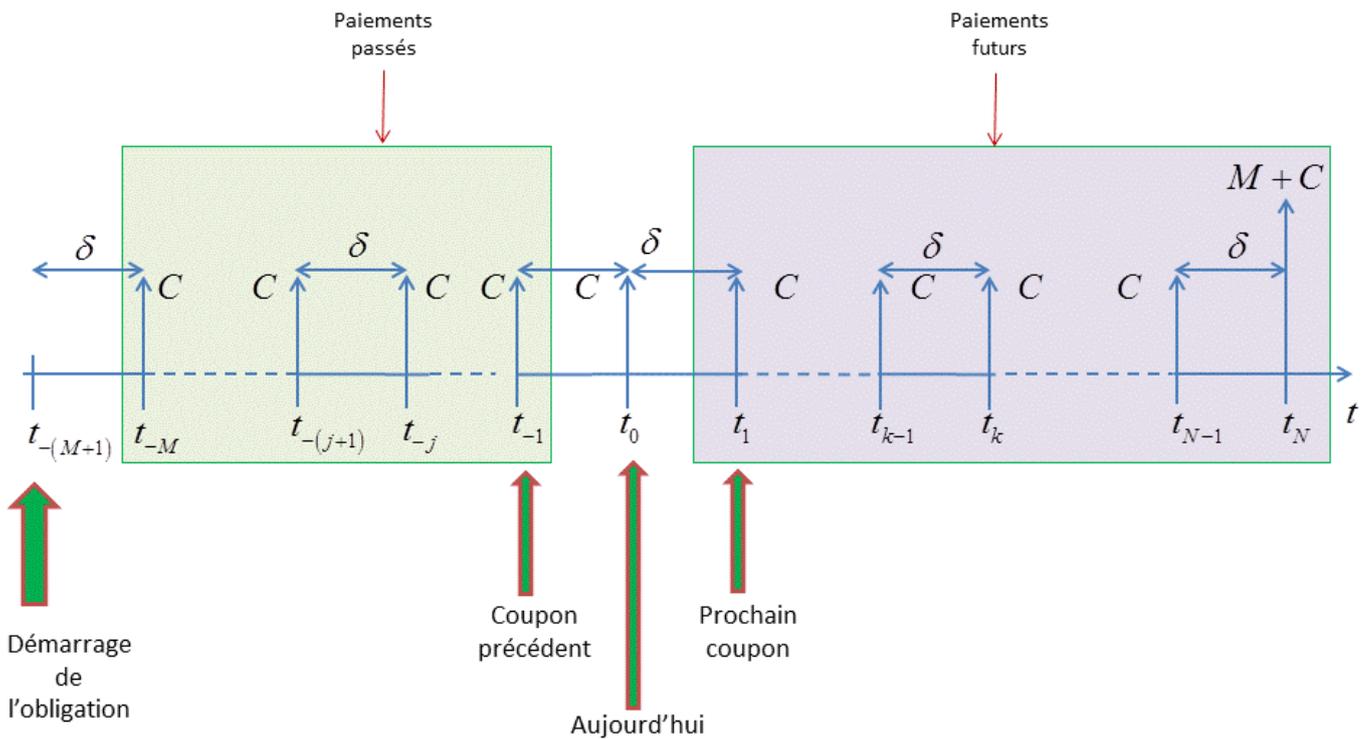
Il s'ensuit :

$$V(t_0) = \begin{cases} P[\tau > t_0] \times F(t_0) & \text{Si pas de défaut} \\ P[\tau > t_0] \times (1 - \omega) \times M & \text{Si pas de défaut} \end{cases}$$

Et :

$$F(t_0) = \begin{cases} C & \text{Si } t_0 < t_N \\ C + M & \text{Si } t_0 = t_N \end{cases}$$

On suppose, en outre, que le remboursement a lieu au moment du défaut, ce qui n'est pas forcément le cas en pratique (cf. 2.12.1).



$$V(t_0) = \begin{cases} P[\tau > t_0] \times F(t_0) & \text{Si pas de défaut} \\ P[\tau > t_0] \times (1 - \omega) \times M & \text{Si pas de défaut} \end{cases}$$

**Figure 63 : principe de calcul des flux d'une obligation d'entreprise.**

Notons :

- $r_t$ , le taux sans risque,
- $\lambda_t$ , l'intensité du processus de Poisson régissant le défaut,
- $\gamma_t$ , un rendement d'opportunité ou processus de liquidité, qui sera utilisé pour capturer le rendement supplémentaire qu'un investisseur requerra, en sus de la compensation due au risque de crédit, du fait de détenir une obligation d'entreprise plutôt qu'une obligation de caractéristiques identiques mais exempt de risque.
- $\omega$ , le taux de recouvrement.

Ces trois processus sont stochastiques, bien que l'on suppose qu'ils soient décorrélés les uns des autres. LONGSTAFF et al. [2005] supposent que cette simplification a peu d'effet sur les résultats empiriques.

Le taux d'intérêt d'une obligation d'entreprise s'écrit alors comme suit :

$$rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t \tag{136}$$

Comme le préconisent, les auteurs, le taux de recouvrement est fixe, car ils le supposent indépendant du risque de défaut et de celui de liquidité. Ils choisissent une valeur de 50%, car ils la jugent congruente avec la valeur médiane des obligations non adossées privilégiées. Il ne faut bien entendu pas ignorer le fait que ce taux est lié au type d'activité de l'entreprise et aussi du niveau de levier (la dette de l'entreprise, titre subordonné ou non etc.).

Point n'est besoin de spécifier la dynamique risque-neutre du taux sans risque pour calculer les primes des CDS et les prix des obligations d'entreprise. La seule exigence est que cette dynamique soit telle que la valeur d'une obligation zéro-coupon  $P(0, T)$  de maturité  $T$  se formule de la manière suivante :

$$P(0, T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t d\tau \right) \right] \tag{137}$$

La dynamique risque-neutre du processus d'intensité (de type CIR) s'écrit :

$$d\lambda_\tau = (\alpha - \beta\lambda_\tau)d\tau + \sigma\sqrt{\lambda_\tau}dZ_{\lambda_\tau} \quad (138)$$

Où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  sont des constantes positives et  $Z_{\lambda_\tau}$  un mouvement brownien standard. Cette dynamique permet à la fois un retour à la moyenne et l'hétéroscédasticité conditionnelle du *spread* de l'obligation d'entreprise, et garantit que l'intensité du défaut reste positive ou nulle.

Quant à la prime de liquidité, elle obéit à la dynamique suivante :

$$d\gamma = \eta dZ_\gamma \quad (139)$$

Où  $\eta$  est une constante positive et  $Z_\gamma$  également un mouvement brownien standard. Cette dynamique permet au processus de liquidité de prendre des valeurs positives ou négatives.

Suite aux articles de DUFFIE [1998], de LANDO [1998] et DUFFIE et al. [1999] ainsi que d'autres chercheurs, il est dorénavant simple de représenter la valeur d'une obligation d'entreprise et les valeurs des jambes acheteuse et vendeuse d'un CDS comme de simples espérances sous la probabilité risque-neutre.

Par soucis de simplification, on suppose que le coupon  $c$  est versé continûment tant qu'il n'y a pas de défaut. Le prix d'une obligation d'entreprise de maturité  $T$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} CB(c, \omega, T) = & E \left[ c \int_0^T \exp \left( - \int_0^\tau (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) d\tau \right] \\ & + E \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_\tau + \lambda_\tau + \gamma_\tau) d\tau \right) \right] \\ & + E \left[ (1 - \omega) \int_0^T \lambda_\tau \exp \left( - \int_0^\tau (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (140)$$

La première espérance de l'équation (140) correspond à la valeur actuelle des coupons promis, la seconde espérance est la valeur actualisée du remboursement du principal, tandis que la troisième espérance est la valeur actualisée des paiements versés en cas de défaut. On peut noter que, dans chaque terme, les flux de trésorerie de l'obligation sont escomptés au taux d'actualisation ajusté  $rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$ .

Abordons maintenant la valorisation d'un CDS. Il faut bien garder à l'esprit que les *swaps* sont des contrats, non des instruments. Cette distinction prend tout son sens dans le fait que la nature contractuelle des CDS les rend moins sensibles aux effets de la liquidité et du rendement d'opportunité. Et ce pour les raisons suivantes :

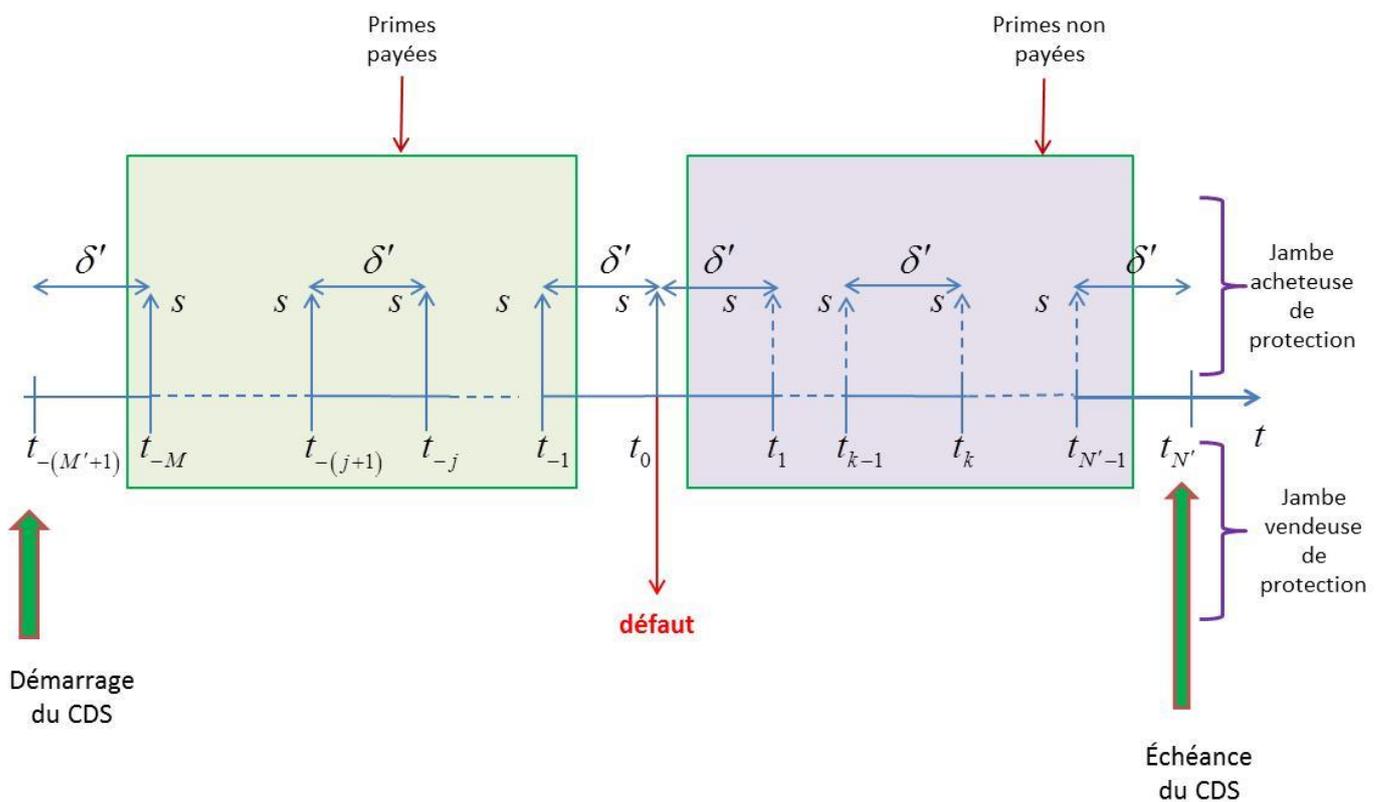
1. Les titres sont en offre fixe. En revanche, le montant notionnel des CDS peut être arbitrairement élevé, ce qui signifie que la pression de l'offre et la demande qui peut affecter les obligations d'entreprise est bien moins susceptible d'influencer les CDS.
2. La nature générique ou fongible des flux de paiement empêche les CDS de devenir « spécial » de façon analogue aux obligations souveraines ou aux actions phares du marché.
3. Puisque de nouveaux CDS peuvent toujours être créés, ces contrats risquent beaucoup moins d'être « compressés » que les obligations d'entreprise sous-jacentes.
4. Depuis que les CDS ressemblent aux contrats d'assurance (cf. 2.1), de nombreux investisseurs qui acquièrent la protection de crédit peuvent avoir l'intention de le faire pour un horizon fixe et, par conséquent, n'envisagent généralement pas de dénouer leurs positions prématurément.
5. Même si l'investisseur veut liquider une position de CDS, il peut être moins coûteux pour lui de simplement entrer dans un nouveau *swap* dans le sens opposé que de tenter de vendre sa position courante. Ainsi, la liquidité de sa position courante est moins pertinente compte tenu de sa capacité à répliquer les flux de trésorerie d'échange par l'entremise d'autres contrats.
6. Il peut parfois être malaisé et dispendieux de vendre des obligations d'entreprise. Par contre, il est généralement plus aisé de vendre une protection que d'en acheter une sur le marché des CDS.
7. Enfin, BLANCO et al. [2004] constatent que les marchés de crédit dérivés sont plus liquides que les marchés des obligations de sociétés dans le sens où de nouvelles informations sont saisies par les primes de CDS plus rapidement que dans les prix des obligations de sociétés.

En raison de ces considérations, nous supposons que l'effet d'opportunité ou processus d'illiquidité  $\gamma_\tau$  s'applique aux flux de trésorerie issus des obligations d'entreprise, mais non à ceux issus des contrats CDS. Alternativement,  $\gamma_\tau$  peut être considéré comme le rendement d'opportunité différentiel entre les titres de société et les contrats de dérivé de crédit. Ainsi, si les CDS incorporent une composante de liquidité, alors il est possible que  $\gamma_\tau$  sous-estime la composante du *spread* non liée au défaut des obligations d'entreprise.

Notons :

- $s$ , la prime payée par l'acheteur de protection contre le défaut.
- $\delta'$ , la périodicité de versement des primes.
- $t_{-(M'+1)}$ , la date de démarrage du CDS.
- $t_{N'}$ , la date de maturité du CDS.
- $t_0$ , la date de défaut de l'entité de référence.
- $t_1, \dots, t_{N'}$ , les dates futures de primes non versées.
- $t_{-M'}, \dots, t_{-1}$ , les dates passées de versement des primes.

La Figure 64 illustre les flux de trésorerie en cas de défaut avant l'échéance du contrat.



**Figure 64 : flux de trésorerie générés par un CDS en cas de défaut.**

En présumant que la prime est payée en continu, la valeur actuelle de la jambe acheteuse de protection,  $PA(s, T)$ , s'exprime dans l'univers risque-neutre comme suit :

$$PA(s, T) = E \left[ s \int_0^T \exp \left( - \int_0^\tau (r_s + \lambda_s) ds \right) d\tau \right] \quad (141)$$

Pareillement, la valeur de la jambe vendeuse de protection se formule ainsi :

$$PR(\omega, T) = E \left[ \omega \int_0^T \lambda_t \exp \left( - \int_0^\tau (r_s + \lambda_s) ds \right) d\tau \right] \quad (142)$$

L'expression de la prime  $s$  se déduit de l'égalisation de la valeur des deux jambes :

$$s = \frac{E \left[ \omega \int_0^T \lambda_\tau \exp \left( - \int_0^\tau (r_s + \lambda_s) ds \right) d\tau \right]}{E \left[ \int_0^T \exp \left( - \int_0^\tau (r_s + \lambda_s) ds \right) d\tau \right]} \quad (143)$$

**Remarque** : dans le cas où le processus  $\lambda_\tau$  n'est pas stochastique, la prime est simplement égale à  $\lambda\omega$ . Cependant, même lorsque le processus  $\lambda_\tau$  est stochastique, la prime peut être interprétée comme la valeur moyenne présente pondérée des  $\lambda_\tau\omega$ . En général, en raison de la corrélation négative entre  $\lambda_\tau$  et  $\exp\left(-\int_0^\tau \lambda_s ds\right)$ , la prime doit être inférieure à la valeur moyenne espérée du produit  $\lambda_\tau \times \omega$ .

Compte tenu de la dynamique du processus d'intensité (138) et de celle du processus de liquidité (139), les résultats standards tels que ceux établis par DUFFIE et al. [1999] permettent d'établir aisément des formules fermées respectivement pour le prix d'une obligation d'entreprise et pour la prime d'un CDS :

$$\begin{aligned} CB(c, \omega, T) &= c \int_0^T A(\tau) \exp(B(\tau)\lambda) C(\tau) P(0, \tau) e^{-\gamma\tau} d\tau \\ &+ A(T) \exp(B(T)\lambda) C(T) P(0, T) e^{-\gamma T} \\ &+ (1-\omega) \int_0^T \exp(B(\tau)\lambda) C(\tau) P(0, \tau) (G(\tau) + H(\tau)\lambda) e^{-\gamma\tau} d\tau \end{aligned} \quad (144)$$

$$s = \frac{\omega \int_0^T \exp(B(\tau)\lambda) P(0, \tau) (G(\tau) + H(\tau)\lambda) d\tau}{\int_0^T A(\tau) \exp(B(\tau)\lambda) P(0, \tau) d\tau} \quad (145)$$

Où  $\lambda$  et  $\gamma$  représentent respectivement les valeurs courantes des processus d'intensité et de liquidité, et où :

$$\left\{ \begin{aligned} A(\tau) &= \exp\left(\frac{\alpha(\beta+\phi)}{\sigma^2} \tau\right) \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi\tau}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}} \\ B(\tau) &= \frac{\beta-\phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1-\kappa e^{\phi\tau})} \\ C(\tau) &= \exp\left(\frac{\eta^2 \tau^3}{6}\right) \\ G(\tau) &= \frac{\alpha}{\phi} (e^{\phi\tau} - 1) \exp\left(\frac{\alpha(\beta+\phi)}{\sigma^2} \tau\right) \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi\tau}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+1} \\ H(\tau) &= \exp\left(\frac{\alpha(\beta+\phi) + \phi\sigma^2}{\sigma^2} \tau\right) \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi\tau}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+2} \\ \phi &= \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2} \\ \kappa &= \frac{\beta+\phi}{\beta-\phi} \end{aligned} \right. \quad (146)$$

On peut remarquer que, si  $\lambda = 0$ , alors  $s = 0$ , ce qui est cohérent avec le fait que le coût de défaut doit être nul, si l'entité ne présente aucun risque de défaut.

Considérons une obligation à coupons ne présentant aucun risque de liquidité (donc uniquement un risque de défaut). L'équation (139) implique  $\eta = 0$ . Bien entendu, le processus de liquidité est nul :  $\gamma = 0$ . Il vient alors :  $C(\tau) = 1$ . On en tire le prix  $CB^{(def)}(c, \omega, T)$  d'une telle obligation :

$$\begin{aligned}
CB^{(def)}(c, \omega, T) = & c \int_0^T A(\tau) \exp(B(\tau)\lambda) P(0, \tau) d\tau \\
& + A(T) \exp(B(T)\lambda) P(0, T) \\
& + (1 - \omega) \int_0^T \exp(B(\tau)\lambda) P(0, \tau) (G(\tau) + H(\tau)\lambda) d\tau
\end{aligned}
\tag{147}$$

De même, considérons une obligation à coupons ne présentant aucun risque de défaut (donc uniquement un risque de liquidité). Bien entendu, le processus de défaut est nul :  $\lambda = 0$ . Cela implique, conjointement avec l'équation (138),  $\alpha = 0$ . D'où  $A(\tau) = 1$  et  $G(\tau) = 0$ . On en déduit le prix d'une telle obligation  $CB^{(liq)}(c, \omega, T)$  :

$$CB^{(liq)}(c, \omega, T) = c \int_0^T C(\tau) P(0, \tau) e^{-\gamma\tau} d\tau + C(T) P(0, T) e^{-\gamma T}
\tag{148}$$

Enfin, considérons une obligation à coupons sans risque. Par conséquent, eu égard aux remarques précédentes :

- $\gamma = 0$
- $\lambda = 0$
- $A(\tau) = 1$
- $C(\tau) = 1$
- $G(\tau) = 0$

On retrouve alors la formule classique d'une obligation sans risque  $CB^{(riskless)}(c, \omega, T)$  :

$$CB^{(riskless)}(c, \omega, T) = c \int_0^T P(0, \tau) d\tau + P(0, T)
\tag{149}$$

De surcroît, les différents prix doivent vérifier la relation ci-dessous :

$$CB(c, \omega, T) \leq CB^{(liq)}(c, \omega, T), CB^{(def)}(c, \omega, T) \leq CB^{(riskless)}(c, \omega, T)
\tag{150}$$

Considérons maintenant une obligation à coupons et un CDS quelconques. Notons :

- $y^{(réel)}$  le rendement réel de l'obligation.
- $r^{(réel)}$  la composante sans risque du rendement total.
- $s_{def}^{(réel)}$  la composante défaut du rendement total.
- $s_{liq}^{(réel)}$  la composante liquidité du rendement total.
- $s_{CDS}$  la prime du CDS.
- $b$  le biais ou différence entre la somme du taux sans risque et de la composante défaut et la prime du CDS.

Le biais  $b$  procède de l'utilisation de la prime du CDS comme mesure de la composante défaut du *spread* de l'obligation. LONGSTAFF et al. [2005] montrent que la prime d'un CDS est une estimation biaisée à la baisse de la composante défaut du rendement obligataire en période de stabilité, mais qu'elle devient une estimation biaisée à la hausse lorsque l'entité de référence s'approche de la banqueroute.

La Figure 65 illustre les relations entre les grandeurs précédemment évoquées.

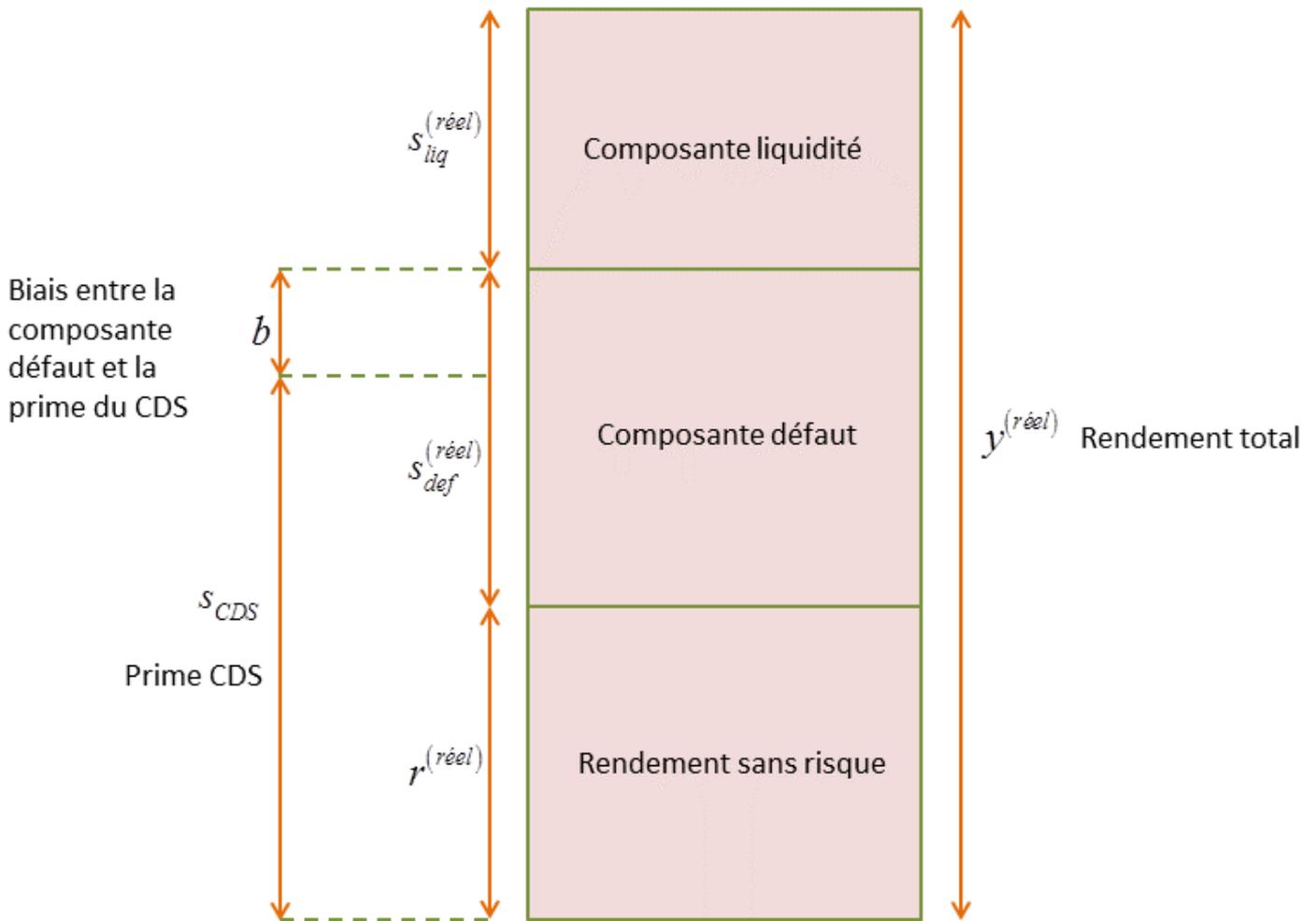


Figure 65 : Décomposition du rendement d'une obligation à coupons.

Dans le cas où les coupons sont distribués de façon discrète à une fréquence annuelle  $f$  (nombre de tombées de coupons par an) aux dates  $\tau_{i,j} = (i-1)f + j$  ( $\tau_{N-1,f} = T$ ), avec  $i \in [1, N-1]$  et  $j \in [1, f]$ , la relation (144) devient :

$$\begin{aligned}
 CB(c, \omega, T) &= \sum_{k=1}^N A(\tau_i) \exp(B(\tau_{i,j})\lambda) C(\tau_{i,j}) P(\tau_{i,j}) e^{-\gamma\tau_{i,j}} \\
 &+ A(T) \exp(B(T)\lambda) C(T) P(0, T) e^{-\gamma T} \\
 &+ (1-\omega) \int_0^T \exp(B(\tau)\lambda) C(\tau) P(0, \tau) (G(\tau) + H(\tau)\lambda) e^{-\gamma\tau} d\tau
 \end{aligned} \tag{151}$$

De même, dans le cas de primes distribuées de façon discrète à une fréquence annuelle  $f'$  (nombre de tombées de primes par an) aux dates  $\tau'_{i,j} = (i-1)f' + j$  ( $\tau'_{N'-1,f'} = T$ ), avec  $i \in [1, N'-1]$  et  $j \in [1, f']$ , la relation (145) :

$$s = \frac{\omega \int_0^T \exp(B(\tau)\lambda) P(0, \tau) (G(\tau) + H(\tau)\lambda) d\tau}{\sum_{k=1}^{N'} A(\tau'_{i,j}) \exp(B(\tau'_{i,j})\lambda) P(0, \tau'_{i,j})} \tag{152}$$

## 4.2. Calibration du modèle LMN

Une fois le modèle calibré par rapport à un échantillon de données, il pourra être employé à décomposer le *spread* implicite de la prime d'un CDS.

Dans le cadre de notre étude, nous nous restreindrons à l'euro, nous laisserons donc de côté les autres devises. Les courbes de taux sans risque utilisées sont celles générées par la méthode d'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson décrite à la section 4.3 du chapitre « *Les courbes de taux : méthodes de construction* ».

#### 4.2.1. Choix et collecte des données

La première approche qui fut envisagée qui consiste à calculer une prime CDS à partir d'un échantillon présentant les spécificités du marché et celles de notre portefeuille. Mais vu la difficulté de trouver les données nécessaires pour une telle méthode et de prendre en compte les corrélations entre les différentes entités (on pourra se référer à la section 2.3.1 qui évoque les problèmes engendrés par une trop forte concentration des opérateurs), cette approche a été vite abandonnée.

Ensuite, nous avons exploré une approche qui privilégiait les indices obligataires et les indices de CDS. L'intérêt d'un indice est de représenter de façon synthétique l'évolution d'un marché ou d'une catégorie de l'actif, de servir d'étalon pour apprécier les performances des gestionnaires et de constituer le support à différents produits dérivés.

Les indices obligataires publiés (« Markit Credit Indices ») par la compagnie [Markit](http://www.markit.com/en/)<sup>34</sup>, principal fournisseur d'indices de dérivés de crédit en Europe et en Asie, ont attiré notre attention :

- **La famille *iBoxx EUR High Yield*.** Cette famille d'indices traque la performance des obligations d'entreprise libellées en euro à haut rendement et a pour objectif de fournir des portefeuilles de référence idoines. En sus d'un indice global, les valeurs indicielles sont ventilées par maturité, signature et secteur. Les structures obligataires standard sont incluses dans l'indice *iBoxx EUR Core High Yield Index*. Les analyses et les indices sont calculés en fin de journée sur la base des prix *iBoxx* consolidés. Un cadre d'analyse exhaustif est calculé à la fois au niveau de l'obligation et de l'indice, incluant le rendement, la duration, la convexité, les caractéristiques des options à cadre ajusté, les rendements excédentaires, les *spreads*, etc. Cette famille comprend les types d'obligations suivants :
  - Obligations « *plain vanilla* »,
  - Obligations zéro-coupon,
  - Obligations à taux variable avec l'EURIBO comme taux d'intérêt de référence sans *cap* ou *floor*,
  - Fonds d'amortissement avec calendrier de remboursement connus,
  - Obligations avec *calls* américains et européens,
  - Obligations avec *puts* poisons,
  - Obligations avec provisions *make-whole call* ou *call* sur changements d'impôt,
  - Obligations déclenchées par des événements comme la signature et obligation « *sensitive-registration* »,
  - Obligations avec paiement en nature,
  - Rentes perpétuelles,
  - Rentes perpétuelles « *fixed-to-floater* ».
- **La famille *iBoxx EUR Benchmark*.** Cette famille d'indices est publiée par l'International Index Company Limited (IIC) et représente le marché des titres à taux fixe de notation élevée (catégorie « investissement »). Elle inclue un indice global et quatre sous-groupes des principaux indices. Le groupe des indices souverains est constitué des dettes souveraines émises par un gouvernement de la zone euro libellées en euro ou dans une ancienne monnaie de la zone euro. Ce groupe comprend un indice global et des indices par maturité. Un indice global est publié pour chaque pays de la zone euro (hormis le Luxembourg), à savoir l'Autriche, la Belgique, la Finlande, la France, l'Allemagne, la Grèce, l'Irlande, l'Italie, les Pays-Bas, le Portugal et l'Espagne. Le groupe des indices souverains est complété avec des indices par maturité pour l'Allemagne, la France et l'Italie.

L'indice non souverain *iBoxx EUR Non-Sovereigns* comprend toutes les obligations qui ne rentrent pas dans les critères de des indices souverains. Ces obligations sont ensuite classifiées en sous-groupes indiciels d'obligations infranationales, d'obligations collatéralisées et d'obligations d'entreprise. Les obligations souveraines émises par des pays hors de la zone euro sont inclus dans l'indice *iBoxx EUR Other Sovereigns* au sein du sous-groupe des indices infranationaux. Les indices d'obligations d'entreprise comprennent un indice global et des indices par signature et maturité, avec une distinction entre obligations financières et obligations non financières, et des sous-indices par signature et maturité pour chacune de ces sous-catégories. Une ventilation supplémentaire est faite par secteurs de marché. Les indices de créances de premier rang et de titres secondaires sont publiés pour les secteurs financiers et non financiers. Les sous-indices pour les créances financières, conformément à leur statut de dette, sont aussi calculés.

<sup>34</sup> <http://www.markit.com/en/>

- **La famille *Liquid Indices (EUR et GBP Liquid IG Indices)*.** La famille d'indices *Markit iBoxx EUR Liquid* consiste en un sous-ensemble d'obligations au sein de la gamme indicielle *Markit iBoxx EUR* des indices de performance. Les indices « liquides » ont été conçus de manière à fournir un référentiel approprié aux transactions de gré à gré, aux produits dérivés cotés et aux fonds indiciaires cotés (*Exchange Traded Funds* ou *ETF*).

Les indices de performance regroupent généralement un grand nombre d'obligations. Les gestionnaires de portefeuille suivant les performances d'un indice issu de la famille *Markit iBoxx EUR*, plus étendue, pâtissent de coûts significatifs en tentant de répliquer ou de couvrir des obligations individuelles dans le portefeuille. En outre, les obligations assorties de caractéristiques spécifiques ou dont l'encours est réduit sont généralement peu liquides, avec pour corollaire une fourchette de prix achat/vente relativement large.

Les indices *Markit iBoxx EUR Liquid* ont pour vocation de surmonter ces écueils en limitant le nombre d'obligations par indice et en excluant toute obligation à caractère spécifique, ce qui a alors pour résultat de réduire les coûts de réplification indiciaire et de couverture.

La gamme des indices *Markit iBoxx EUR Liquid* se décompose en trois sous-groupes : souverains (*sovereign*), secteur parapublic (*sub-sovereign*) et entreprises (*corporate*). L'indice *Markit iBoxx EUR Liquid Sovereigns* comporte quatre types de maturité (extra-courte, courte, moyenne et longue). L'indice *Markit iBoxx EUR Liquid Sovereigns* est une agrégation pondérée des indices *Markit iBoxx EUR Sovereigns Short*, *Markit iBoxx EUR Sovereigns Medium* et *Markit iBoxx EUR Sovereigns Long*. L'indice *Markit iBoxx EUR Liquid Agencies/Supranationals AAA* comprend les obligations les plus liquides garanties par les Etats et notées AAA.

Le sous-groupe des indices *Corporates* se décline selon les conventions du marché. Aux côtés de l'indice général *Markit iBoxx EUR Liquid Corporates Overall*, il existe des indices distincts pour le secteur financier et les secteurs non financiers, qui se subdivisent également par qualité de signature. De plus, il existe un choix d'indices sectoriels, reposant sur la classification ICB.

En raison du nombre insuffisant d'obligations disponibles, les indices des secteurs Matériaux de base, Pétrole et Gaz, Santé et Technologie ne sont pas publiés.

Les indices *Markit iBoxx EUR Liquid* se composent uniquement d'obligations à taux fixe avec remboursement à l'échéance, libellées en euro ou dans l'une des monnaies nationales converties en euro (obligations classiques). Le domicile de l'émetteur n'est pas pris en compte. Cette règle comporte deux exceptions afin de permettre l'éligibilité de deux types d'obligations fréquemment utilisés par les entreprises, à savoir les obligations indexées sur la qualité de signature et les obligations dont les flux sont connus (exemple : obligations à taux progressif). Les obligations avec amortissement ou fonds d'amortissement sont en revanche exclues des indices *Markit iBoxx EUR Liquid*, de même que les obligations zéro coupon, les obligations dont le dernier coupon est calculé sur une période différente, les obligations remboursables et les emprunts perpétuels (dont les emprunts hybrides à durée déterminée ou indéterminée émis par les banques et les compagnies d'assurance).

Cette gamme indiciaire semble la plus appropriée pour les objectifs de ce chapitre.

- **La gamme indiciaire *Markit iBoxx European ABS*.** Elle a pour vocation, quant à elle, de mesurer les performances des titres adossés à des actifs libellés en euro, livre sterling et dollar américain provenant d'Europe.

Par ailleurs, le Comité de Normalisation Obligataire (CNO), dans un de ses documents, dresse un panorama des indices européens de performance obligataires :

- *Europe Bond Investment Grade Corporate Bond Index*,
- *Euro Corporate Index* (sous-indices par ratings et secteurs),
- *Barclays Capital Euro Corporate Bond Index*,
- *Barclays Capital Euro Corporate Floating Rate Notes Bond Index*,
- *L'indice Corporate de Barclays*,
- *Barclays Capital Aggregate Bond Index* (anciennement appelé *Lehman Aggregate Bond Index*).

En matière d'indices de CDS, nous pouvons citer les indices *iTraxx* publiés par Markit. Ce sont des indices synthétiques, représentatifs de CDS faisant référence à la qualité de crédit d'entreprises sélectionnées selon des critères définis par Markit. La série *iTraxx Europe « on the run »* offre une exposition à 125 dérivés de crédit

équipondérés dont les sous-jacents sont des sociétés européennes notées « *investment grade* » (émetteurs de « qualité » dont la notation est supérieure à BBB- selon *Standard & Poor's* ou Baa3 selon *Moody's*). La liste des sous-jacents des séries est revue deux fois par an et les nouvelles séries sont émises en mars et en septembre par Markit. La composition de cet indice est revue chaque trimestre pour être toujours exposé à la dernière série « *on the run* » émise par Markit. Ce sont les indices les plus liquides et les plus représentatifs du marché.

Parmi ces indices, celui qui pourrait nous intéresser serait l'*Itraxx Europe Main 5 ans*, lequel est représentatif du marché des dérivés de crédit sur émetteurs privés européens de catégorie *investment grade* et de maturité 5 ans. Les règles de diversification de cet indice permettent d'inclure des entreprises dans les principaux secteurs d'activité. Les indices *iTraxx* ont accru la transparence et la liquidité des marchés des dérivés de crédit, sur lesquels l'indice *Itraxx Europe Main 5 ans* constitue la référence en Europe.

Par ailleurs, dans cette optique, il faut s'assurer que les prix de marché pour ces indices soient accessibles sur Reuters. Indice CDS et indice obligataire doivent être cohérents en ce qu'ils doivent avoir le même panier d'entités de référence et porter sur des maturités équivalentes. Il faut aussi sélectionner des indices CDS et *Corporate Bond* compatibles au sens où les constituants aient des caractéristiques similaires. Par exemple, si l'on choisit l'indice CDS *iTraxx Europe main 5 ans* (la disponibilité du prix dépendra de la liquidité sur le marché), il faudra trouver un indice d'obligation *corporate IG* avec les mêmes émetteurs et les mêmes maturités. L'inconvénient est qu'il est difficile de trouver une certaine homogénéité entre indice CDS et indice obligataire et cela n'est malheureusement pas le cas pour les indices sus-cités.

De plus, il est beaucoup plus simple de prime abord de considérer une ou plusieurs entités de référence représentatives d'un rating ou d'un secteur économique et de récupérer :

- Le prix du CDS de maturité 5 ans,
- Le prix d'une obligation émise par l'entité de référence du CDS et de maturité de 5 ans.

Néanmoins, pour un CDS donné, il est ardu de trouver une obligation de même maturité et émise par la même entité (et quand bien même ce serait le cas, l'existence de bruit ou d'erreurs idiosyncratiques de mesure parmi les données des prix des obligations introduirait une volatilité non négligeable dans la probabilité de défaut). Nous reprenons donc la démarche mise en œuvre par LONGSTAFF et al. [2005], laquelle consiste à utiliser des obligations émises par la même entité mais dont les maturités encadrent l'horizon de 5 ans dudit CDS. La section suivante 4.2.3 détaille l'algorithme.

On s'en tiendra donc à quelques émetteurs dans une classe de rating fixée.

En ce qui concerne l'entité de référence, nous choisirons la [Deutsch Bank AG](#)<sup>35</sup>. Celle-ci est la plus importante banque allemande, fondée en 1870 et basée aujourd'hui à Francfort-sur-le-Main. Banque universelle, elle fut la 8<sup>ième</sup> banque européenne par capitalisation en 2011. Ses filiales sont présentes dans plus de 75 pays, les plus importantes étant à Londres, New York et Singapour. Sa notation est plutôt forte aussi bien à long terme qu'à court terme, comme l'indique le Tableau 31.

Agence de notation	Notation sur le long terme	Perspective	Cotes « intrinsèques »	Notation sur le court terme
Moody's Investors Service	A2	Stable	baa2	P-1
Standard & Poor's	A+	Négative	a-	A-1
Fitch Ratings	A+	Stable	a	F1+

**Tableau 31 : notations de la [Deutsch Bank AG](#).**

La [Deutsch Bank AG](#) est aujourd'hui présente en France sur les activités de banque d'investissement et de financement, d'Asset Management et de gestion de fortune (Private Wealth Management) Elle est considérée comme l'un des acteurs majeurs de la place de Paris sur les marchés de taux, change et actions.

La [Deutsch Bank AG](#) en France est divisée en cinq services principaux :

- **Markets** (Trading et ventes, emprunt d'État, dettes privées, devises, taux, action et dérivés, etc.). La division Markets propose une structure novatrice à double axe d'entrée : Client/Produit, permettant la création de synergies, l'utilisation au mieux des compétences des différents métiers et l'ouverture d'une porte unique à une vaste palette de services.
- **Global Transaction Banking** (Financement des entreprises, émission des dettes privées, opérations de restructuration, transactions en immobilier commercial et industriel, etc.). La division Global Transaction Banking offre à ses clients un large éventail de produits et de services.

<sup>35</sup> « AG » (Aktiengesellschaft) correspond à « Société Anonyme de droit allemand ».

- **Corporate Finance** (Conseil en fusions acquisitions, émissions de dettes et capitaux propres...). La division Corporate Finance offre à ses clients une vaste gamme de produits et de services.
- **Asset Management.** La division Asset Management regroupe les activités de gestion d'actifs du Groupe Deutsche Bank. Elle est présente en France depuis plus de dix ans. Comptant plus de 5000 collaborateurs à travers le monde et 560 milliards d'euros d'encours sous gestion, Deutsche Asset Management fait partie des leaders mondiaux.
- **Private Wealth Management.** La division Private Wealth Management de la Deutsche Bank s'adresse depuis 2006 à des clients privés fortunés.

Nous avons jeté notre dévolu sur les trois obligations à taux fixe ci-dessous émises par la [Deutsche Bank AG](#) :

1. DE000DB5S501
2. DE000DB7URS2
3. DE000DB5S5U8

#### 4.2.2. Description des données

Le Tableau 32 décrit les obligations utilisées dans le processus de calibration, tandis que le Tableau 33 énumère les cotations du 1<sup>er</sup> décembre 2009 au 15 décembre 2011.

Code Isin	Code ticket	Devise d'émission	Date d'émission	Date de maturité	Taux de référence	Coupon (%)
DE000DB5S501	DB	Euro	24-09-2007	24-09-2012	LIBOR	4.875
DE000DB7URS2	DB	Euro	09-06-2009	09-06-2016	EURIBOR	3.75
DE000DB5S5U8	DB	Euro	31/08/2007	31/08/2017	LIBOR	5.125

**Tableau 32 : Obligations émises par la [Deutsche Bank AG](#).**

Date de clôture	Prime du CDS (pb)	DE000DB5S501		DE000DB7URS2		DE000DB5S5U8	
		Bid (%)	Ask (%)	Bid (%)	Ask (%)	Bid (%)	Ask (%)
01/12/2009	85	106.779	107.061	103.799	104.199	108.467	108.814
04/12/2009	79	106.699	106.98	103.696	104.096	108.207	108.553
20/01/2010	82	106.661	106.929	104.143	104.644	107.703	108.042
25/01/2010	82	106.535	106.802	104.217	104.718	107.768	108.108
24/02/2010	99	107.073	107.203	105.01	105.19	108.662	109.001
25/02/2010	101	107.266	107.397	105.38	105.56	109.152	109.493
10/03/2010	80	107.136	107.265	105.26	105.44	109.296	109.636
19/04/2010	99	107.26	107.384	105.87	106.05	110.253	110.593
15/06/2010	150	106.285	106.515	107.53	107.77	109.343	110.005
17/06/2010	141	106.352	106.582	107.37	107.61	109.556	110.219
24/06/2010	140	106.25	106.477	107.4	107.64	109.958	110.623
13/07/2010	118	105.927	106.149	107.99	108.17	110.334	110.998
25/08/2010	110	106.511	106.83	109.84	110.14	114.045	114.726
26/08/2010	111	106.452	106.77	109.78	110.08	113.972	114.652
01/09/2010	110	106.462	106.777	109.99	110.29	114.253	114.934
03/09/2010	136	106.437	106.752	109.27	109.57	113.483	114.159
09/09/2010	103	106.339	106.651	109.29	109.59	113.535	113.804
17/09/2010	85	106.034	106.341	108	108.3	111.738	112.067
21/09/2010	147	106.034	106.34	108.12	108.42	111.849	112.179
14/10/2010	90	106.01	106.306	108.9	109.2	113.407	113.74
15/10/2010	96	105.931	106.227	108.77	109.07	112.851	113.182
19/10/2010	139	105.798	106.093	108.42	108.72	112.554	112.883
20/10/2010	98	105.698	105.991	108.19	108.49	112.279	112.607
04/11/2010	146	105.633	105.92	107.81	108.11	112.169	112.495
01/12/2010	184	105.616	105.893	106.38	106.68	109.935	110.376
14/12/2010	97	105.417	105.689	105.13	105.43	108.165	108.781
05/01/2011	100	105.472	105.735	106.32	106.62	109.172	109.79
21/01/2011	87	104.554	104.806	104.16	104.56	106.907	107.505
17/02/2011	95	104.272	104.513	103.74	104.44	106.665	106.901
08/03/2011	159	103.863	103.94	103.09	103.39	106.062	106.353
24/03/2011	94	103.844	103.92	103.47	103.77	106.626	106.917
18/05/2011	93	103.313	103.38	103.82	104.02	108.144	108.202
26/05/2011	98	103.371	103.478	104.26	104.46	108.346	108.52
23/06/2011	109	103.183	103.246	104.96	105.16	108.379	108.667
16/08/2011	155	103.234	104.586	107.24	107.54	107.2	107.756
09/09/2011	195	103.264	103.473	108.42	108.72	109.497	109.78
14/10/2011	173	102.47	102.641	106.7	107.7	108.124	109.227
02/11/2011	202	102.501	102.662	107.835	108.235	110.737	111.074
07/12/2011	195	NA	NA	NA	NA	NA	NA
15/12/2011	235	NA	NA	NA	NA	NA	NA

**Tableau 33 : cotations des actifs utilisés. « NA » signifie qu'aucune donnée n'est disponible à la date de cotation concernée.**

Quelques remarques :

- Aux dates de cotation du 2 novembre 2011 et du 15 décembre 2011, nous ne disposons pas de données concernant les obligations.
- Pour toutes les dates de cotation, à savoir du 1<sup>er</sup> décembre 2010 au 2 novembre 2011, les trois obligations sont utilisées dans le processus de calibration.

#### 4.2.3. Principe de l'algorithme de calibration

Pour calculer le *spread corporate*, nous procédons de la façon suivante. Pour chaque obligation d'entreprise appartenant à l'intervalle encadrant, nous déterminons le taux actuariel d'une obligation sans risque de même maturité et de même taux coupon. Ensuite, nous retranchons le taux ainsi obtenu du taux de l'obligation concernée pour obtenir le *spread* de cette dernière. Pour obtenir le *spread* de rendement à 5 ans, nous régressons les *spreads* de chacune des obligations par rapport à leurs maturités respectives. La valeur alors obtenue sert d'estimation du *spread* de l'entité étudiée. En outre, nous déduisons les paramètres des formules du prix d'une obligation corporate (144) et de la prime d'un CDS (145). L'algorithme ainsi mis en œuvre est détaillé dans cette section. Enfin, les auteurs appliquent la même procédure pour déterminer la composante défaut des *spreads corporate*.

##### 4.2.3.1 Calcul des paramètres du modèle

Pour commencer, notons :

- $t_1, \dots, t_N$  les dates de cotation des primes du CDS de la Deutsch Bank AG.

- $n_i$  le nombre d'obligations disponibles à la date  $t_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ .
- $O(t_i, j)$  l'obligation  $j$  appartenant à l'intervalle encadrant de la date  $t_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ .
- $T_{i,j}$  la maturité de l'obligation  $O(t_i, j)$ .
- $bid(t_i, j)$  le prix bid de l'obligation  $O(t_i, j)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$ .
- $ask(t_i, j)$  le prix ask de l'obligation  $O(t_i, j)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$ .
- $CB^{(pdc)}(t_i, j)$  le prix pied de coupon de l'obligation  $O(t_i, j)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$ .
- $CB^{(pc)}(t_i, j) = CB(t_i, j)$  le prix plein coupon (en base 100) de l'obligation,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$ .
- $CC(t_i, j)$  le coupon couru de l'obligation  $O(t_i, j)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$ .

Le prix pied de coupon est calculé comme la moyenne du bid et de l'ask observés sur le marché :

$$CB^{(pdc)}(t_i, j) = \frac{bid(t_i, j) + ask(t_i, j)}{2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad (153)$$

Le coupon couru suit la formule :

$$CC(t_i, j) = c\tau = c \frac{J_c}{N_a} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad (154)$$

Le prix plein coupon est la somme du prix pied de coupon et du coupon couru :

$$CB^{(pc)}(t_i, j) = CB^{(pdc)}(t_i, j) + CC(t_i, j) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad (155)$$

Avec :

- $J_c$  le nombre de jours écoulés depuis le détachement du dernier coupon.
- $N_a$  le nombre de jours dans une année.
- $\tau = \frac{J_c}{N_a}$  la fraction d'année qui a couru depuis le détachement du dernier coupon.

Nous suivons la convention selon laquelle  $N_a = 365$  jours.

Notons également,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$  :

- $CB^{(mkt)}(t_i, j)$  le prix plein coupon observé de l'obligation  $O(t_i, j)$ .
- $\lambda_i$  la valeur initiale du processus d'intensité à la date  $t_i$ .
- $\gamma_i$  la valeur initiale du processus de liquidité à la date  $t_i$ .
- $s^{(mkt)}(t_i)$  la valeur observée de la prime du CDS à la date  $t_i$ .
- $s^{(mod)}(t_i, \lambda_i)$  la valeur théorique de la prime du CDS à la date  $t_i$ .
- $CB^{(mod)}(t_i, j, \lambda_i, \gamma_i)$  le prix plein coupon théorique de l'obligation  $O(t_i, j)$ .

L'algorithme cherche, à partir des primes du CDS,  $s^{(mkt)}(t_i)$ , et des prix des obligations,  $CB^{(mkt)}(t_i, j)$ , observés au cours de la période considérée à déterminer, à l'aide d'un algorithme d'évolution différentielle<sup>36</sup>, le quadruplet  $(\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \eta^*)$  qui minimise les systèmes d'équations ci-dessous :

$$s^{(mkt)}(t_i) = s^{(mod)}(t_i, \lambda_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (156)$$

<sup>36</sup> Le lecteur se reportera à la section 5.3 de l'annexe pour plus de détails.

$$\begin{cases} CB^{(mkt)}(t_i, 1) = CB^{(mod)}(t_i, 1, \lambda_i, \gamma_i) \\ \vdots = \vdots \\ CB^{(mkt)}(t_i, j) = CB^{(mod)}(t_i, j, \lambda_i, \gamma_i), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ \vdots = \vdots \\ CB^{(mkt)}(t_i, n_i) = CB^{(mod)}(t_i, n_i, \lambda_i, \gamma_i) \end{cases} \quad (157)$$

L'algorithme de calibration s'exécute donc à deux niveaux :

1. **Le niveau principal.** Celui-ci consiste à déterminer le quadruplet  $(\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \eta^*)$  qui minimise l'erreur d'observation globale sur la période considérée.
2. **Le niveau secondaire.** Celui-ci consiste à calculer les couples  $(\lambda_i^*, \gamma_i^*)$  qui minimise l'erreur d'observation à chaque date  $t_i$  ( $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ).

On pose :

- $\varepsilon_1(t_i, \lambda_i)$  l'erreur quadratique entre la prime du CDS observée et celle renvoyée par le modèle :

$$\varepsilon_1(t_i, \lambda_i) = \sqrt{\left( \frac{s^{(mod)}(t_i, \lambda_i) - s^{(mkt)}(t_i)}{s^{(mkt)}(t_i)} \right)^2} = \left| \frac{s^{(mod)}(t_i, \lambda_i) - s^{(mkt)}(t_i)}{s^{(mkt)}(t_i)} \right|, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (158)$$

- $\varepsilon_2(t_i, \lambda_i, \gamma_i)$  l'erreur entre quadratique entre les prix plein coupon observés des obligations et ceux renvoyés par le modèle :

$$\varepsilon_2(t_i, \lambda_i, \gamma_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_i} \left( \frac{CB^{(mkt)}(t_i, j) - CB^{(mod)}(t_i, j, \lambda_i, \gamma_i)}{CB^{(mkt)}(t_i, j)} \right)^2}, \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad (159)$$

- $\varepsilon_T(\alpha, \beta, \sigma, \eta)$  l'erreur globale sur toute la période observée :

$$\varepsilon_T(\alpha, \beta, \sigma, \eta) = \sum_{i=1}^N (\varepsilon_1(t_i, \lambda_i) + \varepsilon_2(t_i, \lambda_i, \gamma_i)), \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (160)$$

Le lecteur remarquera que nous utilisons des erreurs relatives (*i.e.* en pourcentage) et non des erreurs absolues, puisque l'erreur globale incorpore des données hétérogènes, c'est-à-dire des prix d'obligations (qui sont exprimés en base 100) et des primes de CDS (qui sont exprimées en points de base). C'est pourquoi, dans un souci de cohérence et d'homogénéité, il est nécessaire de standardiser les données traitées.

Nous procédons de la façon suivante pour un quadruplet  $(\alpha, \beta, \sigma, \eta)$  donné. Pour chaque date  $t_i$  :

1. Nous déterminons la valeur initiale du processus d'intensité  $\lambda_i$  qui minimise l'erreur  $\varepsilon_1(t_i, \lambda_i)$  à l'aide des équations (145) et (158) :

$$\lambda^*(t_i) = \arg \underset{\lambda_i \geq 0}{\text{Min}} \{ \varepsilon_1(t_i, \lambda_i) \} \quad (161)$$

2. À partir de la valeur  $\lambda^*(t_i)$  obtenue à l'étape précédente, nous déterminons la valeur initiale du processus d'intensité  $\gamma_i$  qui minimise l'erreur  $\varepsilon_2(t_i, \lambda_i, \gamma_i)$  à l'aide des équations (144) et (159) :

$$\gamma^*(t_i) = \arg \underset{\gamma_i \geq 0}{\text{Min}} \{ \varepsilon_2(t_i, \lambda_i^*, \gamma_i) \} \quad (162)$$

Une fois la boucle précédente achevée, nous calculons l'erreur globale  $\varepsilon_T(\alpha, \beta, \sigma, \eta)$  sur la période observée à l'aide de l'équation (160).

Le quadruplet  $(\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \eta^*)$  à déterminer est ainsi celui qui minimise cette dernière :

$$(\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \eta^*) = \arg \underset{\alpha, \beta, \sigma, \eta \in \mathbb{R}}{\text{Min}} \{ \varepsilon_T(\alpha, \beta, \sigma, \eta) \} \quad (163)$$

La procédure qui vient d'être décrite constitue la fonction à minimiser de l'algorithme d'évolution différentielle.

La Figure 66 récapitule les différentes étapes de la calibration.

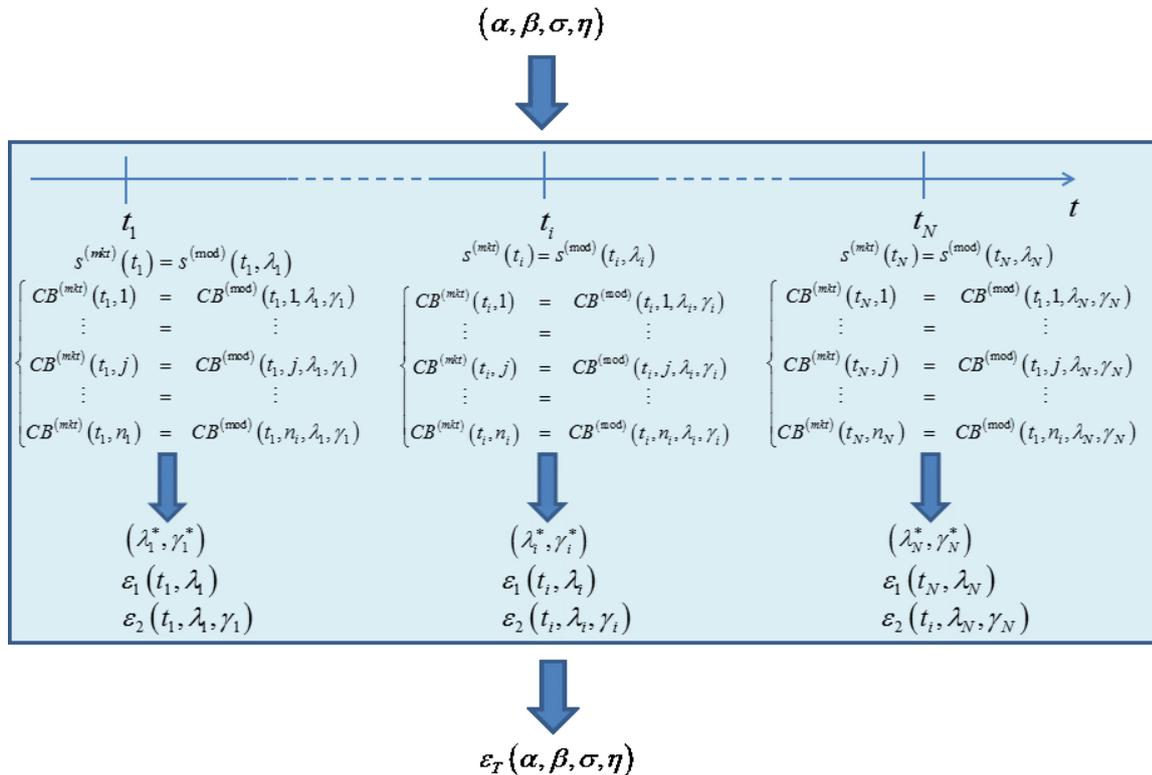


Figure 66 : principe de l'algorithme de calibration.

Enfin, nous imposons aux paramètres les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 0.001 \leq \alpha \leq 0.05 \\ 0.005 \leq \beta \leq 0.91 \\ 0.005 \leq \sigma \leq 0.4 \\ 0.002 \leq \eta \leq 0.4 \end{cases} \quad (164)$$

**Remarque :** à une date d'observation donnée, la maturité résiduelle d'une obligation n'est pas nécessairement entière.

#### 4.2.3.2 Calcul des composantes du spread d'une obligation corporate

Désormais, il reste à déterminer les composantes du spread d'une obligation d'entreprise de maturité 5 ans à chaque date  $t_i$  de la période d'observation. À cet effet, considérons les obligations  $O(t_i, 1), \dots, O(t_i, n_i)$ . Nous procédons en deux étapes :

1. Nous calculons pour chaque obligation  $O(t_i, j)$  :

- a. Le prix de l'obligation sans risque équivalente  $CB^{(riskless)}(t_i, c, \omega, T_{i,j})$  et son rendement actuariel  $r^{(mod)}(t_i, T_{i,j})$ .
  - b. Le prix de l'obligation équivalente mais sans risque de liquidité  $CB^{(def)}(t_i, c, \omega, T_{i,j})$  et son rendement actuariel  $y^{(def)}(t_i, T_{i,j})$ .
  - c. Le prix de l'obligation équivalente mais sans risque de défaut  $CB^{(liq)}(t_i, c, \omega, T_{i,j})$  et son rendement actuariel  $y^{(liq)}(t_i, T_{i,j})$ .
2. Nous en déduisons les caractéristiques d'une obligation de maturité  $T = 5$  ans par régression linéaire :
- a. Nous régressons linéairement les prix  $CB^{(riskless)}(t_i, c, \omega, T_{i,1}), \dots, CB^{(riskless)}(t_i, c, \omega, T_{i,n_i})$  par rapport aux maturités  $T_{i,1}, \dots, T_{i,n_i}$  et nous en tirons le prix de l'obligation équivalente de maturité 5 ans  $CB^{(riskless)}(t_i, c, \omega, T)$ .
  - b. Pareillement, nous régressons linéairement les rendements  $r^{(mod)}(t_i, T_{i,1}), \dots, r^{(mod)}(t_i, T_{i,n_i})$  par rapport aux maturités  $T_{i,1}, \dots, T_{i,n_i}$  et nous en tirons le rendement actuariel de l'obligation équivalent de maturité 5 ans  $r^{(mod)}(t_i, T)$ .
  - c. Nous faisons de même avec les prix  $CB^{(def)}(t_i, c, \omega, T_{i,1}), \dots, CB^{(def)}(t_i, c, \omega, T_{i,n_i})$  que nous régressons linéairement par rapport aux maturités  $T_{i,1}, \dots, T_{i,n_i}$  et nous en tirons le prix de l'obligation équivalente de maturité 5 ans  $CB^{(def)}(t_i, c, \omega, T)$ .
  - d. Nous régressons linéairement les rendements  $y^{(def)}(t_i, T_{i,1}), \dots, y^{(def)}(t_i, T_{i,n_i})$  par rapport aux maturités  $T_{i,1}, \dots, T_{i,n_i}$  et nous en tirons le rendement actuariel de l'obligation équivalent de maturité 5 ans  $y^{(def)}(t_i, T)$ .
  - e. Nous faisons de même avec les prix  $CB^{(liq)}(t_i, c, \omega, T_{i,1}), \dots, CB^{(liq)}(t_i, c, \omega, T_{i,n_i})$  que nous régressons linéairement par rapport aux maturités  $T_{i,1}, \dots, T_{i,n_i}$  et nous en tirons le prix de l'obligation équivalente de maturité 5 ans  $CB^{(liq)}(t_i, c, \omega, T)$ .
  - f. Nous régressons linéairement les rendements  $y^{(liq)}(t_i, T_{i,1}), \dots, y^{(liq)}(t_i, T_{i,n_i})$  par rapport aux maturités  $T_{i,1}, \dots, T_{i,n_i}$  et nous en tirons le rendement actuariel de l'obligation équivalent de maturité 5 ans  $y^{(liq)}(t_i, T)$ .

La Figure 67 et la Figure 68 illustrent le principe de calcul du prix  $P(\tau)$  d'une obligation entre deux détachements de coupon.

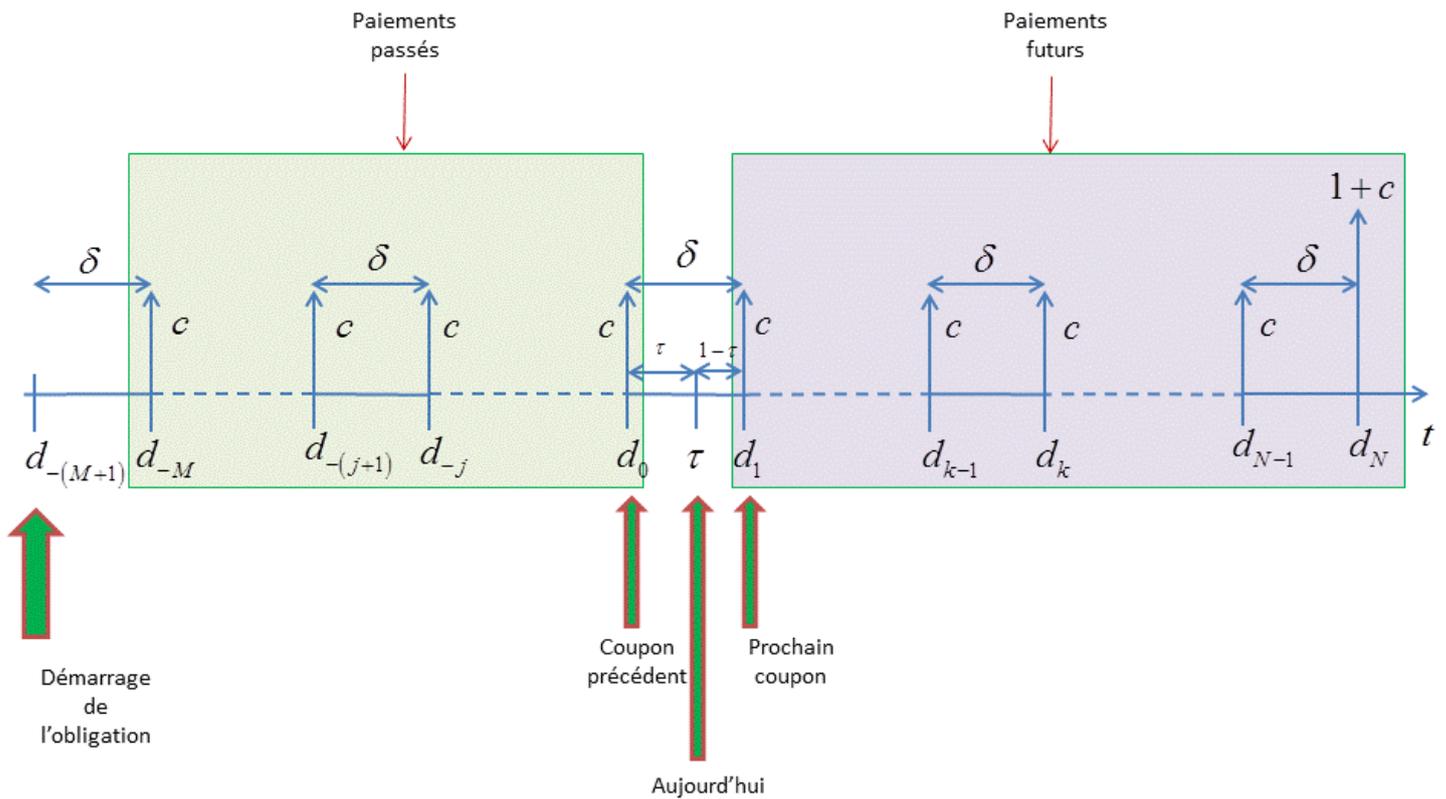


Figure 67 : diagramme des flux d'une obligation de maturité résiduelle de  $d_N - d_0 - \tau$  an(s).

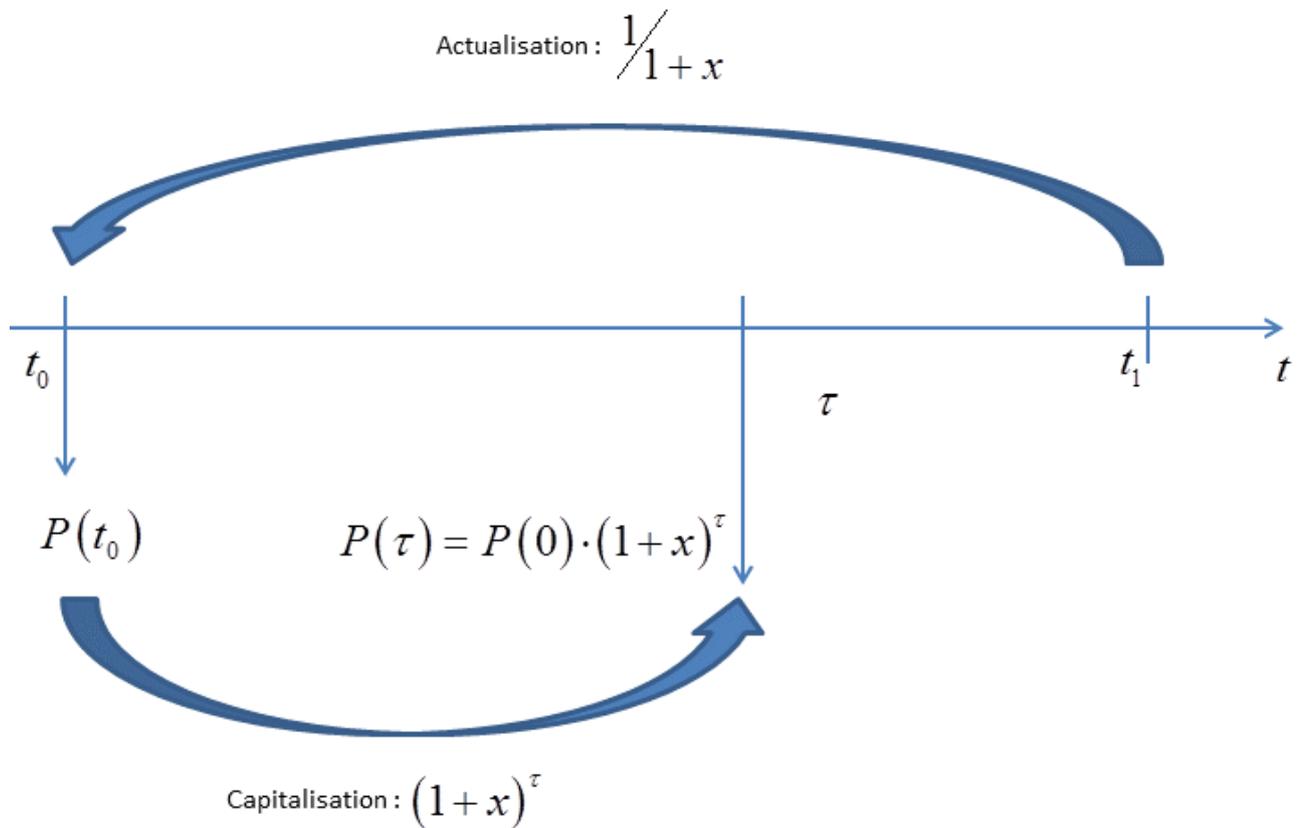


Figure 68 : prix  $P(\tau)$  d'une obligation entre deux détachements de coupon.

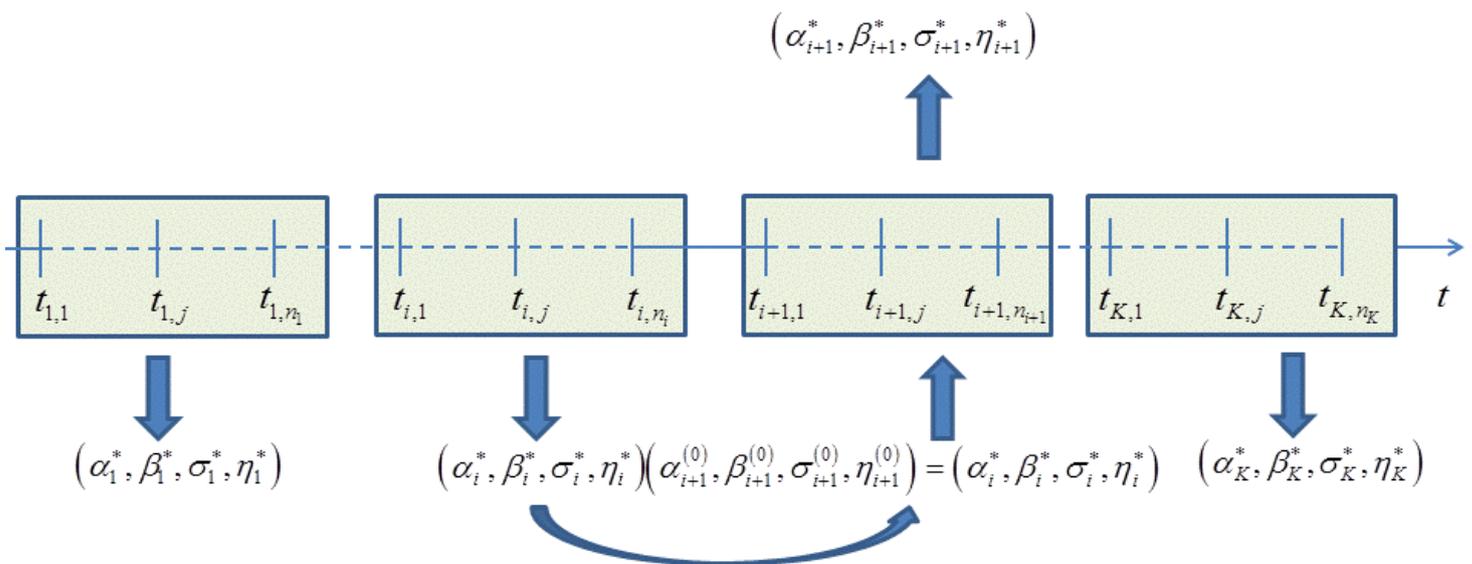
### 4.2.3.3 Méthode alternative

Une méthode alternative serait de découper la période d'observation en  $K$  sous-intervalles  $I_1 = [t_{1,1}, \dots, t_{1,m_1}]$ ,  $\dots$ ,  $I_i = [t_{i,1}, \dots, t_{i,m_i}]$ ,  $\dots$ ,  $I_K = [t_{K,1}, \dots, t_{K,m_K}]$ , éventuellement de longueurs équivalentes. Sur chacun d'entre eux, nous appliquons l'algorithme de calibration décrit à la section 4.2.3.1 pour calculer les paramètres du modèle. Le cas limite serait  $K = N$ , où chaque sous-intervalle  $I_i = \{t_i\}$  serait réduit à un singleton. Lors de la calibration d'un sous-intervalle  $I_{i+1}$ , on utilise en guise de quadruplet initial, le quadruplet trouvé lors de la calibration du sous-intervalle précédent  $I_i : (\alpha_{i+1}^{(0)}, \beta_{i+1}^{(0)}, \sigma_{i+1}^{(0)}, \eta_{i+1}^{(0)}) = (\alpha_i^*, \beta_i^*, \sigma_i^*, \eta_i^*)$ . La Figure 69 illustre cette approche.

Cette approche peut s'avérer intéressante, si les paramètres sont stables au cours du temps. L'avantage de calibrer sur toute la période, c'est d'en capturer l'intégralité de la dynamique. En revanche, ce sera au détriment de la qualité d'ajustement. Par contre, effectuer un calibrage différent sur chacune des sous-périodes améliorera l'ajustement, mais on capturera moins d'informations. En outre, les paramètres peuvent varier d'une sous-période à l'autre.

Quant à la taille d'une de ces sous-périodes, deux approches peuvent être envisagées :

1. Les sous-périodes sont de durée équivalente ; idéalement elles comportent toutes un nombre équivalent de dates d'observation.
2. Les sous-périodes ne sont pas de durée équivalente. Leurs tailles respectives dépendent des hypothèses sur les phénomènes en cours de déroulement sur le marché.



$$I_1 = [t_{1,1}, \dots, t_{1,m_1}] \quad I_i = [t_{i,1}, \dots, t_{i,m_i}] \quad I_{i+1} = [t_{i+1,1}, \dots, t_{i+1,m_{i+1}}] \quad I_K = [t_{K,1}, \dots, t_{K,m_K}]$$

Figure 69 : découpage de la période observée en plusieurs sous-intervalles éventuellement de longueurs équivalentes.

## 4.3. Analyse des résultats

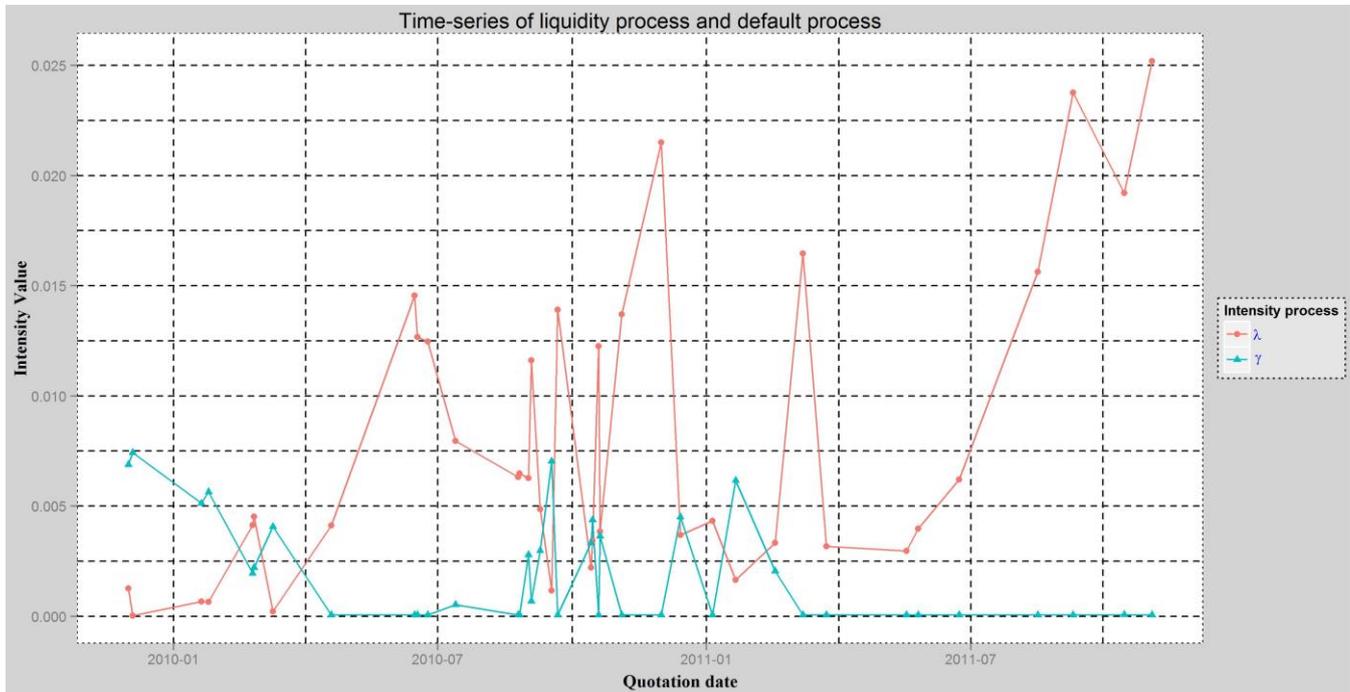
### 4.3.1. Qualité d'ajustement

L'ajustement est quasi-parfait pour le CDS, comme le montrent la Figure 43 et le Tableau 22 de l'annexe. Pour ce qui est des obligations, l'ajustement est satisfaisant, l'erreur ne dépassant pas 6,20%, comme le montrent la Figure 41 et le Tableau 21 de l'annexe. Le Tableau 34 affiche les valeurs des paramètres ainsi trouvées.

$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\eta$
0.006585229	0.005000000	0.007124079	0.040527902

**Tableau 34 : valeurs optimales des paramètres.**

Comme on peut le remarquer sur la Figure 70, le processus d'intensité du défaut tend à être plus élevé (avec un ratio de 100 à plusieurs dates de cotation) et plus « saccadé » que le processus de liquidité. Ces observations seront confirmées à la section 4.3.2. D'autres tableaux et graphes sont disponibles à la section 8.3.1 de l'annexe.



**Figure 70 : évolution des processus d'intensité et de liquidité au cours de la période d'observation.**

#### 4.3.2. Décomposition du rendement actuariel d'une obligation

Comme on peut le voir sur la Figure 72, la courbe des taux sans risque issues des taux swap contre Euribor 6 mois comporte en réalité un *spread* implicite, induisant un taux de liquidité négatif. La composante défaut théorique contient en fait une partie de la composante liquidité réelle.

Notons :

- $r^{(mod)}$  le taux sans risque théorique.
- $r^{(réel)}$  le taux sans risque réel.
- $s^{(impl)}$  le *spread* implicite contenu dans le taux sans risque théorique.
- $y^{(mod)}$  le rendement actuariel total théorique.
- $s$  le *spread* (somme du coût théorique et du coût de défaut) théorique.
- $s_{liq}^{(mod)}$  la composante liquidité théorique.
- $s_{def}^{(mod)}$  la composante défaut théorique.
- $s_{CDS}$  la prime du CDS théorique.
- $b$  le biais entre la composante défaut du rendement actuariel de l'obligation et la prime du CDS.

Le rendement total théorique est la somme du taux sans risque théorique, de la composante défaut théorique et de la composante liquidité théorique :

$$\begin{aligned}
y^{(mod)} &= \underbrace{r^{(réel)} + s^{(impl)}}_{=r^{(mod)}} + s \\
&= r^{(réel)} + s_{def}^{(réel)} + s_{liq}^{(réel)} \\
&= r^{(mod)} + s_{def}^{(mod)} + s_{liq}^{(mod)} \\
&\leq 0
\end{aligned}
\tag{165}$$

La composante défaut réelle peut se formuler ainsi :

$$s_{def}^{(réel)} = s^{(impl)} + \theta \left( s_{def}^{(mod)} - |s_{liq}^{(mod)}| \right), \theta \in [0,1] \tag{166}$$

La composante liquidité réelle, quant à elle, peut se formuler ainsi :

$$s_{liq}^{(réel)} = s^{(impl)} + (1-\theta) \left( s_{def}^{(mod)} - |s_{liq}^{(mod)}| \right), \theta \in [0,1] \tag{167}$$

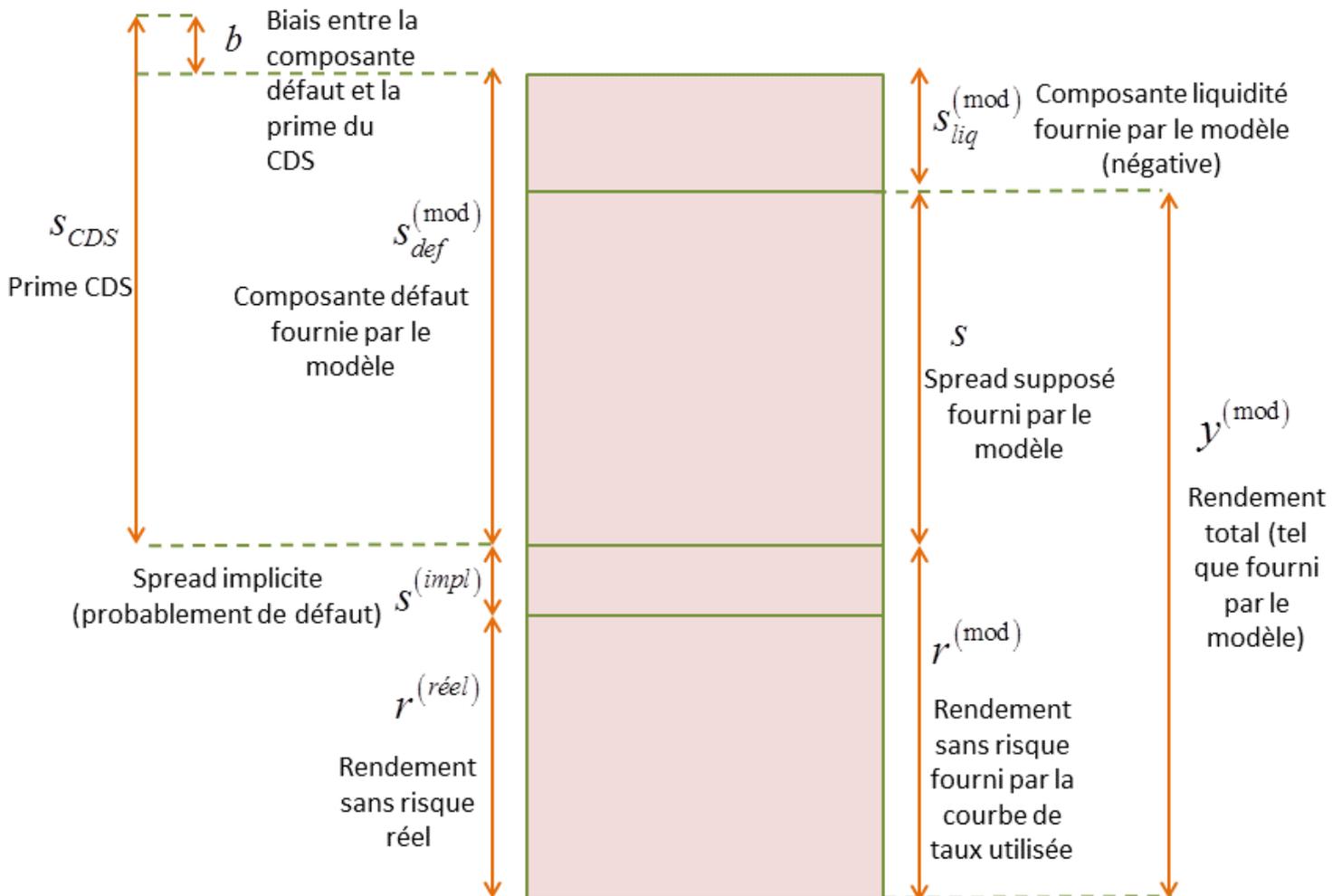
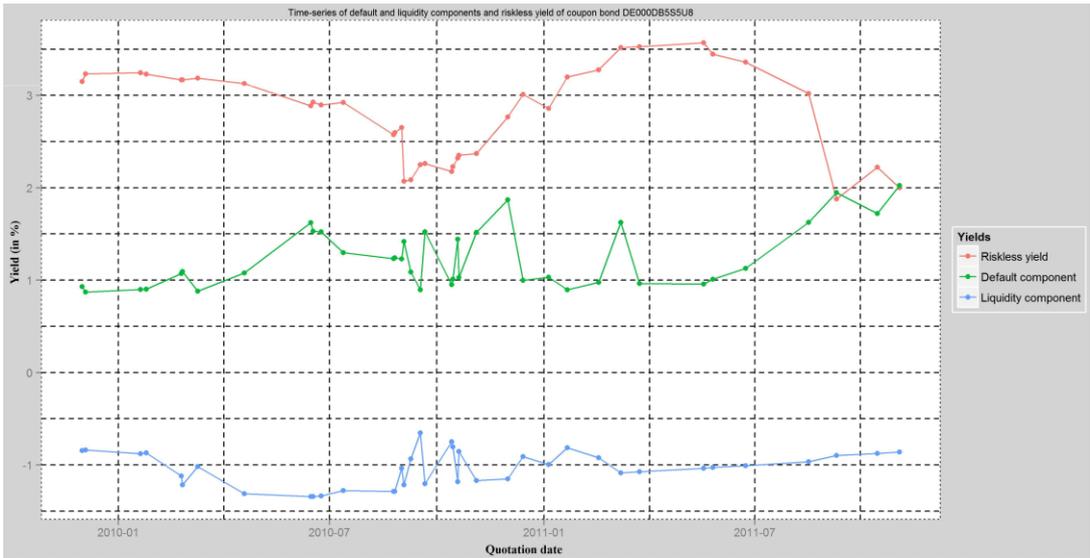
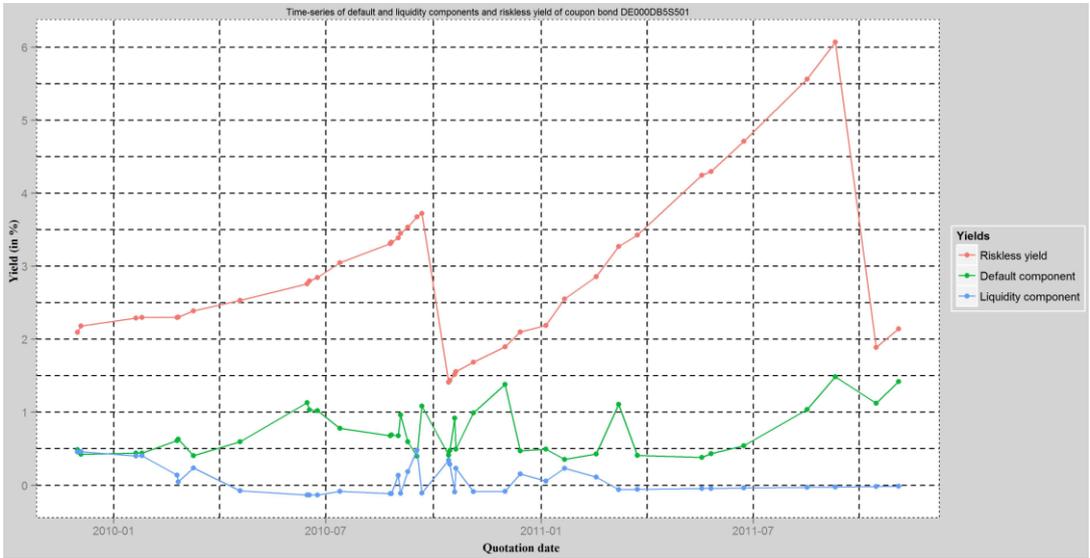


Figure 71 : Décomposition du rendement d'une obligation à coupons tel que fourni par le modèle à partir des données observées.

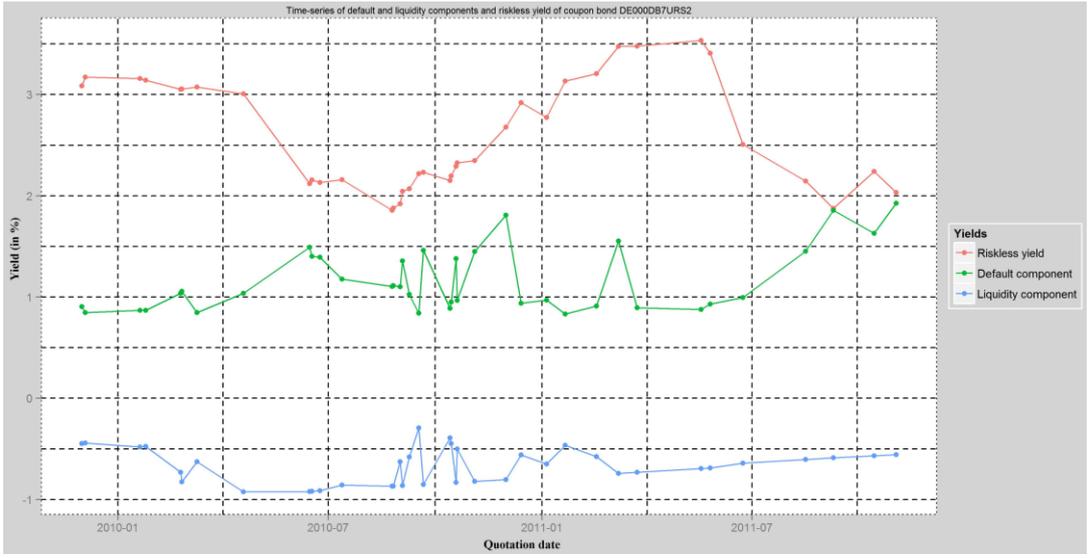
D'autres tableaux et graphes sont disponibles à la section 8.3.2 de l'annexe.



Obligation  
DE000DB55SU8.



Obligation  
DE000DB55S01.



Obligation  
DE000DB7URS2.

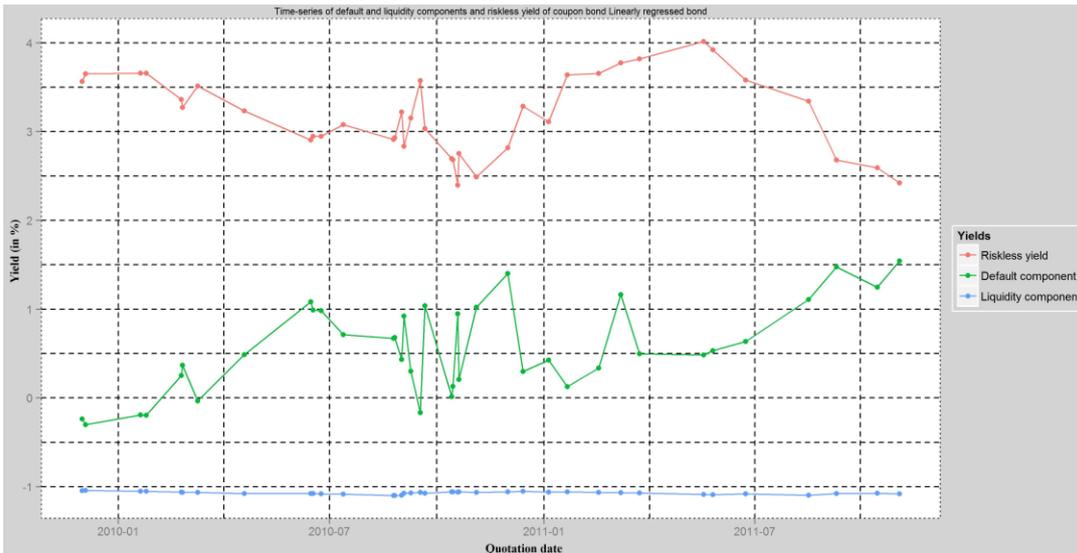


Figure 72 : évolution des différentes composantes du rendement de chacune des obligations.

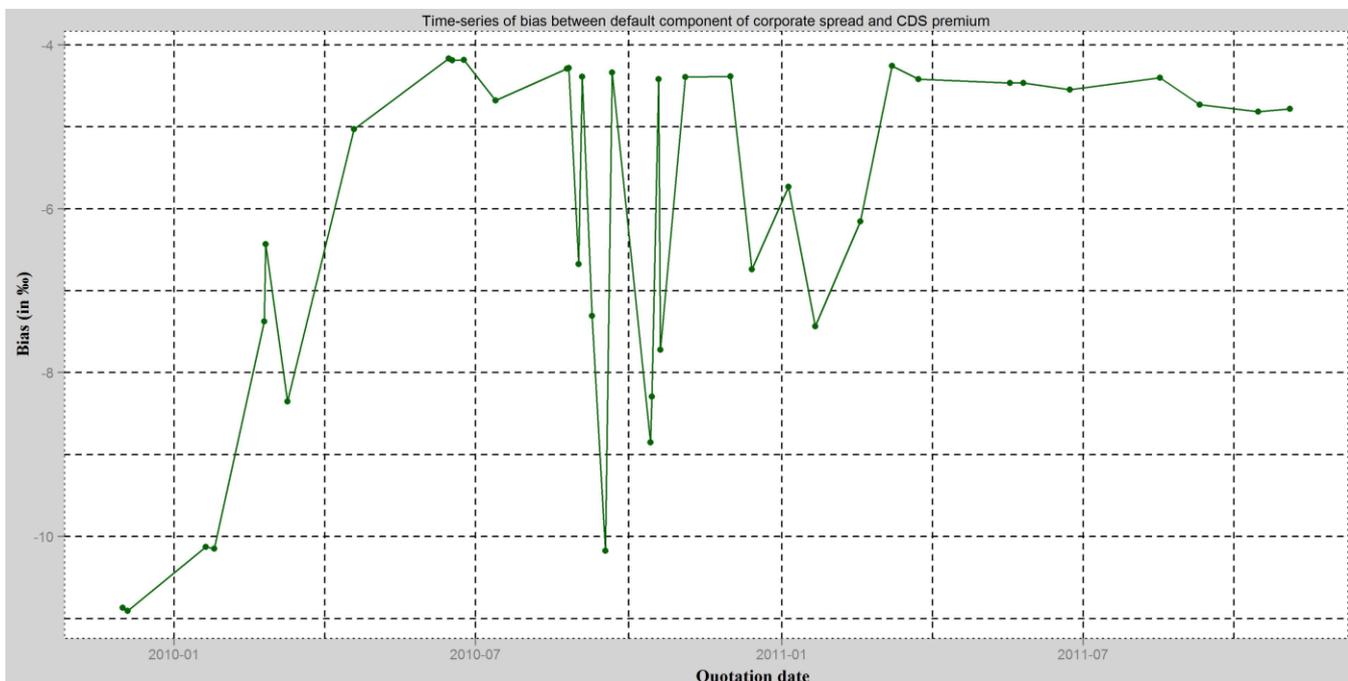


Figure 73 : le biais est négatif sur toute la période observée.

### 4.3.3. Test hors échantillon

Conformément à la section 4.2.3.3, nous divisons la période observée en deux sous-périodes ( $K = 2$ ) :

1. La première comprend les cotations allant du 1<sup>er</sup> décembre 2009 au 21 septembre 2010. Notons cette sous-période  $I_1 = [t_{1,1}, \dots, t_{1,n_1}]$ .
2. La seconde comprend les cotations allant du 14 octobre 2010 au 2 novembre 2011. Notons cette sous-période  $I_2 = [t_{2,1}, \dots, t_{2,n_2}]$ .

Nous calibrons le modèle à partir des données de l'intervalle  $I_1 = [t_{1,1}, \dots, t_{1,n_1}]$  et nous estimons le prix des différents instruments aux dates de l'intervalle  $I_2 = [t_{2,1}, \dots, t_{2,n_2}]$  à l'aide des valeurs des paramètres  $(\alpha_1^*, \beta_1^*, \sigma_1^*, \eta_1^*)$  ainsi trouvés. Nous obtenons alors les valeurs :

- $s^{(\text{mod})}(t_{2,i}, \lambda_{2,i}^*)$  pour les primes du CDS aux différentes dates  $t_{2,i}$  ( $i \in 1, m_2$ ).
- et  $CB^{(\text{mod})}(t_{2,i}, j, \lambda_{2,i}^*, \gamma_{2,i}^*)$  pour les prix des obligations aux dates  $t_{2,i}$  ( $i \in 1, m_2$  et  $j \in \llbracket 1, n_{2,i} \rrbracket$ ).

Nous régressons linéairement ensuite les valeurs observées  $s^{(\text{mkt})}(t_{2,i})$  et  $CB^{(\text{mkt})}(t_{2,i}, j)$  par rapport aux valeurs précédemment calculées  $s^{(\text{mod})}(t_{2,i}, \lambda_{2,i}^*)$  et  $CB^{(\text{mod})}(t_{2,i}, j, \lambda_{2,i}^*, \gamma_{2,i}^*)$  pour  $i \in 1, m_2$  et  $j \in \llbracket 1, n_{2,i} \rrbracket$ . La Figure 74 illustre cette procédure. Nous réalisons plusieurs tests statistiques :

- Test de Newey-West,
- Test sur les coefficients de Newey-West,
- Test de Jarque-Bera,
- Test d'Anova.

La plupart des tableaux et graphes sont consultables à la section 8.3.3 de l'annexe.

D'après le Tableau 36 de l'annexe, le test sur les coefficients de Newey-West est concluant pour le CDS. En outre, d'après le Tableau 33 et le Tableau 35 de l'annexe, la prédictibilité est correcte pour les obligations DE000DB5S501 et DE000DB5S5U8. En revanche, ce n'est guère le cas pour l'obligation DE000DB7URS2 d'après le Tableau 34 de l'annexe. Ces résultats sont tout de même pertinents, notamment dans le cadre d'un GSE, dans la mesure où l'algorithme LMN n'est pas en pratique prédictif. Le Tableau 35 et le Tableau 36 affichent les valeurs des paramètres respectivement sur la 1<sup>ère</sup> période et la 2<sup>nde</sup> période. On ne peut pas considérer que ces derniers sont stables.

En matière d'ajustement, celui-ci est bien entendu meilleur que dans le cas d'une calibration sur la période entière. De plus, pour un instrument donné, si l'on regroupe la courbe obtenue sur la sous-période  $I_1 = [t_{1,1}, \dots, t_{1,n_1}]$  et celle sur la sous-période  $I_2 = [t_{2,1}, \dots, t_{2,n_2}]$ , l'allure de la courbe ainsi obtenue est analogue à celle obtenue dans le cas d'une calibration sur une seule période.

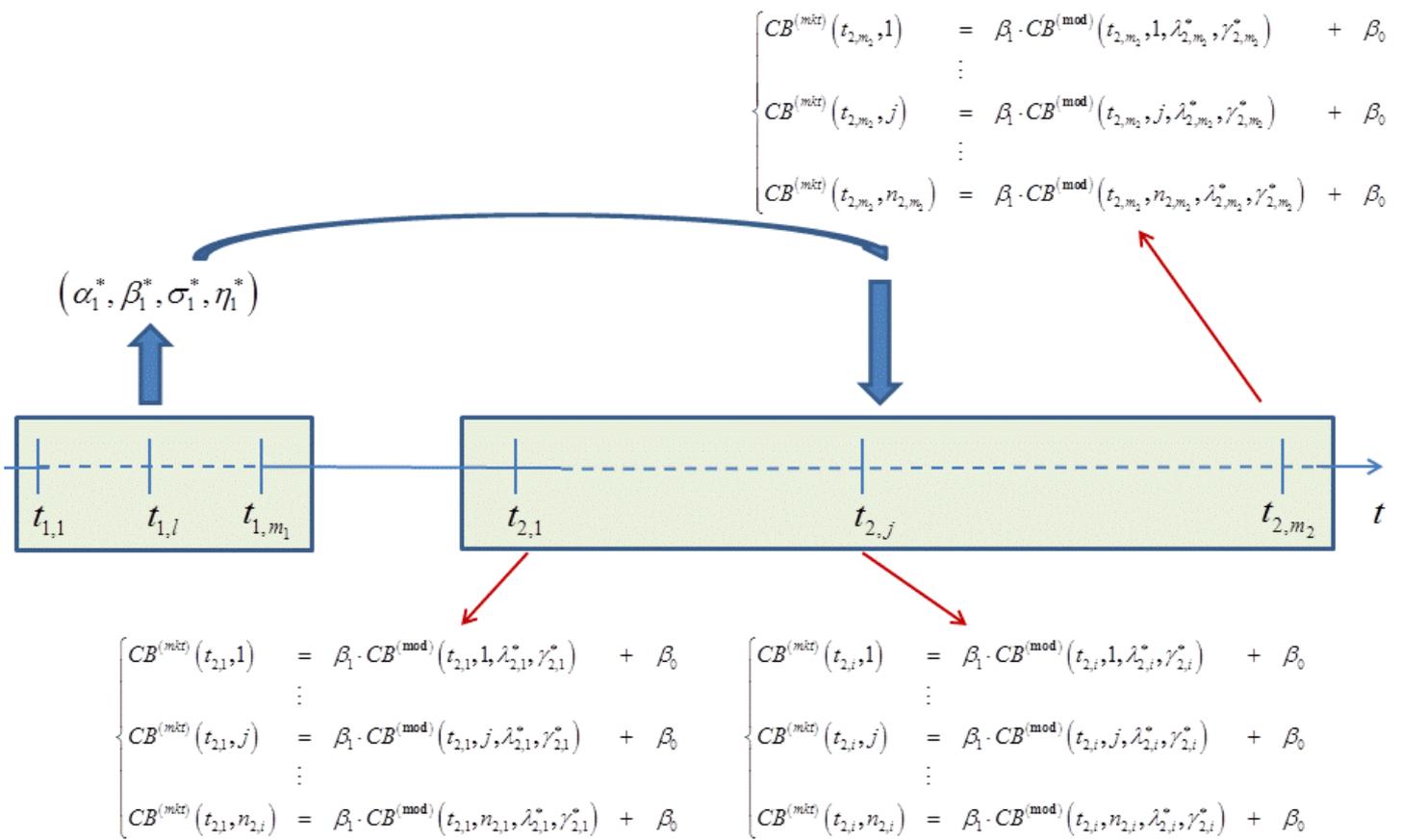


Figure 74 : test des paramètres sur un échantillon n'ayant pas servi à la calibration.

$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\eta$
0.007680684	0.034969190	0.051498691	0.042351664

Tableau 35 : valeurs des paramètres sur la 1<sup>ère</sup> sous-période.

$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\eta$
0.006303657	0.012212810	0.013242982	0.037600166

Tableau 36 : valeurs des paramètres sur la 2<sup>nde</sup> sous-période.

## Pistes d'amélioration possibles

### 1. Construction de la courbe de taux

- Étant donné la nature sans risque des taux EONIA, il serait grandement intéressant de construire la courbe de taux sans risque à partir des *swaps* sur l'EONIA, le principe étant bien entendu de surmonter la faible liquidité de ce type de *swaps*.
- En outre, il serait intéressant d'intégrer les taux court-terme lors de la construction de la courbe de taux sans risque. Une idée serait de pondérer les différents taux utilisés lors de la détermination des paramètres d'interpolation, puisque les parties court terme et long terme de la courbe ne sont pas construites avec le même type de données : la première est construite à partir de taux monétaires (taux Euribor et taux FRA), tandis que la seconde est construite à partir de taux *swap* (sur Euribor 6 mois). La formule (80) deviendrait alors :

$$\xi = (1-w) \cdot \xi_{ST} + w \cdot \xi_{LT}, w \in [0,1] \quad (168)$$

### 2. Dynamique du taux court

- Il pourrait être intéressant de mener le processus de calibration (que ce soit à partir de caps ou de swaptions) à partir d'une courbe de taux sans risque construite à partir des taux *swap* sur EONIA.

### 3. Modèle LMN

- Une piste d'exploration serait de considérer l'existence d'une corrélation entre le risque de défaut et celui de liquidité. En effet, intuitivement, une obligation sera d'autant moins liquide (difficile à acquérir, car d'autant plus convoitée) que l'entreprise qui l'a émise aura une probabilité de défaut faible. De même, l'acquéreur d'une obligation courra un risque de liquidité (difficulté à la vendre sur le marché) si l'entreprise qui a émise cette dernière voit sa probabilité de défaut augmenter (moins d'acheteurs potentiels). Par conséquent, cet acquéreur, s'il se voit contraint à s'en débarrasser, devra la « brader », d'où un manque à gagner évident.
- Dans le cadre de la détermination des propriétés de l'obligation de maturité  $T = 5$  ans, il serait judicieux de réfléchir à une méthode de régression non linéaire.

- Il serait intéressant d'utiliser plusieurs entités différentes avec les CDS et les obligations correspondantes. Considérons les entités  $E_1, \dots, E_m$ . Supposons que les primes respectives des CDS portant sur ces entités soient  $s_1, \dots, s_m$ . Soient les dates d'observation  $t_1, \dots, t_n$ . Notons  $O(t_i, E_k, j)$  l'obligation  $j$  de maturité  $T_{k,j}$ , disponible à la date  $t_i$  et émise par l'entité  $E_k$ .  $n_{i,k}$  est le nombre d'obligations disponibles à la date  $t_i$  et émise par l'entité  $E_k$ . L'idée est de construire une entité unique  $E$  représentative des entités  $E_1, \dots, E_m$  existantes. À une date  $t_i$ , l'ensemble des maturités des obligations émises par elle est constitué par l'ensemble des maturités des obligations émises par toutes les entités prises en compte :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_{i,k}} \{T_{i,k,j}\}. \text{ Le problème consiste alors à définir la prime d'un CDS sur cette entité } E \text{ ainsi que les prix}$$

des obligations émises par cette dernière.

L'approche immédiate serait de prendre :

- Comme prime du CDS la moyenne des primes des entités  $E_1, \dots, E_m$  :  $\hat{s} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_k$ .
- Comme prix d'une obligation de maturité  $M$  la moyenne des prix des obligations de maturité  $M$  disponibles :

$$CB(t_i, M_{i,l}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{i,k}} \sum_{j=1}^{n_{i,k}} 1_{T_{i,k,j}=M_{i,l}} \cdot CB(t_i, E_k, T_{i,k,j}) \quad (169)$$

Avec :

$$a_{i,k} = \sum_{j=1}^{n_{i,k}} 1_{T_{i,k,j}=M_{i,l}} \quad (170)$$

Et :

$$1_{T=M} = \begin{cases} 1 & \text{si } T = M \\ 0 & \text{si } T \neq M \end{cases} \quad (171)$$

Néanmoins, comme évoqué précédemment aux sections 2.3.1 et 2.3.2, en raison des phénomènes de concentration des opérateurs et d'interconnexion des entités, il faut prendre en compte la corrélation entre les primes des CDS et les prix des obligations.

## Conclusion

Pour construire la courbe de taux sans risque, nous nous sommes conformés aux directives du CNO, à savoir l'utilisation des taux swaps sur indice Euribor 6 mois.

En ce qui concerne l'interpolation de Nelson, Siegel et Svensson, son principal intérêt réside dans le fait que les paramètres sont interprétables économiquement. Le premier facteur de courbure a été assimilé à l'UFR. Le contraindre à une valeur constante égale à l'UFR, comme le préconise CEIOPS [2010], génère des taux forward instantanés anormalement élevés au voisinage de la maturité 2,5 ans (pouvant dépasser 11%). Considérer l'UFR comme endogène génère des courbes dont la forme est plus réaliste et qui sont mieux ajustées aux données observées.

En outre, nous avons montré que la méthode de Smith et Wilson, quant à elle, présentait un inconvénient majeur : rien ne contraint la fonction d'actualisation à décroître. Il peut arriver que cette dernière soit croissante localement, ce qui constitue ainsi une violation des contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage. Une des raisons serait que cette méthode ne permet pas un processus de bootstrap ; le taux zéro-coupon ainsi calculé dépend de tous les produits utilisés dans la reconstruction

Néanmoins, sur la période étudiée, une telle incohérence n'a pas été observée : toutes les courbes de prix obtenues sont décroissantes et le taux forward instantané est toujours strictement positif. Les courbes de prix des zéro-coupons présentent toutes un changement de convexité au voisinage de la maturité 34 ans.

Il est préférable de calibrer le modèle de Hull et White à partir de swaptions, les caps, de par leur nature intrinsèquement hétérogène, n'étant guère adaptés. Le calibrage à partir de swaptions résiste à une courbe des taux sans risque inappropriée.

Quant au modèle LMN, il est commode à mettre en œuvre, mais requiert un jeu très important de données. Les résultats montrent l'existence de *spreads* implicites dans la courbe des taux *swaps* sur Euribor 6 mois. Le choix des données en vue de la construction d'une courbe de taux s'avère donc, à l'aune de la conjoncture actuelle, crucial.

On voit donc l'importance du choix des données dans le processus de calibrage : des données inadéquates peuvent donner lieu à des résultats « aberrants ».

Enfin, un générateur de scénarios économiques devra donc utiliser une courbe des taux sans risque construite à l'aide de la méthode de Nelson, Siegel et Svensson avec UFR endogène. Le modèle de taux sous-jacent sera le modèle de Hull et White et devra donc être calibré à partir de swaptions.

## Bibliographie

- BARRIE & HIBBERT [2008] « A framework for estimating and extrapolating the term structure of interest rates », *Exposure Draft*.
- BCE [2009] « Credit Default Swaps and counterpartie », *Banque Centrale Européenne*.
- BLACK F. et KARASINSKI P. [1991] « Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal », *Financial Analysts Journal*, vol. 47, n° 4, 52-59.
- BLANCO R., BRENNAN S. et MARSH I.W. [2004] « An empirical analysis of the dynamic relationship between investment grade bonds and credit default swaps », *Bank of England Working Paper*, n° 211.
- BOLDER D. et STRÉLISKI D. [1999] « Yield Curve Modelling at the Bank of Canada », *Banque du Canada*, n° 84.
- BONNIN F., PLANCHET F. et JUILLARD M. [2011] « Application de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux – Exemple sur les frais financiers d'une dette obligataire complexe », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n° 21.
- BRIGO D. et MERCURIO F. [2007] « Definitions and Notation » in *Interest Rate Models – Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit*, seconde édition, Springer.
- BRIGO D. et MERCURIO F. [2007] « One-factor short-rate models » in *Interest Rate Models – Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit*, seconde édition, Springer.
- CASTRIES H. DE et CLAVERANNE B. [2010] « Les produits dérivés : le point de vue d'un assureur », *Revue de la stabilité financière (Banque de France)*, n° 14.
- CEIOPS [2010] « Solvency II Calibration Paper », *European Commission*.
- CEIOPS [2009] « CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Technical Provisions - Article 86 b - Risk-free interest rate term structure », *European Commission*.
- CGFS [1999] « A review of financial market events in autumn 1998 », *Committee on the Global Financial System*, n° 12.
- CHEN L., LESMOND D.A. et WEI J. [2007] « Corporate Yield Spreads and Bond Liquidity », *Journal of Finance*, vol. 62, n° 1, 119-149.
- CNO [2012] « Détermination d'une structure des taux zéro-coupon issue des taux de swaps », *Comité de normalisation obligataire*.
- COLLIN-DUFRESNE P. et SOLNIK B. [2001] « On the Term Structure of Default Premia in the Swap and Libor Market », vol. 56, n° 3, 1095-1115.
- CONT R., MINCA A. et MOUSSA A. [2004] « Measuring systematic risk in financial networks », 2009. Cribari-Neto F., « Asymptotic Inference Under Heteroskedasticity of Unknown Form », *Computational Statistics & Data Analysis*, n° 45, 215-233.
- DELIANEDIS G. et GESKE R. [2001] « The Components of Corporate Credit Spreads: Default, Recovery, Tax, Jumps, Liquidity, and Market Factors », *Finance, Anderson Graduate School of Management, UC Los Angeles*.
- DICK-NIELSEN J., FELDHÜTTER P. et LANDO D. [2011] « Corporate Bond Liquidity Before and After the Onset of the Subprime Crisis », *Journal of Financial Economics*, vol. 103, n° 3, 471-492.
- DIEBOLD F.X. et LI C. [2006] « Forecasting the term structure of government bond yields », *Journal of Econometrics*, vol. 130, n° 2, 337-364.

- DUFFIE D. [1998] « Defaultable term structure models with fractional recovery of par », *Stanford University, Working paper*.
- DUFFIE D., JUN P. et KENNETH J. S. [1999] « Credit Swap Valuation », *Financial Analysts Journal*, n° 55, 73-87.
- GATFAOUI H. [2002] « Risque de défaut et risque de liquidité : Une étude de deux composantes du “ spread ” de crédit », *La Revue des Sciences de Gestion, Direction et Gestion*, n° 210, 123-134.
- GILLI M., GROË S. et SCHUMANN E. [2011] « Econometric models » in *Numerical Methods and Optimization in Finance*, Academic Press.
- GILLI M., GROË S. et SCHUMANN E. [2010] « Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model », *COMISEF WORKING PAPERS SERIES*, n° 31.
- HAGAN P.S. et WEST G. [2006] « Interpolation Methods for Curve Construction », *Applied Mathematical Finance*, vol. 13, n° 2, 89-129.
- HEATH D., JARROW R. et MORTON A. [1992] « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology », *Econometrica*, vol. 60, n° 1, 77-105.
- HUANG J. et HUANG M. [2002] « How Much of Corporate-Treasury Yield Spread Is Due to Credit Risk? A New Calibration Approach », *Pennsylvania State University, Stanford University*.
- HULL J. [2004] « Les dérivés de taux : les modèles de marché standard » in *Options, futures et autres actifs dérivés*, cinquième édition, Pearson.
- HULL J. [2004] « Les dérivés de taux : les modèles de marché standard » in *Options, futures et autres actifs dérivés*, cinquième édition, Pearson.
- HULL J. et WHITE A. [2012] « LIBOR vs. OIS: The Derivatives Discounting Dilemma », *Working Paper, University of Toronto*.
- HULL J. et WHITE A. [1995] « A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response », *Risk*, n° 5, 97-102.
- HULL J. et WHITE A. [1994] « Branching Out », *Risk*, n° 7, 34-37.
- HULL J. et WHITE A. [1990] « Pricing Interest-Rate Derivative Securities », *The Review of Financial Studies*, n° 3, 573-592.
- INTERNATIONAL ACTUARIAL ASSOCIATION [2009] « Measurement of Liabilities for Insurance Contracts: Current Estimate and Risk Margins ».
- JAKOBSEN S. [2011] « Solvency II yield curves », *EIPOA*.
- LANDO D. [1998] « On Cox processes and credit risky securities », *Review of Derivatives Research*, vol. 2, n° 2-3, 99-120.
- LONDON J. [2005] « Modeling Derivatives in C++ » in , John Wiley & Sons, Inc.
- LONGSTAFF F.A., MITHAL S. et NEIS E. [2005] « Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market », *THE JOURNAL OF FINANCE*, vol. LX, n° 5, 2213-2253.
- MAC CULLOCH J.H. et KOCHIN L.A. [2000] « The inflation premium implicit in the US real and nominal term structures of interest rates », *Ohio State University Economics Dept. Working Paper*, vol. 12.
- MARKOWITZ H. [1952] « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, vol. 7, n° 1, 77-91.
- NELSON C.R. et SIEGEL A.F. [1987] « Parsimonious Modeling of Yield Curves », *Journal of Business*, vol. 60, n° 4, 473-489.

- PORTAIT R. et PONCET P. [2008] « Modélisation des taux et options sur taux » in *Finance de marché-Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques*, Dalloz.
- PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A. et VETTERLING W.T. [2007] *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, troisième édition, Cambridge University Press.
- SEBER G.A.F. et WILD C.J. [2005] *Nonlinear Regression*, WILEY-INTERSCIENCE PAPERBACK SERIES.
- SHEA G.S. [1985] « Interest rate term structure estimation with exponential spline: a note », *Journal of Finance*, vol. 40, 319-325.
- SMITH A. et WILSON T. [2001] « Fitting Yield curves with long Term Constraints », *Research Notes, Bacon and Woodrow*.
- SVENSSON L.E.O. [1994] « Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994 », *IMF Working Paper*, 94-114.
- TANG Y.D. et HONG Y. [2007] « Liquidity and Credit Default Swap Spreads », *American Finance Association*.
- VASICEK O. [1977] « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, vol. 5, n° 2, 177-188.
- WINDCLIFF H. et BOYLE P.P. [2004] « THE 1/n PENSION INVESTMENT PUZZLE », *North American Actuarial Journal*, n° 8(3), 32-45.