

PROMOTION : 2006

Mémoire d'actuariat présenté devant

le Jury du CEA

pour l'obtention du

**Diplôme d'Actuaire du CENTRE d'ÉTUDES
ACTUARIELLES**

Par : Vincent LEPEZ

Sur le sujet

**TRAJECTOIRES EN DÉPENDANCE DES PERSONNES
ÂGÉES : MODÉLISATION, ESTIMATION
ET APPLICATION EN ASSURANCE VIE**

Devant un jury composé de

Liste du jury

Directeur du mémoire

Thomas BEHAR

–

Vincent DAMAS

Arnaud COHEN

Gérard CROSET

Jean-Pierre DIAZ

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

Benoît HUGONIN

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Invité(s)

Florence PICARD

Christian Yann ROBERT

–

CONFIDENTIALITÉ



Table des matières

Introduction	9
Contexte et objectif	9
Modélisation, estimation et principaux résultats	10
Produits d'assurance dépendance adaptés au modèle	15
Limites et perspectives	16
1 La dépendance des personnes âgées	19
1.1 Définition(s) de la dépendance	19
1.1.1 Définition naturaliste	19
1.1.2 La grille de Colvez	20
1.1.3 Indicateur de Katz	21
1.1.4 Grille AGGIR	21
1.1.5 Choix d'utilisation	23
1.2 Panorama de la dépendance en France	24
1.2.1 Populations concernées	24
1.2.2 Assurances de type sociales	24
1.2.3 Perspectives d'évolution	31
1.3 Mieux cerner le risque dépendance	32
1.3.1 La dépendance est-elle un risque assurable ?	32
1.3.2 La dépendance est-elle un risque social ?	33
1.4 Le processus à modéliser	36
1.4.1 Processus de survie en dépendance	36
1.4.2 Produit d'assurance	37
2 Modélisation du risque dépendance	39
2.1 Démarche générale	39
2.1.1 Présentation	39
2.1.2 De l'utilisation des covariables	40
2.2 L'entrée en dépendance	41
2.2.1 Approche par fréquences mesurées	41
2.2.2 Le modèle de la SCOR	42

2.3	Modèles multiétats par tables pénalisées	42
2.3.1	Le modèle de la SCOR	43
2.3.2	Une approche plus récente	43
2.3.3	Intérêts et limites pratiques de ces modèles	44
2.4	Modèles de Markov	45
2.4.1	Définition	45
2.4.2	La propriété de Markov et ses conséquences	45
2.4.3	Liens avec les modèles de survie	47
2.4.4	Deux exemples d'application	49
2.4.5	Intérêts et limites des modèles de Markov	51
2.5	Modèles semi-markoviens	52
2.5.1	Un premier exemple	52
2.5.2	Définitions et propriétés	53
2.5.3	Approche paramétrique	56
2.5.4	approche non-paramétrique	58
2.6	Résumé du choix de modélisation	60
3	Estimation des paramètres du modèle	63
3.1	Les données	63
3.1.1	Les données PSA de la CPRPSNCF	64
3.1.2	L'enquête HID de l'INSEE	64
3.1.3	Les données APA de la DREES	66
3.2	Méthodologie	68
3.2.1	L'entrée en dépendance	68
3.2.2	SNMH et censure	71
3.2.3	Réduction de la dimension modèle de transition	72
3.2.4	Estimation des paramètres	73
3.3	Première approche paramétrique	75
3.3.1	Formalisation du modèle	75
3.3.2	Résultat des estimations	77
3.4	Modélisation non-paramétrique	78
3.4.1	Probabilités instantanées de transition	78
3.4.2	Lois des durées des transitions	80
3.5	Modélisation paramétrique affinée	83
3.5.1	Justification de l'hypothèse de mélange	83
3.5.2	Calage final du modèle	85
3.5.3	Résultats finaux d'estimation	85
3.6	Commentaires de modélisation	86
3.6.1	Vraisemblance et biais des résultats obtenus	86
3.6.2	Limites éventuelles	87

4	Produits d'assurances dépendance	91
4.1	démarche générale	91
4.2	Simulation des trajectoires par la méthode de Monte-Carlo . .	92
4.2.1	Principe	92
4.2.2	Application	93
4.3	Table de mortalité en dépendance	94
4.3.1	Construction de la table	94
4.3.2	Correction par segmentation	94
4.3.3	Correction par pénalisation	95
4.4	Tables de coût de la dépendance	96
4.5	Produits d'assurance collective de type privée	98
4.5.1	Description	98
4.5.2	Économie des contrats	98
4.5.3	Restrictions méthodologiques	100
4.5.4	Premier produit	102
4.5.5	Sensibilité aux paramètres du modèle	103
4.5.6	Second produit	108
4.6	Produit d'assurance de type sociale	110
4.6.1	Description	110
4.6.2	Hypothèses techniques	111
4.6.3	Résultats	112
4.6.4	Analyse de sensibilité	113
4.6.5	Une conclusion...	113
	Annexes	115
	Annexe 1 : taux d'entrée en dépendance	115
	Annexe 2 : tables de mortalité en dépendance	117
	Annexe 3 : tables des coûts	121

Table des figures

3.1	Taux de personnes âgées dépendantes par sexe dans les données APA	67
3.2	Répartition des personnes âgées dépendantes par âge, sexe et GIR dans les données APA	68
3.3	Comparaison des répartitions par sexe entre population française et population dépendante dans les données APA, par tranche d'âge	68
3.4	Comparaison des taux d'entrées SCOR, APA et SNCF (lissage exponentiel)	70
3.5	Taux d'entrée par GIR et par âge dans les données APA	71
3.6	Diagramme des transitions possibles en dépendance	74
3.7	Estimation linéaire et non-paramétrique des probabilités de passage de GIR 4 en GIR 2	79
3.8	Estimations paramétrique Weibull et non-paramétrique de la durée de la transition de GIR 1 vers le décès	80
3.9	Estimations directe par histogrammes des transitions vers le décès	81
3.10	Estimations paramétrique Weibull et mélange de deux Weibulls pour les lois des durées de transition – 1	83
3.11	Estimations paramétrique Weibull et mélange de deux Weibulls pour les lois des durées de transition – 2	84
4.1	Espérances de vie à l'âge d'entrée en dépendance, brute et corrigée	96
4.2	Sensibilité du solde du fonds associé au contrat au taux d'intérêt pour une cohorte de 100 000 assurés	104
4.3	Sensibilité du solde du fonds associé au contrat au taux d'entrée en dépendance (facteur appliqué au taux d'entrée d'équilibre) pour une cohorte de 100 000 assurés	107
4.4	Comparaison des soldes des deux fonds associés aux deux contrats étudiés	110

4.5	Taux d'entrée en dépendance mesuré sur données APA et CPRPSNCF	115
4.6	Ventilation par GIR des taux d'entrée en dépendance, mesurée sur les données APA	116
4.7	Table de mortalité en dépendance brute – 18 premières années	117
4.8	Table de mortalité en dépendance brute – 19 ^{ème} à 36 ^{ème} années	118
4.9	Table de mortalité en dépendance corrigée – 18 premières années	119
4.10	Table de mortalité en dépendance corrigée – 19 ^{ème} à 36 ^{ème} années	120
4.11	Table du coût en GIR 4 – 17 premières années	121
4.12	Table du coût en GIR 4 – 18 ^{ème} à 35 ^{ème} années	122
4.13	Table du coût en GIR 3 – 17 premières années	123
4.14	Table du coût en GIR 3 – 18 ^{ème} à 35 ^{ème} années	124
4.15	Table du coût en GIR 2 – 17 premières années	125
4.16	Table du coût en GIR 2 – 18 ^{ème} à 35 ^{ème} années	126
4.17	Table du coût en GIR 1 – 17 premières années	127
4.18	Table du coût en GIR 1 – 18 ^{ème} à 35 ^{ème} années	128

Introduction

Contexte et objectif

La dépendance des personnes âgées est devenue un réel enjeu de société. L'augmentation continue de l'espérance de vie associée à l'entrée dans le troisième âge de la génération *baby boom* provoque depuis une dizaine d'années une prise de conscience générale quant à l'émergence d'un nouveau risque dans le champ de l'assurance vie.

La dépendance, qui se définit comme l'impossibilité pour une personne d'effectuer certains actes essentiels de la vie quotidienne, se traduit par un besoin de prise en charge visant à compenser la perte d'autonomie. La dépendance, en tant que telle, n'est pas une notion relative à l'âge. On peut être dépendant à tout âge en raison d'un handicap, d'un accident, temporairement ou définitivement. Pour autant, la population la plus concernée par la perte d'autonomie est bien évidemment celle des personnes âgées. La vieillesse érode en effet les corps, parfois les esprits, et la prise en charge de ceux que l'on appelle grabataires ou déments séniles relève de cette nouvelle forme d'assurance.

Pour nos aînés, l'entrée en dépendance est le plus souvent définitive. La dépendance est un processus que l'on peut qualifier de dégénératif dans la mesure où, dans la très grande majorité des cas, l'état de dépendance s'aggrave au cours du temps. Le besoin de réparation du préjudice lié à la perte d'autonomie est alors croissant. L'assurance dépendance, destinée à la couverture de ce risque, peut prendre plusieurs formes : aides à domicile ou aides financières, le plus souvent orientées vers l'aménagement de l'habitat ou la participation aux frais d'hébergement dans des structures spécialisées.

L'objet de ce mémoire est la construction de produits d'assurance viagers visant à couvrir le risque dépendance pour les personnes âgées et plus spécifiquement les plus de 60 ans. Notre point de vue sera celui de l'assureur. Seule la sortie sous forme de rente financière sera envisagée. L'alternative, consistant à proposer à l'assuré un protocole d'aide à domicile, possède en

effet une contrepartie financière qui représente en réalité la garantie fournie par l'assureur. L'enjeu est donc de pouvoir mettre au point un produit dont le niveau de couverture s'adapte aux besoins croissants de l'assuré. Autrement dit, la rente servie à l'assuré devra être croissante avec son niveau de dépendance.

Ce type de garantie existe déjà dans les champs de l'assurance sociale comme ceux de l'assurance privée. Pourtant, il existe un consensus de place concernant la grave sous-estimation des besoins futurs en matière de couverture du risque dépendance, tant en matière de diversité des produits que de sources de financements possibles.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous effectuons d'abord un panorama des diverses définitions socio-médicales et grilles d'évaluation associées à la notion de dépendance. Dans le cadre de ce travail, nous décidons d'utiliser la grille AGGIR, déjà connue en France pour l'octroi de la prestation légale d'Aide Personnalisée d'Autonomie (APA) délivrée par les conseils généraux des départements. Cette grille compte 6 états de dépendance ordonnés allant de 6 (autonome) à 1 (dépendance la plus lourde). Pour faire le lien avec des termes couramment utilisés, les niveaux 4 et 3 sont associés à la dépendance légère ou partielle et les niveaux 2 et 1 à la dépendance lourde ou totale.

Nous continuons ce chapitre par un bref tour d'horizon des produits existants ainsi que des perspectives d'avenir qui font craindre une explosion mal anticipée du risque dépendance. Pour conclure, nous abordons qualitativement le caractère assurable du risque dépendance et la problématique de la création d'un cinquième risque social associé à la perte d'autonomie, ce que nous jugeons indispensable. Cette prise de position nécessite bien entendu une réflexion sur le financement des prestations sociales associées et notamment sur le rôle ambigu qu'aurait à jouer l'employeur dans la couverture de ce risque.

Quels que soient les assureurs et financeurs, une bonne prise en charge de la dépendance repose sur une compréhension fine des processus de survie en dépendance et de leur modélisation. C'est l'objet des deux chapitres suivants.

Modélisation, estimation et principaux résultats

Notre approche consiste à proposer une nouvelle modélisation des trajectoires de survie d'un individu dépendant, dite semi-markovienne. Nous nous baserons sur des données exhaustives issues de la gestion de l'APA sur 4 départements français. Ces données reflètent les trajectoires en dépendance de quelques 52 000 individus sur une durée de 4 années, entre 2002 et 2005. Plus

de 27 000 transitions de GIR y sont observées. Il est important de noter que du point de vue statistique, ces données souffrent d'une censure très lourde, dans la mesure où plus de 70 % des individus observés n'achèvent pas leur trajectoire en dépendance au cours de l'intervalle d'étude. Ce phénomène devra être pris en compte très sérieusement lors de nos estimations à venir.

La connaissance du processus de survie en dépendance est en effet cruciale pour construire des produits d'assurance adaptés. À ce titre, s'agissant d'un risque nouvellement appréhendé par les assureurs, les données statistiques sont peu nombreuses, peu disponibles et souvent difficilement exploitables. Or, en matière d'assurance vie, souvent seule la démarche statistique permet d'évaluer les lois de probabilité sous-jacentes aux risques étudiés en les confrontant aux données observées. N'étant pas dans une situation de jeux de données pléthoriques, le saut qualitatif de modélisation du risque ne pourra être réalisé que par la construction de modèles de plus en plus pertinents et s'ajustant le mieux possible au comportement réel.

C'est pourquoi notre mémoire réserve une large part à la modélisation du risque dépendance puis à l'estimation des paramètres des modèles envisagés. Ce sont, d'ailleurs, sur ces deux composantes de notre travail que nous obtenons les principaux résultats.

Une première étape de la modélisation est la phase particulière de l'entrée en dépendance. Celle-ci est estimée directement et simplement à partir des taux d'entrée mesurés par GIR sur les quatre années d'observation.

Après avoir envisagé le cas des modèles par tables pénalisées de type SCOR, nous abordons le sujet de la modélisation des lois de transition par l'approche markovienne qui a, très naturellement, été envisagée de prime abord dans le cadre des études actuarielles concernant la modélisation du risque dépendance et des trajectoires de survie en dépendance. L'hypothèse fondamentale de cette approche est que l'état futur de l'individu ne dépend que de son état présent, autrement dit, la trajectoire passée de l'individu ne conditionne son état futur que par l'intermédiaire de son état présent. Nous pensons cependant (et allons justifier) que la trajectoire d'un individu en dépendance relève d'un processus plus fin permettant d'évaluer indépendamment à la fois des probabilités de transitions d'un état vers un autre, mais aussi des lois de probabilité des temps de station dans un état donné. Cette souplesse n'est pas accessible dans le contexte markovien, pour lequel probabilités de transitions et lois de maintien sont directement liées. Or, ces dernières lois sont d'un intérêt capital pour l'assureur qui envisage de servir une rente à l'individu dépendant puisque la durée de présence dans un état conditionne directement l'engagement afférent au niveau de risque atteint par l'individu. Elles conditionnent donc également le niveau de tarification

de la prime pure, à niveau de prestation fixée.

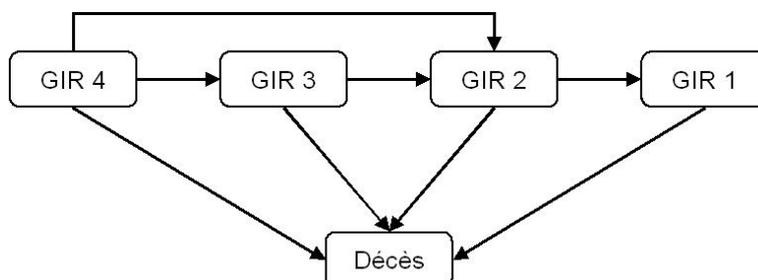
Les modèles semi-markoviens constituent une extension des modèles markoviens, mieux adaptés à nos exigences de modélisation, tout en conservant l'hypothèse fondamentale. On envisage un processus de saut au sein d'un espace d'états, dont les intervalles de temps entre deux sauts définissent les durées de maintien. On adjoint, à chaque instant de saut, une matrice de transition définissant les probabilités instantanées de transition de l'état présent vers le prochain état visité.

L'espace d'états considéré est l'ensemble des états {non dépendant, GIR 4, GIR 3, GIR 2, GIR 1, décès}, que pour des raisons évidentes de commodité nous assimilerons à l'ensemble $E = \{5; 4; 3; 2; 1; 0\}$. L'état 5 représentera donc l'autonomie et l'état 0, le décès.

Pour un âge donné $s > 60$ ans, les probabilités de transition de l'état i vers l'état j sont notées $p_{i,j}(s)$. Notons que ces probabilités n'existent en pratique qu'aux moments aléatoires des sauts. Les durées des transitions d'un état i vers un état j , c'est-à-dire le temps resté en i avant de passer en j , sont données par une variable aléatoire de densité de probabilité $f_{i,j}$.

Au-delà de l'hypothèse markovienne, nous ferons une seconde hypothèse fondamentale en supposant que les densités $f_{i,j}$ des durées de transition ne dépendent pas de l'âge s . Cette hypothèse stipule que, quel que soit l'âge de l'individu dépendant dans un état donné i , seule la probabilité de transition vers un autre état j dépend de son âge. Sa durée de transition vers le prochain état n'en dépend pas, en revanche. Cette hypothèse, essentiellement technique car elle permet la résolution numérique des équations nécessaires à l'estimation des paramètres des modèles, a néanmoins du sens dans un contexte où l'espérance de vie des dépendants est non seulement réduite mais souvent artificiellement portée par l'intensité de présence et d'action de l'environnement proche et /ou médical, ce indépendamment de l'âge.

Dans l'objectif de réduire la volumétrie du modèle, l'étude des données APA nous conduit à n'envisager que certaines transitions au cours de la survie en dépendance, correspondant à celles qui sont les plus observées et significativement plus élevées que les autres. À ce titre, seules les transitions suivantes sont considérées :



On constate en particulier qu'il n'est pas possible de retourner vers un état de dépendance plus légère (processus dégénératif) et que la transition vers le GIR 1 n'est possible qu'au sortir du GIR 2.

Une première tentative de modélisation paramétrique nous conduit à envisager des probabilités de transition entre les états de dépendance de la forme

$$\forall s > 60, i \neq j, \quad p_{i,j}(s) = a_{i,j} \times s + b_{i,j}.$$

Le fait que la fonction $p_{i,j}$ soit linéaire peut sembler contre-intuitif pour le probabiliste en raison, notamment, du fait qu'elle n'est alors pas bornée entre 0 et 1. Les estimations des paramètres a et b rendent cependant l'image de l'intervalle d'étude bel et bien incluse dans l'intervalle $[0; 1]$.

Pour les lois des durées de transition entre états, nous choisirons une forme Weibull, qui est une généralisation de la loi exponentielle classique de la modélisation des lois de survie. Elle s'écrit (sous-entendue la dépendance des paramètres en les états i et j) :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \nu \sigma^\nu x^{\nu-1} \exp(-(\sigma x)^\nu)$$

L'estimation des paramètres de ce modèle par maximum de vraisemblance et compte-tenu de la lourde censure dont souffrent nos données conduit aux valeurs moyennes, en années, des durées de transition observées suivantes (en ordonnée l'état initial et abscisse l'état suivant) :

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0
GIR 4	2, 4	2, 2		7, 1
GIR 3		2, 2		4, 7
GIR 2			3, 4	3, 7
GIR 1				4, 2

Ces valeurs nous ont semblé éloignées de la réalité et des résultats communément admis concernant les espérances de vie des personnes âgées dépendantes et plus particulièrement en ce qui concerne les transitions vers le décès.

Nous avons donc entrepris une démarche non-paramétrique cette fois, tant sur les formes fonctionnelles des probabilités de transition que sur celles des lois de durées des transitions, en considérant des fonctions constantes par morceaux.

Les résultats des estimations non-paramétriques mettent en évidence non seulement la plausibilité de l'hypothèse linéaire des probabilités de transition, mais également le fait que les lois des durées de transition vers le décès présentent un caractère bimodal évident (un mode vers une durée de 6 mois, l'autre vers la durée de 4 ans), incompatible avec le choix d'une forme fonctionnelle de type Weibull.

À ce titre et c'est notre premier résultat, *cette observation invalide le choix d'une approche markovienne pour la modélisation des trajectoires de dépendance des personnes âgées.*

En se tournant du côté des spécialistes de la fiabilité des systèmes industriels, auxquels les problématiques de survie sont plus que familières, le caractère bimodal des transitions vers le décès nous est apparu comme un phénomène classique de mélange. Nous avons donc repris la modélisation semi-markovienne paramétrique en introduisant des lois de transition vers le décès sous la forme de combinaisons convexes de deux lois de Weibull W_1 et W_2 (sous-entendue la dépendance en l'état initial, l'état final étant le décès) :

$$f = \alpha \times W_1 + (1 - \alpha) \times W_2 \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0; 1] \text{ inconnu.}$$

L'interprétation de ce mélange de deux lois étant que les transitions vers le décès correspondent au mélange de deux types de populations :

- l'une dont la transition vers le décès est très rapide et dont la dépendance est très probablement due à une cause pathologique ;
- l'autre dont la transition est bien plus lente et dont la dépendance n'est due qu'au facteur âge.

Notre second résultat est le fruit de l'estimation des paramètres de cette modélisation, qui aboutit, compte-tenu des mélanges Weibull pour les transitions vers le décès, au tableau des durées moyennes de survie en dépendance suivant :

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0
GIR 4	4, 1	2, 2		2, 4
GIR 3		2, 3		3, 2
GIR 2			4, 6	2, 6
GIR 1				3, 1

Ces estimations, beaucoup plus conformes aux constats empiriques des assureurs concernant la durée de survie en dépendance, servent ensuite de

base à la construction de produits d'assurance répondant à nos objectifs initiaux.

Produits d'assurance dépendance adaptés au modèle

Plusieurs produits d'assurance sont envisagés dans cette section. Deux produits d'assurance de type privée par capitalisation (avec ou sans contre-assurance) dans lesquels un niveau fixé de garanties permet de tarifier la prime pure associée et un produit d'assurance de type sociale géré, dans l'esprit, par répartition. Pour ce dernier, un budget annuel constitue la contrainte au niveau de prestation mensuel que le régime est susceptible de proposer à ses affiliés.

La construction de ces produits passe, au préalable, par la mise en place d'outils pratiques, auxquels l'actuaire est habitué et lui permettant d'évaluer mortalité, flux de trésorerie futurs, éventuelles provisions mathématiques, etc. C'est pourquoi nous consacrons une partie importante de ce chapitre à la construction de tables de mortalité en dépendance et de tables de coûts de rentes en dépendance.

Ces tables sont construites à partir des résultats de simulations intensives (de type Monte-Carlo) de trajectoires en dépendance issues du modèle semi-markovien estimé.

Les tables de mortalité proposent, pour chaque cohorte de 10 000 individus dont l'âge d'entrée en dépendance est compris entre 60 et 100 ans, le nombre de survivants pour les âges suivant. L'hypothèse de modélisation stipulant l'indépendance des durées des transitions par rapport à l'âge tend ici à nous faire sous-estimer la mortalité pour les âges les plus élevés et nous proposons donc plusieurs méthodes permettant de corriger la table brute issue du modèle.

Les tables de mortalité des dépendants nous permettent de calculer l'évolution du nombre d'individus dépendants au cours du temps pour une population dont la structure d'âge est donnée. Afin d'évaluer le coût en dépendance de cette population, associé à une prestation donnée, puis la tarification afférente, nous proposons quatre tables présentant le coût de la dépendance pour une rente de 100 euros mensuels servie à un individu devenu dépendant à un âge donné, ventilée selon les 4 états de GIR possibles. Toute garantie dépendance viagère présentant différents montants de rente par état de GIR peut donc être tarifée par combinaison linéaire des 4 tables de coût.

Les tables de mortalité et les tables de coût nous permettent de tarifier les différents produits par capitalisation ci-dessus, d'étudier l'économie des contrats en observant notamment leur sensibilité aux différents paramètres : taux d'intérêt des placements financiers, taux d'entrée en dépendance et taux de mortalité.

Limites et perspectives

Bien qu'essayant d'être aussi complet que possible dans la démarche scientifique visant à proposer une solution fiable du problème de construction d'une rente viagère adaptée au niveau de dépendance d'une personne âgée, nos travaux ne se sont pas étendus à certains champs qui mériteraient une attention certaine. En suivant le plan de ce mémoire, nous livrons nos questions et regrets de n'avoir pas eu le loisir de faire...

Sur le thème de la modélisation en tant que telle, l'hypothèse d'indépendance des lois de durées de transition par rapport à l'âge peut être sujette à caution. Elle est peu intuitive du point de vue naturaliste, même si elle peut être statistiquement valide pour les âges "raisonnables". Pour les grands âges en revanche, le fait que nos estimations surestiment les espérances de vie en dépendance montre que le modèle s'écarte trop de la réalité. Une solution possible, suggérée dans le dernier chapitre, est la segmentation du modèle par classe d'âge. Elle a cependant l'écueil d'être lourde à mettre en place et de générer des discontinuités de modélisation aux frontières entre classes d'âge. Si des techniques de lissage sont toujours envisageables, il serait utile de se pencher sur la possibilité de lever cette hypothèse tout en conservant un modèle homogène et numériquement gérable. Plus généralement, outre l'influence de l'âge sur les paramètres du modèle, se pose la question de la prise en compte de l'influence de covariables comme le sexe, l'habitat (domicile ou établissement) ou encore la pathologie, pour peu que cette donnée soit disponible.

Vient ensuite l'estimation. Nous avons utilisé la méthode du maximum de vraisemblance adaptée aux données censurées. Nous ne sommes cependant pas rentrés dans la problématique de l'estimation des écart-types des estimateurs. Vraisemblablement peu accessibles à l'étude analytique (nous nous y sommes frottés et cela semble un sujet épineux...), la voie de la simulation, pourquoi pas par Bootstrap, pourrait être séduisante. Elle permettrait même d'aller au-delà de la seule évaluation d'écart-types en fournissant une estimation de la loi des estimateurs des paramètres du modèle. Seul problème de taille, les temps de calculs nécessaires à la maximisation de la vraisemblance associée à chacun des très nombreux échantillonnages Bootstrap nécessaires

à la manœuvre. Ils sont aujourd'hui absolument réhivitoires.

En lien avec le thème précédent mais concernant le champ de la simulation intensive donnant lieu aux calculs des tables de mortalité et de coûts, nous n'avons malheureusement pas pris le soin d'archiver correctement les données sources donnant lieu, par moyennisation, aux tables construites. L'évaluation des écart-types aurait fourni un ensemble d'indicateurs intéressants et pertinents de la stabilité du processus générant les données. Il s'agit d'un élément que nous avons du mal à appréhender compte-tenu des résultats en notre possession.

Enfin, pour être parfaitement complète, la modélisation actuarielle des produits d'assurance mériterait assurément d'être enrichie d'une formalisation à la fois technique mais aussi numérique des divers types de provision que l'actuaire est amené à évaluer au cours de la vie des contrats (Provisions pour Risques Croissants, pour Sinistres À Payer, pour Sinistres En Cours). Il est probablement un moyen de construire les expressions analytiques de ces provisions mathématiques associées au modèle semi-markovien que nous avons développé. D'un point de vue plus pratique, les tables construites doivent sans aucun doute pouvoir être utilisées à cette fin.

Chapitre 1

La dépendance des personnes âgées

Avant toute tentative de modélisation, il convient d’appréhender le sujet d’étude du point de vue opérationnel. En effet, une modélisation ne peut être efficace que si elle prend finement en compte les caractéristiques réelles du phénomène auquel elle est dédiée.

Il ne faut pas perdre de vue qu’une modélisation n’est qu’une simplification mathématique d’un sujet et n’est jamais une fin en soi lorsqu’elle est à visée applicative. C’est pourquoi ce chapitre a pour objet l’étude descriptive non mathématisée du phénomène de la dépendance. Cette étude doit nous permettre de jeter les premières bases du type de modélisation de la survie en état de dépendance que nous souhaiterons utiliser, puis le mode de construction d’un produit d’assurance viagère.

1.1 Définition(s) de la dépendance

1.1.1 Définition naturaliste

La dépendance peut se définir comme le besoin d’aide des personnes de 60 ans ou plus pour accomplir certains actes essentiels de la vie quotidienne. Elle est liée non seulement à l’état de santé de l’individu, mais aussi à son environnement matériel. À titre d’exemple, une personne âgée se déplaçant difficilement sera qualifiée de très dépendante si elle habite en étage élevé dans un immeuble sans ascenseur, mais sera considérée plus autonome dans le cas contraire.

Les notions d’actes essentiels et de besoin d’aide laissent une large place à l’interprétation. Elles ne délimitent pas non plus les causes de la survenance

de l'état de dépendance, qui peuvent être de nature extrêmement variées : maladie, handicap, sénilité ou encore démence.

La classification des divers états de dépendance repose donc, en pratique, sur l'appréhension concrète de la perte d'autonomie et de ses conséquences en matière d'aide à apporter à l'individu, plus que sur ses origines fonctionnelles. Dès lors, il n'est pas étonnant que le dénombrement précis de la population des personnes âgées dépendantes soit délicat, même si un certain nombre de mécanismes supposés objectifs ont été mis en place dans la gestion des régimes d'aide à la personne. En outre, la réalité ne se limite pas à deux états de dépendance ou d'autonomie : les degrés de dépendance sont très divers et les situations vécues varient sensiblement en fonction du type d'acte essentiel dont l'accomplissement est compromis (mobilité, hygiène, alimentation, conversation, vie sociale, etc.)

Au niveau international, plusieurs grilles d'évaluation sont utilisées pour mesurer la dépendance, chacune s'appuyant plus ou moins finement sur l'évaluation médico-sociale de la capacité d'un individu à réaliser certaines tâches essentielles de la vie quotidienne. Nous en donnons ici trois, mais de nombreux autres exemples et compléments peuvent être trouvés dans Léger [17].

1.1.2 La grille de Colvez

La grille de Colvez est un indicateur qui mesure essentiellement la perte de mobilité. Elle appréhende la dépendance au sens du besoin d'aide et classe les individus en quatre groupes :

- Niveau 1 - confinées au lit ou en fauteuil ;
- Niveau 2 - non confinées au lit ou au fauteuil mais ayant besoin d'aide pour la toilette et l'habillement ;
- Niveau 3 - ayant besoin d'aide pour sortir de leur domicile ou de l'institution où elles sont hébergées mais n'appartenant pas aux niveaux 1 et / ou 2 ;
- Niveau 4 - autres cas.

Les niveaux 1 et 2 correspondent à une dépendance lourde, le niveau 3 à une dépendance plus modérée.

Cette grille est très opérationnelle mais se limite exclusivement à la dépendance physique. Le niveau de dépendance est établi en fonction des aides dont la personne a besoin. Elle est simple, relativement ancienne et peut être assez aisément reconstituée à partir de données d'enquêtes. Sa faiblesse tient en sa définition même : les niveaux 2, 3 et 4 sont obtenus par la négation des besoins d'aides repérés aux niveaux 1, 2 et 3.

1.1.3 Indicateur de Katz

L'indicateur de Katz définit 8 niveaux de dépendance en évaluant la capacité de la personne à réaliser six activités de la vie quotidienne :

- faire sa toilette ;
- s'habiller ;
- aller aux toilettes et les utiliser ;
- se coucher et quitter son lit, s'asseoir et quitter son siège ;
- contrôler ses selles et ses urines ;
- manger des aliments déjà préparés.

Les huit niveaux de dépendance sont :

- Niveau 1 - dépendant pour aucune des six activités ;
- Niveau 2 - dépendant pour une seule activité ;
- Niveau 3 - dépendant pour deux activités dont la première ;
- Niveau 4 - dépendant pour trois activités dont les 2 premières ;
- Niveau 5 - dépendant pour quatre activités dont les 3 premières ;
- Niveau 6 - dépendant pour cinq activités dont les 4 premières ;
- Niveau 7 - dépendant pour les six activités ;
- Niveau 8 - dépendant pour au moins deux activités sans être classable dans les catégories précédentes.

Bien qu'apparemment régulièrement rencontré dans les études médico-sociales, cet indicateur n'intègre pas non plus les problèmes psychiques pouvant être cause de dépendance. Il est centré sur la capacité d'exécuter seul des activités précises de la vie quotidienne. Bien que beaucoup plus fin que la grille de Colvez, il est moins facile à reconstituer à partir de données d'enquêtes et semble moins utilisé. Par ailleurs et, tant pour des visées de modélisation pure des transitions entre états de dépendance que pour entrevoir la possibilité de créer un produit d'assurance adapté à la classification selon cette grille, son caractère non hiérarchisé est un réel problème.

1.1.4 Grille AGGIR

Selon sa définition officielle, la grille AGGIR (Autonomie Gérontologie Groupe Iso-Ressources) est un “*outil multidimensionnel de mesure de l'autonomie, à travers l'observation des activités qu'effectue seule la personne âgée*”, mis au point par le syndicat national (français) de gérontologie clinique. Il comprend dix variables dites *discriminantes* concernant la possibilité de s'habiller, se repérer dans le temps et l'espace, s'alimenter, se déplacer à l'intérieur et à l'extérieur de son domicile, etc. Pour chacune des dix activités étudiées, on détermine une note A, B, ou C selon que l'individu :

- (A) effectue l'activité seule, totalement, habituellement et correctement ;
- (B) effectue partiellement l'activité, ou non habituellement, ou non correctement ;
- (C) n'effectue pas l'activité, quelle que soit la raison de non-exécution, physique ou mentale.

À partir des réponses obtenues, un calcul de score est réalisé et classe les personnes âgées en six catégories appelées "Groupes Iso-Ressources" (GIR 1 à 6). Les personnes d'un même groupe peuvent avoir des profils d'incapacité sensiblement différents, mais ont besoin d'une même quantité d'aide médico-sociale. Selon les auteurs de la grille AGGIR :

- Le **GIR 1** comprend les personnes confinées au lit ou au fauteuil et ayant perdu leur autonomie mentale, corporelle, locomotrice et sociale, qui nécessitent une présence indispensable et continue d'intervenants¹. ;
- Le **GIR 2** est composé de deux sous-groupes : d'une part, les personnes confinées au lit ou au fauteuil dont les fonctions mentales ne sont pas totalement altérées et qui nécessitent une prise en charge pour la plupart des activités de la vie courante et, d'autre part, celles dont les fonctions mentales sont altérées mais qui ont conservé leurs capacités motrices. Le déplacement à l'intérieur est possible mais la toilette et l'habillage ne sont pas faits ou sont faits partiellement ;
- Le **GIR 3** regroupe les personnes ayant conservé leur autonomie mentale, partiellement leur autonomie locomotrice, mais qui nécessitent quotidiennement et plusieurs fois par jour des aides pour leur autonomie corporelle. Ainsi, la toilette et l'habillage ne sont pas faits ou sont faits partiellement. De plus, l'hygiène de l'élimination nécessite l'aide d'une tierce personne ;
- Le **GIR 4** comprend les personnes qui n'assument pas seules leur transfert mais qui, une fois levées, peuvent se déplacer à l'intérieur du logement. Elles doivent être aidées pour la toilette et l'habillage. La plupart s'alimentent seuls. Ce groupe comprend aussi celles qui n'ont pas de problèmes locomoteurs mais qu'il faut aider pour les activités corporelles et les repas ;
- Le **GIR 5** est composé des personnes qui assurent seules leur déplacement à l'intérieur de leur logement, s'alimentent et s'habillent seules. Elles peuvent nécessiter une aide ponctuelle pour la toilette, la préparation des repas et le ménage ;
- Le **GIR 6** rassemble les personnes qui n'ont pas perdu leur autonomie pour les actes discriminants de la vie quotidienne.

1. Ce groupe est souvent assimilé à la notion médicale de dément grabataire

La grille AGGIR est un outil relativement complet au niveau des activités prises en compte. C'est à ce titre qu'elle est devenue, depuis ces dernières années, une grille de référence au niveau national. En conséquence, l'évaluation des individus est complexe. Elle doit être faite par un personnel médical, elle n'est donc pas facilement utilisable pour des enquêtes de type statistique. En particulier, elle n'est pas reconstituable.

Par ailleurs, la grille AGGIR tient compte des déficiences psychiques. Toutefois, un des reproches qui lui est fait est lié à une mauvaise prise en compte des problèmes de démence, notamment au stade précoce. Ainsi, elle permettrait mal de considérer une personne en début de maladie d'Alzheimer comme dépendante, si elle ne souffre d'aucune déficience physique par ailleurs. Les troubles de la mémoire, les incohérences qui peuvent être les premiers symptômes de la maladie d'Alzheimer peuvent ne conduire qu'à un classement en GIR 5 voire 6. En revanche, la grille AGGIR appréhende assez bien les formes de démence les plus sévères.

1.1.5 Choix d'utilisation

Les trois grilles que nous avons considérées sont assez convergentes, notamment pour les dépendances les plus sévères. Cette convergence est moins vraie pour les dépendances plus légères, comme les personnes classées en GIR 4 dans la grille AGGIR. Parmi ces trois indicateurs, la grille de Colvez et l'indicateur de Katz sont ceux les plus souvent utilisés par les études. La reconstitution de l'indice peut plus facilement se faire *a posteriori*, contrairement à la grille AGGIR dont l'évaluation ne peut être faite que par un personnel médical et qui repose sur un algorithme relativement complexe.

Néanmoins, depuis la Loi du 24 janvier 1997 instaurant la Prestation Spécifique Dépendance (voir ci-après 1.2.2), la grille AGGIR est devenue une référence institutionnelle. Elle s'est imposée comme grille nationale d'évaluation de la dépendance. À ce titre, elle est utilisée pour l'attribution d'aides financières et dans le cadre de la tarification des établissements.

**Dans la suite de notre travail, nous utiliserons la grille AGGIR
comme outil de mesure de la dépendance.**

1.2 Panorama de la dépendance en France

1.2.1 Populations concernées

À compter de 1983, les départements français ont reçu la responsabilité de droit commun de l'aide sociale aux personnes âgées. L'aide sociale traditionnelle, qui vise les personnes les plus démunies, repose sur l'article L. 113-1 du Code de l'Action Sociale et des Familles : *“toute personne âgée de soixante-cinq ans ou plus privée de ressources suffisantes peut bénéficier, soit d'une aide à domicile, soit d'un placement chez des particuliers ou dans un établissement. Les personnes âgées de plus de soixante ans peuvent obtenir les mêmes avantages lorsqu'elles sont reconnues inaptes au travail.”*

Du texte de loi à son application concrète, la réglementation s'est appuyée sur les classifications médico-sociales de façon à construire un système de prise en charge partiel des aides dédiées aux personnes relevant de niveaux de dépendance spécifiques, que nous détaillerons dans la section suivante.

La population cible des produits d'assurance dépendance, qu'ils soient de type social ou privé, est donc la population des plus de 60 ans relevant d'un niveau de dépendance défini réglementairement et évalué par le corps médico-social. En France, l'outil d'évaluation est la grille AGGIR définie en 1.1.4.

Il est aujourd'hui largement connu que cette population est amenée à “exploser”, en doublant d'ici au milieu du XXI^{ème} siècle, rendant évidente la nécessité de prendre à bras le corps la problématique de l'assurance dépendance. Cette augmentation impliquera l'augmentation probable de plus de 50 % du nombre de personnes âgées dépendantes à cet horizon. Il est, à ce titre, utile de consulter les rapports Gisserot [12], Eslous [8] et la présentation de Cornu [6].

1.2.2 Assurances de type sociales

De nos jours, ce sont presque 20 milliards d'euros (soit 1 % du PIB) de fonds publics qui sont consacrés à la dépendance. Ces financements sont partagés entre l'assurance maladie, les départements, la Caisse Nationale pour la Solidarité Autonomie et l'État. Ces dépenses sont à comparer aux 150 milliards d'euros consacrés à l'assurance maladie² et 400 milliards consacrés à l'assurance vieillesse.

2. dont on estime qu'environ 10 à 12 millions sont affectables à la couverture du risque dépendance.

La Prestation Spécifique Dépendance

Au début des années 80, la nécessité de couvrir spécifiquement des situations de dépendance a conduit à utiliser l'Allocation Compensatrice pour Tierce Personne (ACTP) en faveur des personnes âgées, créée en 1975 et initialement destinée aux personnes handicapées. Aucune limite supérieure d'âge n'étant imposée, l'ACTP est devenue l'instrument principal de l'aide sociale aux personnes âgées dépendantes. En 1994, 70 % des allocataires étaient âgés de plus de 60 ans et près de la moitié avaient 75 ans ou plus. L'ACTP manquait donc sa cible et mettait en évidence la nécessité d'envisager une prestation mieux adaptée à la dépendance des personnes âgées.

En 1997, une prestation de prise en charge de la dépendance est créée : la prestation spécifique dépendance (PSD). Financée par le département, elle ne peut être cumulée avec l'allocation compensatrice ou l'aide ménagère légale. L'attribution de la PSD est soumise à trois conditions principales : une condition d'âge (être âgé de plus de 60 ans), un degré de dépendance, évalué au cas par cas par une équipe médico-sociale dépendant du département et une condition de ressources, proche de celle retenue auparavant dans le cadre de l'ACTP (voir 1.2). À la différence de cette dernière, qui est une prestation en espèces, la PSD est une allocation visant au versement de prestations en nature. Son montant est fixé au regard non seulement du degré de dépendance de la personne âgée mais aussi de son environnement (conditions de logement, aides apportées par l'entourage, etc.).

Première prestation destinée à la prise en charge de la dépendance, la PSD a néanmoins fait l'objet de nombreuses critiques : l'accès à cette prestation a été jugé trop restrictif (réservé aux personnes classées en GIR 1 à 3) et le dispositif de recours sur succession a été considéré comme dissuasif. Au 30 septembre 2000, seules 135 000 personnes la percevaient. Insuffisante pour constituer un véritable soutien au maintien en état d'autonomie, elle présentait en outre de fortes disparités selon les départements, tant du point de vue de l'accès à la prestation qu'à son niveau réel de prise en charge des besoins.

L'Allocation Personnalisée d'Autonomie

En réponse aux insuffisances de la PSD, un nouveau dispositif a été mis en place par la loi du 20 juillet 2001 : l'Allocation Personnalisée d'Autonomie (APA). Tout comme la PSD, l'APA est une prestation à caractère social spécifiquement destinée à couvrir les situations de dépendance. Elle est ouverte à toute personne âgée de 60 ans ou plus que l'évaluation d'une équipe médico-sociale a conduit à classer dans les catégories de dépendance de GIR

1 à 4. Le texte permet donc de l'attribuer à des personnes jusque-là exclues de la PSD.

Les tarifs et un barème sont établis au niveau national mais l'attribution de l'aide relève du département. Plus précisément, au niveau départemental la gestion de l'APA est une prérogative du Conseil Général. La condition de ressources et le recours sur succession sont supprimés. Les bénéficiaires sont néanmoins appelés, en fonction de leurs ressources à participer financièrement au plan d'aide spécifique défini au moment de l'attribution. À nouveau comme pour la PSD, la pratique montre des disparités géographiques fortes tant sur les conditions d'accès que sur les prestations incluses aux plans d'aide. Une première réforme de l'APA a eu lieu en 2004, mais celle-ci visait à faire face à l'accroissement plus rapide qu'escompté des besoins en couverture du risque dépendance en rénovant son financement plutôt qu'à mieux harmoniser les pratiques locales. La fin de l'année 2009 pourrait apporter son lot de nouveautés en la matière car une nouvelle réforme de l'APA figure sur le calendrier social.

Il semble cependant qu'il existe un réel manque de coordination nationale et nous pensons que la création d'une cinquième branche "Dépendance" à la Sécurité Sociale pourrait représenter une réponse satisfaisante à ces problèmes. Nous reviendrons sur ce point ci-après en 1.3.2, même si le gouvernement semble pour l'heure défavorable à cette innovation.

En pratique, l'APA est financée par des contributions des régimes de sécurité sociale et par la Caisse Nationale de Solidarité pour l'Autonomie (CNSA). Elle est elle-même financée par une contribution de 0,3% de la masse salariale brute des entreprises est prélevée au titre de la journée de solidarité (le fameux lundi de Pentecôte). Il est de notoriété publique que le financement de l'assurance dépendance publique est insuffisant et qu'au bas mot, il devrait être doublé pour faire face aux besoins futurs (voir l'article de l'ancien ministre des affaires sociales Philippe Bas [2] dans lequel il est proposé de créer une seconde journée de solidarité). Nous verrons cependant plus loin que cela ne nous paraît pas être l'option la plus économiquement fertile (voir en 1.3.2).

Fin 2008, 1,1 millions de personnes sont allocataires de l'APA pour un montant global de prestations versées de l'ordre de 5 milliards d'euros. La prestation moyenne d'environ 500 euros mensuels est loin de représenter le montant nécessaire à la couverture du risque, généralement estimé autour de 1 500 à 2 000 euros.

Au titre des fonds publics, les Caisses de Sécurité Sociale sont aussi amenées à participer financièrement.

L'Action Sociale des Caisses de Sécurité Sociale

Les aides spécifiques de l'Action Sociale, des Caisses de retraite mais surtout de celles d'assurance maladie, sont une aide facultative attribuée aux ressortissants des différents régimes. Elle peuvent prendre essentiellement la forme d'aides à la personne, notamment d'aide ménagère à domicile ou d'aides à l'aménagement du logement.

Peu de règles encadrent le versement de ces prestations. Si leur budget global est fixé réglementairement, les enveloppes et définitions des modes d'attribution qui en découlent relèvent des Conseils d'Administrations des Caisses. Cette multiplicité des actions pose clairement problème quant aux allocations éventuellement floues et inadaptées des divers fonds dont s'occupent les Caisses de Sécurité Sociale, notamment ceux d'action sociale, non spécifiquement dédiés à la couverture du risque dépendance.

Les prestations d'assurance dépendance du régime spécial de la SNCF

A partir de 1850, afin de recruter et de s'attacher du personnel qualifié, les gestionnaires des anciens réseaux de chemin de fer mettent en place des régimes de protection sociale. En 1938, l'Etat nationalise et fusionne ces anciens réseaux en créant la Société Nationale des Chemins de fer Français (SNCF). Depuis cette date les cheminots et leurs familles sont couverts contre l'ensemble des risques sociaux (assurance maladie, maternité, vieillesse, invalidité, décès, accidents du travail, prestations familiales et chômage). L'ensemble des risques est garanti par l'entreprise SNCF, mais ce sont les Caisses de Prévoyance et de Retraite (CPR) qui concourent à la gestion et à la mise en œuvre de cette couverture.

À ce jour, le régime spécial de la SNCF compte 160 000 affiliés actifs. Il est susceptible de verser des prestations maladie à 900 000 bénéficiaires (actifs, pensionnés de droit direct et de droit dérivé et leurs ayant-droits) et gère plus de 300 000 pensions de retraite, pour des budgets annuels de fonctionnement qui s'élèvent respectivement à environ 2 et 5 Milliards d'euros.

Bien que les CPR bénéficiaient, avant 2007, d'une autonomie budgétaire et comptable au sein de la SNCF, elles constituaient un service à part entière de l'entreprise. Les comptes des Caisses étaient consolidés *in fine* à ceux de l'entreprise. La mise en place des nouvelles normes comptables IAS / IFRS au 1er janvier 2007 et l'impossibilité pour l'entreprise de provisionner les engagements sociaux afférents a conduit la SNCF à donner aux CPR leur autonomie juridique (voir le rapport annuel 2007 de la CPRPSNCF pour plus de détail [5]). Depuis le 30 juin 2007, la Caisse de Prévoyance et de Retraite

du Personnel de la SNCF (CPRPSNCF) est donc devenue un organisme de sécurité sociale indépendant, qui remplit les mêmes missions de service public que les anciennes CPR.

En tant que régime plutôt ancien³ et plutôt paternaliste, le régime spécial de la SNCF s'est assez tôt intéressé aux prestations de couverture du risque dépendance.

Le Placement Spécial

En application d'une disposition particulière de son Règlement Intérieur et sous certaines conditions, la Caisse pouvait participer aux frais de séjour de ses ressortissants dans un établissement d'hébergement pour personnes âgées. Cette participation, appelée Placement Spécial (PS) était limitée à une période maximale de 6 mois et non renouvelable.

Plus précisément, la Caisse participait, sur l'avis favorable de son service du contrôle médical, aux frais de placement supportés par ses bénéficiaires, dès lors que :

- l'intéressé avait un besoin permanent d'assistance et de surveillance médicalement constaté ;
- que le placement présentait un caractère durable ;
- que l'établissement était médicalisé ;

La demande de participation devait être obligatoirement déposée avant l'entrée dans l'établissement ou en cas d'urgence dans les quelques jours qui suivent l'admission. La participation de la Caisse au titre du Placement Spécial couvrait exclusivement les frais d'hébergement, pour un montant représentant 80% du tarif légal, soit un montant moyen d'environ 4 000 euros de prestation globale moyenne.

Bien que très basique dans son mode d'attribution, cette prestation est un exemple rare de prise en compte du risque dépendance par un régime de base de protection sociale et constitue probablement, à notre connaissance, une première. Elle présente cependant l'important écueil d'être une aide financière aux charges d'hébergement mais ne favorise en aucun cas le maintien à domicile. Or, il est universellement reconnu que l'enjeu réel de l'aide aux personnes âgées dépendantes est le maintien à domicile. Par ailleurs, cette prestation nécessitait d'importants efforts de gestion et mobilisait, *a minima*,

3. Au moment de la reconstruction du réseau ferré après guerre dans les années 50, la SNCF a compté jusqu'à 450 000 actifs, pour environ le tiers de nos jours. Ces individus, ainsi que leurs ayant-droits forment aujourd'hui le contingent des 300 000 retraités du régime spécial.

l'intervention d'un gestionnaire et d'un médecin conseil pour apprécier le besoin.

Depuis, la CPR a tenté d'améliorer la prise en charge de la dépendance de ses ressortissants en remplaçant progressivement, depuis 2005 le PS par la PSA.

La Prestation Spéciale d'Accompagnement

La Prestation Spéciale d'Accompagnement (PSA) est une prestation spécifique que la CPR a lancé le 1er octobre 2005. Il s'agit d'une prestation en nature (remboursements de dépenses), à caractère médical, non soumise à conditions de ressources, qui intervient en complément de l'allocation personnalisée d'autonomie (APA). Elle a pour finalité de favoriser le maintien à domicile et de contribuer à l'autonomie du bénéficiaire.

Cette prestation est accordée aux affiliés du régime spécial et leurs ayants droit remplissant les conditions suivantes : être âgé de 60 ans et plus, être bénéficiaire de l'APA et situé sur un groupe GIR 1 à 4 et enfin ne pas avoir déjà bénéficié de l'ancienne prestation Placement Spéciale servie par la CPR.

En retour de la demande de PSA, un questionnaire qui recense les besoins et les interventions nécessaires est adressé au demandeur. Ce questionnaire, incluant obligatoirement le plan d'aide APA, doit être complété et signé par son médecin traitant. Après examen par un médecin conseil, la Caisse de Prévoyance indique les prestations et services qui pourront être pris en charge dans le cadre de la PSA. Lorsque les individus éligibles sont déjà placés en établissement, ou que leur placement intervient au cours de la période de service de la prestation, le montant alloué peut servir au financement du placement. En tout état de cause, le montant des différentes participations accordées dans le cadre de la PSA ne peut excéder un total de 4 500 euros par personne, non renouvelable. Depuis le 1er octobre 2005 environ 12 000 cheminots ou ayants-droits ont déjà bénéficié de cette prestation.

Cette prestation a l'objectif affiché de favoriser le maintien à domicile des personnes âgées dépendantes. Pourtant, il est difficile de savoir si elle est moins coûteuse en gestion (la définition précise des frais pris en charge par le droit de tirage de 4 500 euros fait intervenir des médecins conseils mais son adossement à l'APA réduit très fortement la charge du gestionnaire). Pourtant, bien que moderne dans sa conception, cette prestation n'est toujours pas satisfaisante, ce pour au moins quatre raisons :

- le coût de gestion reste encore trop élevé pour une Caisse de Sécurité Sociale dont l'aide à la couverture de la dépendance n'est pas l'objet principal ;

- le fait que cette prestation en nature soit liée au remboursement de factures associées à un plan d’aide rend difficile son positionnement par rapport aux aides sociales que peuvent apporter le département de l’Action Sociale du régime SNCF ;
- le fait que cette prestation est plafonnée induit un effet pervers “d’envie” de consommation immédiate du droit ouvert, alors que le degré de dépendance, donc la charge future pour l’individu ne peut être amenée qu’à croître ;
- enfin, les statistiques récentes montrent qu’encore plus de la moitié des nouveaux dossiers de PSA concerne l’indemnisation d’un placement en établissement, ce qui n’est pas le coeur de cible de la prestation telle qu’elle a été pensée.

Aussi, ces trois réflexions nous amènent à penser que seule une rente viagère adossée à un dispositif de type APA est susceptible d’éviter tous les écueils présentés ci-dessus. De plus, le niveau de la rente devrait impérativement être croissant avec le niveau de dépendance.

Assurances de type privées

Un bref historique et état des lieux des contrats existant en matière d’assurance dépendance individuelle peut être trouvé dans le dossier technique Dépendance d’Optimind [27] et dans la présentation de Cornu [6]. Ils montrent très clairement la “jeunesse” de ce sujet pour les assureurs.

En pratique, les assureurs de type privé⁴ proposent déjà des produits d’assurance, avec sortie sous forme :

- d’un capital constitué, ce qui nous semble peu pertinent au regard des besoins spécifiques durables des personnes âgées dépendantes⁵ ;
- d’une rente viagère⁶, mais non particulièrement adaptée au niveau de dépendance au cours de la fin de vie de l’individu. Au mieux trouve-t-on des rentes dont les niveaux sont calés sur les notions de dépendance partielle ou totale, ce qui manque probablement de finesse vis-à-vis du processus d’évolution au travers des différents niveaux de risque.

4. Par abus de langage nous y incluerons les Institutions de Prévoyance et les Mutuelles qui peuvent être amenées à proposer de telles prestations.

5. sauf si la couverture ne porte que sur les premiers frais d’adaptation de l’environnement de vie à la situation de dépendance, ou que ce capital est servi en cas de dépendance légère et vise à se commuer en rente s’il y a passage en dépendance lourde. Certains contrats modernes sont ainsi construits et fournissent probablement une réponse assez satisfaisante à la couverture du risque.

6. Éventuellement servie tout ou partie sous forme de prestations en nature d’aide au maintien à domicile, le plus souvent en complément de l’APA.

Le cas de la rente viagère modulable en fonction du degré de dépendance est le plus intéressant car il est en adéquation avec la notion de risque long dans laquelle on peut classer la dépendance. Cependant, un rapide tour d'horizon actuel du marché des produits dépendance proposés par les assureurs montre qu'il n'existe pas de consensus de place sur la définition de la dépendance et de ses divers degrés. Par ailleurs, il n'existe aucune table réglementaire permettant de faire tant de l'estimation que du calcul certifiable de provisionnement ou de tarif. Ces écueils devront être rapidement écartés si l'on veut rendre le marché de l'assurance dépendance plus mature.

Quels que soient leurs nature, le nombre de produits disponibles sur le marché est en croissance rapide, mais reste encore assez embryonnaire : quelques unités en 2006 pour une cinquantaine en 2008. Le nombre de personnes couvertes est de 3 millions dont les deux tiers relèvent du champ des assureurs. Le nombre d'assureurs sur le marché tend à stagner mais un nombre croissant de mutuelles et Institutions de Prévoyance commencent à proposer des produits. Ils constitueront un relai de croissance nécessaire au développement du marché de l'assurance dépendance.

A ce jour, l'ordre de grandeur des prestations annuellement versées est de 100 millions d'euros pour 4 fois plus de cotisations encaissées et un encours de 2,5 milliards d'euros.

1.2.3 Perspectives d'évolution

En juin 2007, 1 048 000 personnes âgées dépendantes étaient bénéficiaires de l'APA. Cela représente 7,8% des 13,4 millions de personnes âgées de plus de 60 ans potentiellement concernées (estimations INSEE au 1er janvier 2007). Rappelons également que l'allocation personnalisée d'autonomie (APA), entrée en vigueur le 1er janvier 2002, s'adresse aux personnes âgées de 60 ans ou plus dont le niveau de dépendance est évalué en GIR 1 à 4. Mais ce nombre de bénéficiaires APA ne peut pas être considéré comme le nombre réel de personnes dépendantes. En effet, non seulement l'attribution de l'aide repose sur la grille AGGIR, dont nous avons soulevé les imperfections mais au delà, elle repose sur une démarche volontaire des allocataires ou de leur famille. Or ces démarches, pour être effectuées, supposent une bonne information (ce qui doit être vrai pour les personnes placées en établissement, mais nettement moins clair pour les personnes dépendantes à domicile) et que soit fait l'effort de formuler la demande, donc qu'au moins un tiers puisse s'en porter responsable.

Depuis le début des études concernant le phénomène de la dépendance, il s'avère que le risque est largement sous-estimé. Probabilités d'occurrence,

champs des populations concernées, durées de survie en dépendance, tous les paramètres classiques d'évaluation du risque ont été sans cesse sous-évalués. Il suffit pour cela de se baser sur quelques historiques de publications et de comparer les estimations d'alors aux chiffres effectivement mesurés. Voir Kerjosse [16] puis Espagnol [10] pour les constats à date (2003 et 2006), Loones [20] et Gisserot [12] pour les projections notamment.

Suivant par exemple le dernier rapport Gisserot [12], dans une vingtaine d'années, la génération du *baby boom* approchera des 80 ans et, nul doute que le nombre de personnes dépendantes va encore croître rapidement, de l'ordre de 50 %, les conséquences logistiques et financières avec. Il est donc indispensable de se pencher extrêmement sérieusement sur les statistiques récentes de la dépendance, d'y consacrer les efforts de modélisation nécessaires et de tenter d'apporter une réponse satisfaisante et robuste à cette problématique.

1.3 Mieux cerner le risque dépendance

1.3.1 La dépendance est-elle un risque assurable ?

La dépendance est un risque auquel tout un chacun est exposé, ce d'autant plus que l'espérance de vie augmente et que la population vieillit.

Nous estimons que dans la mesure où :

- la survenance du risque est aléatoire en termes d'occurrence, de date d'occurrence et de durée ;
- la réparation des conséquences de ce risque tient en l'octroi de prestations ayant un coût identifiable ou probabilisable (aide à domicile ou aide financière pour permettant le placement en établissements spécialisé) ;
- ce risque est extrêmement étendu quant à la population potentiellement touchée, à savoir 5 à 25 % de la population (suivant les définitions et seuils que l'on se fixe), ce qui permet d'envisager sereinement un processus de mutualisation du risque sur un "portefeuille" d'assurés ;

alors ce risque peut être assuré, sur la base d'une modélisation stochastique.

L'objet d'un contrat d'assurance adapté sera de participer à la couverture des conséquences financières de la dépendance, en s'appuyant sur une haute mutualisation du risque. Cependant, la construction de produits d'assurance correspondants présente de sérieuses difficultés. D'abord, il est nécessaire de pouvoir estimer le nombre de bénéficiaires dans le futur pour pouvoir ensuite prévoir les dépenses de prestations associées et calculer les cotisations adaptées.

Si l'effectif des personnes exposées au risque dépendance est relativement facile à calculer (ce ne sont ni plus ni moins que les personnes âgées... il suffit pour cela d'appliquer les techniques standards de prévision en utilisant les tables de mortalité), l'estimation du nombre de personnes réellement dépendantes est bien plus ardue. En effet, le risque dépendance ne fait l'objet d'études sérieuses qu'à partir des années 80 et il existe finalement assez peu de statistiques publiées suffisamment fines sur le sujet. Les estimations existantes prévoyaient près d'un million de personnes dépendantes en 2025 dans le scénario central (voir Kerjosse [16], Duée [7] et le numéro de la Revue des Affaires Sociales consacrée au sujet en 2003 [32] par exemple). Mais, à fin 2006, déjà plus d'un million de personnes bénéficiaient de l'APA et, comme nous l'avons déjà souligné, le nombre réel de personnes âgées dépendantes (déclarées ou non) est probablement encore plus élevé.

Le risque dépendance est complexe à formaliser, en raison même des problèmes de précision dans sa définition. De plus, le manque de données statistiques présente une réelle difficulté pour l'estimation des probabilités régissant l'évolution de la dépendance. La connaissance des probabilités d'entrée en dépendance, d'évolution et de décès est pourtant indispensable pour pouvoir calculer primes et prestations. Il est donc nécessaire de modéliser l'évolution du nombre des personnes dépendantes (ainsi que leurs degrés de dépendance) au cours du temps le plus précisément possible en se basant sur les données statistiques accessibles. Cette modélisation nous permettra ensuite de tarifier et étudier différents produits d'assurance dépendance.

1.3.2 La dépendance est-elle un risque social ?

Nous terminons ce chapitre par une réflexion personnelle sur le caractère social du risque dépendance. Le titre sous forme de question de cette section a, de notre point de vue, une réponse évidente. La dépendance est évidemment un risque social et doit-être envisagé comme tel par la Sécurité Sociale. C'est ce que nous allons tenter de justifier.

La population à risque est, pour ainsi dire, la population entière. Les conséquences financières d'une entrée en dépendance sont très importantes et peuvent englober la totalité des revenus de la personne touchée, voire plus encore et ainsi reposer sur les familles (le plus souvent les descendants). Ainsi, le risque dépendance est susceptible d'affecter les individus dans leur dignité sociale et peut très clairement engendrer la marginalisation.

Par ailleurs, la dépendance des personnes âgées est une conséquence de l'allongement de l'espérance de vie, elle-même conséquence de l'amélioration des conditions de vie, elle-même sans aucun doute conséquence de la qualité

de la couverture sociale existante. En grossissant le trait, la problématique de la dépendance des personnes peut s'en voir comme un effet pervers. La Sécurité Sociale et par devers elle, la Nation, se doivent donc d'assumer la responsabilité d'un socle de prise en charge de ce nouveau risque permettant aux individus touchés le maintien *a minima* de leur dignité sociale.

La question d'inscrire ou non la dépendance comme cinquième branche de la Sécurité Sociale⁷ est donc légitime et sa réponse est, de notre point de vue, naturellement oui. La dimension numérique autant que financière de ce risque légitime sa mutualisation au plus haut degré, c'est-à-dire celle du pays entier.

En ce qui concerne son financement, la contribution de 0,3 % de la masse salariale des entreprises ressemble déjà à s'y méprendre à une cotisation de type sociale. Pourtant, l'assiette salariale n'est clairement pas aussi pertinente que pourrait l'être l'assiette qui sert de base à la CSG pour l'assurance maladie notamment. En effet, une assiette salariale laisse imaginer un processus d'acquisition de droits au cours de la carrière, comme pour la retraite notamment. Or, le risque dépendance ne peut être couvert par un processus d'acquisition de droits du fait même du caractère aléatoire de son occurrence. Qui plus est, la participation de l'employeur peut être sujette à caution puisqu'elle servirait à la couverture d'un risque dont l'occurrence ne se situe, en moyenne, que bien après la cessation d'activité... Seules la fonction publique, les très grandes entreprises publiques ou parapubliques pour lesquelles existent des statuts dérogatoires au droit commun⁸ et qui sont donc impliquées dans la protection sociale de leurs retraités peuvent voir un intérêt à couvrir leurs ressortissants. Pour les autres entreprises, l'existence d'une convention collective de branche portant un volet social pourrait légitimer leur intervention financière. Pour les sociétés de taille plus modeste ou n'adhérant pas à un tel dispositif conventionnel, l'intervention financière de l'employeur est une question ouverte. Le poids des cotisations sociales employeur est cependant déjà élevé en France et les syndicats patronaux sont extrêmement rétifs à leur augmentation.

Pour résumer, il nous semble que la couverture du risque dépendance ne peut être envisagée comme une contrepartie au travail mais comme un impondérable⁹ et, dès lors, son financement doit être basé sur l'assiette la plus globale possible. S'il n'est pas envisageable que les contributions patronales

7. En complément des assurances Maladie/Maternité/Invalidité, Retraite, Famille et enfin Chômage.

8. Et pour lesquels les retraités sont des "actifs en cessation d'activité".

9. Comme l'assurance maladie, avec la différence notable cependant que la dépendance est un phénomène de long terme plus proche de l'assurance retraite en termes de gestion.

voient leur montant augmenter, la cotisation devra être sur une base individuelle, comme l'est celle de la CSG ouvrière. Étant donné cependant le besoin de financement associé à ce risque, nous pensons, même si ce point de vue reste discutable, qu'une contribution employeur, statutaire ou de branche, est nécessaire.

Cette mutualisation est d'autant plus importante que le nombre d'actifs pour un retraité tend à décroître, d'environ 2,2 aujourd'hui à 1,4 à horizon 2050. Il nous paraît donc indispensable de créer dès à présent un système hautement mutualisé dont les cotisations seront fixées en prenant en compte le risque actuariel de dépendance, c'est à dire en anticipant les probables manques futurs de financement liés à l'explosion du nombre de nos seniors. Autrement dit, il s'agit de construire un système par répartition respectant une certaine neutralité actuarielle, donc, compte-tenu du contexte de croissance de l'effectif de personnes âgées, un système susceptible non seulement de financer les besoins actuels mais aussi de constituer des réserves pour le futur.

Le caractère long terme du risque dépendance pourrait pourtant aussi apparaître très bien adapté à une gestion financière de long terme, autrement dit, une gestion provisionnée au sens de celle des assureurs de type privés. Nous pensons que répartition et capitalisation / provisionnement, comme en d'autres risques sociaux, ne sont pas du tout incompatibles vis-à-vis du sujet de la dépendance. Ainsi, rien n'empêche et bien au contraire, l'émergence de couvertures de type privées ou mutualistes. Comme il est classique avec les assurances Maladie et Retraite, une pyramide d'assurance à trois "piliers" serait parfaitement légitime dans le cas de la dépendance :

- 1^{er} Pilier - Sécurité Sociale : mutualisation nationale, utilisation du principe de répartition ;
- 2^{ème} Pilier - Contrats de groupe ou de branche obligatoires : mutualisation de branche, utilisation suivant les cas du principe de la répartition ou du provisionnement ;
- 3^{ème} Pilier - Contrats individuels facultatifs : mutualisation de portefeuilles de volontaires voire capitalisation pure, utilisation impérative du provisionnement.

À ce titre, selon Martinie et Albert [21], 45 % des salariés et 56 % des DRH pensent que le risque dépendance devrait être financé par la solidarité nationale et par une assurance complémentaire. Au delà, 78 % des DRH estiment que la dépendance doit trouver une réponse collective. Ce dernier chiffre reste cependant difficile à interpréter car il n'aborde pas la question clef de l'intervention financière de l'entreprise et son niveau. Ce sujet de l'intervention de l'entreprise dans la prévoyance sociale en matière de dépendance est très

vivant dans la presse spécialisée (voir par exemple *Liaisons Sociales* [19] et *Protection Sociale Informations* [29]) sans pour autant que les prises de positions des professionnels se traduisent jusqu'à présent par des actions d'ordre politique marquantes. L'incitation fiscale à la souscription de contrats pourrait être une réponse partielle, à condition qu'elle se révèle substantiellement plus élevée que les dispositifs déjà existants d'exonérations envers les dépendants ou leurs aidants (voir Eslous [8] pour une description des aides fiscales aux personnes âgées dépendantes).

En dépit de ces considérations relevant de la politique nationale de gestion du risque dépendance, nous avons désormais suffisamment de certitudes quant au processus de survie en dépendance que nous souhaitons modéliser afin de créer un produit d'assurance viager destiné à couvrir le risque sous-jacent. Comme nous l'avons vu, le besoin est prégnant et tout comme le souligne l'article de l'Espace Social Européen [9], la nécessité de progresser rapidement est indispensable.

1.4 Le processus à modéliser

Quel que soit le pilier envisagé, deux étapes doivent être distinguées : la modélisation de la survie en dépendance suivant une définition bien assise des divers états possibles puis, la construction d'un produit d'assurance viagère sous forme de rente ou, pour tout ou partie, de prestations en nature.

1.4.1 Processus de survie en dépendance

Rappelons que la définition des niveaux de dépendance auxquels nous nous référons est celle de la grille AGGIR, ou plus simplement GIR (voir 1.1.4).

Le premier sujet d'intérêt à modéliser est celui de l'entrée en dépendance, qui caractérise l'occurrence du risque. Celle-ci est incertaine et, en cas d'observation, sa date (ou plutôt l'âge auquel cette occurrence se fait) est aléatoire.

Une fois dépendant, la couverture du risque se fait par une sortie sous forme de rente adaptée au niveau de dépendance. Le temps probable passé dans un état donné est une variable clé du problème de modélisation. De façon complémentaire, les transitions entre états constituent un processus de survie qui, additionné à la "connaissance" des variables aléatoires précédentes permettent de caractériser complètement la trajectoire de survie d'un individu dépendant au travers des différents états possibles.

La modélisation du processus de survie d'un individu exposé au risque

dépendance¹⁰ compte donc trois chantiers, non clairement et non nécessairement ordonnés :

- (1) caractériser l'entrée en dépendance ;
- (2) caractériser le temps de station dans un état donné ;
- (3) caractériser les transitions entre états.

1.4.2 Produit d'assurance

Nous nous fixerons un niveau de rente par niveau de dépendance donné. Il est possible d'envisager un coefficient de revalorisation de la rente, éventuellement dépendant du niveau de GIR. S'il s'agit de convertir tout ou partie de la rente en prestations en nature, nous considérerons que, les prestations en nature ayant une contrepartie financière pour l'assureur (modulo un éventuel coefficient de revalorisation différent), **la sortie se fera sous forme de rente financière exclusivement.**

Le travail de modélisation et d'estimation qui suit pourra être utilisé tant pour la création de produits adaptés à la répartition qu'au provisionnement. Nous distinguerons en pratique les deux cas afin de couvrir l'ensemble de la palette de produits d'assurance à envisager dans cadre de la couverture du risque dépendance.

10. c'est-à-dire tout un chacun...

Chapitre 2

Modélisation du risque dépendance

Ce chapitre s'attache à décrire plusieurs modélisations possibles des transitions entre les divers états de dépendance que traverse un individu au cours de sa vie.

2.1 Démarche générale

2.1.1 Présentation

En premier lieu, il s'agit de décrire une première transition particulière, celle de l'état d'autonomie vers un état de dépendance. Cette modélisation n'est pas celle sur laquelle se concentre notre travail, même si elle se révèle être un facteur fondamental de l'évaluation du nombre de personnes âgées dépendantes futures. Elle représente le point de départ structurant de notre modélisation globale mais nous verrons que son appréhension est relativement simple en termes de modélisation.

Nous considérons ensuite comme dépendantes les personnes dont le GIR (voir 1.1.4) est compris entre 4 et 1. Par référence aux conditions d'attribution de l'APA (voir 1.2.2), les GIR 5 et 6 sont considérés comme des états de non-dépendance. Le décès est considéré comme l'état 0 de la dépendance. Selon la terminologie classique markovienne, c'est un état absorbant...

Le véritable enjeu de notre travail consiste à modéliser les transitions entre états de dépendance 4, 3, 2, 1 à 0 pour les individus déjà dépendants. En gardant à l'esprit que le but de ce modèle est d'être utilisé pour construire un produit d'assurance, les durées de station dans un état donné sont aussi (pour ne pas dire bien plus) importantes que les transitions entre états elles-

mêmes. En effet, ce sont elles qui conditionnent les capitaux constitutifs des rentes versées sur chaque état.

Il existe plusieurs façons de modéliser les passages entre les différents états. Nous présentons ici trois d'entre elles :

- assez rapidement, les modèles par pénalisation de tables de mortalité qui semblent, encore aujourd'hui, être les plus utilisés. C'est le cas du fameux modèle de la SCOR [35] et [36] ;
- puis les modèles markoviens, dont la réputation n'est plus à faire en matière de modélisation des transitions à valeurs dans un espace d'états discret. Nous verrons cependant et c'est l'une des conclusions majeures de notre travail, qu'aussi séduisant qu'il soit, le modèle de Markov est inadapté au cas de la dépendance des personnes âgées ;
- et enfin les modèles semi-markoviens, qui sont une généralisation des précédents dont l'intérêt principal pour nous, est qu'ils gèrent de manière indépendante les transitions et les durées entre transitions.

2.1.2 De l'utilisation des covariables

L'objet est ici de comprendre comment évolue statistiquement une personne dépendante, c'est-à-dire par quels états elle passe et en combien de temps, ce en fonction de son âge et peut-être d'autres covariables caractéristiques comme le sexe, la vie en établissement ou à domicile. Il est, bien entendu, une covariable particulière à laquelle il est pertinent de s'intéresser tout particulièrement : l'éventuelle pathologie.

Dans le cadre de ce mémoire, nous ne rentrerons pas explicitement dans la prise en compte de la pathologie comme covariable¹. En effet, les données que nous utiliserons sont publiques et ne contiennent donc aucun élément relatif à l'état de santé des individus. Un assureur peut, quant à lui, disposer de telles informations mais risque alors d'avoir des portefeuilles par occurrence de covariables trop restreints pour en déduire une statistique suffisamment robuste et donc un comportement de son portefeuille suffisamment sûr. Une solution consisterait alors à effectuer de la segmentation ou de la classification afin de regrouper les pathologies qui engendrent des comportements proches en termes de trajectoire en dépendance. Des techniques de sélection de modèles pourraient également s'avérer pertinentes mais malgré leur intérêt théorique et peut-être pratique, tout cela nous éloigne considérablement de l'objectif de ce mémoire... Rien n'empêche cependant, dans le futur, d'étendre nos résultats à venir à une modélisation emprunte de covariables, notamment liées aux pathologies.

1. Nous renvoyons d'ailleurs le lecteur intéressé vers l'ouvrage de Robert et Denuit [34].

Nous verrons cependant que les résultats que nous obtenons nous amènent naturellement à sérieusement considérer le facteur “maladie” qui peut influencer sur les trajectoires en dépendance.

2.2 L'entrée en dépendance

Du point de vue pratique, il est impossible d'intégrer l'état de bonne santé dans nos modèles, en raison du manque de données pour les estimations. En effet, outre le cas de l'enquête HID², les données d'enquête ne concernent généralement que des individus *déjà* échantillonnés dépendants. Il est donc impossible d'estimer la fraction de nouveaux dépendants rapportés à la population exposée au risque, puisque ce dénominateur est alors inconnu.

2.2.1 Approche par fréquences mesurées

Dans le cas particulier de données exhaustives sur les personnes dépendantes, comme dans le cas des données APA de départements, il est possible de considérer que les personnes exposées au risque représentent la totalité des individus âgés de plus de 60 ans. C'est le principe du sondage en grappe. Ainsi, en observant le nombre des personnes nouvellement inscrites pour obtenir l'APA dans un département donné et en les comparant avec les effectifs totaux de ce département nous avons observé le pourcentage de personnes déclarant sa dépendance parmi la population totale.

Pour tout état de GIR $4 \geq i \geq 1$ et chaque âge $a \geq 60$ nous définissons le pourcentage des personnes d_a^i qui deviennent dépendantes chaque année à l'état de dépendance initial i comme le nombre de personnes nouvellement dépendantes D_a^i à l'état i rapporté à l'effectif N_a de la classe d'âge a :

$$d_a^i = \frac{D_a^i}{N_a}$$

Une fois la liste des d_a^i obtenue, et en supposant que celle-ci reste stable au cours du temps³, nous pouvons l'appliquer à un état quelconque futur de la population du département (ou d'une population dont on pense qu'elle a un comportement correctement représenté par celle de notre département)

2. Voir 3.1.2, cette enquête s'intéresse à une cohorte d'individus initialement éventuellement en bonne santé et revisite ces personnes après un intervalle de 2 ans.

3. En pratique, nous avons constaté sur nos données de gestion de l'APA que la mesure de ce ratio reste stable sur plusieurs années (en l'occurrence 2003 à 2005, les chiffres de 2002 sont plus élevés, mais cela s'explique par un effet “stock” lié à la nouveauté de la prestation.

et ainsi obtenir une estimation des personnes devenues dépendantes pendant l'année ainsi que les états de GIR associés. Comme nous le verrons ci-après, il est bien entendu possible, voire utile, d'appliquer toute technique de lissage paramétrique ou non (régression, splines, moyenne mobile, etc.) à la liste des $(d_a^i)_{a \geq 60}$ pour tout i pour rendre plus robuste l'estimation et plus pratique l'utilisation du modèle.

Cette approche basique mais robuste, qui plus est reflétant au mieux le comportement des données, est celle que nous adopterons.

2.2.2 Le modèle de la SCOR

Ce modèle, à tout le moins sa version de 1995 [35], est d'un intérêt pratique certain. Il repose sur un lissage exponentiel de taux d'entrées en dépendance par âge observés en portefeuille. Il n'est envisagé dans ce modèle qu'un seul état de dépendance, mais il est probable qu'un ajustement exponentiel à l'entrée vers tout niveau de dépendance soit applicable. Le modèle d'entrée en dépendance par âge repose sur l'équation suivante, pour les âges $a > 52$ ans :

$$d_a = 1,35 \times 0,00041 \times \exp^{\frac{a-52}{8}}.$$

Comme le montre Léger [17], ce modèle a fait école et de très nombreux adeptes ont rejoint l'hypothèse d'un taux d'entrée en dépendance croissant exponentiellement avec l'âge, particulièrement adapté à la prise en compte d'un état unique de dépendance.

Reste ensuite à appliquer un modèle de transition pour prévoir l'évolution du comportement du non-dépendant vers l'éventuelle dépendance puis le décès.

2.3 Modèles multiétats par tables pénalisées

Déterminer un taux d'entrée en dépendance n'est que le premier maillon du problème. En effet, dès lors qu'il est envisagé qu'une population puisse être, au cours du temps, scindée en 2 (ou n) catégories, typiquement les non-dépendants et dépendants, la construction de produits d'assurance viagère nécessite l'adaptation des modèles standards de mortalité sur les 2 (ou n) sous-populations.

La tentation est ici grande pour l'actuaire de se reposer sur les fondements éprouvés de son métier et d'utiliser les tables de mortalité classiques, pénalisées de facteurs additifs, multiplicatifs ou encore de translation.

2.3.1 Le modèle de la SCOR

De nouveau, à tout seigneur, tout honneur, cette démarche a été utilisée par la SCOR dans son modèle fondamental de 1995 [35] et fournit, outre les taux d'entrée en dépendance exhibés dans la section précédente, les tables de mortalité des non-dépendants et des dépendants sous la forme suivante :

$$q_a^{-dep} = 0,8 \times q_a^{TD8890}$$

pour les non-dépendants d'âge a et

$$q_a^{dep} = 2 \times q_a^{TD8890} + 0,035$$

pour les dépendants.

La table TD8890 est ici fortement mise à contribution comme paramètre de forme de la distribution de mortalité par âge de la population. Les mortalités des dépendants et non-dépendants apparaissent en effet, dans ce modèle SCOR, comme des homothétie-translations de cette table.

Les non-dépendants se voient appliquer un paramètre d'échelle inférieur à 1 car ils représentent une sous-population déjà affectée d'un biais de sélection par rapport à la population de référence de la TD8890. En effet, ils sont ceux qui, à l'âge a , ne sont pas encore devenus dépendants.

Les dépendants, en revanche, ont une mortalité doublée et majorée de 3,5 % par rapport à la population de référence. Cette application d'un facteur d'échelle et de translation illustre non seulement le risque de surmortalité encouru en état de dépendance, auquel se combine un effet âge deux fois plus élevé que dans la population de référence.

2.3.2 Une approche plus récente

Dans son mémoire d'Actuaire du CEA en 2003, Léger [17] envisage un modèle prenant en compte une éventuelle dépendance partielle avant la dépendance totale conduisant au décès.

Dans le principe, ce modèle est une extension du modèle par tables pénalisées de type SCOR, en y ajoutant un état supplémentaire de dépendance. Les hypothèses de comportement sont cependant volontairement restrictives de façon :

- à ne pas rendre exagérément complexe un modèle de type application de tables destiné à être utilisé par des gestionnaires ;
- à contourner le lourd problème de l'insuffisance de données observées pour correctement estimer des paramètres de transition rares dans la pratique.

2.3.3 Intérêts et limites pratiques de ces modèles

Pour l'Actuaire, l'approche par modèles multiétats et tables pénalisées est naturelle. Elle consiste à s'appuyer sur des techniques répandues et maîtrisées pour décrire un risque nouveau.

Qui plus est, la souplesse et la facilité d'accès d'un tel modèle est un très grand atout. Pour le gestionnaire, il permet l'application d'abaques calibrés et, par la suite, des calculs de tarifs et de provisions extrêmement rapides et facilement auditables. Pour le modélisateur, il permet de résumer voire, si besoin, d'expliquer le comportement du risque observé au travers de quelques paramètres de déformation de tables, elles aussi répandues et maîtrisées.

Comme souvent, si l'utilisation d'outils simples et robustes est à privilégier, il est certains domaines dans lesquels l'approche de bon sens ne peut suffire à décrire un phénomène dont la complexité, si elle est bien réelle, n'est pas nécessairement visible. L'application de tables suppose, implicitement, d'appliquer un raisonnement en moyenne : à un âge donné, un individu non-dépendant a *en moyenne* tant de chances de passer dépendant, puis, l'année suivante, *en moyenne* tant de chances de passer dépendant lourd ou de dé céder, etc. Qui plus est, la liste des moyennes par âge, la table en somme, est elle-même lissée ou supposée monotone pour des raisons pratiques ou naturalistes (toujours indispensable cependant).

Dans le cas du risque dépendance, deux phénomènes justifient de conserver une attitude prudente vis-à-vis de l'utilisation des modèles par tables pénalisées. En premier lieu, le manque de données lié à la "jeunesse" de ce risque implique que l'on applique des tables basées sur une population de référence qui a de très grandes chances d'être différente de la population en portefeuille. Ce point rejoint la remarque effectuée sur l'utilisation de covariables en 2.1.2. Ensuite, pour des phénomènes complexes comme celui de la dépendance, l'approche par tables va avoir tendance à négliger voire gommer l'écart qui peut exister entre comportement réel et comportement moyen. Cet écart, même s'il n'est pas très élevé au regard de la moyenne, ne doit parfois pas être négligé et nous montrerons que c'est bel et bien le cas pour la modélisation des trajectoires de dépendance. Il est clair qu'envisager le processus par l'ensemble de ses trajectoires possibles est plus riche et sécuritaire que de ne se caler que sur un et un seul comportement moyen. Reste pour cela à pouvoir construire un modèle fiable, dont les paramètres sont estimables et qui soit ensuite utilisable dans la pratique. C'est ce que nous nous attacherons à faire.

2.4 Modèles de Markov

Dans la suite, nous parlerons indifféremment de modèles ou processus de Markov, ou de modèles ou processus markoviens.

2.4.1 Définition

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, E un espace dit d'états, $T = \{t \geq 0\}$ un espace dit de temps et $X = \{X(t) \in E, t \in T\}$ un processus.

Il existe plusieurs moyens de définir les processus markoviens. La façon qui nous semble la plus naturelle est de le faire au travers des probabilités de transition. Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions :

Pour tout $t > 0$ on définit le processus de saut $N(t)$ comme le nombre de transitions intervenues sur l'intervalle $[0, t]$. Soient de plus $t_1, \dots, t_{N(t)}$ les instants où se sont produits les transitions.

On définit de plus l'histoire du processus, c'est-à-dire l'histoire exhaustive de son passé au temps $t > 0$, comme la famille :

$$F(t) = \{N(t), \{t_1, \dots, t_{N(t)}\}, \{X(0), X(t_1), \dots, X(t_{N(t)})\}\}.$$

Les probabilités de transition sont définies pour tout $n, t > 0$, pour tout n -uplet $t_1 < \dots < t_n \leq t$ et pour tout ensemble $A \subset E$ par

$$\begin{aligned} p_A(t_n, t, F(t_n^-)) &= P(X(t) \in A | X(t_n), \dots, X(t_1)) \\ &= P(X(t) \in A | X(t_n), F(t_n^-)), \end{aligned}$$

où $F(t_n^-)$ désigne le passé précédent immédiatement l'instant t_n .

2.4.2 La propriété de Markov et ses conséquences

Dans le cas d'un espace d'états E discret (et en pratique fini), un processus $X = \{X(t) \in E, t \in T\}$ est dit *markovien* si pour tout $n > 0$, pour tout $t_1 < \dots < t_n \leq t \in T$ et pour tout $\{i_1, \dots, i_n, i_{n+1}\}$ dans E on a

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) \\ = P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Autrement dit, la loi du processus à un instant t , conditionnelle à tout son passé, ne dépend que de l'état qu'il a occupé précédemment. C'est la propriété dite de Markov.

Le processus est alors caractérisé par les probabilités de transitions entre tous les états possibles i et j dans E , entre les dates s et t : $\{p_{i,j}(s,t)/(i,j) \in E^2, s \leq t\}$. On a évidemment

$$p_{i,j}(s,t) = P(X(t) = j | X(s) = i). \quad (2.2)$$

La matrice des probabilités de transitions markoviennes entre les instants s et t , notée $P(s,t)$ est définie par

$$P(s,t) = (p_{i,j}(s,t))_{(i,j) \in E^2}.$$

La somme des probabilités de passer dans tous les états possibles $j \in E$ à partir d'un état quelconque i est égale à 1. La matrice P est donc stochastique :

$$\forall i = 1, \dots, K, \quad \sum_{j=1}^K p_{i,j}(s,t) = 1.$$

De plus, par la formule des probabilités totales et la propriété de Markov 2.1, pour tout $s < t < u$ et tout $(i,j) \in E^2$ on a

$$\begin{aligned} p_{i,j}(s,u) &= P(X(u) = j | X(s) = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X(t) = k | X(s) = i) \times P(X(u) = j | X(s) = i \cap X(t) = k) \\ &= \sum_{k \in E} P(X(t) = k | X(s) = i) \times P(X(u) = j | X(t) = k) \\ &= \sum_{k \in E} p_{i,k}(s,t) \times p_{k,j}(t,u), \end{aligned}$$

de sorte que nous obtenons la propriété remarquable

$$P(s,u) = P(s,t) \times P(t,u). \quad (2.3)$$

Cette propriété est extrêmement utile dans la mesure où elle permet de calculer toute matrice des transitions du triplet $(P(s,u), P(s,t), P(t,u))$ connaissant les deux autres. C'est l'une des raisons importantes de la facilité d'utilisation prédictive des modèles de Markov, et qui font tout leur intérêt.

Par ailleurs, lorsque l'on se donne une échelle de temps fixe $x = t - s = u - t$ et que les transitions ne dépendent que de cette variable, c'est-à-dire de la durée de transition mais pas du point de départ, on définit alors $P(x) = P(s, t) = P(t, u)$ et l'on obtient immédiatement de 2.3 que

$$P(n \times x) = P(x)^n.$$

Cette équation est fondamentale, car elle permet de décrire les comportements limites (lorsqu'ils existent) des processus de transitions lorsque le nombre d'étapes n tend vers l'infini.

2.4.3 Liens avec les modèles de survie

Les équations de Kolmogorov

Les processus de Markov à temps continu sont caractérisés par des sauts pouvant survenir à tout moment. Il est alors nécessaire de définir des intensités de transition entre les états, pour tout $t > 0$ et tout $i \neq j$ comme

$$\lambda_{i,j}(t) = \frac{\partial p_{i,j}}{\partial t}(s = t, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(s = t, t + h) - p_{i,j}(s = t, t)}{h},$$

et l'intensité globale de transition depuis l'état i est définie comme

$$\lambda_i(t) = - \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}(t).$$

La matrice d'intensités des transitions markoviennes au temps $t > 0$, notée $Q(t)$ est donc définie par ses éléments

$$q_{i,j}(t) = \delta_{i,j} \lambda_i(t) + (1 - \delta_{i,j}) \lambda_{i,j}(t), \quad \forall (i, j) \in E^2,$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker⁴. Les termes diagonaux de la matrice Q sont donc négatifs et mesurent trivialement "l'envie de sortir de l'état i ". Les termes non diagonaux sont positifs et représentent "l'envie d'arriver en j depuis i ", la somme des lignes de la matrice étant égale à 0.

De façon générale, le modèle markovien est dit *non homogène* (MNH) lorsque les intensités sont fonction du temps, c'est-à-dire que les fondamentaux de l'évolution du processus ne sont pas invariants en fonction du temps.

À l'inverse, dans certains cas, le temps chronologique est supposé ne pas avoir d'effet sur la structure des transitions, les intensités sont constantes et le modèle est alors dit *homogène* :

4. $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

$$\frac{d\lambda_{i,j}(t)}{dt} = 0, \quad i.e. \quad \lambda_{i,j}(t) = \lambda_{i,j}.$$

La matrice des intensités Q est alors constante en fonction du temps.

Le modèle de Markov homogène est très certainement le plus utilisé. Il est en effet clairement le plus simple à manipuler, il est aussi très bien adapté aux jeux de données observés sur une période trop courte pour pouvoir présumer d'un effet de dérive temporelle. C'est le modèle utilisé, par exemple, par Massonet [23] pour estimer les probabilités de transitions entre états de dépendance basées sur un modèle markovien homogène dont les paramètres sont estimés à partir des données de l'enquête HID (voir 3.1.2).

Les probabilités et les intensités de transition sont, bien entendu, fortement liées. En effet, les intensités sont définies comme des dérivées particulières des probabilités de transition. À l'inverse, pour les processus markoviens, il est possible de présenter les matrices P des probabilités et Q des intensités comme solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles matricielles. Ce système est composé des équations dites de Kolmogorov.

Notons $\frac{\partial}{\partial s}P$ et $\frac{\partial}{\partial t}P$ les matrices dont, pour tout $(i, j) \in E^2$, les éléments sont respectivement $\frac{\partial}{\partial s}p_{i,j}$ et $\frac{\partial}{\partial t}p_{i,j}$. Le système d'équations de Kolmogorov s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}P(s, t) = P(s, t) \times Q(t) \\ -\frac{\partial}{\partial s}P(s, t) = P(s, t) \times Q(s) \\ P(s, s) = Id_E \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Modèles de Markov et lois de survie

À partir des équations de Kolmogorov 2.4, nous pouvons, en théorie, calculer les probabilités de transition générales à partir des intensités⁵. Il est donc équivalent de déterminer un processus de Markov à l'aide des matrices ou des intensités de transitions.

De nombreux sujets de fiabilité font intervenir des problématiques de durée de survie, qui ne sont, finalement, que des transitions entre un état "vie"

5. En pratique, la résolution d'un tel système peut s'avérer très difficile voir tout simplement impossible.

et un état “décès”. Les fiabilistes, comme les actuaires, ont l’habitude de travailler à partir de modèles univariés, dits de survie, dans lesquels interviennent des lois Exponentielles, ou leurs généralisations Gamma ou Weibull. Ces lois sont souvent définies par leurs intensités, elles-mêmes définies comme la dérivée logarithmique de leurs fonctions de survie, ce qui est équivalent à les définir par leurs densités ou encore leurs fonctions de répartition. Les équations de Kolmogorov 2.4 présentent une structure équivalente puisque l’une comme l’autre des deux équations du système s’interprète comme le fait que la matrice d’intensité Q est la dérivée logarithmique de la matrice de probabilités de transition P par rapport à l’une ou l’autre des deux variables temporelles s et t .

Cela est en particulier clair pour les processus homogènes, où Q ne dépend pas de t . Nous obtenons alors la relation classique :

$$P(x) = \text{Exp}(Q \times x),$$

où $x = t - s$ et Exp désigne l’exponentielle de matrices. En particulier, on retrouve la formule classique donnant la matrice de transitions P_n au bout de n unités de temps en fonction de la matrice de transition unitaire $P = \text{Exp } Q$ comme

$$P_n = P^n. \quad (2.5)$$

Il est alors classique (voir Feller [11] notamment) que la variable aléatoire X_i représentant le temps de séjour dans un état i suit alors la loi Exponentielle de paramètre $-q_{i,i}$, chère aux fiabilistes et aux spécialistes des modèles de survie.

2.4.4 Deux exemples d’application

La présentation généraliste d’Optimind

En décembre 2007, la société d’expertise et conseil en Actuariat Optimind présente un document public (appelé dossier technique d’information) consacré à la dépendance (voir [27]), sur la base des activités effectuées pour le compte de leurs clients et de leurs études propres.

Ce dossier, d’une grande clarté pédagogique et pratique, présente un modèle de Markov à 4 états (valide, dépendant partiel, dépendant total et décédé) comme le principe de modélisation prévalant concernant les trajectoires en dépendance. Le modèle présenté est un modèle de Markov homogène, mais les formules mises en évidence pourraient s’étendre à peu de frais au modèle de Markov inhomogène.

Sans donner d'applications numériques, les formules générales des matrices de transition, des tarifications des primes pures, des Provisions pour Risques Croissants et pour Sinistres à Payer sont explicitées. Ces dernières, ce qui est assez remarquable, s'expriment assez simplement en fonction des coefficients des matrices de transition markoviennes et des coefficients d'actualisation⁶.

Une application sur données d'enquête

Dans son article sur l'estimation des matrices de transition markoviennes, Massonet [23] part d'un modèle markovien homogène semblable à celui décrit par Optimind ci-avant, si ce n'est que l'on se porte ici sur un modèle multiétats plus vaste, basé sur la grille AGGIR.

L'intérêt de l'article réside dans l'application numérique donnée plus que dans la présentation théorique du modèle de Markov. Les données de base sont les données de l'enquête HID (pour Handicap - Invalidité - Dépendance), que nous exposons ci-après en 3.1.2. La difficulté tient au fait que l'enquête HID a consisté en le suivi d'une cohorte d'individus en effectuant une photographie de leur état de dépendance (notamment) aux dates t et $t+2$ ans. Or, l'auteur souhaite pour sa part obtenir des matrices de transitions annuelles, afin de rendre son modèle plus exploitable dans une logique de gestion comptable, mais aussi de rendre ses résultats plus lisibles en étant calés sur les usages actuariels classiques.

L'auteur estime ensuite directement la matrice de transitions bisannuelle à l'aide de ses données puis extrait une racine carrée de cette matrice en guise de matrice de transition annuelle, en vertu de la formule 2.5. Le modèle calé sur la transition annuelle est ensuite déroulé pour obtenir des comportements de survie en dépendance basés sur ces estimations.

Ce travail présente une intéressante démarche menée à son terme de modélisation, estimation puis exploitation. Cependant, plusieurs questions se posent quant à la qualité prédictive du modèle construit. En effet, l'extraction de racine carrée, si elle se conçoit du point de vue de l'usage que l'on veut en faire, paraît superflue et ne constitue pas un vrai choix de modélisation mais plutôt une contrainte que l'on se donne de prendre l'année pour unité

6. Sans que cela soit explicitement mentionné, l'unité de temps considérée pour les transitions est l'année, conformément aux usages actuariels. L'utilisation d'une unité de temps infra-annuelle exprimée en nombre de mois, pour peu qu'elle soit un diviseur de 12, ne pose pas de problèmes puisque les transitions annuelles nécessaires aux calculs des provisions de clôture sont alors obtenues par composition des matrices unitaires selon la formule 2.5 (dans le cas homogène) et les formules s'appliquent alors directement.

de temps. Il s'agit, par ailleurs, d'une supposition implicite que le comportement observé sur deux ans se décompose en un phénomène unitaire homogène composé deux fois. Les données ne représentant que deux photographies distantes de deux ans, rien n'indique le comportement réel des trajectoires de dépendance à l'intérieur de l'intervalle de deux ans. L'hypothèse sous-jacente nous paraît donc trop forte, compte tenu du manque d'information dans les données et de la courte espérance de vie des dépendants. Une approche moins artificielle, basée sur un modèle markovien homogène comportant des transitions sur une unité de temps de deux ans mais comportant une étude plus fournie en termes d'influence de covariables (existantes dans l'enquête) aurait peut-être constitué une exploitation plus riche des données.

2.4.5 Intérêts et limites des modèles de Markov

Au-delà des deux exemples qui précèdent, les processus de type markoviens sont très utiles pour la construction de modèles de durée en assurance. En particulier, les liens avec les lois de survie et les problématiques de fiabilité permettent de construire des produits d'assurances de matériels industriels ou de production en général. On peut imaginer que ce type de modélisation est utilisé, à grande échelle, sur les produits de type "extension de garantie" électronique ou électroménager et sur des produits spécifiques d'assurances de machines de grande envergure dans l'industrie lourde par exemple.

Dans le cas qui nous intéresse, nous pensons que le choix d'une modélisation markovienne présente quelques écueils. En effet, compte tenu des courtes périodes d'observation, il est délicat de prétendre pouvoir effectuer une modélisation markovienne non homogène (c'est-à-dire qui prend en compte finement le paramètre temps dans l'évolution des probabilités de transition). Or, un modèle de Markov homogène semble bien trop restrictif. Par ailleurs, quand bien même une telle modélisation pourrait être construite, elle rendrait les probabilités de transitions dépendantes de l'âge, ce qui est assurément nécessaire, mais les lois de séjour dans un état resteraient immédiatement liées aux probabilités de transition *via* les équations de Kolmogorov 2.4. Or, cette liaison nous paraît artificielle, ou trop forte, pour prendre en compte le comportement du processus de survie en dépendance.

Rappelons que notre objectif est de construire et tarifer un produit d'assurance viager, dont les niveaux de rente sont adaptés au niveau de dépendance de la personne. Ainsi, un des paramètres dimensionnant du capital constitutif de la rente d'un individu est la durée de station dans un état donné. Bien entendu, les probabilités de transition interviennent dans l'évaluation de ce capital. Intuitivement, il sera la somme des capitaux constitutifs des

rentes servies dans chaque état pondérée par les probabilités de présence dans chaque état, elles-mêmes directement liées aux probabilités de transition instantanées tout au long du processus.

Dans la description sommaire ci-dessus, il semblerait plus riche, du point de vue de la modélisation, de considérer que durée de station dans un état et probabilités de transitions instantanées peuvent être des variables aléatoires indépendantes. Ce raffinement n'est pas accessible par le modèle de Markov "simple".

Les processus dits semi-markoviens peuvent répondre, quant à eux, plus spécifiquement à ce besoin.

2.5 Modèles semi-markoviens

Un des gains de l'approche semi-markovienne, comparée à la modélisation markovienne, tient au fait que la loi décrivant la durée passée dans un état n'est plus obligatoirement exponentielle et peut être choisie en fonction du problème, voire évaluée de façon complètement non-paramétrique. L'appréhension des probabilités de transition est, pour sa part, assez similaire à celle de l'approche markovienne.

Si les modèles semi-markoviens ne sont pas inconnus dans le monde de l'actuariat (voir Janssen et Manca [13] et Stenberg *et al.* [37] notamment pour leurs bibliographies), voire même dans celui des applications actuarielles aux assurances sociales (voir Janssen et Manca [14]), leur application au sujet de la dépendance semble assez peu défriché.

2.5.1 Un premier exemple

Si le modèle markovien tient depuis quelques années le haut du pavé sur le champ de la modélisation des trajectoires en dépendance, l'approche semi-markovienne a déjà été utilisée et a fait l'objet d'une publication récente dans un chapitre du livre de Robert et Denuit *et al.* [34]. L'exemple traité a vocation à généraliser l'approche markovienne par la prise en compte fine de la durée de station dans l'état de dépendance dans la probabilité de décès (ce que le modèle de Markov ne permet pas), tout en intégrant des données pathologiques concernant les assurés. En effet, l'existence d'une éventuelle pathologie conditionne très fortement les trajectoires en dépendance et, nous le verrons dans la suite, en particulier la dernière étape vers le décès. Ce modèle ne possède qu'un seul niveau de dépendance⁷ et prend en compte

7. l'extension de ce modèle à plusieurs niveaux de dépendance semble envisageable, pour peu que l'état pathologique reste identique au cours de la trajectoire en dépendance,

l'état pathologique de l'individu dans l'estimation des probabilités de transition, tant de l'état valide vers l'état dépendant que de l'état dépendant vers le décès. Contrairement à la prise en compte réelle de la durée passée en dépendance qui apporte une vraie plus-value méthodologique, l'intégration au modèle de la donnée pathologie nous apparaît plutôt comme une volonté de faire intervenir une covariable forte que comme un réel parti-pris de modélisation.

Le modèle développé par Robert et Denuit est cependant assez éloigné de celui que nous allons exploiter et décrire ci-après. En effet, la durée de station dans un état de dépendance est considérée comme une variable temporelle dans la définition des taux instantannés de décès dépendance alors que pour notre part, nous considérerons cette durée comme aléatoire et indépendante de la valeur des probabilités de transition (donc des taux instantannés).

Notons que les formules de calcul des provisions mathématiques (PRC et PSAP) associées à un produit de rente viagère adapté au modèle sont construites et que les paramètres sont estimés sur des données d'assureur confidentielles.

2.5.2 Définitions et propriétés

Plutôt que présenter cette théorie de façon abstraite comme nous l'avons fait pour le modèle de Markov classique, nous allons la présenter directement appliquée au cas de la dépendance. Pour une description accessible et complète des divers processus semi-markoviens utilisables (homogènes, non homogènes, ou autres variantes), nous renvoyons le lecteur à la thèse d'Ève Mathieu [24].

Ce type de modèle nous permet de modéliser non seulement la probabilité de changer d'état GIR mais également et de façon indépendante, la durée de cette transition, ou encore durée de station dans un état.

Nous utiliserons des processus Semi-Markoviens Non Homogènes (SMNH), dans lesquels il est nécessaire de se référer à deux échelles de temps : la première, comme pour les processus de Markov simples est l'échelle de temps chronologique (représentée dans notre cas par l'âge de la personne) et l'échelle de temps interne (durée de transition vers un autre état). Passons maintenant aux définitions précises.

ce qui constituerait une hypothèse très forte. Sans cette dernière, se superpose alors un second modèle de trajectoire dans les pathologies et laisse entrevoir une complexité de modélisation à laquelle il ne vaut mieux pas se frotter, d'autant que les données alors nécessaires à l'estimation seront sans aucun doute inaccessibles.

Comme dans le cas markovien, on considère d'abord un espace probabilisé (Ω, F, P) et un espace d'états fini $E = \{1, 2, \dots, K\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et J_n la variable aléatoire à valeurs dans E qui représente l'état d'origine lors de la $n^{\text{ème}}$ transition. Soit alors S_n la date chronologique de son occurrence et $X_n = S_n - S_{n-1}$ la durée passée dans l'état J_n .

Enfin, pour $s > 0$ soit $N(s)$ la variable aléatoire comptant le nombre de transitions survenues entre états distincts pendant la période $[0, s]$. Le processus N est souvent désigné comme le *processus de comptage* associé au processus $s \mapsto J_{N(s)}$.

En résumé, nous avons :

- J_n : variable aléatoire discrète à valeurs dans l'espace d'états E égale au $n^{\text{ème}}$ état visité par le processus ;
- S_n : variable aléatoire continue positive égale à la date du $n^{\text{ème}}$ saut du processus ;
- X_n : variable aléatoire continue positive égale à la durée de station dans l'état J_n ;
- $N(s)$: variable aléatoire discrète égale aux nombres de transitions intervenues avant la date s .

Noyau semi-markovien

Pour tout $(i, j) \in E^2$ et $s, x > 0$, on définit un noyau SMNH Q associé au processus, comme suit :

$$Q_{i,j}(s, x) = P(J_{N(s)+1} = j, X_{N(s)+1} \leq x | J_{N(s)} = i, S_{N(s)} = s). \quad (2.6)$$

La quantité $Q_{i,j}(s, x)$ est donc la probabilité que le prochain saut se fasse vers l'état j , avant la durée x , sachant que le processus était présent en l'état i lors de son saut précédent en la date s .

Ici, la composante x représente une durée, échelle de temps interne au processus dont l'origine se situe à l'instant d'entrée dans l'état $J_n = i$, c'est-à-dire à la date s .

La "matrice" Q porte le nom de noyau semi-markovien car sa seule définition permet de caractériser complètement le processus et, en particulier, de retrouver toutes les lois marginales qui lui sont associées.

Lois de survie marginales

Considérons, pour tout $(i, j) \in E^2$ et $s > 0$

$$p_{i,j}(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} Q_{i,j}(s, x) = P(J_{N(s)+1} = j | J_{N(s)} = i, S_{N(s)} = s). \quad (2.7)$$

La matrice $P(s) = (p_{i,j}(s))_{(i,j) \in E^2}$ est une matrice de transitions markovienne non homogène au sens de la formule 2.2. Elle ne dépend que du temps d'entrée dans l'état courant. Cette dernière équation 2.7 fait apparaître le processus de Markov comme cas limite d'un processus semi-markovien et identifie, en ce sens, l'approche semi-markovienne comme une généralisation de la modélisation markovienne.

Supposons donnés l'état courant $i \in E$ et le temps d'entrée $s > 0$ dans cet état. Les distributions conditionnelles des temps de séjour dans chaque état sont données par :

$$H_i(s, x) = \sum_{j \neq i} Q_{i,j}(s, x) = P(X_{N(s)+1} \leq x | J_{N(s)} = i, S_{N(s)} = s).$$

Par ailleurs, la survie marginale dans l'état i est définie par

$$S_i(s, x) = P(X_{N(s)+1} > x | J_{N(s)} = i, S_{N(s)} = s) = 1 - H_i(s, x).$$

Définissons également la loi $F_{i,j}(s, x)$ du temps de séjour conditionnellement au fait que le processus soit entré dans l'état i au temps s :

$$F_{i,j}(s, x) = P(X_{N(s)+1} \leq x | J_{N(s)+1} = j, J_{N(s)} = i, S_{N(s)} = s).$$

Si l'on suppose, comme nous le ferons dans la pratique⁸, que la durée passée dans chaque état est indépendante du temps d'entrée dans l'état (*i.e.* $F_{i,j}(s, x)$ est indépendante de s), alors pour tout $x, s > 0$ on a

$$Q_{i,j}(s, x) = F_{i,j}(x) \times p_{i,j}(s). \quad (2.8)$$

La fonction de survie associée $S_{i,j}(x)$ est donnée par

$$S_{i,j}(x) = 1 - F_{i,j}(x). \quad (2.9)$$

Sous l'hypothèse d'indépendance, les fonctions de survie $S_i(s, x)$ d'une part, les probabilités de transition $p_{i,j}(s)$ et les fonctions de survie $S_{i,j}(x)$ d'autre part, sont liées par la relation

8. Nous supposons en effet, que la durée de station dans un état de dépendance donné ne dépend pas de l'âge dans lequel l'individu y entre. Nous commenterons ci-après ces hypothèses.

$$S_i(s, x) = \sum_{j \neq i} S_{i,j}(x) \times p_{i,j}(s). \quad (2.10)$$

En pratique, nous utiliserons plus souvent la densité de probabilité associée à la fonction de survie $S_{i,j}$ donnée par

$$f_{i,j} = F'_{i,j} = -S'_{i,j}. \quad (2.11)$$

Ces expressions permettent de jeter les bases de la modélisation semi-markovienne que nous souhaitons mettre en œuvre : indépendance des estimations des probabilités de transition et des durées de transition, indépendance de ces dernières lois par rapport au temps chronologique. Cette hypothèse assez forte permet de reconstituer le noyau semi-markovien à partir de ses seules lois marginales de $p_{i,j}(s)$ et de $S_{i,j}(x)$.

Nous nous attachons donc, dans ce qui suit, à considérer un modèle Semi-Markovien Non Homogène (SMNH) respectant ces hypothèses et qui nous semble être le mieux adaptée à la problématique d'évolution du processus de dépendance des personnes âgées.

À partir de maintenant, nous supposons que les lois des durées de transitions sont indépendantes du temps chronologique, c'est-à-dire de l'âge d'entrée dans un niveau de dépendance.

Les probabilités de transition en revanche dépendent bel et bien de cet âge d'entrée dans un niveau de dépendance et de ce fait, l'espérance de vie en dépendance est fonction de l'âge d'entrée.

La prochaine étape consiste à déterminer la forme fonctionnelle adéquate, paramétrique ou non paramétrique, du noyau semi-markovien Q , au moyen des composantes de la formule 2.10.

2.5.3 Approche paramétrique

L'approche paramétrique consiste à se donner *a priori* une forme fonctionnelle analytique des lois constitutives du processus. C'est en particulier le choix de modélisation de Matthieu [25] dans le contexte de l'étude épidémiologique des transitions entre états sérologiques des patients atteints du VIH. Nous suivons, dans un premier temps, son analyse.

Dans le cas du processus SMNH, il s'agit donc de fixer les formes analytiques des probabilités de transitions instantannées $p_{i,j}(s)$ et des fonctions de survie $S_{i,j}(x)$ respectivement définies par les équations 2.7 et 2.9 pour reconstituer le noyau markovien $Q_{i,j}(s, x)$.

Probabilités instantannées de transition

Le choix est ici le plus simple possible, en considérant que l'influence de l'âge sur les probabilités de transition est linéaire :

$$\forall s > 60, \quad p_{i,j}(s) = a_{i,j} \times s + b_{i,j}. \quad (2.12)$$

Un des avantages de ce modèle est la faiblesse du nombre de paramètres à estimer : 2 par couple $i \neq j$. Ils sont simples à interpréter et très parlants en termes de pente et d'ordonnée à l'origine.

Ce choix de modélisation peut cependant paraître curieux pour un probabiliste. En effet, il n'est pas *a priori* naturel de représenter des probabilités par une fonction linéaire qui n'est, par essence, pas bornée entre 0 et 1. Un choix pouvant apparaître plus judicieux serait, par exemple, celui d'une fonction "logit" :

$$\forall s > 60, \quad p_{i,j}(s) = \frac{e^{a_{i,j} \times s + b_{i,j}}}{1 + e^{a_{i,j} \times s + b_{i,j}}},$$

bornée dans $[0; 1]$ et classiquement utilisée en régression logistique pour modéliser des probabilités, notamment pour les modèles dits de choix discrets (voir Pindyck [33]).

Nous verrons cependant dans le chapitre suivant que les paramètres $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ estimés en pratique rendent la fonction linéaire 2.12 à valeurs strictement incluses dans $[0; 1]$ sur l'intervalle d'étude $s \in [60; 100]$. Par ailleurs, la mise en pratique d'une estimation sur la base paramétrique d'une fonction logit est, non seulement plus complexe d'un point de vue algorithmique, mais fournit des résultats extrêmement proches de ceux liés à la fonction linéaire.

Nous resterons donc sur la modélisation linéaire des probabilités.

Remarque : à une translation près, nous supposons dorénavant que l'échelle de temps en s démarre en 0, c'est-à-dire que $s = 0$ correspond à un âge chronologique de 60 ans.

Lois de durées des séjours dans un état donné

Les temps de séjour dans l'état i avant le transfert vers l'état j peuvent être distribués selon une loi continue quelconque. Cependant, plusieurs raisons plaident pour l'utilisation de lois de la famille des Exponentielles.

En effet, nous avons vu dans la section 2.4.3 que la classe des lois exponentielles sont naturellement liées aux processus de Markov. Par ailleurs, elles sont un choix classique des fiabilistes dans les problèmes de modélisation de lois de survie (voir Andersen *et al.* [1] notamment). Enfin, c'est le

choix de modélisation, conjoint à celui des probabilités linéaires, effectué par Matthieu [24] et [25] et dont nous suivons la démarche.

Si le choix de la loi exponentielle simple est à proscrire car elle ne comporte pas suffisamment de paramètres pour rendre compte de la complexité du processus de survie en dépendance, ses généralisations Gamma ou Weibull sont, pour leur part, parfaitement standards et adaptées (voir Murthy *et al.* [26]). De plus, ces deux lois présentent des densités de forme générale assez proches. La loi de Weibull est analytiquement plus simple à manipuler et notre choix se portera donc sur elle.

Pour tout $i \neq j$ nous définissons donc la densité $f_{i,j}$ associée à la fonction de survie $S_{i,j}$ donnée par les formules 2.11 et 2.9 comme une loi de Weibull $W(\nu_{i,j}, \sigma_{i,j})$ dont les paramètres ν et σ sont positifs. Afin de ne pas alourdir les notations, nous omettons ci-dessous les indices i et j . On a :

$$f(x) = \nu\sigma^\nu x^{\nu-1} \exp(-(\sigma x)^\nu). \quad (2.13)$$

Remarque : lorsque $\nu = 1$, on retrouve la densité d'une loi Exponentielle de paramètre σ . Intuitivement et comparativement à la loi Exponentielle, le paramètre σ représente un paramètre d'étalement et le paramètre ν un paramètre d'échelle. Un troisième paramètre de translation pourrait être ajouté, nous estimons cependant ne pas en avoir la nécessité.

2.5.4 approche non-paramétrique

Dans ce type de modélisation, les lois à estimer ne sont pas prédéfinies analytiquement dans une classe de fonctions paramétrées. Le principe est de ne pas se fixer de forme de loi *a priori* pour la variable aléatoire d'intérêt et de faire en sorte d'estimer la vraie loi inconnue par des classes de fonctions très larges permettant la meilleure adaptation possible aux données disponibles.

Le plus souvent, ces modélisations sont utilisées lorsque le statisticien n'a aucune raison de croire que le phénomène étudié suit une loi standard. Un autre intérêt de ces lois est à visée plus exploratoire, lorsque l'on souhaite avoir une idée de la forme globale d'une distribution pour ensuite lui adapter un modèle paramétrique. C'est dans ce cadre que nous nous placerons dans le chapitre 3.

L'exemple emblématique d'estimation non-paramétrique d'une loi est l'estimation d'une densité de probabilité par histogramme, c'est-à-dire que l'on recherche le meilleur estimateur dans la classe des fonctions constantes par morceaux⁹ basées sur une partition donnée du support probable de la den-

9. Dans le cas où il est nécessaire que la densité estimée soit régulière (de classe \mathcal{C}^1 par

sité. Des points de vue théorique comme pratique, plus le nombre d'intervalles d'estimation est élevé, plus la fonction estimée est sensée approcher la loi réelle mais, dans le même temps, le nombre de valeurs à estimer (celles des constantes) augmente et la quantité de données par intervalle diminue, la précision d'estimation avec. Le choix du nombre d'intervalles doit donc se faire en prenant en compte ces éléments. Un des enjeux cruciaux de l'estimation non-paramétrique est la sélection du meilleur modèle, c'est-à-dire de la meilleure partition possible au sens où l'estimateur sera le plus proche possible de la vraie densité. Cette problématique a fait l'objet de développements récents et le lecteur intéressé pourra utilement se référer à Massart [22] et Castellan [4] pour les problématiques d'estimation par histogrammes et plus généralement par classes de polynômes par morceaux¹⁰.

L'autre écueil de ce type de modélisation est qu'il ne peut fournir d'estimation de comportement au-delà de l'intervalle sur lequel des données sont observées. En effet, la densité estimée de façon non paramétrique sur un intervalle vide de données ne peut qu'être nulle.

Dans notre modélisation des transitions en dépendance, ce dernier point est rédhibitoire pour envisager une modélisation complètement non-paramétrique. En effet, nous observons des données sur courte période (quelques années) et souhaitons utiliser un modèle nous donnant une information sur longue période, non observée.

Pourtant, nous verrons dans le chapitre suivant consacré à l'estimation que si l'approche non-paramétrique, à ce titre, paraît inadaptée, elle s'avère malgré tout très utile pour déterminer la forme globale des lois à modéliser. Elle influera fortement sur la forme paramétrique que l'on choisira finalement.

Dès lors que l'objet d'une modélisation non-paramétrique n'est que la visualisation d'une forme globale des lois à estimer, la problématique de sélection de modèles devient secondaire et l'on peut se contenter de fixer *a priori* une partition de l'intervalle d'observation des données.

Nous avons en pratique deux lois à estimer. Soient donc Δ_p et Δ_f les supports des fonctions $p_{i,j}$ et $f_{i,j}$ définies par les formules 2.7 et 2.11. Nous

exemple) alors on utilise généralement les fonctions *splines*, qui sont des polynômes de degré 3, par morceaux, dont les coefficients sont contraints par les conditions de recollement.

10. Les conditions d'optimalité de sélection de modèles obtenues par Castellan [4] pour un histogramme régulier, (*i. e.* dont les m intervalles de la partition sont d'égales longueur), consistent à choisir un nombre m de morceaux en $\mathcal{O}(n/\log^2 n)$ où n est le nombre d'observations. Ces résultats ont ensuite été généralisés par Lepez [18] au cas de l'estimation par polynômes par morceaux de degré quelconques sous contraintes de régularité quelconques et sur une partition quelconque. Le nombre de morceaux de la partition doit alors être réduit à $\mathcal{O}(\sqrt{n}/\log^2 n)$ afin d'obtenir plus d'information (de données) dans chaque intervalle pour gérer les contraintes.

supposerons, sans limiter la généralité, qu'ils sont indépendants de i et j dans E . On se donne deux partitions à m_p et m_f morceaux des intervalles $[60; s_{\max}]$ et $[0, x_{\max}]$ où s_{\max} et x_{\max} désignent les plus grandes valeurs d'âge et de durée de transitions observées dans l'échantillon de données.

On se donne deux ensembles de constantes $\{p_{I,i,j}; I \in m_p, (i,j) \in E^2\}$ et $\{f_{J,i,j}; J \in m_f, (i,j) \in E^2\}$. Alors, en désignant par 1_I la fonction indicatrice de l'intervalle I , on modélise les fonctions $p_{i,j}$ et $f_{i,j}$ comme

$$p_{i,j} = \sum_{I \in m_p} p_{I,i,j} \times 1_I \quad \text{et} \quad f_{i,j} = \sum_{J \in m_f} f_{J,i,j} \times 1_J. \quad (2.14)$$

2.6 Résumé du choix de modélisation

L'échelle d'évaluation de la dépendance des personnes âgées est la grille AGGIR définie en 1.1.4. Elle comporte 6 niveaux de dépendance, allant de 6 pour une personne autonome à 1 pour une personne dont l'état de dépendance est le plus sévère. En pratique, nous nous adaptons à la référence d'attribution de l'APA (voir 1.2.2) : les personnes en GIR 6 et 5 sont considérées comme non-dépendantes. Les GIR 4 à 1 sont considérés comme ordonnés de l'état le moins dépendant à l'état le plus dépendant. Nous considérons de plus un état 0, absorbant, correspondant au décès. L'espace d'états est donc constitué de 6 éléments $\{5 = \text{non dépendant}; 4; 3; 2; 1; 0 = \text{décès}\}$.

En termes de modélisation, nous distinguons le cas de l'entrée en dépendance du modèle de transition entre les divers états de dépendance, "y compris" la mort.

L'entrée en dépendance est définie par une table d'entrée par GIR et par âge, estimée grâce aux fréquences moyennes observées sur les données, éventuellement lissées.

En ce qui concerne la modélisation des transitions entre états de dépendance des personnes âgées, les sections précédentes montrent assez clairement que l'approche semi-markovienne décrite en 2.5 paraît la mieux adaptée.

Nous ferons de plus l'hypothèse que l'âge d'entrée dans un niveau quelconque en dépendance ne conditionne pas les lois de durées de transition vers un autre état.

Dans cette dernière optique, nous allons donc estimer les durées moyennes de séjour dans un état au moyen des probabilités instantannées de transition $p_{i,j}$ et les densités des lois de durées de transition entre états $f_{i,j}$ grâce à la formule 2.10.

Nous envisagerons une modélisation paramétrique, afin de pouvoir prédire un comportement au-delà de l'intervalle d'observation des durées de transition. Sur la base d'une modélisation linéaire des probabilités de transition et Weibull des durées, la fonction dont les paramètres $(a_{i,j}, b_{i,j}, \nu_{i,j}, \sigma_{i,j})_{(i,j) \in E^2}$ sont à estimer s'écrit, pour tout $s, x > 0$:

$$S_i(s, x) = \sum_{j \neq i} (a_{i,j} \times s + b_{i,j}) \times \left(1 - \int_0^x \nu_{i,j} \sigma_{i,j}^{\nu_{i,j}} t^{\nu_{i,j}-1} \exp(-(\sigma_{i,j} t)^{\nu_{i,j}}) dt \right). \quad (2.15)$$

Afin de mieux cerner notre approche paramétrique, nous serons aussi amenés à conduire une modélisation non-paramétrique. Étant données les deux partitions m_p et m_f définies à la section 2.5.4, la fonction dont les ensembles de paramètres $\{p_{I,i,j}; I \in m_p, (i,j) \in E^2\}$ et $\{f_{J,i,j}; J \in m_f, (i,j) \in E^2\}$ sont à estimer s'écrit, pour tous $s, x > 0$:

$$S_i(s, x) = \sum_{j \neq i} \left(\sum_{I \in m_p} p_{I,i,j} \times 1_I(s) \right) \times \left(1 - \int_0^x \sum_{J \in m_f} f_{J,i,j} \times 1_J(t) dt \right). \quad (2.16)$$

Les estimations des paramètres de ces modèles, ainsi que l'ensemble des interprétations des résultats associés sont l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Estimation des paramètres du modèle

Ce chapitre décrit l'estimation des paramètres du modèle exposé dans la précédente section. Il s'appuie d'abord sur une présentation des diverses données utilisées, puis de la méthodologie statistique employée. Une section est ensuite consacrée aux commentaires d'ordre statistiques et actuariels à propos des modèles construits.

3.1 Les données

En règle générale, plus le modèle statistique repose sur un nombre élevé de paramètres, plus il nécessite un volume important de données pour leur estimation. Pour la modélisation semi-markovienne non-homogène des transitions entre états de dépendance des personnes âgées, la problématique des données est complexe. En effet, peu de données sont en réalité disponibles, ou accessibles, pour les études indépendantes. Les sources possibles des données peuvent être :

- les assureurs, instituts de prévoyance ou mutuelles qui disposent déjà de produits d'assurance dépendance. Ces données sont alors toujours riches, souvent de qualité et contiennent en particulier les données pathologiques liées aux questionnaires santé que remplissent les assurés, mais confidentielles ;
- les enquêtes publiques, elles ne sont alors pas nécessairement conformes à l'utilisation que l'on souhaite en faire (en termes d'échantillonnage, de suivi de cohorte, de type de questions posés, de fréquence d'observation, etc.) ;
- les conseils généraux des départements gérant l'APA, la disponibilité

et la fiabilité des données sont alors très dépendantes de la démarche qualité qui entoure la gestion de la prestation au niveau local ;

- enfin, nous avons à notre disposition un jeu de données interne au régime spécial SNCF géré par la CPRPSNCF, répondant parfaitement au besoin, mais sur une durée d'expérimentation très courte, de 2 ans.

Au final, nous avons obtenu des données provenant de trois sources différentes. De la moins riche à la plus riche ce sont les données : de la CPRPSNCF, de l'enquête HID (Handicaps-Incapacités-Dépendance) et enfin de la DREES, concernant les allocataires de l'APA dans quatre départements.

3.1.1 Les données PSA de la CPRPSNCF

La première source de données consiste en les informations internes de la CPRPSNCF concernant les bénéficiaires de la PSA (voir 1.2.2). Malheureusement, ces données sont insuffisantes quant aux évolutions entre états de GIR. Elles ne contiennent en effet pas assez de transitions observées car la durée d'existence de la prestation est encore trop courte. Par ailleurs, le processus de suivi précis des transitions mis en place pour les besoins de cette étude, n'a pu être poursuivi au delà d'une durée de 2 ans. Si besoin cependant, les données contiennent un nombre considérable d'information socio-économico-démographiques concernant les individus. Elles peuvent également être croisées avec les données de pathologie.

Il est donc impossible, à tout le moins trop ambitieux, de modéliser les passages entre les différents états de dépendance à partir de cette information. Cependant, les données concernant les entrées en dépendance sont, pour leur part, suffisamment nombreuses pour être exploitables sur la première partie de la modélisation, c'est-à-dire l'entrée en dépendance.

3.1.2 L'enquête HID de l'INSEE

La deuxième source d'information est constituée par les données de l'enquête HID (pour Handicaps, Incapacités et Dépendance). Cette enquête de l'INSEE a été réalisée d'octobre 1998 à la fin de l'année 2001. Elle s'est concentrée, dans un premier temps, sur les personnes inscrites en institution spécialisée fin 1998 et, dans un deuxième temps, auprès des personnes résidant à domicile à fin 1999. Elle consiste en un questionnaire aux personnes handicapées, en incapacité ou dépendantes, ou à leurs aidants (professionnels de santé, aides à domicile ou proches) et non sur des évaluations directes par des équipes médico-sociales.

Pendant la première vague de l'enquête HID en 1998-1999, près de 15 000

personnes en établissement et 36 000 personnes vivant à domicile ont été interrogées¹. Les mêmes personnes ont ensuite été de nouveau questionnées deux années plus tard afin d’appréhender l’évolution de leur état.

Parmi elles, nous nous intéressons aux personnes âgées de 60 ans ou plus (soit environ 16 000 individus), représentatives des 12 millions de français de cette classe d’âge. L’enquête fournit des informations générales concernant ces personnes : âge, sexe, département, état de dépendance au premier passage et son évolution (ou décès) deux ans plus tard.

Ces données représentent une importante source d’information et dressent un panorama descriptif efficace des problématiques étudiées au niveau national, comme en atteste le rapport Handicaps, Incapacités, Dépendance de la Revue Française des Affaires Sociales de 2003 [32]. Néanmoins elles souffrent d’un certain nombre de défauts qui nous rend délicate leur utilisation pour la modélisation envisagée.

En premier lieu, tout comme les données de la CPRPSNCF, les données portent sur une période trop courte de deux ans. Elles ne permettant pas, par définition, d’appréhender correctement les transitions d’états plus longues. Elle ne permet pas non plus de visualiser des transitions plus courtes car on ne dispose que de deux photographies aux instants t et $t + 2$. Cela est particulièrement problématique concernant les transitions courtes, notamment celles vers le décès ou entre états de dépendance lourds.

Ensuite, l’attribution du groupe GIR est habituellement faite par une équipe médico-sociale qui évalue le degré d’autonomie de la personne (rappelez que c’est le cas par exemple pour une demande d’APA). Or l’enquête HID repose sur les déclarations des personnes ou de leurs aidants. Un biais peut donc exister entre les points de vue que l’on peut qualifier de subjectif des répondants par rapport à celui plus objectif des professionnels.

En outre, les questions de l’enquête HID ne correspondent pas parfaitement aux critères AGGIR. L’algorithme, permettant de reconstituer le groupe GIR à partir de réponses HID n’est pas très stable : une légère modification des notes attribuées aux variables discriminantes peut provoquer de fortes variations du groupe GIR reconstitué².

L’ensemble de ces difficultés nous fait nécessairement émettre des réserves importantes sur l’utilisation des données de l’enquête pour la modélisation des transitions en dépendance.

1. L’échantillon ainsi constitué a été stratifié selon plusieurs critères médico-socio-démographiques. Les probabilités d’inclusion des individus, donc les facteurs de redressement sont connus.

2. Notons qu’intrinsèquement, cela est aussi vrai de la grille AGGIR pour les personnes âgées dépendantes pour des causes psychiques.

3.1.3 Les données APA de la DREES

En définitive, la source la plus riche de données est l'information issue des remontées individuelles d'allocataires de l'APA jusqu'à 2005, récoltée par la DREES auprès des conseils généraux de certains départements ayant eu une réelle démarche qualité dans l'acquisition et le stockage d'information.

Présentation

Plus précisément, les données APA comportent l'exhaustivité des allocataires de quatre départements (04 – Alpes de Haute Provence, 71 – Saône et Loire, 76 – Seine-Maritime, et 95 – Val d'Oise)³ de la création de l'APA en 2002 jusqu'à la fin 2005. Nous disposons d'informations générales comme l'âge, le sexe et l'évolution d'état de GIR avec le temps pour 52 000 personnes âgées percevant l'APA dans ces départements, dont environ 27 000 avec au moins une évolution d'état de GIR enregistrée entre 2002 et 2005. Nous verrons que les cas d'amélioration d'état de santé sont rares et cela nous permet de supposer, dans nos "raffinements" de modélisations à venir, que la dépendance ne peut que s'aggraver.

Notons également que les données APA ne permettent pas de modéliser l'entrée en dépendance de la même manière que les transitions entre les différents états : les états GIR 6 et 5 ne donnent pas droit à l'APA et, en conséquence, ne sont pas présent dans les données.

Les données APA étant de loin les plus riches en termes de plage temporelle d'étude, d'effectif et de qualité de l'information, ce sont au moyen de celles-ci que seront effectuées nos estimations.

Statistiques descriptives des données APA

Nous résumons les données dont nous disposons par quelques éléments de statistiques descriptives.

La figure 3.1 présente le taux de personnes âgées dépendantes par sexe et âge dans les données APA.

La figure 3.2 présente la répartition des personnes âgées dépendantes par âge, sexe et GIR dans les données APA.

3. Notons que du point de vue de la représentativité de ces données au niveau national, cet échantillon de 4 départements sur les 95 que compte la France métropolitaine peut être interprété comme un sondage en grappe.

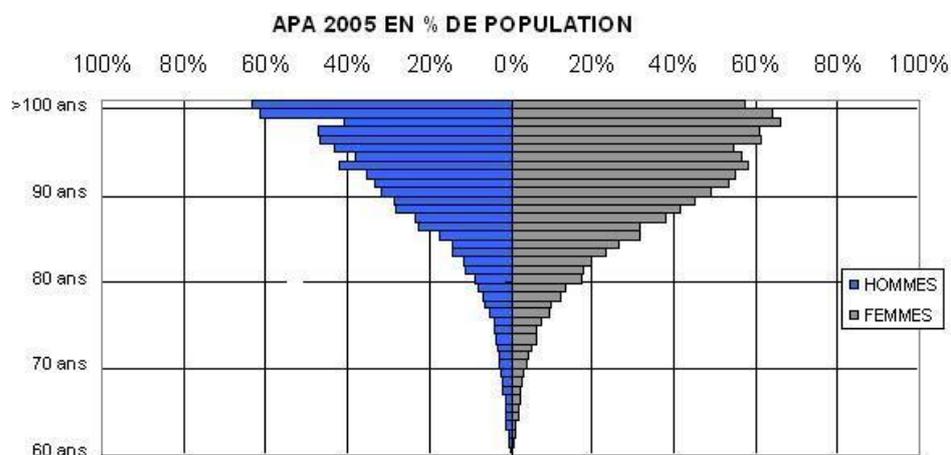


FIGURE 3.1 – Taux de personnes âgées dépendantes par sexe dans les données APA

Enfin, la figure 3.3 présente la comparaison des répartitions par sexe entre population française et population dépendante dans les données APA, par tranche d'âge.

Les âges moyens des personnes âgées dépendantes par sexe et GIR dans les données APA sont donnés dans le tableau suivant :

	Hommes	Femmes	Total
GIR 4	79,7	81,5	81,1
GIR 3	80,4	83,2	82,4
GIR 2	80,0	83,7	82,7
GIR 1	80,3	85,1	84,1
Total	80,0	82,6	81,9

Ces données montrent notamment la prépondérance des femmes dans la population des dépendants. Celle-ci est cependant le reflet de leur sur-représentation dans les classes d'âge élevés. Le plus petit nombre d'hommes explique aussi très probablement le comportement curieux de la statistique d'âge moyen des hommes par GIR.

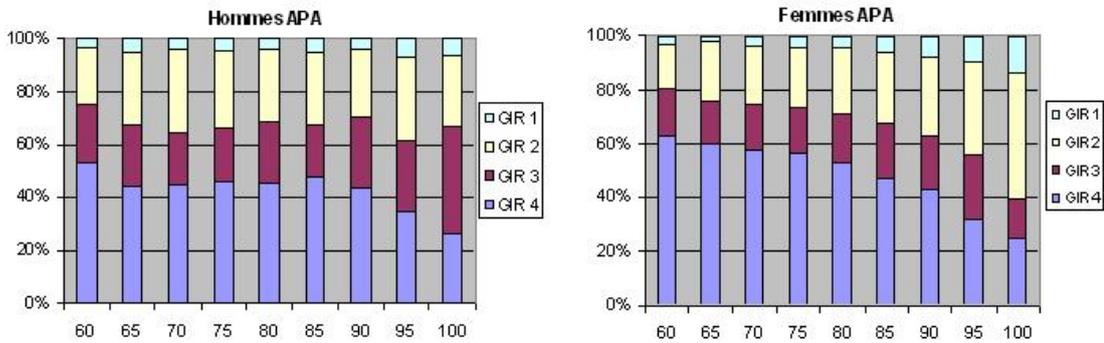


FIGURE 3.2 – Répartition des personnes âgées dépendantes par âge, sexe et GIR dans les données APA

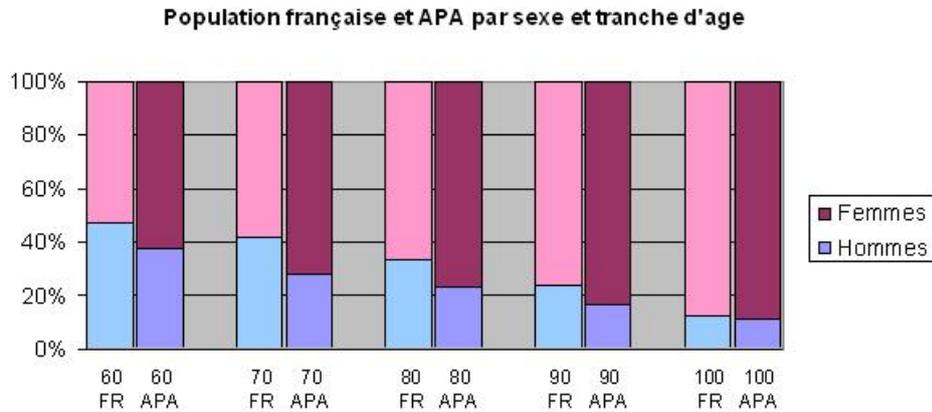


FIGURE 3.3 – Comparaison des répartitions par sexe entre population française et population dépendante dans les données APA, par tranche d'âge

3.2 Méthodologie

3.2.1 L'entrée en dépendance

Le taux d'entrée en dépendance est défini comme le ratio entre le nombre de personnes devenues dépendantes au cours d'une année et la population totale au début de l'année en question. Il est naturel de définir le taux d'entrée en dépendance en fonction de l'âge. Si nous utilisons des covariables, il conviendrait également de segmenter ce taux par leurs diverses occurrences croisées.

En pratique, nous déterminons le taux d'entrée en dépendance en uti-

lisant les données de la CPRPSNCF et celles de l'APA. Pour celles-ci, la méthode employée est la suivante : pour chaque année 2003, 2004 et 2005, nous calculons le rapport entre le nombre de nouveaux dépendants (issus des données APA) pendant l'année et le nombre total de personnes de même âge dans le département (données INSEE). L'année 2002, année de lancement de l'APA, n'a pas été prise en compte, car il est possible que l'année d'ouverture de la prestation ne soit pas nécessairement l'année d'entrée en dépendance. En effet, comme nous l'avons évoqué dans la section 1.2.2, l'APA a concerné un champ plus large de personnes que la précédente prestation légale dépendance qu'était la PSD, en ouvrant le droit à prestation dès le GIR 4 en lieu et place du GIR 3 précédemment. Il est donc légitime de penser qu'un effet "stock" entache la première année de prestation, c'est-à-dire une affluence anormale due à l'entrée en droits de toute une catégorie de personnes qui en étaient préalablement exclues.

Nous notons que le ratio de la section 2.2.1 évalué sur les données reste presque inchangé pour les trois années considérées. Nous en déduisons alors le taux d'entrée en dépendance en fonction de l'âge comme la moyenne des trois taux, pondérée par le poids en effectif de chaque année. La table correspondante est disponible en annexe 1 pour les données APA et CPRPSNCF.

En utilisant ce taux estimé, nous pouvons calculer le nombre de personnes passées dans l'année de l'état autonome à l'état dépendant. Pour intégrer différents états de dépendance dans le modèle, nous utilisons la table de l'annexe 1 (et voir figure 3.5) qui permet de calculer la ventilation du nombre de personnes dépendantes par GIR en fonction de l'âge. Nous savons donc évaluer le nombre de nouveaux dépendants, mais également leur distribution par degré de dépendance.

À ce stade, il nous paraît intéressant de comparer les résultats obtenus avec le taux d'entrée en dépendance utilisé par la SCOR [35]. La formule utilisée est, pour un âge $a \geq 60$,

$$0,0005535 \times e^{0,125 \times a - 6,5} \simeq 0,0015 * e^{0,125 \times (a - 60)}.$$

En estimant les formules correspondantes par régression sur les taux obtenus grâce aux données APA et CPRPSNCF entre les âges de 60 à 90 ans nous obtenons respectivement

$$0,0020 \times e^{0,126 \times (a - 60)} \quad \text{et} \quad 0,0003 \times e^{0,173 \times (a - 60)}.$$

Les graphes correspondants sont les suivants sont présentés sur la figure 3.4.

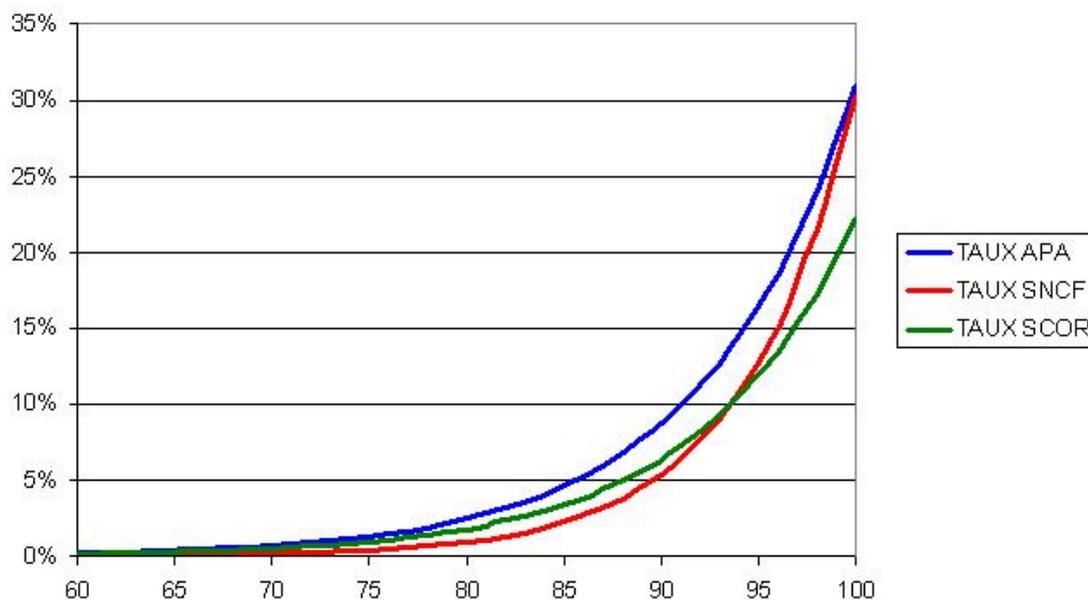


FIGURE 3.4 – Comparaison des taux d’entrées SCOR, APA et SNCF (lissage exponentiel)

Nous observons que la courbe des taux APA est supérieure d’environ 25% à celle de la SCOR. Ceci se justifie par le fait que la SCOR ne prend en compte que la dépendance totale, que l’on peut considérer comme celle démarrant au GIR 2, peut-être 3. En revanche, le fait que le niveau d’entrée en dépendance des retraités de la SNCF soit significativement inférieur aux niveaux SCOR et surtout APA (pour ce dernier, environ 6 fois moins en début de période, mais avec un taux de croissance sensiblement plus fort, +40%) est particulièrement intéressant.

Trois raisons peuvent expliquer cette observation. En premier lieu, les données SNCF proviennent de la prestation PSA adossée à l’APA. Il est possible que certains d’entre eux n’effectuent pas la démarche administrative de solliciter la prestation auprès de la CPRPSNCF, ce qui engendre un biais négatif sur l’observation du nombre de demandes. Par ailleurs, les cheminots sont globalement considérés comme en meilleure santé que la population nationale car ils bénéficient d’un suivi médical régulier et strict⁴. Enfin, et il

4. Cette relative bonne santé se mesure aussi au niveau des dépenses d’assurance maladie, qui sont inférieures en moyenne à celles du régime général, ainsi qu’au niveau de l’espérance de vie des cheminots, qui est également supérieure à celle de la population française.

s'agit probablement là du facteur le plus important, les cheminots subissent un examen médical discriminant à leur entrée dans l'entreprise (et plus particulièrement encore les conducteurs d'engins), donc la population cheminote présente un biais de sélection médicale évident par rapport à la population nationale. Ces trois points doivent cependant être nuancés par le fait que la prestations est ouverte aux ayants droit, donc à une population ne présentant pas les deux derniers biais cités. Ces derniers représentent environ un tiers des retraites, donc de la population des individus exposés au risque dépendance.

Le graphe suivant présente les niveaux des taux d'entrée par GIR et par âge basées sur les données APA. Ces distributions serviront de base à l'estimation de nos taux d'entrée en dépendance lors de la construction de produits d'assurance dans le chapitre 4.

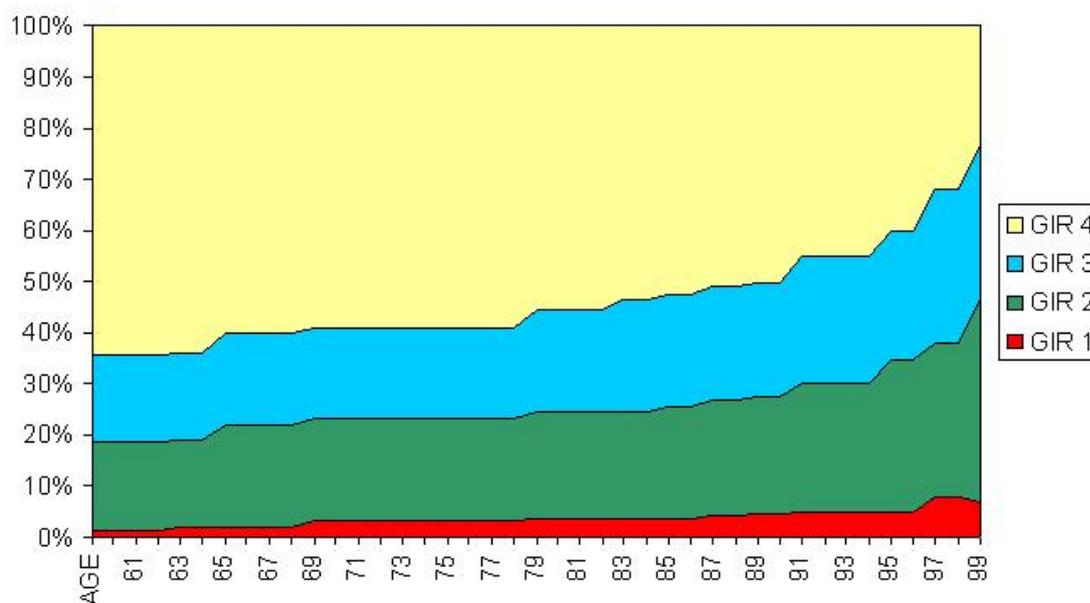


FIGURE 3.5 – Taux d'entrée par GIR et par âge dans les données APA

En attendant, intéressons-nous à l'analyse des données APA préalable à l'estimation des paramètres du modèle de transition.

3.2.2 SNMH et censure

Considérons le processus SMNH défini en 2.5. Supposons que sur une période de temps $[0; s]$ donnée, K personnes sont observées. Pour un individu

donné, nous observons les N états aléatoires de GIR successifs J_0, J_1, \dots, J_N et les temps chronologiques (*i.e.* les âges) S_0, S_1, \dots, S_N d'entrée dans ces états.

Nous observons en pratique que l'individu k change d'état n_k fois aux instants $s_1^k < s_2^k < \dots < s_{n_k}^k$ et passe successivement par les différents états de GIR $j_1^k, j_2^k, \dots, j_{n_k}^k$. Au dernier temps d'observation $s > s_{n_k}^k$,

- soit l'état $j_{n_k}^k = 0$, c'est-à-dire que l'individu est décédé, il a alors été observé jusqu'au bout de sa séquence de transitions ;
- soit $j_{n_k}^k > 0$ et l'individu n'a pas accompli sa séquence complète de transitions pendant la période d'étude.

Dans le dernier cas, le séjour dans l'état $J_{n_k}^k$ de l'individu k est dit *censuré à droite*.

L'existence de ces censures, que nous allons voir très nombreuses dans la pratique, a une influence sur l'estimation des paramètres du modèle. La négliger reviendrait à sous-estimer fortement les durées de transition réelles. Il conviendra donc d'adapter nos protocoles d'estimation à ces censures.

3.2.3 Réduction de la dimension modèle de transition

Nous considérons le processus semi-markovien dont l'espace d'états correspond aux différents degrés de GIR d'un individu. On note $E = \{4, 3, 2, 1, 0\}$ cet espace, où l'état 0 correspond au décès. Nous disposons de données concernant environ 52000 individus, dont 27000 présentent au moins une transition entre deux états sur la période. Les transitions entre les divers états sont observées en fonction de leurs fréquences d'occurrence, en pratique très disparates.

Le tableau suivant donne les fréquences observées des passages à partir de chaque GIR initial (en abscisse) vers le GIR suivant observé (en ordonnée), ainsi que celles des passages censurés :

	GIR 4	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0	Censures
GIR 4		8,5%	9,3%	1,1%	6,9%	74,2%
GIR 3	2,3%		16,4%	2,8%	10,8%	67,7%
GIR 2	1,8%	2,6%		4,2%	18,3%	73,1%
GIR 1	0,5%	0,5%	1,8%		25,9%	71,3%

Nous remarquons, en premier lieu que les passages avec amélioration de GIR⁵ sont rares et non conformes à l'intuition, dans le sens où l'état de dépendance, s'il est dû aux effets de l'âge ne peut, *a priori*, que se dégrader.

5. ceux du triangle inférieur de la matrice : 3 vers 4, 2 vers 3 ou 4, 1 vers 2, 3 ou 4.

En l'occurrence, les cas observés consistent très probablement en des réévaluations à la hausse de GIR estimés trop faibles au départ.

Qui plus est, dans une vision assurancielle, il est prudent de la part de l'assureur tarifant et indemnisant le risque de considérer que de telles améliorations n'existent pas en pratique. Si nous considérons ces transitions comme non existantes effectivement, le tableau des fréquences devient alors :

	GIR 4	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0	Censures
GIR 4		8,5%	9,3%	1,1%	6,9%	74,2%
GIR 3			16,8%	2,9%	11,0%	69,3%
GIR 2				4,4%	19,2%	76,4%
GIR 1					26,6%	73,4%

Enfin, nous notons que les transitions 3 vers 1 et 4 vers 1 sont, elles aussi relativement rares, c'est-à-dire qu'elles sont observées dans moins de 3% des cas. Du point de vue statistique, les intensités de telles transitions peuvent ne pas être correctement estimées car elles ne correspondent qu'à quelques individus observés et ne peuvent refléter un comportement suffisamment "massif" pour être considéré comme statistiquement fiable. De plus, nous avons constaté que leur prise en compte engendre des problèmes de convergence de l'algorithme d'estimation des paramètres du modèle. Nous choisissons donc de supprimer ces transitions dans le modèle. En pratique, nous considérons ces transitions comme non existantes et supposons qu'elles se font en pratique plutôt vers le niveau 2. Le tableau précédent devient finalement :

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0	Censures
GIR 4	8,6%	9,4%		7,0%	75,0%
GIR 3		17,3%		11,3%	61,4%
GIR 2			4,4%	19,2%	76,4%
GIR 1				26,6%	73,4%

Notre modèle semi-markovien est donc, finalement, constitué des 5 états et de 8 transitions (1 vers mort, 2 vers 1 ou mort, 3 vers 2 ou mort, 4 vers 2, 3 ou mort). Nous résumons donc les transitions possibles par le diagramme de la figure 3.6.

3.2.4 Estimation des paramètres

Compte tenu de la forme des fonctions 2.15 ou 2.16 à estimer, nous optons pour l'estimation par maximum de vraisemblance. L'existence d'une

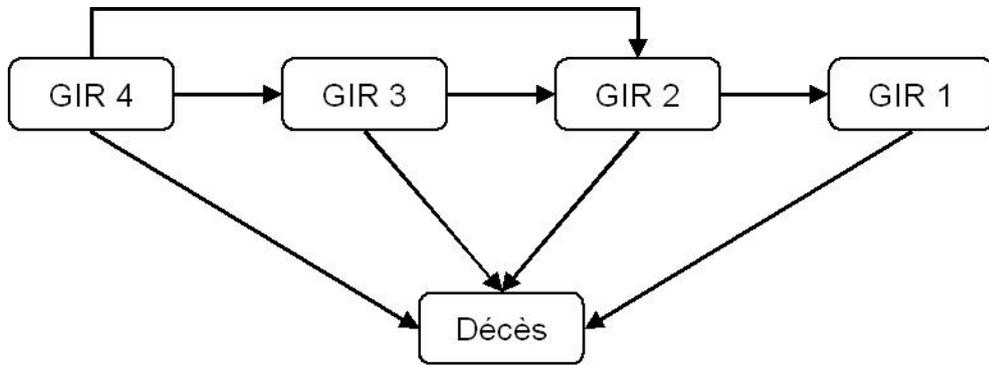


FIGURE 3.6 – Diagramme des transitions possibles en dépendance

théorie asymptotique assurant consistance et normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres des modèles SNMH (voir Ouhbi et Limnios [28]) nous garantit la fiabilité de la méthode.

Une lecture simple et aisée de l'adaptation de l'estimation par maximum de vraisemblance dans le contexte de la survie et sous censure forte peut être trouvée dans Planchet et Thérond [30].

La difficulté sera ici de nature opérationnelle. En premier lieu, il s'agit de construire la fonction de vraisemblance à optimiser, ce compte tenu de la censure lourde que nous subissons. Par ailleurs, l'optimisation de la fonction de vraisemblance ainsi construite sera assez complexe : nombreux paramètres et nombreuses contraintes rendent nombreux les extrémums locaux et difficile la convergence d'algorithmes vers des optimums globaux.

Suivant Mathieu [24], pour une transition observée de l'état i dont l'entrée a eu lieu à la date s vers l'état j dans E avec une durée x , la contribution $c_{i,j}(s, x)$ à la vraisemblance est égale à la densité de probabilité d'être à l'état j après le temps x passé en i à partir de s :

$$c_{i,j}(s, x) = p_{i,j}(s) \times f_{i,j}(x),$$

où les fonctions $p_{i,j}$ et $f_{i,j}$ définies respectivement par les formules 2.7 et 2.11 représentent les probabilités instantanées et densités des durées de transition entre les états i et j de E .

Lorsque la transition depuis l'état i est censurée à droite après un temps d'attente x , la contribution $c_i(s, x)$ à la vraisemblance est directement la fonction de survie $S_i(s, x)$ égale à la probabilité d'avoir passé au moins le temps x en i à partir de la date s , définie par l'expression 2.10 :

$$c_i(s, x) = S_i(s, x) = \sum_{j \neq i} p_{i,j}(s) \times S_{i,j}(x).$$

La fonction de vraisemblance s'écrit, pour tous $s, x > 0$ comme le produit de telles contributions pour chaque passage et chaque individu :

$$L(s, x) = \prod_{k=1}^K \prod_{n=1}^{n_k} \left(c_{j_{n-1}^k, j_n^k}(s_{n-1}^k, x_n^k) \right)^{\xi_n^k} \times \left(S_{j_{n-1}^k}(s_{n-1}^k, x_n^k) \right)^{1-\xi_n^k}$$

où $\xi_n^k = 1$ si la n^{eme} transition de l'individu p est observée, et 0 si elle est censurée, c'est-à-dire non observée.

Cette équation est la forme générale de la fonction de vraisemblance dans le cas d'estimations censurées dont les censures peuvent survenir à tout moment. Comme bien souvent, les censures subies dans nos données concernent seulement le dernier état visité par un individu avant la date s .

Formellement nous obtenons donc,

$$\forall k \leq K \text{ et } n \leq n_k, \quad \xi_n^k = 1 - \delta_{n_k}^n,$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. Autrement dit, ξ_n^k n'est nul que si l'on se trouve dans le dernier état visité.

La fonction de vraisemblance se simplifie alors (un peu...) et s'écrit pour tous $s > 0$ et $x > 0$:

$$L(s, x) = \prod_{k=1}^K S_{j_{n_k}^k}(s_{n_k-1}^k, x_{n_k}^k) \prod_{n=1}^{n_k-1} c_{j_{n-1}^k, j_n^k}(s_{n-1}^k, x_n^k) \quad (3.1)$$

Au travers des contributions c , la vraisemblance L dépend en pratique des paramètres des fonctions p et f à estimer. Nous allons donc chercher, dans la suite, à la maximiser par rapport à ces paramètres.

3.3 Première approche paramétrique

3.3.1 Formalisation du modèle

La modélisation du processus de saut $p_{i,j}$ (qui dépend implicitement d'un vecteur de paramètres à estimer) doit satisfaire certaines conditions :

- les sauts ne sont définis uniquement qu'entre des états distincts ;

- si elle existe, la probabilité de transition de i à j est positive pour tout âge s ;
- si elle existe, la somme des probabilités de transition dont la source est l'état i est égale à 1 pour tout âge s .

Conformément au choix effectué en 2.5.3, nous choisissons de modéliser les probabilités des transitions par des fonctions linéaires en le temps chronologique s .

Par ailleurs, les temps de séjour dans un état i avant le transfert vers un autre état j peuvent être distribués selon une loi continue quelconque. Nous avons choisi la loi de Weibull pour la modélisation des densités $f_{i,j}$ avec deux paramètres d'échelle et d'applatissage $\nu_{i,j}$ et $\sigma_{i,j}$, spécifiques à chaque transition.

Ainsi, pour chacune des 8 transitions définies en 3.2.3, les paramètres du modèle sont inclus comme suit à la fonction de vraisemblance :

- en premier lieu les paramètres de pente $a_{i,j}$ et d'ordonnée à l'origine $b_{i,j}$ du processus de saut linéaire $p_{i,j}(s) = a_{i,j} \times s + b_{i,j}$;
- puis les paramètres $\nu_{i,j}$ et $\sigma_{i,j}$ des lois des séjours entre chaque transition de type Weibull définie par $f = w_{\nu,\sigma} = \nu\sigma^\nu x^{\nu-1} \exp(-(\sigma x)^\nu)$.

Le nombre total de paramètres à estimer est donc finalement de 24. La fonction de vraisemblance associée à ce modèle est donc une fonction de 24 variables à valeurs réelles, constituée du produit de plusieurs dizaines de milliers de facteurs.

Par ailleurs, le système de contraintes que nous devons inscrire dans le protocole d'optimisation de la vraisemblance s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \neq i \text{ et } \forall s \geq 0, \\ p_{i,i}(s) = 0, \\ 0 \leq p_{i,j}(s) \leq 1, \\ \sum_{j \neq i} p_{i,j}(s) = 1, \\ \nu_{i,j} > 0 \text{ et } \sigma_{i,j} > 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Il n'est pas difficile de voir que la résolution analytique du programme de maximisation de la vraisemblance est irréalisable. Nous nous tournons donc vers un programme de résolution numérique du problème d'optimisation.

L'algorithme de maximisation de la vraisemblance pour ce modèle semi-markovien a été implémenté sous le logiciel MATLAB *via* la macro "*fmincon*" permettant d'optimiser une fonction de plusieurs variables sous contraintes,

de préférence linéaires, ce qui est le cas du système 3.2⁶. La fonction de vraisemblance étant une fonction particulièrement complexe, elle présente un certain nombre de maximums locaux. Il nous a donc été nécessaire de faire tourner l'algorithme avec plusieurs valeurs initiales des paramètres afin de trouver le maximum global de façon raisonnablement sûre.

Remarque : il est à noter que la recherche particulière d'un maximum, étant donné un vecteur de conditions initiales, prend entre 4 et 10 heures sur un micro-ordinateur type de l'année 2007. Les estimations dont les résultats suivent ont donc été extrêmement longues à obtenir.

3.3.2 Résultat des estimations

Les résultats des estimations des paramètres du modèle SMNH sont présentés sous forme de tableaux pour chaque état de GIR initial i en ligne vers l'état j en colonne.

Rappelons que les paramètres estimés sont les pentes $a_{i,j}$ et ordonnées à l'origine $b_{i,j}$ pour le processus de saut linéaire $p_{i,j}$. Les paramètres sont $\nu_{i,j}$ et $\sigma_{i,j}$ pour la loi de Weibull régissant la durée de la transition entre les états i et j .

Les estimation des probabilités de transition nous donnent :

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0
GIR 4	$-0,003 s + 0,182$	$0,007 s + 0,091$		$-0,010 s + 0,727$
GIR 3		$0,002 s + 0,426$		$-0,002 s + 0,574$
GIR 2			$-0,006 s + 0,331$	$0,006 s + 0,669$
GIR 1				$0,000 s + 1,000$

Remarquons que les coefficients estimés $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ respectent les contraintes du système 3.2. Le contraire eut été inquiétant...

Les estimation des lois des durées des transitions sont :

Transition vers GIR	Transition vers le decès
$f_{4,3} = W(1, 66; 0, 36)$	$f_{4,0} = W(1, 24; 0, 13)$
$f_{4,2} = W(1, 81; 0, 39)$	$f_{3,0} = W(1, 18; 0, 20)$
$f_{3,2} = W(1, 58; 0, 40)$	$f_{2,0} = W(1, 35; 0, 25)$
$f_{2,1} = W(1, 46; 0, 27)$	$f_{1,0} = W(1, 17; 0, 22)$

6. Notons que si, comme dans la section 2.5.3, nous avons envisagé une forme "logit" des probabilités de transition, les contraintes associées à la maximisation de la vraisemblance n'auraient alors plus été linéaires.

Ces résultats, notamment les estimations des paramètres des lois de Weibull, nous permettent d'évaluer les temps moyens de passage entre les différents états de dépendance. Le tableau suivant récapitule ces résultats, exprimés en nombre d'années.

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0
GIR 4	2, 4	2, 2		7, 1
GIR 3		2, 2		4, 7
GIR 2			3, 4	3, 7
GIR 1				4, 2

Ces temps moyens semblent être élevés par rapport à la vision standard que l'on peut avoir du comportement en dépendance, notamment de l'espérance de vie en dépendance. À ce stade, deux possibilités sont à explorer :

- l'influence de la proportion de données censurées, qui peut avoir un effet néfaste sur la qualité d'estimation ;
- le choix de la forme des lois de durées choisies, qui peut ne pas être adapté aux données malgré les parallèles que nous avons faits avec les problématiques épidémiologique, de survie ou de fiabilité.

Nous serons amenés à envisager le premier point dans la section 3.6.2. Pour l'heure, nous tentons de remettre cause nos premiers choix de modélisation paramétrique en essayant l'approche non-paramétrique.

3.4 Modélisation non-paramétrique

Nous montrons dans cette section que l'estimation non-paramétrique nous permet de valider l'hypothèse linéaire des probabilités de transition et qu'elle nous conduit à revoir assez fondamentalement l'hypothèse Weibull systématique des lois des durées de transition.

3.4.1 Probabilités instantanées de transition

Nous commençons par une modélisation non-paramétrique des probabilités de transition. Au lieu de supposer, comme précédemment, que les probabilités sont linéaires par rapport au temps chronologique, nous les modélisons à l'aide de fonctions constantes par morceaux, conformément à la section 2.5.4.

Nous partitionnons donc, arbitrairement, l'ensemble des âges observés en quatre intervalles : 60 à 70 ans, 71 à 80 ans, 81 à 90 ans et plus de 91 ans. Cela porte le nombre des paramètres à 4 pour chaque transition

modélisée, soit deux de plus que dans le cas paramétrique. Nous restons ici volontairement modestes dans la taille de notre partition, bien que nous disposions de beaucoup de données. Nous verrons en effet que, d'une, il n'est pas nécessaire d'exiger plus de détails et deux, la convergence de l'algorithme de maximisation de la vraisemblance étant très lente, cette prudence est nécessaire.

Cependant, les probabilités de transition doivent toujours satisfaire les conditions du système 3.2 :

$$p_{i,j}(s) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \sum_{j \neq i} p_{i,j}(s) = 1,$$

Le nombre total de paramètres décrivant les probabilités de passage s'élève finalement à 16.

Une fois effectuées les estimations par maximisation de la fonction de vraisemblance, nous constatons que les résultats sont très proches de ceux obtenus avec des fonctions linéaires en temps.

À titre d'exemple, l'image suivante représente les probabilités de passage de GIR 4 vers GIR 2 estimées par les deux méthodes :

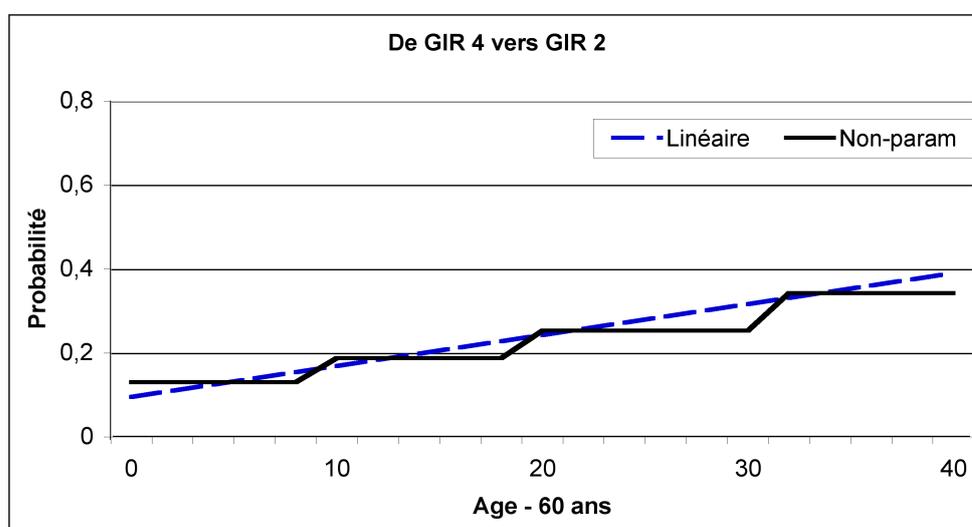


FIGURE 3.7 – Estimation linéaire et non-paramétrique des probabilités de passage de GIR 4 en GIR 2

Le même effet est observé pour les autres passages modélisés. Nous pouvons finalement conclure que le choix des fonctions linéaires par rapport au temps pour décrire les probabilités de passage est justifié et nous permet de garder un nombre de raisonnable de 8 paramètres.

3.4.2 Lois des durées des transitions

Passons maintenant à l'estimation non-paramétrique des durées de passage entre états. Les données portent sur un intervalle d'étude de quatre ans, que nous partitionnons en huit périodes de six mois. Nous procédons à l'estimation non-paramétrique par maximisation de la vraisemblance, en supposant les densités des lois de durées constantes par morceaux sur l'intervalle d'étude.

Estimations

La figure 3.8 représente la loi estimée avec les deux différentes méthodes pour la durée de passage de GIR 1 vers le décès.

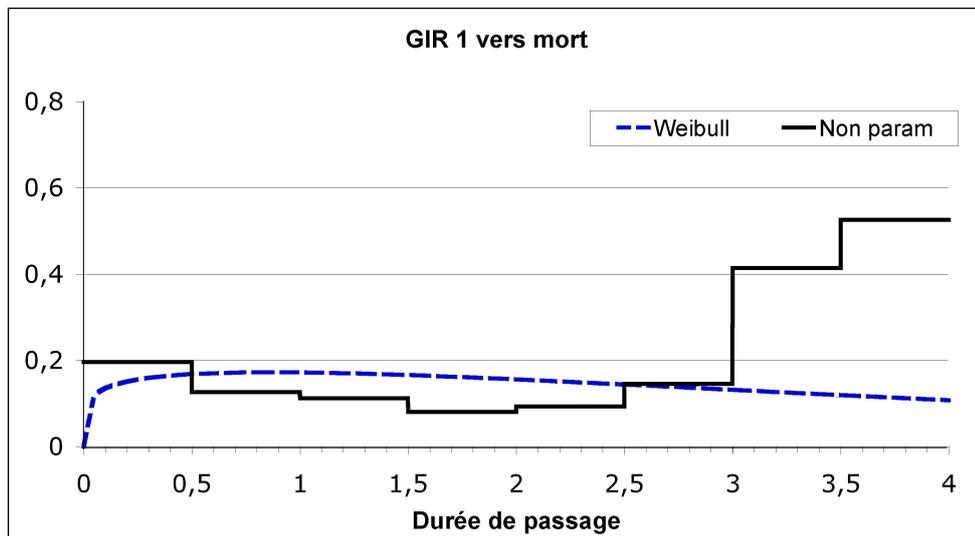


FIGURE 3.8 – Estimations paramétrique Weibull et non-paramétrique de la durée de la transition de GIR 1 vers le décès

Nous observons sur ce graphe que la loi estimée de façon non-paramétrique présente clairement deux maximums locaux : l'un sur le premier intervalle zéro et l'autre sur le dernier. Assurément, cette forme de loi, dite *U-statistique*, est incompatible avec un comportement de type Weibull, qui est unimodale et étalée à droite.

Notons que la loi estimée par la une fonction constante par morceaux est évidemment proche d'une estimation directe par histogramme de la loi empirique des durées de transition entre les GIR considérés. À titre d'illustration, la figure 3.9 montre les quatre estimateurs par histogrammes des transitions des GIR $i = 4, \dots, 1$ vers le décès.

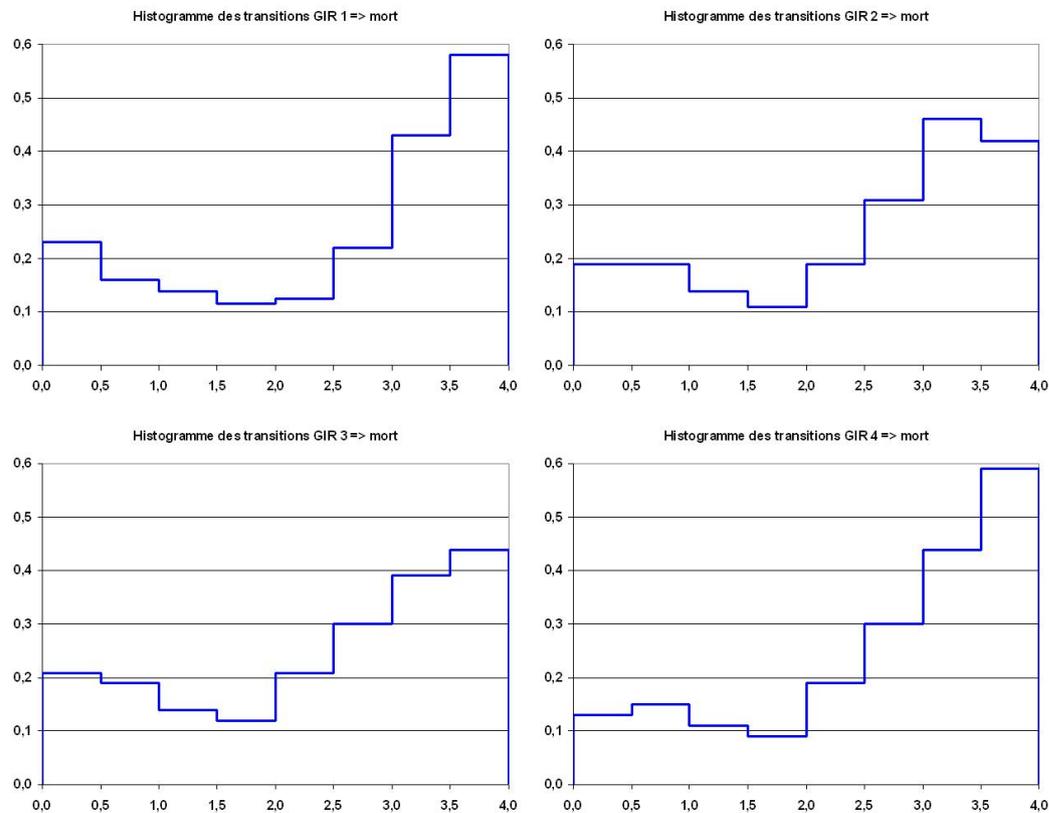


FIGURE 3.9 – Estimations directe par histogrammes des transitions vers le décès

Toutes les transitions vers le décès présentent une forme de U-statistique. Il est donc nécessaire de corriger notre modèle pour prendre en compte ce comportement.

L'apport des fiabilistes

Ce type de comportement bimodal est parfois observé dans les problématiques de fiabilité (voir Bucar *et al.* [3] et Jiang et Murthy [15]). En effet, lorsque l'on est amené à observer des taux de défaillance de systèmes, il se peut que les causes soient de un, deux ou n types, sans que l'on puisse isoler les éléments de l'échantillon défaillants du premier, second, ou $n^{\text{ème}}$ type. Il en résulte une distribution des durées de survie des systèmes pouvant présenter plusieurs modes, ou maximums.

La réponse à ces observations complexes est simple. Elle consiste à supposer qu'effectivement, plusieurs échantillons non distinguables répondant à

plusieurs lois ont été mélangés. La densité résultante est donc un mélange, c'est-à-dire une combinaison convexe⁷ des densités propres à chaque sous-échantillon caractérisé par son type de défaillance et supposé obéir à une et une seule loi. En pratique, chacune de ces lois est supposée être elle-même Weibull, seuls les paramètres associés à chaque sous-échantillon varient⁸.

Reste ensuite à justifier qu'une telle observation sur les données peut être révélatrice d'un comportement de mélange et proposer alors une explication plausible associée à chaque composante du mélange.

Utilisation de mélanges

En conséquence et afin de mieux adapter la modélisation aux données disponibles, nous utilisons un mélange de deux lois de Weibull illustrant le caractère bimodal du résultat de l'estimation non paramétrique. La densité du mélange de deux lois de Weibull se définit pour $\alpha \in [0; 1]$ donné comme

$$f = \alpha \times w(\nu_1, \sigma_1) + (1 - \alpha) \times w(\nu_2, \sigma_2),$$

où $w(\nu_1, \sigma_1)$ et $w(\nu_2, \sigma_2)$ sont les densités de deux lois de Weibull standards avec les paramètres correspondants.

Le nombre de paramètres pour chaque transition passe de 2 pour la modélisation Weibull à 5 pour le mélange :

- 4 au titre des paramètres ν et σ des deux Weibulls constitutives des mélanges ;
- le taux de mélange α est aussi traité comme un paramètre du modèle, dans la mesure où nous n'avons pas de moyen *a priori* de connaître le poids relatif de chacune des deux lois dans le mélange.

Au final, 40 paramètres sont utilisés pour la modélisation des durées et 56 au total compte tenu des probabilités de transition instantanées. Les résultats des estimations pour les durées modélisées à l'aide d'une puis deux lois de Weibull sont présentés sur les figures 3.10 et 3.11

Nous pouvons observer que les lois décrivant les passages vers le décès diffèrent très sensiblement entre les deux types de modélisation. Pour les autres passages, ceux qui ne concernent pas le décès, mais juste l'aggravation de l'état de dépendance, cet effet est moins important, voire négligeable. Nous utilisons cette dernière campagne d'estimation pour finaliser notre modèle.

7. C'est-à-dire une combinaison linéaire dont la somme des coefficients est égale à 1.

8. Pour aller un peu plus loin encore, une observation de durées de survie présentant plusieurs modes est souvent elle-même considérée comme caractéristique de l'existence de plusieurs types de défaillance. Dans le cas de 2 modes, le premier correspondant à une panne anormale et le second à la seule vétusté des systèmes.

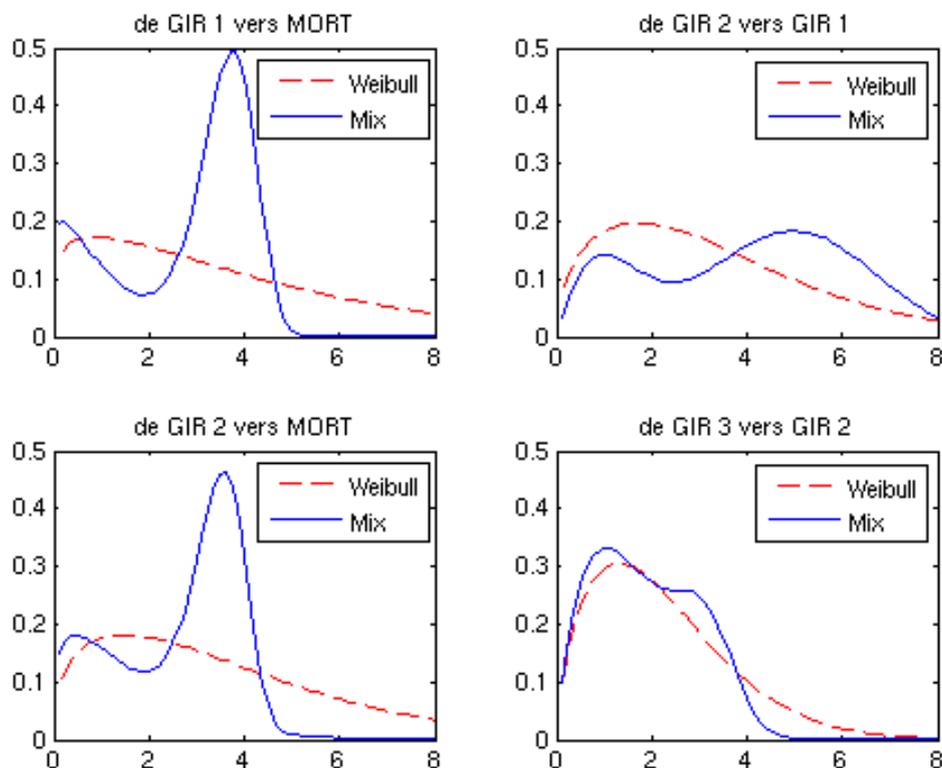


FIGURE 3.10 – Estimations paramétrique Weibull et mélange de deux Weibulls pour les lois des durées de transition – 1

3.5 Modélisation paramétrique affinée

3.5.1 Justification de l'hypothèse de mélange

L'explication que nous proposons au fait que les comportements de transition vers le décès diffèrent de ceux liés à une aggravation est la suivante : parmi des personnes âgées dépendantes qui décèdent, une partie d'entre-elles sont dépendantes en raison d'une maladie, éventuellement grave. Ces personnes effectuent le passage vers la mort rapidement et représentent le premier mode dans la loi estimée, ou, autrement dit, correspondent à la première loi de Weibull dont le mode est proche de 0. L'autre partie est constituée de personnes âgées dépendantes, mais dont la dépendance n'est pas liée à un état de santé dégradé par la maladie. Celles-ci ont donc une espérance de vie bien plus élevée que celle du premier groupe et cette durée est décrite par la deuxième loi de Weibull du mélange.

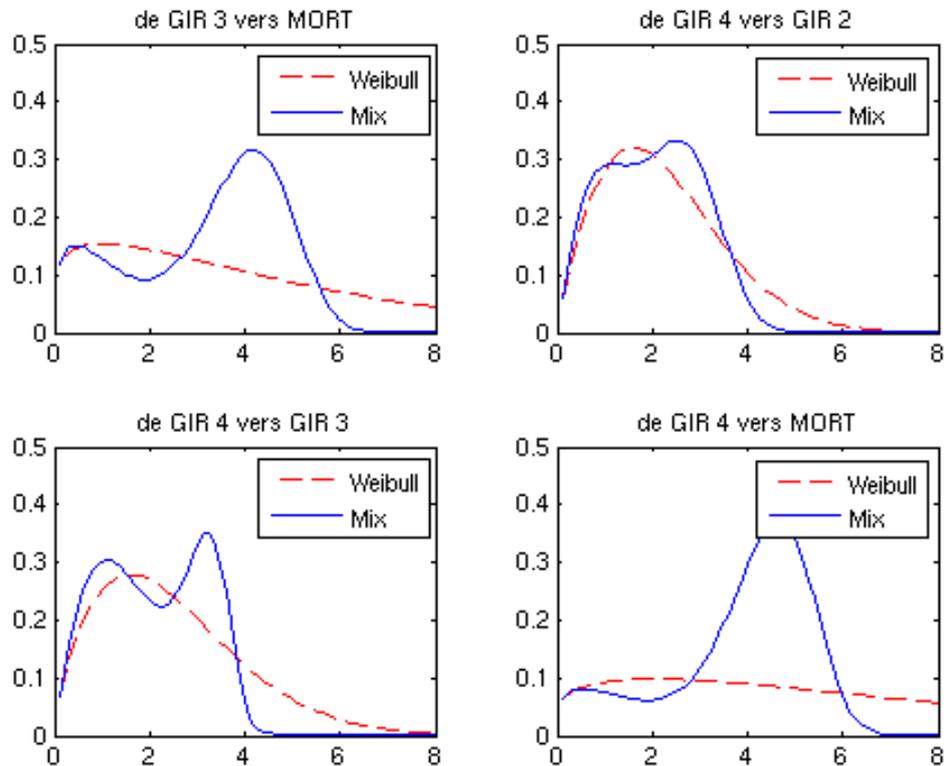


FIGURE 3.11 – Estimations paramétrique Weibull et mélange de deux Weibulls pour les lois des durées de transition – 2

Il n'est pas possible de vérifier cette hypothèse sur les données APA car celles-ci ne reflètent pas l'état de santé de l'individu.

Les données de la CPRPSNCF en revanche permettent de lier les transitions entre états de GIR, notamment celles vers le décès à une caractéristique qui résume l'état de santé de l'individu : la notion d'Affection de Longue Durée (ALD). En effet, la CPRPSNCF étant régime gestionnaire de l'assurance maladie des cheminots et de leurs ayants droit, la notion d'ALD est présente dans les bases de données et il est possible de faire le lien entre décès précoce et état de santé pour les individus ayant effectué une transition directe vers le décès.

Afin de valider heuristiquement notre hypothèse, il suffit de montrer la prédominance des personnes en ALD au sein de l'échantillon des personnes ayant effectué une transition directe vers le décès par rapport à ceux qui n'ont fait qu'une transition liée à l'aggravation de leur état de dépendance.

Les résultats suivant sont présentés tous états de GIR confondus, car les effectifs par GIR présentant des transitions, c'est-à-dire hors effectifs censurés, sont trop faibles. Sur les 6 507 cas recensés sur une durée de 2 ans, 1 439, soit environ 22,1 % présentent une transition vers le décès et 356, soit 5,5 % présentent une transition de GIR hors décès sur la période.

Taux d'ALD	GIR \rightarrow GIR	GIR \rightarrow Deces	Total
Total	66,4 %	78,1 %	69,7 %

Un rapide test d'égalité de moyenne montre que les écarts sont statistiquement très significatifs et que les taux d'ALD des individus effectuant une transition vers le décès est significativement plus élevé que ceux qui effectuent une transition vers entre GIR hors décès. On pourrait objecter que ce résultat n'est, somme toute, guère étonnant. En effet, on constate que les individus effectuant une transition vers le décès ont un âge moyen au décès de 89,3 ans contre 87,2 pour ceux qui effectuent leur dernière transition vers un état de GIR hors décès, or le taux d'individus en ALD est croissant avec l'âge. Même en corrigeant de cet effet âge (environ 1 % par année), les résultats restent cependant très probants. L'hypothèse de mélange est donc bel et bien fondée.

3.5.2 Calage final du modèle

Finalement, nous utilisons un mélange de deux lois de Weibull pour les passages vers la mort et nous conservons les lois de Weibull standards pour les autres types de transitions.

Le nombre de paramètres du modèle complet s'élève alors à 8 pour les probabilités ($a_{2,1}, a_{3,2}, a_{4,3}, a_{4,2}$ et analogues pour les paramètres b), 8 pour les passages modélisés avec Weibull simple ($\nu_{2,1}, \nu_{3,2}, \nu_{4,3}, \nu_{4,2}$ et analogues pour σ) et enfin 20 pour les passages avec le mélange de Weibull ($\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \alpha_{3,0}, \alpha_{4,0}$ et analogues pour $\nu_1, \sigma_1, \nu_2, \sigma_2$), ce qui représente donc 36 paramètres au total.

Pour estimer ces paramètres, *i.e.* trouver les valeurs avec lesquelles le modèle est le mieux ajusté à la réalité observée, nous maximisons à nouveau la fonction de vraisemblance associée à ce modèle.

3.5.3 Résultats finaux d'estimation

L'impact de la modélisation à l'aide du mélange de deux lois de Weibull sur les durées moyennes de transition est considérable, surtout concernant les passages vers le décès.

Pour les paramètres des probabilités de transition $p_{i,j}$ nous obtenons :

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0
GIR 4	$-0,008s + 0,708$	$0,006s + 0,139$	$-0,011s + 0,652$	$0,002s + 0,153$
GIR 3		$-0,001s + 0,638$		$0,001s + 0,362$
GIR 2				$0,011s + 0,348$
GIR 1				$0,000s + 1,000$

Les estimation des lois des durées de passage nous donnent :

Transition vers GIR	Transition vers le deces
$f_{4,3} = W(1, 40; 0, 22)$	$f_{4,0} = 0,42 \times W(1, 35; 0, 69) + 0,59 \times W(5, 08; 0, 28)$
$f_{4,2} = W(1, 69; 0, 40)$	$f_{3,0} = 0,73 \times W(1, 08; 0, 31) + 0,27 \times W(5, 90; 0, 27)$
$f_{3,2} = W(1, 47; 0, 30)$	$f_{2,0} = 0,51 \times W(1, 17; 0, 51) + 0,49 \times W(5, 98; 0, 28)$
$f_{2,1} = W(1, 47; 0, 20)$	$f_{1,0} = 0,26 \times W(1, 16; 0, 95) + 0,74 \times W(4, 14; 0, 24)$

Comme dans la section 3.3.2, ces résultats nous permettent d'évaluer les temps moyens de passage entre les différents états de dépendance. Le tableau suivant, exprimé en nombre d'années, les récapitule, pour comparaison au modèle semi-markovien sans mélange de la section 3.3.2 :

	GIR 3	GIR 2	GIR 1	GIR 0
GIR 4	4, 1	2, 2		2, 4
GIR 3		2, 3		3, 2
GIR 2			4, 6	2, 6
GIR 1				3, 1

Entre les deux modèles avec et sans mélange, la physionomie des lois de durées de séjour dans un état change. L'utilisation de mélanges tend en effet à

- rallonger la durée des transitions au sein d'un même type de dépendance (légère pour les transitions $4 \rightarrow 3$ ou lourde pour les transitions $2 \rightarrow 1$);
- réduire très sensiblement les durées des transitions vers le décès, dans des proportions nettement plus satisfaisantes par comparaison aux données d'expérience d'assureurs.

3.6 Commentaires de modélisation

3.6.1 Vraisemblance et biais des résultats obtenus

Les moyennes de temps de séjour observés à la section 3.5.3 sont plus élevés que celles que l'on voyait publiées au début des années 2000. En cette

fin de décennie, l'heure est à la prudence et il est communément admis que l'on sous-estime encore les durées de survie en dépendance. Les conversations informelles que nous avons pu avoir avec les assureurs, ainsi que les données d'expérience de la CPRPSNCF tendent à valider, à grande maille, les ordres de grandeur des résultats précédents. À tout le moins, ils ne paraissent pas choquants aujourd'hui là où ils l'auraient été voilà encore dix ans.

Il est probable qu'avec le temps, ces ordres de grandeur s'allongent encore au fil des années qui viennent et à mesure que les modes de couverture de la dépendance deviendront de plus en plus matures. Au moins deux raisons prévalent à cela :

- premièrement, rappelons que l'assurance dépendance est jeune. Cela signifie que nous sommes encore statistiquement sur un "effet stock" sur lequel nous avons un nombre non négligeable d'individus qui n'ont bénéficié que d'une prise en charge tardive de leur dépendance et qui ont donc une trajectoire de survie visible en dépendance écourtée par rapport à un nouvel entrant d'aujourd'hui ;
- deuxièmement, l'allongement de l'espérance de vie aura nécessairement un impact sur la durée de vie en dépendance. Il est parfois admis que les gains d'espérance de vie sont des gains de vie hors dépendance (on retrouve notamment cet argument dans Loones [20]). Cela est probablement vrai dans une vision de court terme dans laquelle nous ne vivons pas de changement de technologie médicale envers les personnes âgées. Sur le long terme, il n'est nul doute que les efforts de la médecine pour prolonger la vie s'appliqueront également à la phase de dépendance. Cela est certain au moins pour la couverture du risque dépendance associée au maintien à domicile.

Pourrait-on envisager une approche prospective du modèle destinée à prendre en compte cet inévitable allongement de l'espérance de vie ? Contrairement aux longs historiques dont nous disposons pour le calage de tables de mortalité prospectives en actuariat, nous pensons qu'en matière d'assurance dépendance, il est encore trop tôt. Nous n'avons pas assez de recul pour déjà connaître les dérives passées, indispensables pour anticiper celles du futur.

3.6.2 Limites éventuelles

L'impact de la censure

Le lecteur attentif aura remarqué que dans le tableau de la section 3.5.3, les plus grandes durées moyennes estimées des transitions ont le même ordre de grandeur que l'intervalle de temps sur lequel nous disposons de données,

soit 4 ans. Il est alors légitime de se demander s'il s'agit d'une coïncidence ou d'un effet de la censure massive que nous subissons.

Afin de tester cet effet, nous avons effectué nous-mêmes une censure artificielle en considérant successivement que les transitions arrivant 3,5 puis 3 puis 2,5 années après le début de l'étude nous étaient inconnues. Nous avons ensuite pratiqué l'estimation des paramètres d'un modèle semblable à celui de notre calage final sur ces données.

Les résultats obtenus sont d'une étonnante stabilité pour les censures artificielles à 3,5 et 3 ans. Les résultats à 2,5 ans donnent, pour leur part, des évaluations abhéroentes et des lois de durées de transition vers le décès exagérément courtes, ce qui semble logique.

Prise en compte de covariables

Assurément, et comme l'ont montré Robert et Denuit [34] dans leur contexte, le modèle bénéficierait d'être affiné en prenant en compte des covariables comme le sexe et les pathologies. Il faut cependant être conscient qu'à moins de se placer dans le cadre de modèles à risques proportionnels⁹, la prise en compte de covariables multiplie le nombre de paramètres à estimer par le nombre d'occurrences des covariables prises en compte, ce qui nuit à la robustesse du modèle et complexifie encore les programmes de maximisation de vraisemblance.

Une variable serait intéressante cependant à prendre en compte, celle du lieu de résidence : domicile ou établissement. Il ne s'agit pas d'une covariable dans la mesure où sa valeur est susceptible d'être (et sera même certainement) modifiée au cours de la trajectoire en dépendance. Il en va d'ailleurs potentiellement de même avec la covariable pathologie. Sa prise en compte nécessite donc d'adapter le modèle et pas seulement de le scinder en sous-catégories correspondant aux différentes modalités possibles.

Une variable *a priori* inappréhensible du point de vue statistique a également une influence très forte sur la survie en dépendance et plus précisément sur l'allongement de la survie. Il s'agit du soutien des proches. De façon un peu sarcastique et sans modes d'évaluation, l'assureur doit la prendre en compte par le biais de ses marges de sécurité sur tarifs.

9. Dans lesquels les vecteurs des paramètres associés à chaque occurrence de la covariable sont considérés proportionnels. Le nombre de paramètres supplémentaires à estimer n'est donc augmenté que du nombre de valeurs possibles prises par la covariable.

L'hypothèse de Markov

Dernier point, mais d'envergure, l'hypothèse fondamentale de Markov selon laquelle le futur du processus ne dépend du passé qu'au travers du présent peut faire débat. Rappelons en effet que cette hypothèse suppose que quel que soit l'histoire par laquelle un individu arrive dans un état de GIR donné, son comportement futur n'y est pas conditionné.

Nous avons vu que cette hypothèse est centrale dans la construction du modèle et l'estimation de ses paramètres. Pourtant, nombreux sont ceux, plutôt dans le camp des naturalistes (donc de ceux qui cotoient le problème au jour le jour), médecins, gériatres, infirmières, personnel d'établissements spécialisés, qui considèrent, sans pouvoir bien le quantifier, que le passé est une donnée essentielle à l'anticipation du devenir des individus.

Par l'ensemble de ces remarques, nous ne faisons que toucher du doigt le fait qu'un modèle, si précis soit-il, n'est qu'une simplification d'une réalité dont la complexité ne peut être appréhendée dans sa globalité par une démarche analytique. Tout au mieux, nous tentons de construire une description pouvant servir d'aide à l'analyse et à la décision pour l'assureur.

Chapitre 4

Produits d'assurances dépendance

4.1 démarche générale

Les principales couvertures proposées en France et à l'étranger prévoient le versement d'une rente viagère ou d'un capital définis à l'avance. Souvent, les rentes n'ont qu'au mieux deux niveaux possibles, selon que l'assuré est en dépendance dite partielle (typiquement GIR 4 et 3) ou totale (GIR 2 ou 1).

Le modèle que nous avons construit aux chapitres 2 et 3 permet d'appréhender les trajectoires probables des individus en dépendance. Cependant, afin de tarifier une rente viagère dont le montant est finement adapté aux niveaux de dépendance successifs que traverse l'individu, il est nécessaire de comprendre toutes les trajectoires possibles que notre modèle est susceptible de générer et les probabilités d'occurrence de celles-ci. Seule une vision globale aussi exhaustive que possible des trajectoires du processus de transition permettra d'évaluer les valeurs actuelles probables des flux futurs correspondant aux prestations versées à l'assuré par l'assureur et réciproquement, les primes versées à l'assureur par l'assuré.

Pour construire des produits d'assurance basés sur notre modèle, nous devons donc, dans un premier temps, probabiliser les trajectoires possibles en dépendance. Ce travail n'est possible qu'au travers de simulations de Monte-Carlo. En effet, le modèle est si complexe qu'une évaluation purement analytique n'est pas accessible. Ces simulations doivent nous permettre, en particulier, de comprendre la variance des trajectoires ainsi que la sensibilité de ces trajectoires aux paramètres d'intérêt du modèle, donc les incertitudes qui existent autour des flux futurs de prestations.

Une fois les simulations de Monte-Carlo effectuées, nous sommes alors en mesure de construire des tables de transitions, mortalité, et coûts associés à plusieurs jeux d'hypothèses sur les niveaux de rentes proposés par l'assureur

en fonction des niveaux de GIR.

Nous proposerons deux approches classiques d'assurances viagères par capitalisation de primes au cours de la vie avant l'occurrence du risque. Ces produits sont typiquement dans le champ de l'assurance privée, mutualiste ou de type contrat collectif. Ces exemples de produits se prêtent particulièrement bien aux analyses de sensibilité aux différents paramètres du modèle actuariel que nous construirons à partir de notre modèle stochastique. Nous étudierons donc l'influence des taux d'actualisation, des taux de placement des primes acquises et enfin des probabilités d'entrée en dépendance.

Pour terminer, nous envisagerons le cas d'une prestation qui pourrait être servie par un régime de base de sécurité sociale, au sens de notre interprétation décrite en 1.3.2. Il s'agira de cerner, à l'inverse de l'approche assurance privée, quels sont les niveaux de rentes possibles que peut proposer un régime par répartition, sous contrainte de budget annuel de prestations. En pratique, ce budget est lui-même soumis aux évolutions de la démographie du régime.

4.2 Simulation des trajectoires par la méthode de Monte-Carlo

4.2.1 Principe

Le modèle Semi-markovien estimé nous permet de générer l'évolution probable d'une personne dépendante à travers différents états GIR jusqu'à son décès. Pour obtenir une vue complète sur les trajectoires possibles en dépendance d'un portefeuille d'assurés, autrement dit d'un groupe de population homogène vis-à-vis du risque, nous construisons des tables de mortalité des personnes dépendantes à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Celle-ci consiste à simuler un très grand nombre de trajectoires avec les mêmes conditions initiales puis à moyenniser les résultats obtenus pour évaluer un comportement central.

Plus les trajectoires simulées sont nombreuses et plus l'image du processus correspondant à notre modèle sera complète et fidèle. Étant donné un jeu de conditions initiales, toutes les trajectoires générées sont équiprobables. La loi des grands nombres permet d'approcher par moyenne simple la valeur centrale du processus à un instant donné, ce pour tous les instants possibles.

4.2.2 Application

Précisons nos propos quant à de la méthode Monte-Carlo utilisée. Pour simuler l'évolution d'une personne d'un certain âge initial donné a compris entre 60 et 100 ans à travers différents états de dépendance, nous procédons comme suit :

- (1) nous générons l'état initial i_1 de dépendance en utilisant la table des probabilités d'entrée en dépendance pour cet âge construite au chapitre 3 et décrite en annexe 1 ;
- (2) en prenant en compte les probabilités estimées des passages $(p_{i_1, i_2})_{i_2 \neq i_1}$ à partir de l'état initial estimé précédemment, nous générons l'état suivant i_2 ;
- (3) à partir de l'état initial i_1 et l'état suivant i_2 , nous générons le temps de passage correspondant par une réalisation d'une loi de Weibull simples si i_2 n'est pas l'état de décès $i_2 = 0$, ou du mélange de deux lois de Weibull si l'état suivant i_2 est le décès. Les paramètres des diverses lois de Weibull considérées sont ceux estimés à la section 3.5.3 ;
- (4) si le dernier état visité n'est pas la mort, nous répétons les étapes 2 puis 3 jusqu'au décès de l'individu.

La variété des probabilités de passage et surtout des réalisations possibles des temps de transitions Weibull ou mélange de Weibulls entre deux états nécessite de balayer un très grand nombre de trajectoires possibles de la façon décrite ci-dessus. En pratique, pour tous les âges a compris entre 60 et 100 ans, nous avons généré 100 000 trajectoires. Au total, nous avons donc généré, pour obtenir l'ensemble des tables décrites ci-après, plus de 4 000 000 de trajectoires d'individus en dépendance. Les simulations ont été effectuées sous le logiciel de calcul scientifique Matlab.

Ce choix de 100 000 trajectoires est arbitraire. Bien entendu, un nombre trop faible de trajectoires ne permettrait pas d'appréhender suffisamment finement tous les avenir possibles d'une entrée en dépendance. À l'inverse, le gain d'information apporté par une nouvelle simulation est marginalement décroissant avec une vitesse de décroissance typiquement proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre de simulations, en vertu du Théorème Central Limite. Le choix de 100 000 simulations nous paraît raisonnablement élevé pour bénéficier d'une précision suffisante dans l'estimation des valeurs centrales des mortalités évaluées et, par ailleurs, il nous paraît pratique pour présenter les tables de mortalité et de coûts conformément aux habituelles tables actuarielles.

4.3 Table de mortalité en dépendance

4.3.1 Construction de la table

Pour utiliser la méthode de Monte-Carlo afin de construire la tables de mortalité des dépendants, considérons 10 000 personnes devenues dépendantes à l'âge a et nous générons leurs trajectoires jusqu'à la mort à l'aide du modèle semi-markovien comme décrit ci-avant.

Le nombre total de personnes qui ont survécu à la fin de l'année $x \geq a$ est classiquement noté L_x et la liste des $(L_x)_{x \geq a}$ forme la table de mortalité des personnes devenues dépendantes à l'âge a .

Nous répétons la procédure pour tous les âges de 60 ans jusqu'à 100 pour obtenir la table de mortalité des personnes dépendantes en fonction de leur âge d'entrée en dépendance. Cette table est donnée en annexe 2.

Précisons qu'il faut lire les tables de mortalité des dépendants de la façon suivante : parmi 100 000 personnes devenues dépendantes à un âge donné a , nous lisons dans la ligne correspondant à cet âge initial a le nombre de personnes restées vivantes à la fin de chaque année écoulée x .

Nous constatons cependant un problème de sous-estimation de la mortalité avec cette table pour les grands âges. En effet, les lois de durée de transition étant définis comme indépendants de l'âge dans notre modèle, nous observons qu'au delà de 95 ans, les simulations commencent à générer une mortalité inférieure à celle de la population totale (par rapport à notre table de mortalité de référence TPG93). Même s'il est possible de trouver des justification naturalistes de cet effet (voir la section 4.3.2 ci-après), nous le considérons comme un défaut du modèle qu'il est nécessaire de corriger. Nous envisagerons alors des corrections de deux types.

4.3.2 Correction par segmentation

Nous souhaitons corriger les paramètres estimés en prenant mieux en compte les disparités de comportement liées à l'âge. Autrement dit, nous séparons la population en deux (ou plusieurs) classes d'âge et effectuons l'estimation des paramètres des deux (ou plusieurs) sous-modèles conformément à la méthodologie décrite dans le chapitre précédent.

Une correction de ce type complique considérablement l'estimation du modèle en raison de la forte augmentation du nombre des paramètres qu'elle engendre (36 de plus pour chaque nouvel intervalle d'âge introduit). Nous ne considérons donc, en pratique, que deux intervalles : moins de 90 ans et supérieur ou égal à 90 ans. Le choix de ces deux classes provient de plusieurs

observations. D'abord, la pyramide observée d'entrée en dépendance par âge change brutalement à 90 ans (voir annexe 1) puis, les espérances de vie en dépendance commencent à dépasser les espérances de vie de la TPG93 autour de cet âge charnière.

Une fois que les paramètres du modèle correspondant à la partition en deux intervalles sont estimés, nous répétons la simulation Monte-Carlo avec ces nouveaux paramètres. Nous avons alors observé alors que la mortalité des personnes dépendantes de plus de 90 ans est effectivement augmentée, mais reste toujours globalement trop basse par rapport à la mortalité TPG93.

Paradoxalement, il est possible que la survie en dépendance pour les grands âges soit supérieure à la survie moyenne aux âges correspondants, qui comprend en pratique nombre d'individus ne bénéficiant pas des protocoles d'aides apportés aux dépendants déclarés. Plus clairement, nous pensons que la catégorie des plus de 90 ans comporte un grand nombre de dépendants non déclarés, donc non aidés, dont l'espérance de vie est nettement inférieure à celle de leurs homologues pris en charge. Par ailleurs, l'offre de soins et d'aide indispensable et dont disposent les dépendants est un facteur d'amélioration de leur qualité de vie, donc de leur espérance de vie.

Si l'on considère cependant que cet argument ne peut être reçu, ce qui pourrait d'ailleurs constituer un risque pour l'assureur, il nous faut envisager un autre type de correction de la table obtenue, plus évident et plus radical aussi.

4.3.3 Correction par pénalisation

Cela nous amène à la correction de deuxième type. Nous supposons ici que la mortalité de la population dépendante ne peut pas être inférieure à celle de la population totale, définie par notre table de référence TPG93.

Pour tout $x \geq a$, nous comparons alors coefficients de survie $q_x^{tpg} = L_{x+1}/L_x$ de la table TPG93 et de la table q_x^{est} obtenue avec le modèle. Dès que le coefficient dans la table de mortalité des dépendants est inférieur à celui de la TPG93, on le remplace par la valeur correspondante de la TPG93. À partir de la table des coefficients corrigés de cette manière, nous reconstruisons la table de mortalité \hat{q} des dépendants qui sera utilisée pour les calculs actuariels. Pour tout $x \geq 0$, nous définissons donc :

$$\hat{q}_x = \max(q_x^{est}; q_x^{tpg}).$$

Cette nouvelle table complète¹ se trouve en annexe 2. Le graphique de

1. Notons que, comme toute construction de table, il pourrait être indiqué d'utiliser

la figure 4.1 illustre l'espérance de vie par âge d'entrée en dépendance en version brute issue du modèle et en version corrigée.

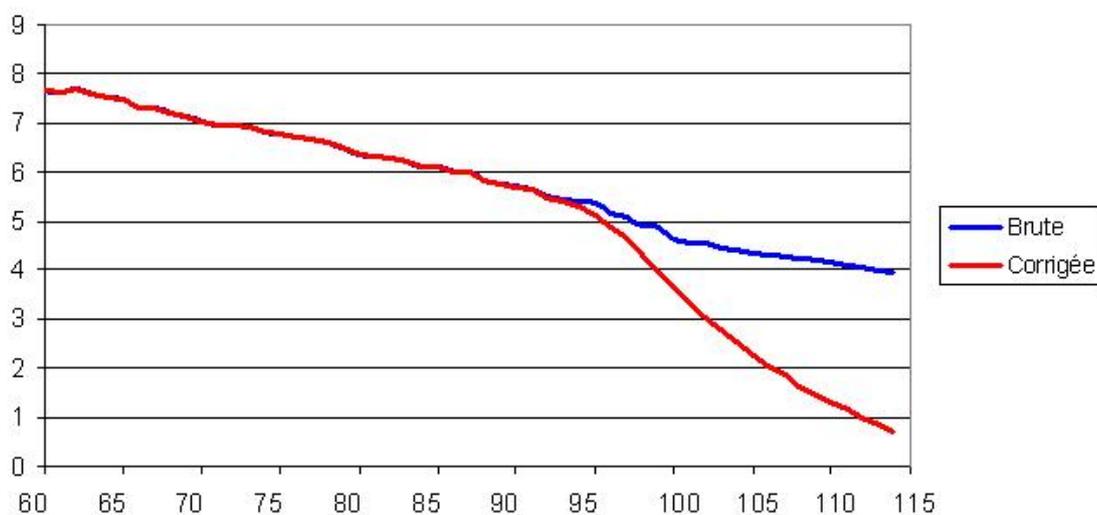


FIGURE 4.1 – Espérances de vie à l'âge d'entrée en dépendance, brute et corrigée

4.4 Tables de coût de la dépendance

La table de mortalité des dépendants nous permet d'estimer l'évolution du nombre de personnes dépendantes au cours du temps pour une population initiale donnée. Les besoins des personnes dépendantes étant très variables en fonction de l'état de dépendance mesuré au travers du GIR, il est naturel d'adapter l'aide financière en fonction de ce degré. Pour ne pas compliquer les calculs actuariels, nous avons construit les tables de coût de la dépendance. Ces tables représentent les charges probables futures de l'assureur pour un individu présent dans un état de GIR donné, connaissant son âge d'entrée en dépendance.

Nous présentons quatre tables, dont chacune correspond à la charge annuelle probable pour l'assureur du paiement d'une rente de 100 euros à un individu présents dans l'état de GIR sélectionné pondéré par sa probabilité de présence dans l'état en question. La table 1 correspond aux flux de prestations du GIR 1, la table 2 au GIR 2, jusqu'à la table 4 pour le GIR 4. Ces

des méthodes de lissage, des tests de *goodness of fit* ou des corrections *a priori* pour en faire une table proprement certifiable.

tables nous permettent d'obtenir le coût moyen de la dépendance pour des niveaux de garantie donnés pour les GIR 1 à 4, en construisant la combinaison linéaire de ces quatre tables avec les coefficients souhaités.

Les tables sont, elles aussi, construites par la méthode Monte-Carlo à partir du modèle semi-markovien estimé dans le chapitre 3. Nous générons la trajectoire d'évolution de la dépendance d'un grand nombre de personnes devenues dépendantes à un certain âge (100 000 toujours en pratique) et calculons le coût moyen pour une personne par année écoulée sous la condition d'un paiement mensuel de 100 euros dans un état GIR donné.

Cependant, il faut noter, comme nous l'avons déjà constaté pour la table de mortalité en dépendance, que le modèle semi-markovien construit a tendance à surestimer la durée de vie en dépendance, surtout pour les grands âges. Pour corriger les tables de coûts obtenus, nous avons appliqué des corrections de même type que pour la table de mortalité ci-dessus.

Les tables finales de coûts sont données en annexe 3. Leur lecture est la suivante : sous l'hypothèse du paiement mensuel d'une rente de 100 euros pour tout état de GIR à une personne entrée en dépendance à l'âge a , le flux futur de prestations à verser par l'assureur au bout de x années est égal à la somme sur les 4 cellules (a, x) des tables de coût par GIR. Si l'assureur décide d'octroyer une structure de rente variable par GIR alors le flux futur de prestation est la somme pondérée des cellules correspondantes.

Pour chaque i donné entre 4 et 1, la lecture de la table de coût de la dépendance en état de GIR i est la suivante : pour une personne devenue dépendante à un âge donné a , nous lisons dans la ligne correspondant à cet âge les dépenses futures par année correspondant à sa présence probable en GIR i . Pour un âge d'entrée en dépendance et une année future donnés, la somme² des quatre cellules correspondantes des quatre tables donne la valeur probable future de la charge de l'assureur. L'actualisation de ces flux futurs donne la VAP de la prestation pour l'assureur.

Équipés des tables de coûts et de mortalité, nous sommes prêts pour construire et tarifier des produits d'assurance viagère avec niveaux de rente adaptés aux GIR successifs des individus.

2. Éventuellement pondérée par les taux de croissance de la rente en fonction du niveau de dépendance

4.5 Produits d'assurance collective de type privée

4.5.1 Description

Pour construire les produits dépendance évoqués ci-avant, nous considérons un groupe de 100 000 personnes de même âge qui souscrivent chacune à la date 0 correspondant à un âge donné, ici 40 ans³, une garantie dépendance sous la forme d'une rente dont le niveau est croissant en fonction de l'état de gravité de la dépendance. La rente commence à être perçue dès que l'individu entre en dépendance.

Chaque année :

- une partie de la population devient dépendante, conformément aux lois d'entrée en dépendance estimées ;
- les dépendants existants évoluent comme le décrit le modèle semi-markovien et, en particulier, certains parmi eux décèdent (*cf.* la table de mortalité globale de l'annexe 2) ;
- une partie de la population non dépendante décède également pour former ensemble le nombre de décédés total (le nombre de ces décès est obtenu par différence entre le nombre de décès issus de la TPG93 utilisée sur la population totale et le nombre de décès estimés des dépendants ci-dessus).

Puis,

- les nombres d'individus dépendants et la connaissance de leur état de GIR nous permettent de déterminer l'ensemble des charges futures auxquelles l'assureur sera exposé ;
- enfin, les nombres de non-dépendants nous permettent de déterminer le montant de la prime annuelle nécessaire pour servir les rentes de tous les dépendants.

4.5.2 Économie des contrats

Une fois la prime calculée (nous la supposons annuelle), l'objectif est d'évaluer l'économie globale des produits imaginés, sous la forme du solde des opérations annuelles de résultat et de bilan pour l'assureur, suivant Planchet

3. En pratique aujourd'hui, l'âge moyen de souscription d'un contrat d'assurance dépendance est plus proche de 60 ans. Il s'agit d'un risque duquel les populations jeunes se sentent encore éloignées, probablement du fait que ce sont leur parents qui y sont actuellement fortement exposés.

et Winter [31], dans une logique de Provision pour Risques Croissants. Certaines analyses de sensibilité seront effectuées afin de comprendre quels sont les paramètres dimensionnants du modèle et quelles sont les incertitudes sur lesquelles l'assureur se doit de prendre des marges de sécurité financière.

Pour un produit d'assurance donné appliqué à un portefeuille d'individus ayant souscrit au même moment et hors rachats de contrat, nous assimilerons le fonctionnement du contrat à celui d'un fonds de capitalisation, alimenté par les primes des assurés et liquidé par le versement des rentes correspondants aux risques réalisés. Selon des notations évidentes, le solde du fonds est donné par :

$$\text{Solde}_n = \text{Solde}_{n-1} + \text{Variation de Solde}$$

où

$$\begin{aligned} \text{Variation de Solde} = & \text{Produits Financiers sur Solde}_{n-1} \\ & + \text{Primes acquises}_n \\ & - \text{Rentes servies}_n \end{aligned}$$

désigne l'impact annuel du contrat sur la trésorerie de l'assureur.

Il est à noter que lors de la phase de constitution du fonds, autrement dit lorsque l'impact trésorerie est positif, l'assureur doit légitimement constituer une Provision pour Risques Croissants dont la dotation annuelle, sous hypothèse de tarification "à la prime pure" et hors frais de gestion, doit être exactement égale à la trésorerie positive perçue, de sorte que l'impact résultat soit neutre pour l'assureur. Au cours de cette phase, se constitue donc un actif financier (dégageant d'ailleurs les produits escomptés ci-dessus), auquel fait face un passif exactement égal et correspondant aux excédents de charges futures auxquelles le fonds constitué permet de faire face.

À l'inverse, lorsqu'en fin de vie de contrat les rentes servies deviennent supérieures aux primes acquises et aux produits financiers dégagés par les actifs cantonnés du contrat, l'impact trésorerie devient alors négatif, le fonds diminue à due concurrence et les reprises sur provisions correspondantes permettent également de neutraliser l'impact résultat pour l'assureur.

Bien entendu, ce fonctionnement n'est que théorique et en pratique l'assureur, qu'il soit privé, Institut de Prévoyance ou mutuelle, cherchera également

- à couvrir ses frais de gestion par le chargement des primes (voir ci-après en 4.5.3) ;

- voire dégager un bénéfice, éventuellement en margeant sur le chargement des primes mais le plus souvent en dégageant une rentabilité sur les placements financiers supérieure à celle escomptée dans le calcul actuariel de tarification la prime pure.

4.5.3 Restrictions méthodologiques

Fractionnement

L'adaptation à un paiement fractionné de la prime ne sera pas envisagé ici car il se déduit aisément des travaux présentés ci-après au moyen des formules classiques d'évaluation de la Valeur Actuelle Probable (VAP) de la rente fractionnée, en fonction de la VAP de la rente annuelle. Pour une rente viagère immédiate à l'âge x fractionnée en k périodes, rappelons, selon les notations habituelles, que si la VAP de la rente s'écrit a_x pour le terme échu et \ddot{a}_x pour le terme d'avance alors les versions k -fractionnées s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x^k = a_x + \frac{k-1}{2k} \quad \text{pour le terme échu;} \\ \ddot{a}_x^k = \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \quad \text{pour le terme d'avance.} \end{array} \right.$$

Évolutivité des primes et des prestations

Bien entendu, il est possible dans le calcul d'anticiper des évolutions des primes versées, comme des prestations servies. Commercialement, en pratique, les primes versées par l'assuré sont souvent constantes en monnaie courante⁴ et les prestations peuvent être indexées, le plus souvent sur l'évolution des prix par exemple.

Ces deux hypothèses peuvent être prises en compte au travers de la valeur du taux d'intérêt utilisé pour la capitalisation des primes, ainsi qu'au travers du taux d'actualisation utilisé pour calculer la VAP des prestations versées.

Mener ces calculs sous diverses hypothèses ne présente pas d'intérêt technique particulier et nous ne présenterons donc pas de détails de variantes des modèles à venir. Néanmoins, l'hypothèse d'indexation des prestations est fréquente dans les cas d'assurances de type sociale et fait apparaître l'évolution

4. donc rarement indexées, ce pour la sécurité financière de l'assuré. En pratique, si l'assuré souhaite augmenter le montant de ses primes, il a plutôt intérêt à le faire par le biais d'un avenant au contrat ou à avoir prévu des clauses optionnelles de revalorisation à la souscription.

des taux d'intérêts comme facteur de risque financier. Nous étudierons donc la sensibilité de notre produit au taux d'intérêt.

Chargements

Les primes équilibrant les produits d'assurance construits ci-après au terme des tables de mortalité sont les primes pures hors prise en compte de frais de gestion, ni marges de sécurité par rapport au modèle. Les primes sont donc évaluées hors chargements de l'assureur. Elles correspondent donc exactement aux primes dûes par l'assuré qui équilibrent l'équation de neutralité actuarielle

$$\text{Engagements de l'Assuré} = \text{Engagements de l'Assureur.}$$

Autrement dit,

$$\text{VAP(Primes pures acquises)} = \text{VAP(Prestations servies).}$$

Les méthodologies de chargements sont assez universelles vis-à-vis des divers produits d'assurance vie ou assimilés existants, alors que l'évaluation des primes pures dépend directement du modèle construit. Nous choisissons donc de nous concentrer sur ces dernières. Nous renvoyons cependant le lecteur intéressé par la prise en compte de chargements de gestion et de sécurité vers Tosetti *et al.* [38] pour une approche théorique ou vers Léger [17] pour une approche plus pratique, appliquée au contexte de la dépendance.

Délais de carence

Les éventuels délais de carence, classiques des produits d'assurance vie, ne sont pas intégrés à notre étude.

Dans la pratique, ils peuvent être systématiques, auquel cas ils se traitent techniquement comme un report de l'occurrence du risque égal au délai de carence et permettent l'utilisation des tables construites. Ils peuvent aussi être dépendants de la valeur prise par une covariable et le plus souvent, il s'agira de la pathologie. La tarification est alors plus complexe à effectuer car le report de l'occurrence du risque est alors variable en fonction des individus, ou plutôt des diverses valeurs prises par la covariable explicative de la carence et de leur probabilité d'occurrence.

La prise en compte de cette amélioration pourra constituer une amélioration du modèle.

4.5.4 Premier produit

Modalités du contrat

Le contrat est souscrit à l'âge de 40 ans. L'assureur s'engage à verser au bénéficiaire une rente mensuelle et viagère en cas de survenance du risque dépendance après l'âge de 60 ans. Les sommes payées constituent un minimum de garantie, elles dépendent du niveau de dépendance de l'assuré de la façon suivante :

- 350 euros en GIR 4 ;
- 500 euros par mois en GIR 3 ;
- 700 euros par mois en GIR 2 ;
- 1 000 euros par mois enfin en GIR 1.

En contrepartie, l'assuré verse une prime pure annuelle de **395 euros** annuellement jusqu'à l'âge de 60 ans, ou son décès si celui-ci intervient avant l'âge de 60 ans.

Il est également possible et généralement attractif pour l'assuré d'ajouter une option de contre-assurance, c'est-à-dire du remboursement aux ayants-droits de la totalité des primes versées (et capitalisées ici) par l'assuré en cas de décès avant l'âge de 60 ans. Dans ce cas, le montant annuel de la prime s'élève à **402 euros**, sous l'hypothèse d'une mortalité selon TPG93.

Hypothèses techniques

Nous considérerons un taux d'intérêt égal à 3,5% par an⁵. Ce taux sert non seulement à capitaliser les primes versées et de taux d'actualisation servant à calculer les VAP des prestations servies.

La table de mortalité utilisée est celle de la population TPG93 pour la génération 1978⁶

Le taux d'entrée en dépendance APA et la ventilation par GIR est déterminé par les valeurs de l'annexe 1, estimées au chapitre 3.

Les tables de mortalité des dépendants et des coûts en dépendance sont celles corrigées par rapport à TPG93 génération 1978, données en annexes 2 et 3 et construites au début de ce chapitre.

5. Ce taux, d'une valeur plausible compte tenu de l'actualité financière, peut aussi être justifié par les articles A131-1 et suivants du Code des Assurances, le fixant comme limite maximale.

6. Ce choix est arbitraire. Il correspond à la mortalité prospective des individus âgés de 30 ans au moment de la production de la présente étude. Nous verrons qu'il conditionne peu les ordres de grandeur des résultats produits ci-après.

Remarque : notons que dans le modèle construit à partir de ces hypothèses, 72 % des souscripteurs deviendront dépendants au cours de leur vie.

4.5.5 Sensibilité aux paramètres du modèle

Sensibilité à l'âge d'entrée au contrat

Nous supposons maintenant que les individus peuvent souscrire un contrat octroyant le même type de garanties suivant les mêmes hypothèses actuarielles à des âges différents.

Nous pouvons alors résumer les variations des primes annuelles à payer pour ces garanties en fonction de l'âge de souscription par le tableau suivant (en euros) :

Âge	30	40	45	50
Prime sans contre – assurance	215	395	580	958
Prime avec contre – assurance	219	403	590	973

Étant donnée la faible influence de la contre-assurance sur le montant de la prime pure, dans la suite, nous ne présenterons les analyses de sensibilité que par rapport à la version du contrat sans contre-assurance.

Sensibilité au taux d'intérêt

Lors de la détermination du montant de la prime pure, nous avons supposé que le solde est actualisé annuellement au taux 3,5% par an. Dans la réalité et au cours du temps, le taux réel peut varier autour de cette valeur, positivement ou négativement, s'entend.

Pour appréhender l'impact de ce changement, nous effectuons deux simulations différentes.

Nous recalculons d'abord le montant des primes nécessaires pour assurer le service de toutes les rentes dépendance en fonction du nouveau taux d'intérêt, ce qui permet d'évaluer la sensibilité des valeurs des primes aux taux d'intérêts.

Dans un deuxième temps, nous supposons la prime toujours égale à la valeur initiale mais nous évaluons la variation de la durée de service des prestations telles que définies au contrat, sous hypothèse de cantonnement comptable de la prestation. Autrement dit, les réserves accumulés par les versements de primes sont seules utilisées pour le versement des prestations. Le solde du fonds associé à la prestation au cours du temps peut alors être

amené à s'éteindre puis devenir négatif avant le terme de la table de mortalité (cas de baisse des taux) ou, à l'inverse, rester strictement positif et générer des excédents capitalisés au delà du terme de la table (cas de hausse des taux).

Remarque : dans les deux cas, cette analyse de sensibilité permet de mesurer les chargements de sécurité à mettre en place en fonction des aléas de marché.

La première analyse de sensibilité fournit le tableau de résultat suivant (en euros) :

Taux	2,5 %	3,0 %	3,5 %	4,0 %	4,5 %
Prime d'équilibre	568	473	395	330	276

Comme nous pouvons l'observer, l'augmentation d'un demi-point de taux d'intérêt entraîne une diminution de la prime pure de 20 %, ce qui est considérable.

Lorsque l'on maintient la prime fixe au niveau prévu (395 euros) et que l'on étudie l'impact du changement du taux d'intérêt sur le solde, on obtient le graphe de la figure 4.2.

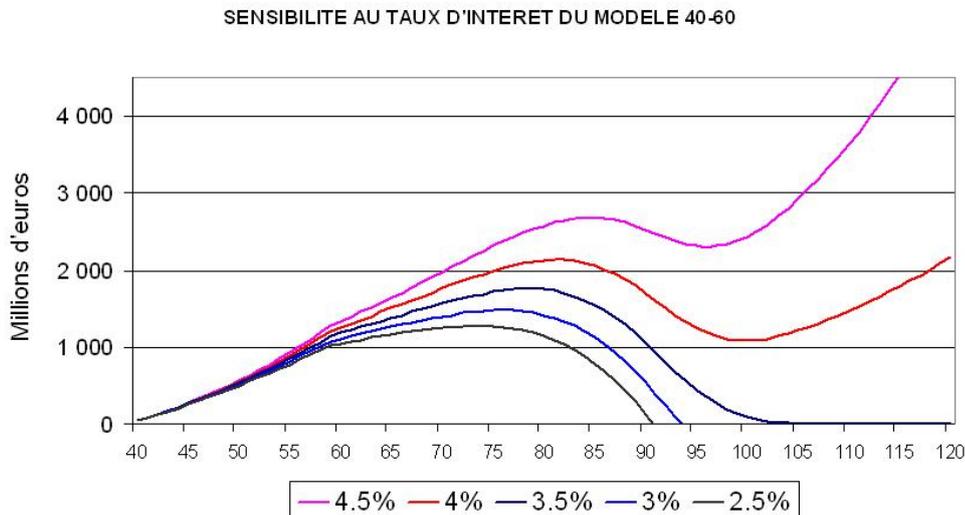


FIGURE 4.2 – Sensibilité du solde du fonds associé au contrat au taux d'intérêt pour une cohorte de 100 000 assurés

Notons que si le taux est de 3 % en lieu et place des 3,5 % prévus, l'assureur se retrouve incapable de servir les rentes aux assurés dépendants âgés de plus de 94 ans. Cela concerne environ 20 000 personnes qui seront déjà

dépendantes à la 54^{ème} année de la simulation, ainsi que les 8 200 qui vont devenir dépendantes au delà de cette échéance. Autrement dit, sur un total de 72 000 dépendants, près de 40% vont se retrouver, partiellement ou totalement privés de la rente prévue au contrat.

En cas de taux encore moins élevé, soit 2,5%, l'effet est bien entendu encore beaucoup plus important : l'assureur épuise le fonds capitalisé après seulement 51 ans. Les 36 500 personnes dépendantes existant à cette date, ainsi que plus de 16 800 futurs dépendants (soit près des trois quarts des dépendants) ne pourront être indemnisés selon les termes du contrat.

L'ampleur de la sensibilité à la baisse des taux en termes de conséquences financières pour les souscripteurs illustre le niveau de prudence dont doit faire preuve l'assureur dans le choix du taux utilisé pour les calculs actuariels liés à l'économie de son contrat.

En pratique, les contrats contiennent des clauses de modification du tarif en cas de dérives sensibles du taux technique. Le suivi du taux technique est donc d'une importance capitale, tant pour la sécurité financière de l'assureur que pour la stabilité de la garantie et de la tarification proposée aux assurés.

En outre, l'augmentation du taux par rapport à la base de calcul permet à l'assureur d'effectuer d'importantes plus-values financières. Si, comme c'est souvent le cas, il existe une clause de participation aux bénéfices, par exemple par le biais de la recapitalisation des intérêts supplémentaires sur le capital constitué des rentes futures, l'assureur peut augmenter le niveau de la prestation.

À titre d'exemple, en gardant les mêmes proportions (350, 500, 700, 1 000) pour les rentes correspondantes aux états GIR décroissants, la rente peut être augmentée de 65% en cas de taux à 4,0%, et de 150% en cas de taux à 4,5%, au lieu des 3,5% prévus au contrat.

Sensibilité au taux d'entrée en dépendance

Le taux utilisé dans le modèle est le taux obtenu à partir des données APA. Rappelons qu'il est basé sur des observations qui s'étalent sur une période de 3 ans (voir section 3.2.1). Plusieurs facteurs peuvent influencer ce taux. Tout d'abord, l'aléa pur, car cette période d'observation de 3 ans peut être considérée comme non suffisamment longue pour avoir des données statistiques assez représentatives. Par ailleurs, ces données correspondent à la phase de mise en place de la prestation APA, sur des populations que l'on considère comme moyennes⁷, mais il se peut qu'un portefeuille d'assurés ait

7. Rappelons que les données sont issues de la population exhaustive de 4 départements français non agglomérés géographiquement, nous avons donc un échantillon de sondage dit

un comportement différent de celui ayant servi de source à l'estimation. Enfin, ces taux peuvent changer au fil du temps, notamment en lien avec les progrès de la médecine, de la nutrition et le succès attendu d'actions de prévention en faveur des personnes âgées. Par conséquent, nous simulons quatre situations possibles avec des taux d'entrée en dépendance plus ou moins élevés que celui estimé initialement. Plus précisément, par rapport au taux de référence APA, nous considérons le taux diminué ou augmenté de 30 % et 15 % relativement à la valeur de référence, uniformément sur toute la table figurant en annexe 1.

Le montant des primes nécessaires pour servir tous les dépendants s'établit alors comme suit (en euros) :

Δ/APA	+30 %	+15 %	0%	-15 %	-30 %
Prime d'équilibre	513	453	395	336	276

Schématiquement, nous constatons ainsi qu'une augmentation de 10 % du taux d'entrée engendre une augmentation corrélative de la prime à hauteur d'environ 10 % également. Ce résultat peut paraître assez intuitif dans la mesure où le taux d'entrée conditionne directement et proportionnellement le nombre de bénéficiaires, donc les charges futures, donc le montant de la prime pure. Il est cependant surprenant que l'effet d'actualisation joue si peu ici, lui qui a habituellement tendance à distordre l'intuitive proportionnalité des facteurs de sensibilité.

Comme dans la précédente analyse de sensibilité, nous présentons dans la figure 4.3, l'évolution du solde du compte de résultat de la prestation dans le cas d'une prime fixée au niveau initial de 395 euros :

L'assureur se trouve ici dans l'incapacité de payer la rente aux assurés dépendants de plus de 93 ans pour un taux d'entrée supérieur de 30 % au taux APA et après de plus de 95 ans pour une augmentation du taux d'un facteur 15 %.

Sensibilité aux taux de mortalité

En ce qui concerne la sensibilité au taux de mortalité de la population globale et ceux des dépendants (via la pénalisation de la table de mortalité des dépendants par celle de la population globale TPG93, conformément à la section 4.3.3), elle se trouve être moins importante que pour les trois précédents paramètres.

Nous présentons les variations des primes pures en fonction du taux de mortalité de la population dans le tableau suivant. Comme il est plus probable

“en grappe”.

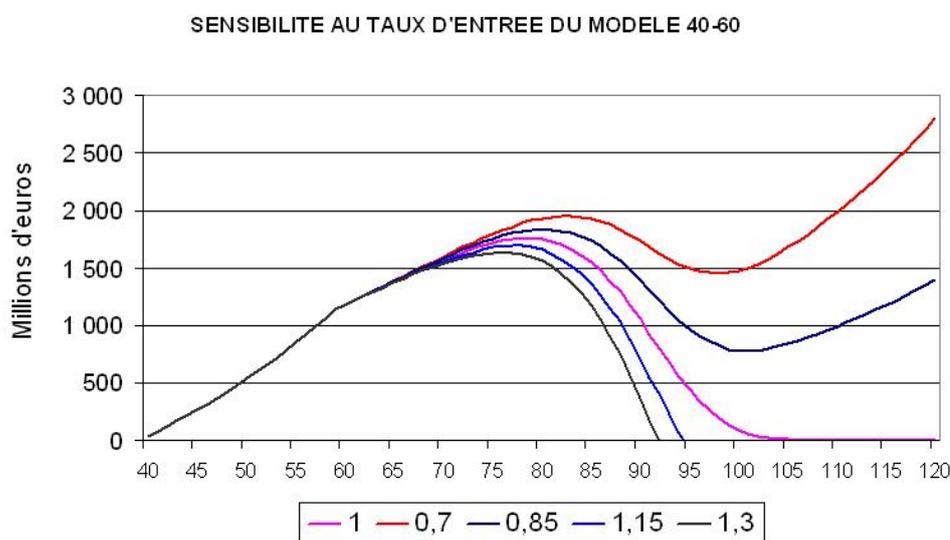


FIGURE 4.3 – Sensibilité du solde du fonds associé au contrat au taux d'entrée en dépendance (facteur appliqué au taux d'entrée d'équilibre) pour une cohorte de 100 000 assurés

que l'espérance de vie soit croissante, nous ne considérerons qu'un seul cas où la mortalité la population globale est inférieure à celle du scénario central et égale à celle des générations 1968 (soit plus importante qu'en 1978). Dans les trois autres cas, elle est définie comme celle des générations 1983, 1988 puis 1993, soit de moins en moins importante par rapport à notre référence 1978. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Référence TPG	1968	1978	1983	1988	1993
Prime d'équilibre	377	395	403	410	417

En résumé, un décalage de ± 5 ans dans l'âge de référence de la mortalité TPG93 engendre un écart de $\pm 2\%$ dans le montant de la prime pure garantissant la neutralité actuarielle du produit, ce qui sera négligeable au regard des autres types d'incertitudes donnant lieu à chargements de sécurité.

Nous avons pratiqué une analyse complète de ce produit d'assurance simple, consistant en le versement de primes capitalisées jusqu'à un âge fixe correspondant au début de la période potentielle de survenance, donc d'indemnisation du risque. Ce produit nous a permis d'appréhender les sensibilités aux divers paramètres d'une assurance dépendance sous la forme d'une rente viagère adaptée au niveau de dépendance. Du point de vue assurantiel, il serait clairement plus pertinent d'étendre le versement des primes jusqu'à

la survenance du risque. C'est l'objet du second produit d'assurance collective que nous allons étudier, mais pour lequel nous ne jugeons pas utile de pousser aussi loin l'analyse de sensibilité.

4.5.6 Second produit

Modalités du contrat

Comme précédemment, le contrat est souscrit à l'âge de 40 ans. L'assureur s'engage à verser au bénéficiaire une rente mensuelle et viagère en cas de survenance du risque dépendance après l'âge de 60 ans. Les sommes payées constituent un minimum de garantie, elles dépendent du niveau de la dépendance de l'assuré de la façon suivante :

- 350 euros en GIR 4 ;
- 500 euros par mois en GIR 3 ;
- 700 euros par mois en GIR 2 ;
- 1 000 euros par mois enfin en GIR 1.

En contrepartie, l'assuré verse une prime pure annuelle de **248 euros** annuellement jusqu'à son décès ou son entrée en dépendance. La dépendance survenant en moyenne après l'âge de 70 ans, la prime pure (de l'ordre de 20 euros par mois) est sensiblement moins élevée que dans le cas précédent, essentiellement en raison d'une durée moyenne plus longue de versement et de capitalisation des primes.

Il est également possible d'ajouter l'option de contre-assurance, c'est-à-dire le remboursement total de sommes versées par l'assuré en cas de décès. Dans ce cas, le montant annuel de la prime s'élève à **348 euros**. L'écart très significatif qui existe entre les deux valorisations de primes pures est lié au fait que, dans ce cas, la totalité des primes versées et capitalisées est restituée en cas de décès hors dépendance, soit dans environ 30 % des cas, ce parfois de façon très tardive donc sur des capitalisations importantes. Le premier produit ne donnait qu'un taux de survenance de ce risque décès et l'indemnisation associée avant 60 ans qu'à moins de 5 % des assurés.

La contre-assurance est donc probablement ici dissuasive⁸ et l'incitation du souscripteur à opter pour la version hors cette prestation est probablement plus aisée si une partie importante de la prime est versée par un tiers (comme l'employeur par exemple). Le souscripteur sera alors plus à même "d'abandonner" sa fraction de cotisation versée s'il n'y a pas, *in fine* survenance du risque dépendance.

8. Dans la pratique d'ailleurs, nous n'avons pas trouvé de produit d'assurance dépendance proposant ce type de garantie.

Hypothèses techniques

Nous supposons un taux d'intérêt égal à 3,5% par an. Ce taux sert non seulement à capitaliser les primes versées et de taux d'actualisation servant à calculer les VAP des prestations servies.

La table de mortalité utilisée est celle de la population TPG93 pour la génération 1978.

Le taux d'entrée en dépendance APA et sa ventilation par GIR est déterminé par les valeurs de l'annexe 1, estimées au chapitre 3.

Les tables de mortalité des dépendants et des dépenses sont celles corrigées par rapport à TPG93 génération 1978, données en annexes 2 et 3 construites au début de ce chapitre.

Résultats

Le graphe de la figure 4.4 nous permet de comparer les soldes des fonds associés à ces deux produits d'assurance⁹. Rappelons que dans le premier cas, l'assuré paie 395 euros annuellement de 40 à 60 ans ou jusqu'à son décès si celui-ci intervient avant l'âge de 60 ans et, dans le deuxième cas, 248 euros annuellement de 40 ans jusqu'à la mort ou jusqu'à la survenance du risque dépendance.

Nous pensons que l'écart de tarif de presque 40% entre les deux produits d'assurance rend ce second produit nettement plus attractif du point de vue commercial. Ce dernier nous paraît plus adapté au cas de la souscription sur une base individuelle sur la durée. Le premier produit pourrait, en revanche, être mieux adapté à une souscription pendant la période d'activité de l'individu, avec une prime versée associée à la perception d'un salaire, donc limitée dans la durée.

La sensibilité de ce produit aux différents paramètres du modèle est très comparable à celle du produit précédent. L'effet sur la prime pure du changement de taux d'intérêt et du taux d'entrée en dépendance sont très importants : respectivement + 20 % pour un demi-point de taux en moins et + 10 % pour une augmentation équivalente du taux d'entrée. Les autres paramètres influencent nettement moins l'évolution de la prime pure.

9. Dans le cas de neutralité actuarielle, les provisions mathématiques sont exactement égales aux soldes successifs du fonds garantissant le versement de la prestation.

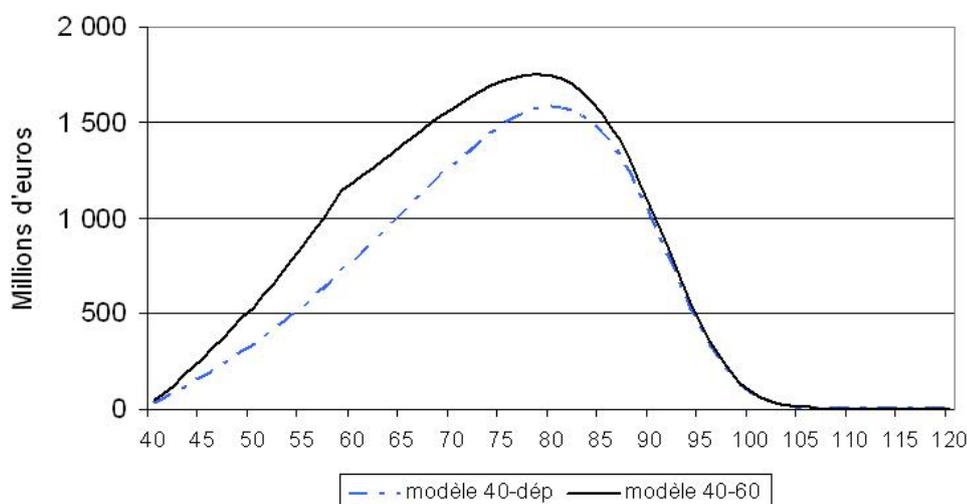


FIGURE 4.4 – Comparaison des soldes des deux fonds associés aux deux contrats étudiés

4.6 Produit d'assurance de type sociale

Dans cette section, nous présentons un produit d'assurance collective qui pourrait être utilisé pour assurer contre la dépendance la totalité d'une population homogène globalement exposée au risque. Dans notre situation, il s'agira de la population des cheminots, c'est-à-dire les retraités existant et futurs du régime spécial de la SNCF, de droit direct comme de droit dérivé. Rappelons que concernant la prestation existante du régime SNCF, la PSA (voir 1.2.2), le nombre de nouveaux bénéficiaires annuels est de l'ordre de 3 000 (pour un stock d'environ 290 000 retraités).

Les particularités de cette population peuvent influencer la tarification du produit. Par exemple, pour la population SNCF, nous utiliserons un autre taux d'entrée en dépendance que le taux APA utilisé pour tarifer les produits de type assurance privée. Il serait aussi envisageable d'utiliser une table de mortalité d'expérience (qui existe) mais, comme on l'a vu en 4.5.5 la sensibilité à ce paramètre est faible, nous en resterons donc à la TPG93.

4.6.1 Description

Nous supposons que l'assureur, en substance la CPRPSNCF, dispose d'une somme annuelle qu'il souhaite allouer spécifiquement au versement d'une prestation viagère dépendance aux assurés et adaptée au niveau de GIR.

La connaissance des effectifs des actifs, de tables de mortalité, de taux d'entrée en dépendance et de la mortalité des dépendants permet d'estimer l'évolution du nombre des dépendants et de leur état de GIR à l'horizon de 30 ans.

Nous supposons par ailleurs que la CPRPSNCF dispose annuellement d'une affectation de son résultat positif dont le montant est constant en monnaie constante. Elle souhaite l'utiliser pour proposer une prestation complémentaire à l'APA pour tous les retraités cheminots dépendants. Implicitement, on considère ici un modèle de répartition dans lequel un montant de cotisations annuelles perçues financent un montant donné de prestations au cours de la même année.

Le niveau de rente est donc évalué de façon à ce que les projections annuelles de charges futures en monnaie constante, compte tenu de la structure démographique, ne dépassent pas le montant de budget alloué. Ces entrées nous permettent de définir les montants d'aide proposés pour chaque état de GIR, compte tenu d'une structure donnée des montants relatifs de rente par niveau de GIR. La structure utilisée ici sera toujours celle de l'APA.

Contrairement au cas de l'assurance de type privé où le but était de tarifier la prime en fonction de la prestation à servir, l'enjeu est ici de déterminer le niveau de prestation que le régime est susceptible de servir sous contrainte de budget annuel.

Un autre cas possible est celui où le régime dispose d'un stock de capital constitué, disponible pour un groupe fermé. Ce cas peut se présenter si la prestation est susceptible d'être intégralement provisionnée, comme par exemple si elle est dans le champ de la norme IAS19 pour l'entreprise SNCF. Cela aurait pu être le cas lorsqu'elle était porteuse du risque Prévoyance (voir section 1.2.2). La gestion d'une telle prestation, en répartition intégralement provisionnée, nous entraînerait dans une problématique de gestion actif/passif des plus intéressante mais qui dépasse le cadre de ce mémoire.

4.6.2 Hypothèses techniques

La rente mensuelle à servir augmente avec le niveau de GIR dans les mêmes proportions que la prestation APA (10 / 7 / 5 / 3,5).

Nous supposerons disponible un montant annuel de 15 millions d'euros constant en monnaie constante¹⁰. Il n'est pas utile ici de disposer d'une hypothèse concernant le taux technique puisque nous n'aborderons pas la

10. correspondant au budget de l'actuelle PSA (voir 1.2.2) et de l'ancien PS (voir 1.2.2), prestations d'assurance dépendance propres au régime SNCF.

problématique de provisionnement pour engagement. Notre contrainte budgétaire est cependant définie constante en monnaie constante, ce qui signifie implicitement que la prestation est revalorisée suivant l'inflation.

La table de mortalité utilisée est celle de la population TPG93 pour la génération 1978.

Le taux d'entrée en dépendance est propre à la population couverte par le régime spécial de la SNCF.

Les tables de mortalité des dépendants et des dépenses sont celles corrigées par rapport à TPG93 génération 1978, données en annexes 2 et 3 construites au début de ce chapitre.

4.6.3 Résultats

Sous les hypothèses précédentes et sous la condition budgétaire de ne pas dépasser 15 millions d'euros par an, il serait possible de servir aux assurés du régime SNCF (retraités et ayants droit) une rente mensuelle de :

- 43 euros en GIR 4 ;
- 62 euros en GIR 3 ;
- 87 euros en GIR 2 ;
- 124 euros en GIR 1.

Ces montants peuvent paraître très faibles au regard des coûts habituels d'accompagnement de la dépendance des personnes âgées. A titre d'exemple, un hébergement en EHPAD pour des GIR 1 ou 2 coûte souvent plus de 2000 euros par mois aux assurés ou à leur famille.

Plusieurs options sont possibles pour améliorer le montant de l'aide servie. La première d'entre elles est d'augmenter le budget alloué. Les niveaux de rente servis seront alors augmentés à due concurrence, mais cette pratique présente des limites évidentes de faisabilité : augmentation des cotisations toujours délicate à négocier avec l'employeur ou les représentants du personnel, affectation plus importante du résultat mettant en risque la gestion financière de long terme du régime, etc.

La seconde possibilité est de consacrer ce budget aux plus nécessiteux, en restreignant la prestation aux GIR 1, 2 et 3, voire seulement aux niveaux 1 et 2.

Si la première de ces deux dernières possibilités a notre préférence compte tenu du fait que les niveaux 2 et 3 de GIR sont, du point de vue pratique assez proches en termes de besoin d'aide, nous évaluons cependant les deux hypothèses ci-après.

4.6.4 Analyse de sensibilité

Si l'assureur décide de concentrer son aide sur les retraités en dépendance sévère, il peut proposer les niveaux de rentes qui suivent.

Pour une rente mensuelle servie sur les niveaux de GIR 3, 2 et 1 exclusivement :

- 74 euros en GIR 3 ;
- 104 euros en GIR 2 ;
- 149 euros en GIR 1.

Pour une rente mensuelle servie sur les niveaux de GIR 2 et 1 exclusivement :

- 132 euros en GIR 2 ;
- 188 euros en GIR 1.

4.6.5 Une conclusion...

Même en restreignant très fortement la garantie aux niveaux de dépendance habituellement considérés comme des niveaux de dépendance totale, le montant susceptible d'être octroyé par la CPRPSNCF à la couverture du risque dépendance dans une optique viagère paraît presque dérisoire au regard des coûts réels du risque (autour de 10 %). Pourtant, ce budget brut, globalisé à l'ensemble de la population couverte n'est pas négligeable. Il représente environ 1 % des charges d'assurance maladie du régime.

Pour terminer ce mémoire, laissons-nous aller à un raisonnement de "coin de table" donnant une idée du coût pour la société de la construction d'une pleine couverture dépendance.

À supposer que les ressources du régime d'assurance maladie équilibrent ses charges, il faudrait donc consacrer de l'ordre 10 % des produits de l'assurance maladie pour couvrir le risque dépendance dans une logique de répartition, soit environ doubler le montant des dépenses publiques aujourd'hui destinées à la prise en charge de la dépendance (voir section 1.2.2). Ceci équivaldrait à majorer les taux de cotisations sociales existant (ouvriers et / ou patronaux, toutes assiettes confondues) d'au moins 1 point de taux.

Aujourd'hui, un dispositif comme la journée de solidarité rapporte, peu ou prou, 0,3 points de taux. La question est de savoir si notre société, face à l'émergence du nouveau risque dépendance, est prête à payer ce prix pour la préservation du modèle de protection sociale "à la française".

Annexes

Annexe 1 : taux d'entrée en dépendance

Taux brut global

AGE	TAUX APA	TAUX SNCF
60	0,32%	0,01%
61	0,20%	0,03%
62	0,20%	0,05%
63	0,24%	0,07%
64	0,29%	0,08%
65	0,36%	0,09%
66	0,40%	0,10%
67	0,45%	0,11%
68	0,51%	0,13%
69	0,60%	0,16%
70	0,69%	0,19%
71	0,78%	0,23%
72	0,89%	0,27%
73	1,08%	0,32%
74	1,20%	0,37%
75	1,41%	0,44%
76	1,73%	0,51%
77	1,88%	0,61%
78	2,17%	0,76%
79	2,45%	0,91%
80	2,82%	1,06%
81	3,17%	1,26%
82	3,60%	1,50%
83	3,90%	1,75%
84	4,20%	2,00%
85	4,52%	2,30%
86	4,90%	2,70%
87	5,85%	3,10%
88	7,34%	3,60%
89	6,50%	4,00%
90	6,24%	4,40%
91	5,52%	4,70%
92	5,30%	5,00%
93	5,24%	5,30%
94	4,78%	5,60%
95	4,40%	5,90%
96	3,91%	6,20%
97	3,59%	6,50%
98	3,00%	6,80%
99	3,07%	8,00%
100	0,84%	5,00%

FIGURE 4.5 – Taux d'entrée en dépendance mesuré sur données APA et CPRPSNCF

Ventilation par GIR du taux APA

AGE	GIR 1	GIR 2	GIR 3	GIR 4
60	1,5%	17,0%	17,0%	64,5%
61	1,5%	17,0%	17,0%	64,5%
62	1,5%	17,0%	17,0%	64,5%
63	1,5%	17,0%	17,0%	64,5%
64	2,0%	17,0%	17,0%	64,0%
65	2,0%	17,0%	17,0%	64,0%
66	2,0%	20,0%	18,0%	60,0%
67	2,0%	20,0%	18,0%	60,0%
68	2,0%	20,0%	18,0%	60,0%
69	2,0%	20,0%	18,0%	60,0%
70	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
71	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
72	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
73	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
74	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
75	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
76	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
77	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
78	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
79	3,0%	20,0%	18,0%	59,0%
80	3,5%	21,0%	20,0%	55,5%
81	3,5%	21,0%	20,0%	55,5%
82	3,5%	21,0%	20,0%	55,5%
83	3,5%	21,0%	20,0%	55,5%
84	3,5%	21,0%	22,0%	53,5%
85	3,5%	21,0%	22,0%	53,5%
86	3,5%	22,0%	22,0%	52,5%
87	3,5%	22,0%	22,0%	52,5%
88	4,0%	23,0%	22,0%	51,0%
89	4,0%	23,0%	22,0%	51,0%
90	4,5%	23,0%	22,0%	50,5%
91	4,5%	23,0%	22,0%	50,5%
92	5,0%	25,0%	25,0%	45,0%
93	5,0%	25,0%	25,0%	45,0%
94	5,0%	25,0%	25,0%	45,0%
95	5,0%	25,0%	25,0%	45,0%
96	5,0%	30,0%	25,0%	40,0%
97	5,0%	30,0%	25,0%	40,0%
98	8,0%	30,0%	30,0%	32,0%
99	8,0%	30,0%	30,0%	32,0%
100	7,0%	40,0%	30,0%	23,0%

FIGURE 4.6 – Ventilation par GIR des taux d'entrée en dépendance, mesurée sur les données APA

Annexe 2 : tables de mortalité en dépendance

Table brute

LX	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
60	100000	95185	89972	82538	71140	62509	55238	48139	41261	34857	28990	23763	19140	15240	12016	9367	7267	5520
61	100000	95093	89948	82495	71340	62497	55136	48065	41236	34672	28812	23553	18890	15018	11700	9130	7014	5282
62	100000	95164	90058	82766	71712	63079	55828	48643	41553	35010	28994	23864	19220	15308	12027	9319	7148	5478
63	100000	95222	89935	82266	71155	62554	55142	47778	40747	34330	28428	23209	18676	14863	11605	8938	6768	5109
64	100000	95107	89739	81959	70546	61692	54358	47074	40049	33567	27833	22630	18079	14344	11252	8735	6692	5043
65	100000	94998	89577	81657	70006	61155	53718	46534	39664	33233	27468	22359	17984	14250	11090	8615	6582	5004
66	100000	94704	88990	80840	68985	59957	52365	44980	38121	31730	26054	21076	16876	13285	10338	7957	6056	4580
67	100000	94805	89219	80903	68902	59845	52297	44786	37809	31595	25754	20835	16734	13136	10242	7892	5960	4510
68	100000	94673	89014	80791	68450	59325	51762	44506	37463	31157	25544	20583	16361	12832	9973	7630	5764	4365
69	100000	94571	88771	80223	67610	58464	50880	43499	36628	30520	25030	20193	16054	12606	9816	7473	5710	4276
70	100000	94273	88334	79824	67016	57496	49822	42687	35873	29762	24199	19518	15531	12150	9421	7231	5447	4071
71	100000	94451	88377	79662	66714	57075	49399	42005	35198	29096	23758	19012	15064	11811	9178	6956	5189	3863
72	100000	94259	88135	79548	66579	56914	49189	41851	35132	29054	23588	18805	14846	11570	8926	6746	5095	3853
73	100000	94173	88106	79189	66108	56422	48768	41453	34660	28671	23306	18666	14745	11490	8864	6747	5080	3827
74	100000	94102	87957	78904	65417	55648	47741	40534	33782	27807	22410	17869	14101	11007	8449	6419	4845	3584
75	100000	94031	87801	78766	65118	55225	47328	40061	33439	27351	22116	17767	13957	10829	8224	6236	4687	3493
76	100000	93906	87519	78224	64652	54612	46846	39581	33017	27120	21934	17466	13719	10685	8219	6260	4716	3474
77	100000	93796	87484	78239	64327	54316	46423	39187	32434	26677	21393	16937	13329	10323	7813	5887	4311	3162
78	100000	93759	87125	77702	63856	53656	45785	38524	31879	26033	21017	16708	13148	10191	7782	5881	4393	3238
79	100000	93793	87068	77544	63331	52921	44830	37546	31085	25294	20397	16204	12697	9809	7505	5677	4321	3134
80	100000	93603	86703	76851	62335	51641	43677	36407	30107	24453	19549	15453	11944	9231	7015	5216	3865	2813
81	100000	93502	86681	76645	61664	51053	42839	35667	29217	23699	19014	14991	11698	9008	6789	5092	3735	2779
82	100000	93294	86328	76421	61497	50789	42674	35479	29139	23683	18757	14787	11516	8830	6690	5023	3706	2691
83	100000	93279	86230	76088	61081	50164	42147	34930	28624	23127	18370	14383	11178	8588	6551	4888	3581	2635
84	100000	93127	85842	75466	60116	49251	40917	33859	27571	22259	17747	13907	10786	8196	6171	4592	3363	2444
85	100000	93064	85725	75113	59805	48836	40674	33495	27206	21889	17491	13819	10764	8239	6218	4649	3384	2470
86	100000	92834	85476	74936	59323	48072	39832	32682	26579	21276	16951	13233	10184	7833	5863	4383	3180	2301
87	100000	92832	85441	74811	59043	47821	39617	32399	26240	21062	16682	12933	9927	7649	5745	4225	3112	2271
88	100000	92666	85093	74097	57906	46386	38053	31084	25115	20072	15909	12337	9441	7154	5395	3957	2918	2124
89	100000	92590	84798	73813	57419	45895	37561	30565	24440	19462	15294	11795	9022	6805	5027	3648	2653	1931
90	100000	92476	84841	73477	56902	45247	36854	29625	23755	18889	14748	11463	8813	6668	5013	3684	2670	1913
91	100000	92387	84612	73159	56439	44720	36314	29260	23464	18532	14488	11168	8525	6407	4720	3437	2503	1804
92	100000	91909	83810	71940	54769	42905	34592	27673	21959	17376	13474	10401	7886	5876	4304	3115	2303	1663
93	100000	91871	83609	71744	54205	42125	33823	26817	21286	16819	13131	10084	7630	5742	4189	3061	2210	1561
94	100000	91630	83243	71395	53963	41680	33267	26407	20788	16272	12733	9839	7460	5535	4062	2978	2136	1499
95	100000	91744	83280	71217	53404	41313	32939	25961	20404	15984	12382	9480	7192	5402	4024	2949	2083	1486
96	100000	91327	82671	70191	51666	39182	31058	24464	19181	14917	11414	8637	6466	4809	3549	2601	1859	1325
97	100000	91131	82207	69575	50941	38395	30290	23783	18641	14382	11042	8310	6216	4627	3369	2435	1697	1199
98	100000	90570	81297	68308	49050	36183	27974	21711	16776	12999	9870	7491	5588	4086	2970	2190	1559	1081
99	100000	90662	81318	68340	48696	35531	27161	20892	16105	12375	9430	7071	5259	3801	2736	1944	1368	961
100	100000	89831	79852	65927	44883	32222	24505	18679	14179	10767	8091	6024	4463	3234	2331	1631	1119	771
101	100000	89733	79883	65779	44677	31742	24029	18202	13647	10329	7672	5671	4155	3060	2184	1554	1077	734
102	100000	89563	79519	65494	44491	31461	23657	17721	13354	10100	7584	5703	4194	3054	2193	1533	1095	761
103	100000	89432	79513	65339	43823	30710	22877	17133	12806	9511	7000	5207	3844	2761	1987	1410	962	633
104	100000	89396	79183	64885	43188	30066	22324	16656	12373	9250	6858	5132	3678	2646	1860	1326	932	631
105	100000	89317	79045	64443	42889	29543	21752	16169	11938	8862	6534	4758	3477	2509	1750	1243	862	561
106	100000	89077	78554	64057	42055	28987	21259	15670	11462	8428	6264	4595	3360	2438	1690	1155	800	565
107	100000	89097	78716	64109	41904	28466	20822	15296	11172	8239	6078	4388	3198	2252	1630	1177	816	554
108	100000	88887	78255	63615	41440	27910	20318	14722	10666	7768	5762	4166	2997	2141	1519	1062	741	486
109	100000	88780	78195	63292	40969	27529	19883	14352	10331	7618	5520	4006	2867	1993	1421	976	677	487
110	100000	88872	78173	63141	40612	26975	19248	13731	9860	7122	5158	3714	2680	1857	1291	880	587	376
111	100000	88668	77608	62375	39890	26282	18690	13276	9346	6690	4783	3507	2525	1816	1283	866	567	382
112	100000	88580	77764	62437	39490	25819	18100	12728	8967	6276	4460	3207	2285	1625	1107	740	535	364
113	100000	88230	77261	61867	38829	24955	17318	12146	8348	5790	4077	2919	2042	1420	979	681	463	318
114	100000	88276	77237	61625	38298	24516	16892	11627	7976	5539	3887	2731	1931	1363	920	586	397	268

FIGURE 4.7 – Table de mortalité en dépendance brute – 18 premières années

LX	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
60	4149	3039	2226	1632	1161	805	567	370	269	187	135	92	52	36	25	12	6	5
61	3979	2897	2155	1588	1117	809	563	360	253	172	112	70	52	36	23	14	6	4
62	4101	2980	2189	1555	1109	772	538	375	267	181	114	68	44	25	13	8	5	5
63	3817	2892	2103	1506	1056	734	529	381	247	172	123	79	57	36	23	15	9	7
64	3776	2780	2046	1484	1063	732	526	335	215	145	92	59	42	31	22	17	12	8
65	3756	2762	2013	1429	1041	739	537	362	243	165	115	74	47	34	25	16	13	10
66	3394	2474	1790	1316	920	655	449	308	214	135	92	67	41	26	16	10	5	2
67	3366	2461	1778	1342	960	659	433	295	209	152	91	56	38	29	18	10	7	3
68	3282	2414	1738	1207	842	601	427	307	209	155	94	59	40	24	20	10	8	1
69	3205	2350	1737	1211	863	605	401	283	192	130	81	53	35	21	11	6	2	2
70	2990	2202	1609	1125	809	555	399	290	202	136	98	68	43	31	19	12	9	7
71	2870	2098	1516	1066	736	537	370	246	172	113	72	45	30	18	12	10	4	2
72	2822	2071	1521	1092	772	527	363	247	163	103	76	45	30	21	18	9	4	4
73	2806	2041	1481	1050	730	524	372	242	160	107	67	46	33	19	13	4	3	2
74	2641	1922	1378	972	704	490	335	227	153	106	74	49	28	19	12	10	6	3
75	2588	1859	1334	951	686	491	333	243	160	105	67	45	30	19	15	10	7	5
76	2535	1836	1281	904	649	450	328	231	146	100	68	47	33	17	13	8	5	3
77	2311	1675	1199	857	602	439	309	223	167	111	79	56	43	34	27	15	7	3
78	2383	1685	1236	884	613	440	304	203	136	93	68	43	24	15	9	5	3	2
79	2276	1615	1152	808	569	397	289	187	122	77	53	34	23	12	9	4	4	4
80	2065	1470	1041	747	522	362	245	162	112	80	46	33	20	13	7	6	4	4
81	2007	1417	1008	709	486	321	216	151	104	66	47	34	15	7	5	2	0	0
82	1956	1392	1010	719	490	346	233	153	101	65	44	33	24	16	14	9	6	5
83	1895	1372	983	705	490	351	246	169	118	79	50	41	24	19	14	6	3	3
84	1784	1284	903	634	442	305	195	142	97	67	42	26	17	9	4	3	2	2
85	1786	1289	902	608	422	291	197	136	90	56	41	26	19	6	4	1	1	1
86	1653	1172	811	567	388	270	182	127	85	56	39	21	14	8	3	2	1	0
87	1625	1148	826	553	366	257	171	116	83	57	38	29	19	6	3	2	1	1
88	1516	1065	765	545	381	260	186	122	92	56	36	20	16	11	9	8	6	4
89	1361	945	675	482	335	221	155	100	69	52	37	24	14	11	8	3	2	2
90	1384	956	653	462	322	224	153	106	64	41	25	16	10	8	5	4	2	1
91	1274	883	623	401	272	182	116	88	59	39	21	15	9	5	3	3	3	2
92	1195	836	593	412	260	168	116	88	60	35	26	17	11	7	5	2	1	1
93	1100	829	577	399	257	183	116	74	43	34	18	10	5	4	4	2	0	0
94	1035	724	510	347	219	143	92	69	42	26	20	12	7	5	4	3	3	2
95	1048	717	511	355	237	153	104	73	51	32	20	9	5	3	1	1	0	0
96	903	623	432	280	195	131	88	63	33	20	13	9	5	3	3	2	2	2
97	836	574	390	260	180	123	77	60	41	22	17	9	8	3	2	2	2	2
98	757	540	363	239	152	95	62	38	20	12	10	6	6	3	1	1	1	1
99	659	456	315	208	138	105	61	37	25	16	10	7	3	1	0	0	0	0
100	524	354	234	151	102	69	42	31	25	16	12	7	4	2	2	0	0	0
101	507	324	206	144	99	63	37	19	13	7	5	2	1	1	0	0	0	0
102	522	347	233	143	98	66	46	26	20	14	7	5	5	4	2	1	1	1
103	412	265	177	109	70	43	27	20	12	9	5	4	3	1	0	0	0	0
104	421	279	180	111	68	36	18	12	6	4	3	2	1	1	1	1	0	0
105	365	227	147	93	58	35	23	18	11	8	3	2	2	2	2	1	0	0
106	388	267	172	118	69	47	30	18	12	8	5	4	3	2	1	1	0	0
107	354	237	155	96	64	43	26	13	7	5	4	3	1	0	0	0	0	0
108	333	231	152	94	64	39	27	19	13	7	4	3	1	1	0	0	0	0
109	312	203	132	86	49	33	22	14	11	8	3	2	0	0	0	0	0	0
110	253	160	109	65	39	33	23	17	8	4	1	1	0	0	0	0	0	0
111	256	169	119	80	53	33	21	13	6	1	1	1	1	1	1	0	0	0
112	237	158	92	59	37	23	14	5	4	4	3	2	1	1	1	1	0	0
113	207	143	87	53	30	21	14	10	6	4	3	1	1	1	1	1	1	0
114	183	122	71	39	27	21	10	8	3	3	1	1	0	0	0	0	0	0

FIGURE 4.8 – Table de mortalité en dépendance brute – 19^{ème} à 36^{ème} années

Table corrigée

La table précédente est pénalisée de façon à ce que les taux de mortalité ne puissent être inférieurs à ceux de la TPG93.

LX CORR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
60	100000	95185	89972	82538	71140	62509	55238	48139	41261	34857	28990	23763	19140	15240	12016	9367	7267	5520
61	100000	95093	89948	82495	71340	62497	55136	48065	41236	34672	28812	23553	18890	15018	11700	9130	7014	5282
62	100000	95164	90058	82766	71712	63079	55828	48643	41553	35010	28994	23864	19220	15308	12027	9319	7148	5478
63	100000	95222	89935	82266	71155	62554	55142	47778	40747	34330	28428	23209	18676	14863	11605	8938	6768	5109
64	100000	95107	89739	81959	70546	61692	54358	47074	40049	33567	27833	22630	18079	14344	11252	8735	6692	5043
65	100000	94998	89577	81657	70006	61155	53718	46534	39664	33233	27468	22359	17984	14250	11090	8615	6582	5004
66	100000	94704	88990	80840	68985	59957	52365	44980	38121	31730	26054	21076	16876	13285	10338	7957	6056	4580
67	100000	94805	89219	80903	68902	59845	52297	44786	37809	31595	25754	20835	16734	13136	10242	7892	5960	4510
68	100000	94673	89014	80791	68450	59325	51762	44506	37463	31157	25544	20583	16361	12832	9973	7630	5764	4365
69	100000	94571	88771	80223	67610	58464	50880	43499	36628	30520	25030	20193	16054	12606	9816	7473	5710	4276
70	100000	94273	88334	79824	67016	57496	49822	42687	35873	29762	24199	19518	15531	12150	9421	7231	5447	4071
71	100000	94451	88377	79662	66714	57075	49399	42005	35198	29096	23758	19012	15064	11811	9178	6956	5189	3863
72	100000	94259	88135	79548	66579	56914	49189	41851	35132	29054	23588	18805	14846	11570	8926	6746	5095	3853
73	100000	94173	88106	79189	66108	56422	48768	41453	34660	28671	23306	18666	14745	11490	8864	6747	5080	3827
74	100000	94102	87957	78904	65417	55648	47741	40534	33782	27807	22410	17869	14101	11007	8449	6419	4845	3584
75	100000	94031	87801	78766	65118	55225	47328	40061	33439	27351	22116	17767	13957	10829	8224	6236	4687	3493
76	100000	93906	87519	78224	64652	54612	46846	39581	33017	27120	21934	17466	13719	10685	8219	6260	4716	3474
77	100000	93796	87484	78239	64327	54316	46423	39187	32434	26677	21393	16937	13329	10323	7813	5887	4311	3162
78	100000	93759	87125	77702	63856	53656	45785	38524	31879	26033	21017	16708	13148	10191	7782	5881	4393	3238
79	100000	93793	87068	77544	63331	52921	44830	37546	31085	25294	20397	16204	12697	9809	7505	5677	4321	3134
80	100000	93603	86707	76851	62335	51641	43677	36407	30107	24453	19549	15453	11944	9231	7015	5216	3865	2813
81	100000	93502	86681	76645	61664	51053	42839	35667	29217	23699	19014	14991	11698	9008	6789	5092	3735	2779
82	100000	93294	86328	76421	61497	50789	42674	35479	29139	23683	18757	14787	11516	8830	6690	5023	3706	2691
83	100000	93279	86230	76088	61081	50164	42147	34930	28624	23127	18370	14383	11178	8588	6551	4888	3581	2635
84	100000	93127	85842	75466	60116	49251	40917	33859	27571	22259	17747	13907	10786	8196	6171	4592	3363	2444
85	100000	93064	85725	75113	59805	48836	40674	33495	27206	21889	17491	13819	10764	8239	6218	4649	3384	2470
86	100000	92834	85476	74936	59323	48072	39832	32682	26579	21276	16951	13233	10184	7833	5863	4383	3180	2301
87	100000	92832	85441	74811	59043	47821	39617	32399	26240	21062	16682	12933	9927	7649	5745	4225	3112	2271
88	100000	92666	85093	74097	57906	46386	38053	31084	25115	20072	15909	12337	9441	7154	5395	3957	2918	2124
89	100000	92590	84798	73813	57419	45895	37561	30565	24440	19462	15294	11795	9022	6805	5027	3648	2653	1931
90	100000	92476	84841	73477	56902	45247	36854	29625	23755	18889	14748	11463	8813	6668	5013	3684	2670	1913
91	100000	92387	84612	73159	56439	44720	36314	29260	23464	18532	14488	11168	8525	6407	4720	3437	2503	1804
92	100000	91909	83810	71940	54769	42905	34592	27673	21959	17376	13474	10401	7886	5876	4304	3115	2303	1663
93	100000	91193	82306	71744	54205	42125	33823	26817	21286	16819	13131	10084	7630	5742	4189	3061	1891	1016
94	100000	90254	80517	70897	53963	41680	33267	26407	20788	16272	12733	9839	7460	5535	3552	2074	1115	542
95	100000	89211	78552	68156	53404	41313	32939	25961	20404	15984	12382	9480	6291	3935	2298	1235	600	257
96	100000	88052	76399	65194	51666	39182	31058	24464	19181	14917	10636	7052	4411	2576	1384	673	288	105
97	100000	86765	74041	62005	50829	38395	30290	23783	17340	12079	8008	5010	2925	1572	764	327	119	35
98	100000	85334	71463	58582	46871	36183	27498	19985	13921	9230	5774	3372	1812	880	377	137	40	8
99	100000	83744	68650	54926	42744	32224	23419	16314	10816	6766	3951	2123	1032	442	161	47	10	0
100	100000	81976	65588	51042	38479	27965	19481	12916	8080	4718	2536	1232	527	192	56	12	0	0
101	100000	80009	62264	46939	34114	23764	15756	9856	5755	3093	1503	643	234	68	14	0	0	0
102	100000	77821	58667	42637	29701	19692	12319	7193	3866	1878	804	293	85	18	0	0	0	0
103	100000	75387	54789	38166	25304	15830	9243	4968	2414	1033	376	110	23	0	0	0	0	0
104	100000	72677	50627	33566	20998	12261	6590	3202	1371	499	146	31	0	0	0	0	0	0
105	100000	69660	46185	28893	16871	9067	4405	1886	686	200	43	0	0	0	0	0	0	0
106	100000	66301	41477	24218	13016	6324	2708	985	288	61	0	0	0	0	0	0	0	0
107	100000	62559	36528	19632	9538	4084	1486	434	92	0	0	0	0	0	0	0	0	0
108	100000	58390	31381	15247	6528	2375	694	147	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
109	100000	53745	26112	11180	4068	1188	252	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110	100000	48585	20802	7569	2211	469	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111	100000	42816	15578	4550	965	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
112	100000	36383	10627	2253	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
113	100000	29209	6194	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
114	100000	21205	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE 4.9 – Table de mortalité en dépendance corrigée – 18 premières années

LX CORR	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
60	4149	3039	2226	1632	1161	805	567	370	269	187	135	92	52	36	25	12	6	5
61	3979	2897	2155	1588	1117	809	563	360	253	172	112	70	52	36	23	14	6	4
62	4101	2980	2189	1555	1109	772	538	375	267	181	114	68	44	25	13	8	5	5
63	3817	2892	2103	1506	1056	734	529	381	247	172	123	79	57	36	23	15	9	7
64	3776	2780	2046	1484	1063	732	526	335	215	145	92	59	42	31	22	17	12	8
65	3756	2762	2013	1429	1041	739	537	362	243	165	115	74	47	34	25	16	13	10
66	3394	2474	1790	1316	920	655	449	308	214	135	92	67	41	26	16	10	5	2
67	3366	2461	1778	1342	960	659	433	295	209	152	91	56	38	29	18	10	7	3
68	3282	2414	1738	1207	842	601	427	307	209	155	94	59	40	24	20	10	8	1
69	3205	2350	1737	1211	863	605	401	283	192	130	81	53	35	21	11	6	2	2
70	2990	2202	1609	1125	809	555	399	290	202	136	98	68	43	31	19	12	9	7
71	2870	2098	1516	1066	736	537	370	246	172	113	72	45	30	18	12	10	4	2
72	2822	2071	1521	1092	772	527	363	247	163	103	76	45	30	21	18	9	4	4
73	2806	2041	1481	1050	730	524	372	242	160	107	67	46	33	19	13	4	3	2
74	2641	1922	1378	972	704	490	335	227	153	106	74	49	28	19	12	10	6	3
75	2588	1859	1334	951	686	491	333	243	160	105	67	45	30	19	15	10	7	5
76	2535	1836	1281	904	649	450	328	231	146	100	68	47	33	17	13	8	5	3
77	2311	1675	1199	857	602	439	309	223	167	111	79	56	43	34	27	15	7	3
78	2383	1685	1236	884	613	440	304	203	136	93	68	43	24	15	9	5	3	2
79	2276	1615	1152	808	569	397	289	187	122	77	53	34	23	12	9	4	4	4
80	2065	1470	1041	747	522	362	245	162	112	80	46	33	20	13	7	6	4	3
81	2007	1417	1008	709	486	321	216	151	104	66	47	34	15	7	5	2	0	0
82	1956	1392	1010	719	490	346	233	153	101	65	44	33	24	16	13	3	0	0
83	1895	1372	983	705	490	351	246	169	118	79	50	41	24	14	3	0	0	0
84	1784	1284	903	634	442	305	195	142	97	67	42	26	14	3	0	0	0	0
85	1786	1289	902	608	422	291	197	136	90	56	41	14	3	0	0	0	0	0
86	1653	1172	811	567	388	270	182	127	85	51	15	3	0	0	0	0	0	0
87	1625	1148	826	553	366	257	171	116	53	15	3	0	0	0	0	0	0	0
88	1516	1065	765	545	381	260	152	55	16	3	0	0	0	0	0	0	0	0
89	1361	945	675	482	335	160	58	17	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90	1384	956	653	396	169	62	18	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
91	1274	869	422	181	66	19	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
92	936	455	195	71	21	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
93	494	211	77	22	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
94	232	84	25	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	93	27	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
96	31	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
97	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
105	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
106	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
107	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
112	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE 4.10 – Table de mortalité en dépendance corrigée – 19^{ème} à 36^{ème} années

Annexe 3 : tables des coûts

Table du GIR 4

Les tables suivantes présentent le coût annuel de la présence en GIR 4 d'une une personne entrée en dépendance à un âge donné, pour une rente de 100 euros mensuels.

GIR 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
60	720	591	452	315	209	146	102	69	46	31	20	13	8	5	3	2	1
61	721	592	451	313	208	144	100	68	46	31	20	13	8	5	3	2	1
62	727	597	454	315	209	145	101	69	47	31	20	13	8	5	3	2	1
63	730	595	451	314	207	143	99	68	46	30	19	12	8	5	3	2	1
64	725	592	448	309	202	139	97	67	45	29	19	12	8	5	3	2	1
65	720	586	443	305	200	137	96	66	45	29	19	12	8	5	3	2	1
66	676	552	417	286	188	130	90	63	42	28	18	12	7	4	3	2	1
67	677	551	415	282	184	126	88	60	41	27	18	11	7	4	3	2	1
68	675	550	414	282	183	127	88	60	40	26	17	11	7	4	3	2	1
69	676	549	412	280	180	124	86	59	39	26	17	11	7	5	3	2	1
70	664	538	403	273	176	121	84	57	38	25	16	10	6	4	2	1	1
71	662	536	400	270	174	119	83	57	38	25	16	11	7	4	3	1	1
72	666	537	401	269	172	116	80	55	38	25	16	10	6	4	3	1	1
73	665	537	399	268	171	117	80	55	36	24	15	10	6	4	2	1	1
74	663	535	398	266	169	114	79	53	35	23	15	10	6	4	2	1	1
75	666	536	397	265	168	114	79	55	36	24	16	10	6	4	2	2	1
76	663	533	394	262	164	110	76	52	34	22	14	9	6	4	2	2	1
77	664	535	395	262	165	111	76	52	34	22	15	9	6	4	2	1	1
78	667	537	396	261	164	111	77	53	35	23	15	9	6	4	2	1	1
79	664	532	391	255	158	106	73	50	33	22	14	9	6	4	2	1	1
80	625	500	367	240	148	100	69	46	31	21	13	8	5	3	2	1	1
81	625	500	367	239	147	99	67	46	31	20	13	8	5	3	2	1	1
82	620	495	361	234	143	94	65	45	30	20	13	8	5	3	2	1	1
83	624	498	365	238	144	97	66	45	30	19	12	8	5	3	2	1	1
84	603	480	348	224	135	89	61	42	28	19	12	8	5	3	2	1	1
85	602	480	348	224	135	90	61	41	27	18	12	7	4	3	2	1	1
86	587	466	338	216	130	87	60	41	27	18	11	7	5	3	2	1	1
87	590	467	338	215	129	85	58	39	26	17	11	7	5	3	2	1	1
88	570	451	326	206	123	81	56	38	26	17	11	7	5	3	2	1	1
89	572	453	325	206	123	81	55	37	25	16	11	7	4	2	2	1	1
90	553	404	252	124	45	15	6	2	1	0	0	0	0	0	-	-	-
91	554	404	250	123	45	16	6	2	1	0	0	0	0	0	-	-	-
92	494	361	224	110	40	14	5	2	1	0	0	0	0	-	-	-	-
93	495	357	220	111	40	14	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-
94	492	352	216	109	40	14	5	2	1	0	0	0	0	-	-	-	-
95	493	350	211	106	41	14	5	2	1	0	0	0	0	0	0	-	-
96	439	310	186	91	37	13	5	2	1	0	0	0	0	0	-	-	-
97	440	304	179	87	36	13	5	2	1	0	0	0	0	-	-	-	-
98	352	241	139	66	27	10	3	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-
99	353	237	133	62	25	9	3	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-
100	256	170	94	43	18	6	2	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-
101	256	166	89	40	16	5	2	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-
102	256	161	84	37	14	4	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
103	256	157	79	33	12	4	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
104	256	151	73	29	10	3	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
105	256	145	67	25	8	2	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
106	256	138	60	21	6	2	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
107	256	130	53	17	5	1	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
108	256	122	46	13	3	1	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
109	256	112	38	10	2	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	256	102	30	7	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	256	90	23	4	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	256	76	16	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	256	61	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	256	45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	256	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.11 – Table du coût en GIR 4 – 17 premières années

GIR 4	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
60	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
61	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
62	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
63	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
64	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
65	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
66	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
67	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
68	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
69	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
70	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
71	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
72	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
73	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
75	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
76	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
77	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
78	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
79	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
80	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
85	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
86	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
87	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
91	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
92	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
93	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
94	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
96	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
97	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
98	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
99	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
101	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
102	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
103	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
104	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
106	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
107	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.12 – Table du coût en GIR 4 – 18^{ème} à 35^{ème} années

Table du GIR 3

Les tables suivantes présentent le coût annuel de la présence en GIR 3 d'une une personne entrée en dépendance à un âge donné, pour une rente de 100 euros mensuels.

GIR 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
60	210	228	239	232	210	186	157	128	100	78	59	44	31	22	16	11	7
61	210	228	238	230	208	185	158	127	101	78	59	44	32	23	16	11	8
62	213	230	240	232	211	185	156	127	100	78	58	42	31	22	15	10	7
63	211	228	237	227	205	181	154	126	99	76	57	42	30	21	15	10	7
64	211	225	235	226	206	180	151	122	96	74	56	41	30	21	15	11	8
65	211	225	233	223	201	177	149	121	96	75	56	41	30	22	16	11	8
66	216	224	226	214	191	166	140	114	89	68	52	39	28	20	14	10	7
67	220	226	228	214	187	163	137	112	89	68	51	37	26	19	14	10	7
68	217	223	223	210	186	163	137	110	88	68	51	37	27	19	13	9	6
69	220	226	227	214	188	161	134	108	86	66	49	36	26	19	13	9	7
70	216	219	216	202	180	155	131	106	84	64	48	35	25	18	13	9	6
71	217	220	215	199	175	152	128	104	82	63	48	35	26	19	13	9	6
72	217	218	217	201	175	152	127	104	83	64	47	35	25	18	13	9	6
73	217	219	215	201	176	151	128	104	82	62	46	34	24	17	12	9	6
74	213	214	211	195	170	149	126	102	80	61	45	33	24	16	12	8	6
75	215	215	210	195	171	147	124	102	81	62	47	34	24	17	12	8	6
76	215	213	209	193	170	148	123	100	78	60	44	32	24	17	12	8	6
77	213	212	205	189	164	142	120	97	77	59	45	33	23	16	12	8	5
78	213	211	205	191	165	142	120	97	77	59	45	33	24	16	11	7	5
79	215	213	205	186	161	138	116	93	73	56	42	31	23	16	10	7	4
80	233	223	209	184	156	133	111	89	70	53	41	30	21	14	10	6	4
81	236	224	208	182	153	130	109	89	70	53	40	29	20	13	9	6	4
82	234	221	205	181	152	130	108	87	68	51	38	27	19	13	9	6	3
83	235	222	205	178	151	127	105	86	67	49	35	24	17	11	7	5	3
84	254	233	209	179	146	124	103	82	63	47	33	22	15	10	7	5	3
85	255	234	211	179	146	120	99	78	58	43	30	21	14	10	6	4	3
86	253	230	204	173	141	116	92	72	54	39	27	19	13	8	6	4	2
87	258	232	204	172	136	110	87	67	49	35	24	17	12	8	5	3	2
88	254	227	200	166	128	102	79	59	43	32	22	16	11	7	4	3	2
89	251	226	196	161	126	99	77	59	43	31	22	15	10	7	5	3	2
90	256	233	195	141	88	52	30	16	8	3	2	1	0	0	0	0	-
91	256	230	195	141	86	51	29	16	8	4	2	1	0	0	0	0	-
92	287	246	198	137	81	46	26	14	7	3	1	1	0	0	0	0	0
93	285	242	191	134	78	44	26	14	7	3	1	0	0	0	0	0	0
94	283	238	189	134	79	44	25	13	7	3	1	1	0	0	0	0	0
95	282	233	181	129	78	44	25	13	7	3	1	1	0	0	0	0	-
96	282	227	169	114	70	39	22	12	6	3	1	0	0	0	0	0	0
97	284	225	165	111	70	39	22	12	5	2	1	0	0	0	0	-	-
98	330	245	168	101	57	31	17	9	4	1	1	0	0	0	0	0	-
99	331	241	161	96	54	29	15	7	3	1	0	0	0	0	0	0	-
100	331	230	147	84	44	21	10	4	2	1	0	0	0	0	0	0	-
101	331	225	140	77	39	18	8	3	1	0	0	0	0	0	0	0	-
102	331	219	132	70	34	15	7	3	1	0	0	0	0	0	-	-	-
103	331	212	124	63	29	12	5	2	1	0	0	0	0	-	-	-	-
104	331	205	115	56	25	10	4	1	0	0	0	0	-	-	-	-	-
105	331	196	105	48	20	7	3	1	0	0	0	-	-	-	-	-	-
106	331	187	95	41	16	5	2	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
107	331	177	83	33	12	3	1	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
108	331	165	72	26	8	2	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	331	152	60	19	5	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	331	138	48	13	3	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	331	122	36	8	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	331	103	25	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	331	83	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	331	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	331	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.13 – Table du coût en GIR 3 – 17 premières années

GIR 3	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
60	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
61	6	4	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
63	5	4	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-
64	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
66	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
67	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-
68	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
69	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
70	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
71	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
72	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
73	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
74	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
75	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
76	4	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
77	4	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
78	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
79	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
80	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
81	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
82	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-
83	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
84	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
85	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
86	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
87	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
88	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
89	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
91	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
92	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
93	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
94	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
96	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
97	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
98	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
99	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
101	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
102	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
103	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
104	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
106	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
107	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.14 – Table du coût en GIR 3 – 18^{ème} à 35^{ème} années

Table du GIR 2

Les tables suivantes présentent le coût annuel de la présence en GIR 2 d'une une personne entrée en dépendance à un âge donné, pour une rente de 100 euros mensuels.

GIR 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
60	189	231	272	284	278	266	244	217	188	159	131	107	84	66	50	37	27
61	190	231	272	289	281	265	241	214	185	156	129	104	82	63	48	36	27
62	214	255	295	303	290	271	245	215	185	157	131	107	84	65	49	36	26
63	215	256	294	304	290	273	245	215	184	154	127	102	81	63	48	36	27
64	212	255	295	303	287	266	239	210	180	152	126	102	80	63	47	35	26
65	215	257	297	305	288	268	242	212	179	148	121	97	76	59	44	33	24
66	246	286	321	320	295	268	235	202	172	144	118	94	73	57	43	32	24
67	248	285	319	318	291	265	234	201	170	140	114	91	72	56	42	31	23
68	248	288	324	321	294	265	231	199	168	139	113	89	69	54	41	30	22
69	248	289	324	321	293	264	230	196	165	136	110	87	67	52	39	29	22
70	248	288	325	319	290	261	227	195	162	134	108	85	67	52	39	29	21
71	249	290	327	322	290	259	223	187	154	126	102	81	63	48	36	26	19
72	249	290	327	322	290	260	225	190	158	129	105	83	64	49	37	27	19
73	250	291	326	322	292	259	223	186	153	125	101	80	62	47	36	27	19
74	250	293	330	323	291	257	220	183	151	123	100	79	61	47	35	26	19
75	251	294	331	324	288	253	215	180	148	121	96	76	59	44	33	25	18
76	248	294	333	326	291	255	215	179	147	119	95	74	57	44	33	24	18
77	251	296	334	327	291	253	214	177	145	118	94	73	56	43	32	24	17
78	251	298	336	327	289	251	211	174	143	116	93	73	57	43	31	22	16
79	249	297	337	326	287	250	209	171	138	111	89	69	53	40	29	21	14
80	259	306	346	333	289	247	204	166	134	108	85	66	50	37	26	19	13
81	260	306	346	333	288	246	203	163	130	104	82	64	48	35	25	17	11
82	264	310	349	335	289	245	201	162	131	104	81	61	46	32	22	14	9
83	264	310	348	333	286	242	196	157	125	98	76	57	41	28	18	12	8
84	260	311	351	336	290	244	197	157	123	95	73	53	37	25	17	11	7
85	262	312	353	337	287	240	192	151	118	90	66	47	32	21	14	9	6
86	276	324	365	344	288	238	189	147	112	82	59	41	28	19	13	8	6
87	275	325	363	340	284	232	181	139	103	73	52	36	24	17	11	7	5
88	284	333	370	342	278	222	168	122	86	61	43	30	21	14	9	6	4
89	288	335	366	335	267	213	157	111	78	55	38	27	19	13	9	6	4
90	286	334	365	335	261	183	119	71	40	22	11	5	2	1	1	0	0
91	282	332	366	337	261	181	117	70	39	20	10	5	2	1	0	0	0
92	306	355	381	341	257	175	111	66	36	19	9	4	2	1	0	0	0
93	306	350	375	338	254	174	110	64	35	18	9	5	2	1	1	0	0
94	304	347	368	337	257	175	110	65	35	18	9	4	2	1	0	0	0
95	306	345	360	329	261	178	111	64	35	18	9	4	2	1	0	0	0
96	365	380	372	319	248	162	101	58	31	16	7	3	1	0	0	0	0
97	359	373	364	311	251	165	102	58	29	13	6	2	1	0	0	0	0
98	362	370	351	291	230	156	92	47	22	10	4	1	0	0	0	0	0
99	360	364	340	273	213	141	80	40	18	7	3	1	0	0	0	0	0
100	465	424	359	266	191	115	61	28	11	4	1	0	0	0	0	0	-
101	465	414	340	245	170	99	50	22	8	3	1	0	0	0	0	0	-
102	465	403	322	223	149	83	40	16	6	2	0	0	0	0	-	-	-
103	465	391	301	200	129	68	31	12	4	1	0	0	0	-	-	-	-
104	465	377	279	178	108	54	23	8	2	1	0	0	-	-	-	-	-
105	465	362	255	154	88	41	15	5	1	0	0	-	-	-	-	-	-
106	465	346	231	130	69	29	10	3	1	0	-	-	-	-	-	-	-
107	465	326	203	105	51	19	5	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-
108	465	305	175	82	35	11	3	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	465	281	146	61	22	6	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	465	254	116	41	12	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	465	224	88	25	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	465	191	60	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	465	154	35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	465	112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	465	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.15 – Table du coût en GIR 2 – 17 premières années

GIR 2	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
60	19	14	10	7	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-
61	19	14	10	7	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	-	0
62	20	14	10	7	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
63	18	13	9	6	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
64	19	13	10	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-
65	17	13	9	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-
66	17	12	9	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-
67	17	12	8	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-
68	16	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-
69	16	11	8	6	4	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-
70	15	10	7	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-
71	14	10	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
72	14	10	7	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
73	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-
74	13	9	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	13	9	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76	12	9	6	4	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
77	12	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-
78	10	7	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
79	9	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-
80	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
81	7	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
82	6	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
83	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
84	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
85	4	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
86	4	2	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
87	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-
88	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
89	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-
90	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
91	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
92	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
93	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
94	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
95	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
96	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
97	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
98	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
99	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
101	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
102	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
103	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
104	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
106	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
107	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.16 – Table du coût en GIR 2 – 18^{ème} à 35^{ème} années

Table du GIR 1

Les tables suivantes présentent le coût annuel de la présence en GIR 1 d'une une personne entrée en dépendance à un âge donné, pour une rente de 100 euros mensuels.

GIR 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
60	48	56	73	88	99	109	118	122	122	116	107	96	85	72	60	50	40
61	48	57	72	86	96	107	117	121	120	114	104	94	82	70	57	47	38
62	21	35	54	76	95	111	121	125	124	118	108	96	83	70	58	47	37
63	21	34	54	77	96	111	120	124	122	115	104	92	79	67	56	46	37
64	26	38	57	76	92	106	116	121	120	112	102	88	78	66	55	45	36
65	27	39	57	76	92	106	116	119	117	112	102	90	77	66	53	43	35
66	27	41	62	82	100	113	121	121	116	107	98	87	74	62	50	41	32
67	27	41	61	82	100	113	121	121	117	107	96	84	73	61	50	41	32
68	27	41	60	82	99	111	118	118	113	104	94	82	71	59	49	39	31
69	26	40	61	80	95	108	115	116	112	103	92	80	69	58	48	38	29
70	37	49	67	83	96	106	113	114	109	101	90	78	66	55	45	36	28
71	39	50	67	84	96	105	111	111	108	99	88	76	64	52	43	34	28
72	37	49	66	82	94	104	110	110	106	96	85	74	63	53	42	34	26
73	38	48	65	82	93	103	108	107	104	95	85	73	62	51	41	33	26
74	37	48	65	81	93	101	107	108	103	94	83	71	61	51	41	33	26
75	37	48	64	78	88	97	103	104	98	90	81	70	58	48	39	31	24
76	37	46	62	78	90	98	103	102	97	89	78	68	58	48	39	31	24
77	36	46	63	77	87	96	101	101	96	87	77	67	56	46	36	27	20
78	37	46	62	76	85	92	97	98	93	84	74	63	53	43	34	27	20
79	37	46	62	76	84	90	95	95	90	83	74	63	52	42	33	25	19
80	43	51	64	77	86	93	98	97	91	83	72	60	49	38	30	23	17
81	41	50	64	76	84	90	93	92	87	79	69	57	46	37	29	23	17
82	41	49	63	75	83	89	92	93	87	78	67	55	43	35	27	21	15
83	43	51	64	75	81	86	90	90	82	74	63	51	41	33	25	19	13
84	41	48	61	72	79	83	86	84	78	70	60	49	40	30	23	16	11
85	42	48	61	71	76	80	83	81	74	65	55	46	37	28	20	14	10
86	42	49	61	72	78	82	86	83	75	65	55	43	33	24	17	11	8
87	42	49	61	71	76	81	83	80	72	62	50	37	27	20	13	9	6
88	47	54	66	74	77	79	78	74	65	54	42	31	22	16	11	7	5
89	48	54	65	75	78	79	78	71	59	46	35	25	18	12	8	6	4
90	52	59	73	82	82	77	67	53	39	26	17	10	6	3	2	1	0
91	54	60	73	79	80	74	65	51	38	26	16	10	6	3	1	1	0
92	57	64	75	81	79	72	62	49	36	24	16	9	5	3	1	1	0
93	58	64	75	82	79	71	60	47	34	23	14	9	5	3	1	1	0
94	56	60	70	76	75	68	58	45	32	21	13	8	5	2	1	0	0
95	57	60	68	73	75	67	57	43	31	21	13	7	4	2	1	0	0
96	58	62	70	73	74	65	55	42	30	20	11	6	3	1	0	0	0
97	57	60	67	70	73	66	54	41	27	16	8	4	2	1	0	0	0
98	89	84	82	75	72	61	48	34	21	11	6	2	1	0	0	0	0
99	89	81	76	68	62	52	40	27	16	9	4	1	1	0	0	0	0
100	78	76	74	68	63	50	35	22	12	6	2	1	0	0	0	0	-
101	78	74	71	62	56	43	29	17	9	4	1	0	0	0	0	0	-
102	78	72	67	57	49	36	23	13	6	2	1	0	0	0	-	-	-
103	78	70	62	51	43	30	18	9	4	1	0	0	0	-	-	-	-
104	78	67	58	45	36	24	13	6	2	1	0	0	-	-	-	-	-
105	78	65	53	39	29	18	9	4	1	0	0	-	-	-	-	-	-
106	78	62	48	33	23	13	6	2	1	0	-	-	-	-	-	-	-
107	78	58	42	27	17	8	3	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-
108	78	54	36	21	12	5	2	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	78	50	30	15	7	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	78	45	24	10	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	78	40	18	6	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	78	34	12	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	78	27	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	78	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	78	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.17 – Table du coût en GIR 1 – 17 premières années

GIR 1	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
60	32	25	19	14	11	8	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0
61	30	23	18	13	10	7	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
62	29	23	17	13	10	7	5	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
63	30	23	18	13	9	7	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
64	29	22	17	13	9	7	5	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
65	27	21	16	12	9	6	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
66	25	19	15	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
67	25	20	15	11	8	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0
68	23	18	14	10	8	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
69	22	17	13	10	8	5	4	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
70	22	17	13	9	7	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
71	21	16	12	9	7	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
72	20	16	12	9	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
73	20	15	11	8	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
74	19	14	10	7	5	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
75	19	14	10	7	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
76	18	13	9	7	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
77	15	11	9	6	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
78	15	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
79	14	10	8	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	13	9	6	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
81	13	9	6	4	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	10	7	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	10	7	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84	7	5	4	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	5	4	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
87	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
89	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
91	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
92	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
93	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
94	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
95	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
96	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
97	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
98	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
99	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
101	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
102	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
103	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
104	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
106	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
107	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
109	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
114	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
115	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.18 – Table du coût en GIR 1 – 18^{ème} à 35^{ème} années

Bibliographie

- [1] Andersen P. K., Borgan O., Gill R., Keiding N., *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer, 1993.
- [2] Bas P., *Financer l'assurance dépendance*, Le Monde, 6 août 2009.
- [3] Bucar M., T. Nagode, Fajdiga M., *Reliability approximation using finite Weibull mixture distributions*, Reliability Engineering and System Safety, n°84, 241-251, 2004.
- [4] Castellan G., *Sélection d'histogrammes ou de modèles exponentiels de polynômes par morceaux à l'aide d'un critère de type Akaike*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Orsay, 2000.
- [5] CPRPSNCF, *Rapport Annuel d'Activité et Chiffres Clés*, 2007.
- [6] Cornu J., *Panorama du marché français de la dépendance*, Proceedings of 5^{ème} conférence annuelle Assurances dépendance et services à la personne, 2009.
- [7] Duée M., Rebillard C., *La dépendance des personnes âgées : une projection à long terme*, Document de travail, INSEE, 2004.
- [8] Eslous L., *La dépendance des personnes âgées – éléments de travail*, Rapport IGAS n°RM 2007-130P, 2007.
- [9] Espace Social Européen, *Dépendance, les clés pour comprendre le retard*, Numéro 893, 24 au 30 avril 2009.
- [10] Espagnol P., *L'allocation personnalisée d'autonomie au 31 décembre 2006*, Études et Résultats, n°569, avril 2007.
- [11] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume II*, 2nd edition, Wiley, 2005.
- [12] Gisserot H., *Perspectives financières de la dépendance des personnes âgées à l'horizon 2025 : prévisions et marges de choix*, Ministère de la sécurité sociale, des personnes âgées, des personnes handicapées et de la famille, mars 2007.
- [13] Janssen J., Manca R., *General actuarial models in a semi-Markov environment*. Proceedings of ICA Cancun, 2002.

- [14] Janssen J., Manca R., *Non Homogeneous Semi-Markov Reward Processes for the Management of Health Insurance Models*. Proceedings ASTIN Washington, 2001.
- [15] Jiang, R., Murthy, D.N.P., *Two sectional models involving three Weibull distributions*, Quality and Reliability Engineering international, n°13, 83-96 1997.
- [16] Kerjosse R., *L'allocation personnalisée d'autonomie au 31 décembre 2003*, Études et Résultats, n°298, mars 2004.
- [17] Léger C., Chedal-Anglay C., *L'assurance dépendance – Etude d'un produit collectif*, Mémoire d'Actuariat du CEA, 2001.
- [18] Lepez V., *Potentiel de réserves d'un bassin pétrolier : modélisation et estimation*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Orsay, 2002.
- [19] Liaisons Sociales, *La prévoyance en entreprise*, Numéro 15263, Cahier n°2, 18 décembre 2008
- [20] Loones A., *Approche du coût de la dépendance des personnes âgées à domicile*, Cahier de recherches n°221, Décembre 2005, CRÉDOC.
- [21] Martinie J.P., Albert A. *Comment favoriser l'essor de la couverture dépendance collective ?*, Proceedings of 5^{ème} conférence annuelle Assurances dépendance et services à la personne, 2009.
- [22] Massart P., *Concentration Inequalities and Model Selection*, Notes de l'école d'été de Saint Flour 2003, Springer, 2006.
- [23] Massonet B., *L'assurance dépendance – Estimation des matrices de transition – Modélisation*, Proceedings of ICA Paris, 2006.
- [24] Mathieu E., *Modélisations multi-états Markoviennes et semi-Markoviennes. Application à l'état de santé des patients atteints par le virus du SIDA*, Thèse de doctorat de l'Université de Montpellier, 2006.
- [25] Mathieu E., Foucher Y., Dellamonica P., Daures J.P., *Parametric and Non Homogeneous semi-Markov Process for HIV Control*, Methodology and Computing in Applied Probability, Springer, 2007.
- [26] Murthy D.N.P., Xie M., Jiang R., *Weibull models*, Wiley series in Probability and Statistics, Wiley, 2004.
- [27] Optimind, *La dépendance, éclairages sur un enjeu sociétal majeur*, Les dossiers techniques d'information Optimind, décembre 2007.
- [28] Ouhbi B., Limnios N., *Nonparametric Estimation for Semi-Markov Processes Based on its Hazard Rate Functions*, Statistical Inference for Stochastic Processes, vol. 2, 1999.

- [29] Protection Sociale Information., *Articles divers au fil de l'eau*, n°660 – 668 – 688, 2008 et 2009.
- [30] Planchet F., Thérond P., *Modèles de Durée*, Economica, 2006.
- [31] Planchet F., Winter. J., *Les Provisions Techniques des Contrat de Prévoyance Collective*, Economica, 2006.
- [32] Various authors, *Handicaps, Incapacités, Dépendance*, Revue Française des Affaires Sociales, n°1-2, 2003.
- [33] Pindyck R.S., Rubinfeld D.L. *Econometric Models & Economic Forecasts*, Third edition, McGraw-Hill, 1991.
- [34] Robert C. Denuit, M., *Actuariat des assurances de personnes, modélisation, tarification et provisionnement* Economica, 2007.
- [35] Dossiers SCOR, *L'assurance dépendance*, Scor Tech, 1995.
- [36] Dossiers SCOR, *Dépendance*, Scor Notes, 1991.
- [37] Stenberg F., Manca R., Silvestrov D., *Discrete time backward semi-Markov reward processes and an application to disability insurance problems*, Research Report 2005-1, Mälardalen University, Sweden, 2005.
- [38] Tosetti A., Fromenteau M., Ménart S., *Assurance : Comptabilité, Réglementation, Actuariat*, Economica, 2000.