

# UN MODÈLE DE PROJECTION POUR DES CONTRATS DE RETRAITE DANS LE CADRE DE L'ORSA

Version<sup>1</sup> 1.4 du 15/11/2014

François Bonnin<sup>2</sup> Florent Combes<sup>3</sup> Frédéric Planchet<sup>4</sup> Montassar Tamar<sup>5</sup>

ISFA - Laboratoire SAF<sup>β</sup>

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

## RÉSUMÉ

Le présent article propose un modèle de projection de la distribution du bilan économique d'un organisme assureur portant des engagements de retraite. Ce modèle, basé sur une approximation analytique de l'évaluation des engagements, permet de répondre aux exigences quantitatives de l'ORSA.

<b>1. INTRODUCTION</b> .....	<b>2</b>
<b>2. LE CONTRAT DE RETRAITE CONSIDÉRÉ</b> .....	<b>3</b>
<b>3. DESCRIPTION DE L'ENVIRONNEMENT FINANCIER</b> .....	<b>3</b>
3.1. Risque de taux .....	3
3.2. Inflation .....	4
3.3. Risque de <i>spread</i> .....	5
3.4. Risque « actions ».....	6
<b>4. LE MODÈLE DE PROJECTION</b> .....	<b>6</b>
4.1. Calcul des provisions techniques.....	6
4.1.1. Calcul avant prise en compte des rachats conjoncturels .....	7
4.1.2. Prise en compte des rachats conjoncturels.....	9
4.1.3. Synthèse .....	10
4.2. Calcul de la valeur de l'actif.....	11
4.3. Projection du bilan économique .....	12
<b>5. ILLUSTRATION NUMÉRIQUE</b> .....	<b>13</b>
<b>6. CONCLUSION ET DISCUSSION</b> .....	<b>15</b>
<b>7. BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>16</b>
<b>8. ANNEXES</b> .....	<b>17</b>
8.1. Cohérence des représentations du taux sans risque .....	17
8.2. Récapitulatif des paramètres .....	18
8.2.1. Paramètres du générateur de scénarios économiques .....	18
8.2.2. Paramètres de calcul des coefficients d'actualisation .....	19
8.2.3. Paramètre de calcul du correctif de rachats conjoncturels .....	19

<sup>1</sup> Ce travail a bénéficié du soutien de la chaire Management de la Modélisation (<http://isfa.univ-lyon1.fr/m2a>). Les auteurs remercient le lecteur anonyme dont les observations ont permis d'améliorer substantiellement ce travail.

<sup>2</sup> François Bonnin est actuair, consultant chez Hiram Finance

<sup>3</sup> Florent Combes est actuair, responsable de la gestion des risques à la MNRA.

<sup>4</sup> Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuair associé chez Prim'Act. Contact : [frederic@planchet.net](mailto:frederic@planchet.net).

<sup>5</sup> Montassar Tamar est consultant chez Prim'Act

<sup>β</sup> Université de Lyon, université Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 - France.

## 1. Introduction

Dans le cadre de la mise en place du volet quantitatif de l'ORSA (*Own Risks Solvency Assessment*), un organisme assureur doit mettre en place des outils lui fournissant une vision prospective de sa solvabilité et, en particulier, des indications sur l'incertitude associée au niveau de la couverture des engagements réglementaires (en premier lieu du SCR). Une présentation détaillée du cadre de l'ORSA est effectuée dans GUIBERT et *al.* [2014].

De manière plus précise, il s'agit de fournir des informations sur la distribution de probabilité d'indicateurs clé associés au bilan économique, tels que la valeur de l'actif, du passif, du surplus, du SCR, *etc.* Cette distribution doit être calculée pour chaque année de projection sur un horizon de l'ordre de celui du plan stratégique, disons de 3 à 5 ans (*cf.* GUIBERT et *al.* [2012]).

En présence de dispositif de participation aux bénéficiaires qui créent des interactions fortes entre l'actif et le passif, la modélisation de ces distributions s'avère particulièrement délicate. En effet, le calcul des provisions techniques dans le cadre du pilier 1 s'effectue le plus souvent par simulations, ce qui conduit à une imbrication de simulations pour utiliser ces outils dans le cadre de l'ORSA (*cf.* BONNIN et *al.* [2014]).

Dès lors, il convient de proposer des approches plus efficaces d'un point de vue numérique, comme par exemple dans BONNIN et *al.* [2014] pour le cas des contrats d'épargne en euros. Au-delà des stricts aspects numériques, les études menées sur les erreurs de modèle en finance suggèrent qu'un modèle complexe, précis pour calculer un prix, n'est pas le plus efficace en termes de gestion des risques (en l'espèce de gestion d'une couverture) du fait de son manque de robustesse (voir par exemple l'étude fondatrice de BAKSHI et *al.* [1997]).

Dans le présent travail on s'intéresse plus particulièrement au cas d'un contrat de retraite. Les contraintes réglementaires et en particulier les règles de détermination de la revalorisation des prestations sont analogues à ce qui prévaut pour les contrats d'épargne. Toutefois, l'objectif de revalorisation d'un contrat de retraite est le plus souvent directement relié à l'inflation (*cf.* PLANCHET et THÉRON [2007]).

On exploite ici cette caractéristique pour proposer un modèle permettant une évaluation explicite de la valeur de la clause de revalorisation et, dans un second temps, de l'option de rachat. L'évaluation des engagements peut alors être effectuée sur la base d'un déflateur spécifique ne nécessitant pas la projection des comptes sociaux. L'approche proposée s'inscrit dans le prolongement de BONNIN et *al.* [2014] (pour le calcul des provisions *best estimate*) et BONNIN et *al.* [2010] (pour la modélisation de l'actif) dont on reprend les principes de modélisation en les adaptant au contexte d'un régime de retraite.

Il devient alors possible de projeter les bilans économiques et de construire des estimateurs des distributions de probabilité citées *supra*. Il ne s'agit pas ici d'avoir une information sur l'ensemble de la distribution mais uniquement dans le « cœur » de celle-ci, typiquement entre les quantiles 5 % et 95 %. Le fait de ne pas s'intéresser aux queues des distributions permet d'utiliser un certain nombre de simplifications (approximations gaussiennes, dépendance simplifiée, *etc.*) qui seront précisées par la suite.

On se limite dans le présent article à la prise en compte des facteurs de risque financiers (taux, *spread* et actions) sans considérer le risque de longévité (cf. JUILLARD et al. [2008]) ni le risque commercial (cf. GUIBERT et al. [2012]), qui sont deux autres risques majeurs pour ce type de contrat. Ces deux risques peuvent par exemple être considérés dans une logique de scénarios à dire d'expert. Les cotisations futures seront donc supposées connues et certaines.

Dans la suite de cet article, on présente d'abord l'environnement financier utilisé puis le cadre de modélisation pour la projection des actifs et des passifs. Une illustration numérique est proposée.

## 2. Le contrat de retraite considéré

On considère dans la présente étude un contrat de retraite de type « rente viagère différée » souscrit dans le cadre des dispositions « Madelin ».

Les cotisations versées sont converties en rente au moment du paiement sur la base d'un tarif fixé à la date du calcul en fonction d'un taux technique et d'une table de mortalité. L'assureur supporte donc à partir de cette date le risque de longévité et les risques financiers.

Pendant la phase de constitution, l'assuré a la possibilité de racheter son contrat dans un nombre limité de situations<sup>6</sup> (notamment la liquidation de l'activité et l'invalidité). Il peut aussi demander le transfert de son épargne. Si le rachat *stricto sensu* est limité, le transfert constitue quant à lui un risque matériel pour l'assureur, dont les déterminants sont identiques à ceux du rachat pour des contrats d'épargne. On désignera dans la suite, par commodité, par le terme de « rachat » la somme des rachats et des transferts.

Le contrat est en pratique composé d'un stock de rentes en cours de service et de rentes en attente, avec différentes générations de taux techniques.

## 3. Description de l'environnement financier

On utilise un marché financier qui généralise celui proposé dans BONNIN et al. [2010] et dont la logique est de projeter directement des structures de prix. Quatre facteurs de risque sont intégrés au modèle : les niveaux des taux, de l'inflation et des *spread* de crédit et le prix des actions. Les choix effectués pour chacun d'eux sont détaillés ci-après.

### 3.1. Risque de taux

On retient comme modèle de référence le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]). Le taux zéro-coupon  $R(t, \tau)$  se décompose par hypothèse en<sup>7</sup> :

---

<sup>6</sup> Voir par exemple <http://www.loimadelin.com/les-contrats-madelin/contrat-retraite-madelin/rachat-madelin>

<sup>7</sup> On note  $\tau = T - t$  la maturité résiduelle d'un flux d'échéance  $T$  vu en date  $t$ .

$$R(t, \tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right).$$

Afin d'alléger les expressions, on pose  $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$  et  $\psi(x) = \varphi(x) - e^{-x}$ , de sorte que :

$$R(t, \tau) = \mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

On suppose comme dans BONNIN *et al.* [2010] que les paramètres de forme dépendent du temps et que le paramètre d'échelle  $\tau_1$  est constant. On note  $\mu_1 = l(t)$ ,  $\mu_2 = -s(t)$  et  $\mu_3 = c(t)$  pour faire référence à l'interprétation de ces valeurs dans le modèle, soit respectivement le taux long, le *spread* taux long / taux court et la convexité. Pour choquer la courbe des taux on s'appuie finalement sur la représentation :

$$R(t, \tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left( 1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

où  $r_0(t) = l(t) - s(t)$  est le taux court instantané. Cette équation présente l'avantage de faire apparaître des facteurs de détermination du taux zéro-coupon facilement interprétables : le taux court, le taux long et la convexité. Les dynamiques retenues pour ces facteurs sont (*cf.* BONNIN *et al.* [2010] pour la justification de ces choix) :

$$dr_0(t) = \mu_r (r_\infty - r_t) dt + \sigma_r dW_r(t)$$

$$dl(t) = \mu_l (l_\infty - l_t) dt + \sigma_l dW_l(t)$$

$$dc(t) = \mu_c (c_\infty - c_t) dt + \sigma_c dW_c(t)$$

En termes de structure de dépendance entre les facteurs ci-dessus, les corrélations constatées historiquement sont compatibles avec une hypothèse d'indépendance, qui sera donc retenue ici.

### 3.2. Inflation

Le modèle ci-dessus permet, à partir d'une description de la structure par termes nominale, de projeter les déformations de cette structure en s'appuyant sur 3 paramètres indépendants. Dans une logique de parcimonie, on choisit d'intégrer l'inflation (mesurée par l'écart entre les structures par termes nominale et réelle) *via* un unique paramètre supposé constant au cours du temps.

De manière plus précise, en indiquant par  $n$  la structure nominale et par  $r$  la structure réelle, on reconstruit la structure réelle à la date  $t$  à partir de la structure nominale projetée à cette date en utilisant :

$$R_r(t, \tau) = R_r(t-1, \tau) + \beta \times (R_n(t, \tau) - R_n(t-1, \tau))$$

avec  $\beta$  un paramètre fixé. La structure réelle initiale  $R_r(0, \tau)$  sera en pratique construite à partir du prix des OATi (cf. ROSSPOPOFF [2012]). On utilise pour calculer les anticipations d'inflation l'approximation de Fisher:

$$(1 + R_n(t, \tau))^\tau = (1 + R_r(t, \tau))^\tau \times (1 + I(t, \tau))^\tau$$

(cf. ROSSPOPOFF [2012]) que l'on utilise en pratique avec  $\tau = 1$  dans les projections. En notant  $r_t = R_n(t, 1)$  et  $i_t = I(t, 1)$ , la dynamique du taux d'inflation instantané est la suivante :

$$i_t = \frac{1 + r_t}{1 + R_r(t, 1)} - 1$$

avec  $R_r(t, 1) = R_r(t-1, 1) + \beta \times (r_t - r_{t-1})$ . L'inflation est donc directement déduite de la dynamique du taux court.

### 3.3. Risque de *spread*

Le *spread* considéré ici est celui du portefeuille, dont la composition est donc supposée relativement stable sur l'horizon de la projection pour l'ORSA. Il s'agit donc d'une vision agrégée des différents *spreads* par sous-jacent composant effectivement le portefeuille

On retient pour ce risque une approche simplifiée consistant à appliquer un abattement sur le prix issu du modèle pour les obligations nominales sans risque de défaut présenté ci-dessus. Formellement on utilise donc, pour une obligation de taux coupon  $\gamma$  et de nominal  $N$  le prix (cf. PLANCHET et al. [2009]) :

$$O_D(D, \gamma, N, t, T) = D(t) \times O(\gamma, N, t, T)$$

$$\text{avec } O(\gamma, N, t, T) = N \times \left( \gamma \sum_{i=1}^T P_n(t, i) + P_n(t, T) \right).$$

Le risque de *spread* est introduit dans le facteur de dépréciation  $D$  comme fonction du *spread* et de la sensibilité au risque de crédit du portefeuille (notée  $\delta$  et calibrée sur la base du portefeuille réel). On pose plus précisément :

$$D(t) = D(s(t), s_0, \delta) = D_0 \times \mathbf{exp}(-\delta(s(t) - s_0)),$$

le *spread* à la date  $t$ ,  $s(t)$ , suivant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$ds(t) = k \times (s_\infty - s(t))dt + \sigma_s dW_s(t).$$

Le mouvement brownien  $W_s$  est supposé corrélé uniquement au risque « actions » (cf. *infra*).

### 3.4. Risque « actions »

On utilise pour sa simplicité et son caractère de référence le mouvement brownien géométrique pour représenter la dynamique du prix des actions du portefeuille :

$$S(t) = S(0) \exp \left( \left( \mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A W_A(t) \right)$$

avec  $W_A$  un mouvement brownien.

## 4. Le modèle de projection

Le point essentiel de la modélisation est en pratique de produire une évaluation économique des engagements<sup>8</sup> à chaque date de projection, sur la base de la description du passif et de l'état des facteurs de risque de l'actif. La seconde partie du modèle consiste à projeter (en probabilité historique) les facteurs de risque pour recalculer, à chaque date de projection, les valeurs d'intérêt (valeur de l'actif, des provisions, du SCR, etc.).

Le modèle proposé s'attache à valoriser les deux options principales du contrat considéré, à savoir :

- une revalorisation des rentes (en cours et en attente) basée sur l'inflation et au moins égale au taux technique ;
- la possibilité de rachats anticipés, dans des conditions toutefois relativement restrictives.

Il repose sur un calcul adapté des provisions techniques économiques pour tenir compte de ces deux éléments en suivant une logique proche de celle de BONNIN et *al.* [2014].

### 4.1. Calcul des provisions techniques

Le calcul des provisions techniques s'appuie sur les flux de trésorerie ( $F_j, j \geq 1$ ) du régime (prestations majorées des frais, nettes des cotisations et des chargements) pour en déduire leur valeur actualisée à l'aide de la courbe des taux sans risque ou d'un déflateur adapté. De manière plus précise, on a, en supposant les frais proportionnels aux prestations,

$$F_j = (1 + \tau_p) \times P_j - C_j$$

où  $P$  désigne les prestations et  $C$  les cotisations. En supposant par convention que la date 0 est la date du calcul (date initiale ou date de projection), on a ainsi :

$$\Lambda = \sum_{j \geq 1} \delta(j) \times F_j$$

en notant  $\delta(j) = \prod_{k=1}^j (1 + r_k)^{-1}$  le facteur d'actualisation (aléatoire). La valeur économique des engagements est alors définie par  $BE = E^{P^a \otimes Q^f}(\Lambda)$  avec  $P^a$  la probabilité décrivant la distribution

---

<sup>8</sup> L'évaluation économique de l'actif ne présente pas de difficulté ici.

des aléas non financiers et  $Q^f$  une probabilité risque neutre décrivant, à la date de l'évaluation, la distribution (risque neutre) des aléas financiers. Il est précisé que seuls les facteurs de risques non mutualisables seront pris en compte dans les sources d'aléas. En d'autres termes, les risques mutualisables sont supposés parfaitement mutualisés. Cela est justifié par le fait que pour un portefeuille de taille significative<sup>9</sup>, la variance des indicateurs d'intérêt est expliquée très majoritairement par les risques systématiques.

En l'absence de revalorisation, le calcul du *best estimate* est simple et se ramène à

$$BE = \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a}(F_j)$$

avec  $P_n(0, j)$  le prix d'un zéro-coupon nominal à la date  $j$  et  $F_j$  le flux technique hors revalorisation mais après prise en compte des décès, rachats, primes futures, frais et chargements. De manière plus précise, en décomposant les flux en prestations et cotisations on a l'expression générale

$$BE = (1 + \tau_p) \times \sum_{j \geq 1} E^{P^a \otimes Q^f}(\delta(j) \times P_j) - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a}(C_j).$$

On note que le calcul de la valeur actuelle des cotisations futures est immédiat, alors que pour les prestations, dès qu'une revalorisation financière est introduite, la simplification de l'espérance n'est plus possible directement. On propose ci-après un modèle de calcul de  $E^{P^a \otimes Q^f}(\delta(j) \times P_j)$ .

#### 4.1.1. Calcul avant prise en compte des rachats conjoncturels

Dans le contexte général d'un contrat incluant une clause de participation aux bénéficiaires, le calcul ci-dessus est complexe à mettre en œuvre et nécessite le plus souvent un recours à la simulation numérique (cf. PLANCHET et al. [2011]). Dans le cadre des contraintes imposées par l'ORSA, il est nécessaire d'éviter ce recours pour utiliser un calcul direct. En conséquence, il est nécessaire de développer un modèle qui évite la projection des comptes sociaux comme intermédiaire de calcul du résultat.

Dans le cas d'un contrat de retraite, les simplifications envisageables peuvent s'appuyer sur le fait que l'objectif de revalorisation de prestations de retraite est en général très fortement lié à l'inflation des prix.

Les contrats incluent un taux technique et doivent donc être revalorisés au moins à ce taux. Cela implique que le coefficient de revalorisation des flux pour la période  $k$  associé à une génération de contrats de taux technique  $i$  est de la forme  $1 + \rho_k = 1 + i + [\omega_k - i]^+$  avec  $\omega_k$  la référence de revalorisation globale. Compte tenu du contexte, il est naturel de considérer que  $\omega_k = \lambda \times i_k$  désigne

---

<sup>9</sup> Et pour un petit portefeuille des considérations de matérialité conduiraient à utiliser des approches plus simples que le modèle décrit ici.

une fraction de l'inflation constatée sur la période. On est donc amené à considérer des flux de prestation revalorisés de la forme<sup>10</sup>

$$P_j^R = P_j \times \prod_{k=1}^j (1 + \rho_k) = P_j \times \prod_{k=1}^j \left(1 + i + [\lambda \times i_k - i]^+\right).$$

La valeur économique du flux ci-dessus est

$$E^{P^a \otimes Q^f} (\delta(j) \times P_j^R) = E^{P^a} (P_j) \times E^{Q^f} \left( \delta(j) \times \prod_{k=1}^j (1 + \rho_k) \right)$$

et il s'agit donc de proposer un modèle dans lequel on puisse obtenir une expression explicite pour

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f} \left( \delta(j) \times \prod_{k=1}^j (1 + \rho_k) \right) = E^{Q^f} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1 + \rho_k}{1 + r_k} \right)$$

avec  $r_j$  le taux sans risque instantané pour la période  $j$  (qui est donc aléatoire vu de la date initiale). On obtient en effet sous cette hypothèse une formule de la même forme que dans les deux cas précédents :

$$BE = (1 + \tau_p) \times \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) E^{P^a} (P_j) - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a} (C_j)$$

avec un déflateur spécifique adapté au processus de revalorisation en présence de taux technique. On

notera dans la suite de ce document  $\Delta_j = -\frac{\rho_j - r_j}{1 + r_j}$  la sous-performance instantanée actualisée, de

sorte que  $1 - \Delta_j = \frac{1 + \rho_j}{1 + r_j}$  mesure la performance relative du contrat par rapport au taux sans risque

et que :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f} \left( \prod_{k=1}^j (1 - \Delta_k) \right).$$

On utilise la même logique qu'à la section 3, pour définir le lien entre inflation et taux court. Afin de faciliter les calculs, on utilise un développement limité à l'ordre un qui conduit à  $i_t \approx (1 + r_t) \times (1 - R_r(t, 1)) - 1 \approx r_t - R_r(t, 1)$  puis, par récurrence, à

$$i_t \approx (1 - \beta)r_t + \beta r_0 - R_r(0, 1).$$

L'inflation de court terme est donc dans ce modèle approchée par une fonction affine du taux court, ce qui permet d'écrire :

<sup>10</sup> Pour alléger les notations, on suppose que l'on se place dans une population homogène vis-à-vis du taux technique, les résultats devant ensuite être sommés pour chaque taux technique.

$$1 - \Delta_k = \frac{1 + i + [\lambda(1 - \beta)r_k + \lambda\beta r_0 - \lambda R_r(0,1) - i]^+}{1 + r_k}.$$

Dès lors, en se plaçant dans le cadre d'un modèle de taux court gaussien (en probabilité risque neutre, voir par exemple PLANCHET et al. [2011]), on se ramène au calcul des intégrales suivantes :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1 + i + [\lambda(1 - \beta)r_k + \lambda\beta r_0 - \lambda R_r(0,1) - i]^+}{1 + r_k} \right).$$

L'intégrale définissant  $\Omega(0, j)$  se calcule numériquement à partir du vecteur  $m$ , espérance de  $r = {}^t(r_1, \dots, r_j)$  et de sa matrice de variance-covariance  $\Sigma$  :

$$\Omega(0, j) = \int f(r) \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(r - m)\Sigma^{-1}(r - m)\right) dr_1 \dots dr_j$$

$$\text{avec } f(r) = \prod_{k=1}^j \frac{1 + i + [\lambda(1 - \beta)r_k + \lambda\beta r_0 - \lambda R_r(0,1) - i]^+}{1 + r_k}.$$

**Remarque** : Dans l'approche décrite *supra*, la loi des coefficients de revalorisation doit intégrer à la fois la dynamique des facteurs de risque « bruts » issus du marché et l'effet d'atténuation des comptes sociaux et du cadre réglementaire qui construit le taux servi par filtrage du taux de marché. On souligne que les paramètres de cette loi sont contraints par le fait que le *best estimate* issu du modèle doit coïncider avec celui issu des outils « pilier 1 » qui projettent effectivement la mécanique des comptes sociaux et donc le taux servi. De cette manière le coût de la contrainte réglementaire globale de participation aux bénéfices est bien pris en compte dans le modèle.

Le modèle proposé permet donc de prendre en compte toute politique de participation aux bénéfices équivalente en termes de risques à garantir, outre le taux technique, une fonction affine du taux sans risque. Cela peut couvrir par exemple un objectif de revalorisation au moins égale à l'inflation ou bien la seule satisfaction de la contrainte réglementaire.

#### 4.1.2. Prise en compte des rachats conjoncturels

La loi des coefficients  $\Delta_j$  introduits ci-dessus dépendant *a priori* de la loi conjointe du couple  $(\rho_j, r_j)$  peut être complexe en fonction des choix de modèle effectués. On fait ici l'hypothèse que les variables aléatoires  $\Delta_j$  sont, sous une probabilité risque neutre, normales et indépendantes, ce qui conduit à écrire  $\Delta_j = \Delta + \sigma_\Delta \times \varepsilon_j$  avec  $(\varepsilon_j)$  un bruit blanc gaussien. Cette hypothèse est justifiée par le fait qu'il s'agit de capter dans le modèle une variabilité de ce rendement relatif pour en mesurer les conséquences dans la valorisation des flux. En supposant alors que le taux de rachat global se décompose en la somme d'un taux de rachat structurel fixe et d'un correctif lié au niveau de la sous-performance, on est conduit à postuler que :

$$\mu_j = \mu + \beta \times (\Delta_j - \Delta) = \mu + \beta \times \sigma_\Delta \varepsilon_j$$

où  $\beta \geq 0$  est la sensibilité à la variation de la sous-performance. On cherche alors à mesurer l'impact de l'existence de ce mécanisme de rachats conjoncturels sur le *best estimate* d'un flux unitaire payé sans limite (une rente perpétuelle). La valeur économique des flux rachetés peut s'écrire simplement

$$VR(\beta) = E^{Q^f} \left( \sum_{j \geq 1} \mu_j \times \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \mu_k)(1 - \Delta_k) \right).$$

En utilisant alors l'indépendance des termes des produits ci-dessus on en déduit que

$$VR(\beta) = \mu \times \sum_{j \geq 0} [(1 - \mu)(1 - \Delta) + \beta \times \sigma_\Delta^2]^j = \frac{\mu}{1 - ((1 - \mu)(1 - \Delta) + \beta \times \sigma_\Delta^2)}.$$

En observant que  $VR(0) = \frac{\mu}{1 - (1 - \mu)(1 - \Delta)}$  on peut réécrire cette égalité sous la forme :

$$VR(\beta) = \frac{VR(0)}{1 - VR(0) \frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu}}.$$

Cette équation exprime que la valeur des flux rachetés en présence d'une sensibilité  $\beta$  du taux de rachat au niveau de l'écart de performance entre le taux servi et le taux sans risque (le raisonnement est mené en probabilité risque neutre) augmente, au premier ordre, d'une proportion  $VR(0) \frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu}$ .

Par ailleurs, dans cet exemple, la provision mathématique du contrat est simplement

$$PM = \sum_{j \geq 1} \mu \times \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \mu) = 1 \text{ et le correctif obtenu s'entend donc « pour un € de PM ».}$$

### 4.1.3. Synthèse

En s'appuyant sur les éléments ci-dessus, on propose de corriger marginalement le niveau de la provision *best estimate* « hors rachats conjoncturels » en posant

$$BE_p(\beta) = \frac{1}{1 - \gamma \frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu}} \times BE_p(0)$$

avec  $BE_p(0) = \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) E^{P^a}(F_j)$  et  $\gamma = \frac{BE_p(0)}{PM}$  qui est supposé constant<sup>11</sup>. Dans l'approche ci-

dessus, la structure de l'actif n'est pas explicitement projetée, elle n'intervient que pour définir la dynamique du processus  $\omega$  dans le cas où la revalorisation serait définie à partir du rendement

<sup>11</sup> Cette simplification pourrait être évitée au prix d'un volume de calcul plus important en recalculant les PM à chaque date de projection.

économique de l'actif. Enfin, la marge pour risque est ajoutée au *best estimate* des prestations ; cette marge est supposée simplement proportionnelle à  $BE_p(0)$  et on note  $\tau_{RM}$  le coefficient de proportionnalité. Là encore, le paramètre  $\tau_{RM}$  est issu des calculs menés dans le cadre du pilier 1 avec un modèle ALM complet. Au global, les provisions techniques s'obtiennent donc *via* l'expression suivante :

$$PT = \frac{(1 + \tau_{RM}) \times (1 + \tau_p)}{1 - \gamma \frac{\beta \times \sigma_{\Delta}^2}{\mu}} \times \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) E^{Pa}(P_j) - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{Pa}(C_j).$$

Le calcul de la provision s'effectue donc en deux temps<sup>12</sup>, en supposant la détermination des flux hors revalorisation et hors rachats conjoncturels  $E^{Pa}(P_j)$  et  $E^{Pa}(F_j)$  effectuée en amont :

- Calcul numérique des coefficients d'actualisation  $\Omega(0, j)$  puis de  $BE_p(0)$  ;
- Ajustement *ex-post* de la valeur actualisée ainsi obtenue pour tenir compte de l'option de rachat lorsque celle-ci est présente (*i.e.* pour les cotisants uniquement).

#### 4.2. Calcul de la valeur de l'actif

L'actif est décrit de manière agrégée à partir des classes « actions », « taux nominaux », « taux indexés » et « crédit » qui composent un actif synthétique dans lequel la société est supposée investir. Les modèles proposés *infra* sont des modèles de déformation de structures de prix (courbes de taux réelle et nominale, prix des actions et prix d'une obligation synthétique représentative de la fraction du portefeuille présentant un risque de crédit).

De manière plus précise, pour les obligations nominale et indexée, on considère une obligation synthétique de la forme :

$$O_x(t, \tau) = N \times \left( \rho \sum_{i=t+1}^{t+\tau} P_x(t, i) + P_x(t, t + \tau) \right)$$

avec  $x = r, n$ . L'obligation *corporate* synthétique est de la forme  $O_c(t, \tau) = D(t) \times O_n(t, \tau)$ . L'action synthétique est modélisée directement. La valeur globale de la part de l'actif synthétique est déterminée à chaque date par

$$A(t) = \sum_x p_x(t) \times O_x(t, \tau) + p_s(t) \times S(t)$$

avec les poids  $p$  positifs. On suppose sans perte de généralité que  $A(0) = 1$ . Les poids sont ajustés le cas échéant pour rester dans des bornes d'allocation prédéterminées. Tant que les bornes ne sont pas atteintes,  $p$  reste fixe. L'actif total est un multiple de cette valeur de référence, le nombre de parts de

<sup>12</sup> Pour une génération de taux technique donnée.

l'actif synthétique évoluant au cours du temps en fonction des entrées (cotisations) et des sorties (prestations).

### 4.3. Projection du bilan économique

Le calcul des engagements (et, partant, la détermination du bilan), doit pouvoir être effectué à chaque date de projection, sur un horizon de l'ordre de 5 ans. Les facteurs de risque économiques doivent pour cela être projetés en probabilité historique et dans le cadre des approches décrites ci-dessus, il n'est pas utile de construire des projections « risque neutre » de ces facteurs. La logique du générateur de scénarios économiques utilisé sera donc de projeter des déformations de prix d'actifs directement exploitables.

Le modèle de projection de flux ainsi construit, l'exigence de capital réglementaire (SCR) doit être déterminée. On utilise ici un calcul selon la formule standard qui s'appuie sur les spécifications techniques du LTGA du 28/12/2012. Le point essentiel consiste à recalculer conformément à la formule standard les SCR taux, *spread* et actions, de la manière suivante :

- taux : pour chaque couple (année de projection, scénario), on recalcule les coefficients d'actualisation avec la courbe de taux nominaux choquée vers le haut puis vers le bas ; on en déduit aussi les structures d'inflation et réelles choquées (par souci de cohérence avec le cadre de modélisation : un choc de taux entraîne donc un choc sur l'inflation) ;
- *spread* : c'est un simple choc sur la valeur de marché (VM) fonction de la notation (qui ne bouge pas) et de la durée : on calibre le choc en 0 et on l'applique à la valeur des obligations. Il n'y a pas d'interaction avec les coefficients d'actualisation.
- actions : on applique un abattement de 22 % sur la VM. Il n'y a pas d'interaction avec les coefficients d'actualisation.

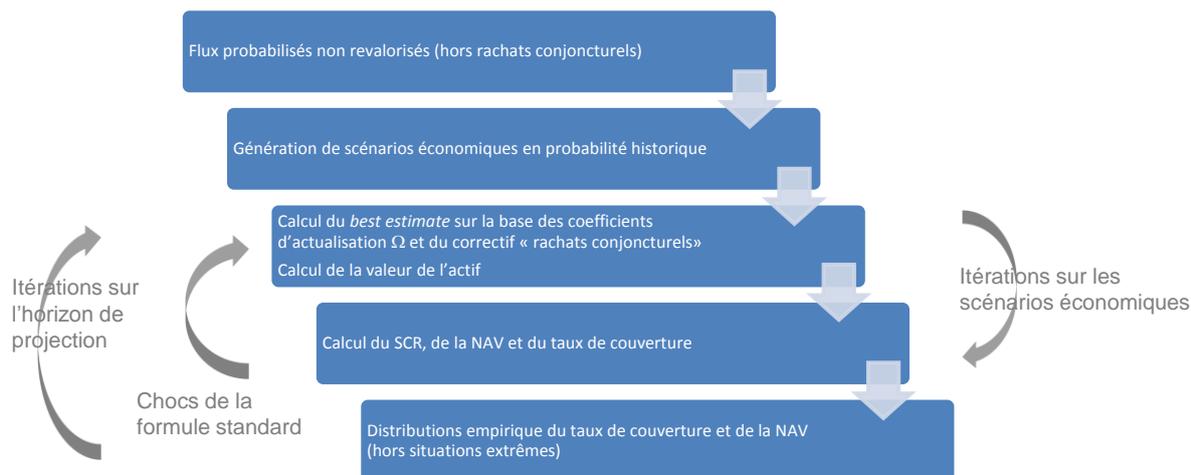
Les autres composantes du SCR sont supposées exprimées en pourcentage du *best estimate* de prestations. L'agrégation est standard. Une fois le SCR calculé pour chaque scénario, on obtient une évaluation du ratio de couverture puis de sa distribution.

Le modèle décrit ici repose sur des composants qui peuvent être décrits et construits de manière indépendante et qui s'appuient sur des flux  $(E^{Pa}(F_j))$  construits en amont :

- Le modèle de calcul des coefficients d'actualisation  $\Omega(0, j)$  (pour les prestations objet d'une revalorisation) et  $P_n(0, j)$  (pour les cotisations) ;
- Le correctif global pour les rachats conjoncturels ;
- Le générateur de scénarios économiques en probabilité historique pour la projection des facteurs de risque financiers ;
- Le calcul du SCR à chaque date.

Le fonctionnement du modèle peut être synthétisé graphiquement de la manière suivante :

**Fig. 1 : Schéma d'organisation du modèle**



Il est précisé que les choix de modélisation effectués à l'intérieur de chacun des modules sont justifiés par le souci de quantifier des effets réalistes de manière robuste et que l'on ne s'impose pas une stricte cohérence dans le détail des modèles entre les composants. Par exemple, la description de la loi des coefficients  $\Delta_j$  est délibérément plus grossière pour la mesure de l'effet des rachats conjoncturels que pour le calcul des coefficients d'actualisation.

Cette approche pragmatique permet de limiter la complexité des composants et de préserver ainsi le caractère calculable des différents éléments. Le calibrage des paramètres des différents composants doit en conséquence être réalisé pour garantir la cohérence des ordres de grandeur des montants qui en sont issus et, pour le calcul des coefficients d'actualisation, avec les résultats des calculs de *best estimate* issus des outils « pilier 1 » utilisés comme valeur de référence.

## 5. Illustration numérique

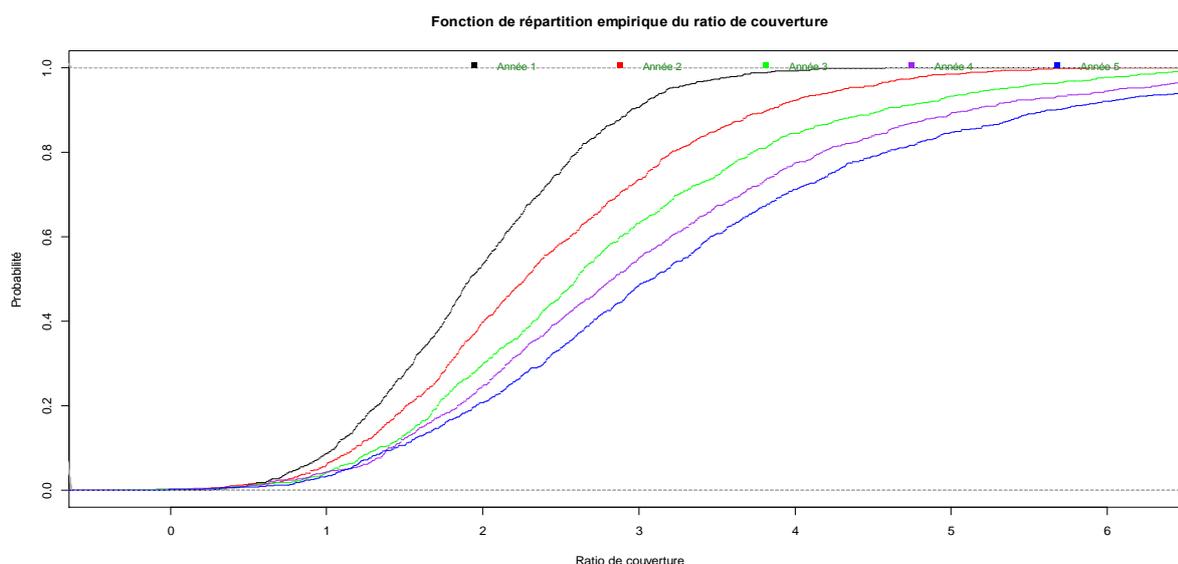
Pour illustrer le fonctionnement du modèle proposé, on utilise l'exemple d'un contrat de retraite avec 5 générations de taux garantis différentes, des rentiers en cours et en attente<sup>13</sup>. On dispose des flux espérés (hors revalorisation pour les prestations) projetés sur un horizon de 80 ans. La politique de revalorisation est exprimée par les gestionnaires du régime en indiquant que le niveau recherché est de 85 % de l'inflation, en complément (éventuellement) du taux technique. Les flux de passif sont fournis par l'assureur. Le calibrage initial du modèle est validé en contrôlant que la valeur *best estimate* des engagements sur le groupe fermé en *run-off* issue du modèle est quasi-identique à celle calculée par l'assureur dans son outil « pilier 1 ».

La situation initiale est la suivante : les provisions techniques sont la somme d'un *best estimate* de l'ordre de 2,5 Md€ et d'une marge pour risque de 0,14 Md€. La valeur de marché de l'actif est de 2,9 Md€, ce qui conduit à un montant de fonds propres de 0,26 Md€. Le SCR étant d'environ 0,35 Md€, le régime se trouve donc en situation de sous-couverture, les 3/4 de l'exigence étant couverts.

L'incertitude autour de cette moyenne peut être représentée d'abord de manière globale au travers de la déformation avec le temps de la distribution du taux de couverture :

<sup>13</sup> Si le modèle est réel, les données utilisées sont fictives.

**Fig. 2 : Évolution de la distribution du taux de couverture**<sup>14</sup>



Ainsi, on note que dans le scénario illustratif utilisé, le régime collecte un volume significatif de nouveaux engagements souscrits avec un taux technique faible, qui concourt à l'amélioration de la couverture au fil du temps, que les résultats suivants mettent en évidence :

**Fig. 3 : Caractéristiques des distributions du taux de couverture**

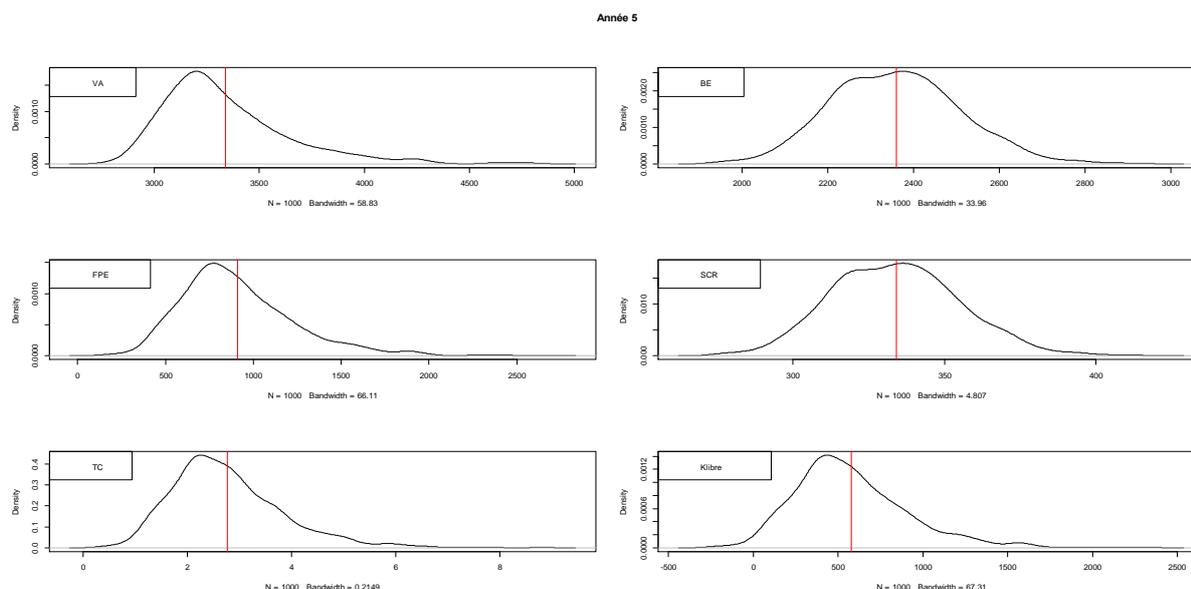
```
Valeurs du bilan économique à la date des calculs (en M€)
Fonds propres économiques : 270.9172 (valeur pilier 1= 278 )
SCR : 377.1194 (valeur pilier 1= 358 )
TC : 0.7183857 (valeur pilier 1= 0.7765363 )
ratio de couverture initial : 0.7183857
Taux de couverture de l'année 1
  Min. 1st Qu.  Median  Mean 3rd Qu.  Max.
  0.3691 0.8956 1.0240 1.0400 1.1780 2.0210
Taux de couverture de l'année 2
  Min. 1st Qu.  Median  Mean 3rd Qu.  Max.
 -0.3206 0.8110 1.0550 1.0640 1.2930 2.3520
Taux de couverture de l'année 3
  Min. 1st Qu.  Median  Mean 3rd Qu.  Max.
 -0.5301 0.7909 1.0840 1.0910 1.3870 2.5010
Taux de couverture de l'année 4
  Min. 1st Qu.  Median  Mean 3rd Qu.  Max.
 -1.7500 0.8034 1.1600 1.1630 1.5020 2.7100
Taux de couverture de l'année 5
  Min. 1st Qu.  Median  Mean 3rd Qu.  Max.
 -1.5640 0.9035 1.3040 1.2940 1.7190 3.0600
```

On observe une amélioration lente mais régulière de la situation du régime.

Enfin, la situation d'une année de projection particulière peut être analysée de manière détaillée, par exemple *via* l'examen des distributions des variables d'intérêt, représentée ci-dessous pour la cinquième année :

<sup>14</sup> Les courbes sont de plus en plus « aplaties » lorsque l'année de projection augmente.

**Fig. 4 : Distributions empiriques des variables d'intérêt<sup>15</sup> l'année 5**



On dispose ainsi d'une batterie d'indicateurs riche pour analyser les risques supportés par le régime et leurs interactions dans une vision prospective.

## 6. Conclusion et discussion

Le modèle présenté ici permet donc la projection stochastique du bilan économique d'un organisme assureur portant des engagements de retraite. Le choix de la prise en compte des options implicites des contrats d'assurance et des rachats conjoncturels à l'aide d'approximations analytiques compatibles avec des formules fermées conduit à des performances compatibles avec les exigences opérationnelles de l'ORSA mais également selon nous à éviter des complications peu utiles et, partant, à une meilleure intelligibilité des calculs et des résultats.

Ce modèle a été mis en œuvre avec succès dans le cadre réel d'un organisme de retraite, sur la base de données et de paramètres fixés à la fin de l'année 2013. Son calibrage doit s'appuyer, pour présenter le niveau de précision et de robustesse indispensable à tout calcul contraint par le cadre réglementaire tel que ceux attendus par l'ORSA, sur un bilan prudentiel établi en amont. En d'autres termes, ce modèle ne prétend pas se substituer aux modèles en vigueur pour estimer la juste valeur (*fair-value*) des contrats d'épargne ou de retraite mais se caler sur leurs résultats pour estimer des risques bilanciaux sur des horizons pluriannuels d'une durée limitée (ici cinq années).

Les évolutions les plus directes du modèle proposé sont essentiellement de deux ordres : la modélisation des actifs pourrait être enrichie par un processus de sauts sur les actifs de crédits, présentant un facteur commun plus ou moins corrélés avec la poche actions, pour permettre une prise en compte statistique du risque de concentration « émetteurs » à l'échelle de l'ensemble du portefeuille. Plus fondamentalement, l'adaptation du modèle à des contrats d'épargne en euros (dans la suite de BONNIN et *al.* [2014]) est une voie de recherche prometteuse mais qui suppose d'établir une politique de taux servi correctement représentée par un nombre limité de variables ; dans un tel cadre

<sup>15</sup> Soit de gauche à droite et de haut en bas VA, BE, FPE, SCR, TC et KLibre.

le risque de comportement des épargnants serait mesuré par un paramètre unique représentatif de leur réactivité.

Un enrichissement plus complexe de ce modèle, qui fera l'objet de travaux ultérieurs, consiste à introduire le risque de longévité au travers d'une modélisation stochastique de la mortalité, en généralisant la démarche proposée dans GUIBERT et *al.* [2010]. Il faut toutefois souligner que la construction de scénarios de longévité adverses, dans une logique d'analyse de sensibilité, permet une première quantification de ce risque.

## 7. Bibliographie

BAKSHI G., CAO C., CHEN Z. [1997] « Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models », *Journal of Finance*, Vol. 52, Issue 5.

BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2014] « [Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA](#) », *European Actuarial Journal*, Vol. 4, Issue 1, Page 181-196. <http://dx.doi.org/10.1007/s13385-014-0086-z>.

BONNIN F., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « [Applications de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux.](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°21.

CHRISTENSEN J.H.E.; DIEBOLD F.X.; RUDEBUSH G.D. [2010] « [The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models](#) », *Federal Reserve Bank of San Francisco*, WP n°2007-20.

GUIBERT Q., JUILLARD M., NTEUKAM T. O., PLANCHET F. [2014] *Solvabilité Prospective en Assurance - Méthodes quantitatives pour l'ORSA*, Paris : Economica.

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2012] « [Measuring Uncertainty of Solvency Coverage Ratio in ORSA for Non-Life Insurance](#) », *European Actuarial Journal*, 2:205-226, doi: 10.1007/s13385-012-0051-7.

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « [Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.

JUILLARD M., PLANCHET F., THÉRON P.E. [2008] « [Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 76 (3).

NELSON C.R., SIEGEL A.F. [1987] « Parsimonious modelling of yield curves », *Journal of Business*, 60, 473-489.

PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition revue et augmentée*, Paris : Economica (première édition : 2005).

PLANCHET F., THÉRON P.E., KAMEGA A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉRON P.E. [2007] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.

PLANCHET F., TOMAS J. [2013] « [Uncertainty on Survival Probabilities and Solvency Capital Requirement: Application to LTC Insurance](#) », *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, n°2013.4.

R DEVELOPMENT CORE TEAM [2013] « R: A Language and Environment for Statistical Computing », Vienna, Austria, (R Foundation for Statistical Computing), ISBN : 3-900051-07-0.

ROSSPOPOFF B. [2012] [Modèles de taux et d'inflation pour Solvabilité 2](#), Mémoire d'actuaire, ISFA.

## 8. Annexes

### 8.1. Cohérence des représentations du taux sans risque

La structure par termes nominale de l'exercice  $t$  ( $R(t, \tau), \tau \geq 0$ ) est représentée dans le modèle proposé de différentes manières en fonction des besoins de la modélisation :

- L'hypothèse de référence à la date initiale ( $R(0, \tau), \tau \geq 0$ ) est une structure donnée issue du modèle de Smith-Wilson, donc sans structure paramétrique simple ;
- La déformation de cette structure s'appuie sur la représentation paramétrique de Nelson-Siegel  $R(t, \tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$  ;
- Le calcul des coefficients d'actualisation des prestations  $\Omega(t, j)$  repose quant à lui sur une représentation de Vasicek basée sur le taux court  $dr_t = a(r_\infty - r_t)dt + \sigma dW_t$  qui conduit à la forme paramétrique des taux (cf. PLANCHET et al. [2011]) :

$$R(t, \tau) = r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{4\tau a} \varphi(a)^2 - \varphi(\tau a) \left( r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t \right).$$

Les interactions entre ces représentations sont les suivantes :

- La courbe initiale fournie par l'EIOPA est utilisée pour calibrer l'ajustement de la forme paramétrique de Nelson-Siegel ;
- Cette forme paramétrique est utilisée à chaque pas de projection pour calibrer le modèle de Vasicek à partir duquel sont projetés les taux courts utilisés pour le calcul des coefficients d'actualisation.

Dans ce contexte il est important d'assurer une certaine cohérence entre ces différentes représentations. Le calibrage est ainsi déterminé pour minimiser les écarts entre ces différentes courbes. Afin d'assurer la cohérence du calcul des valeurs actuelles entre la courbe initiale et la courbe issue du modèle de Vasicek, on corrige cette dernière pour assurer *ex-post* que  $\sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a}(P_j)$

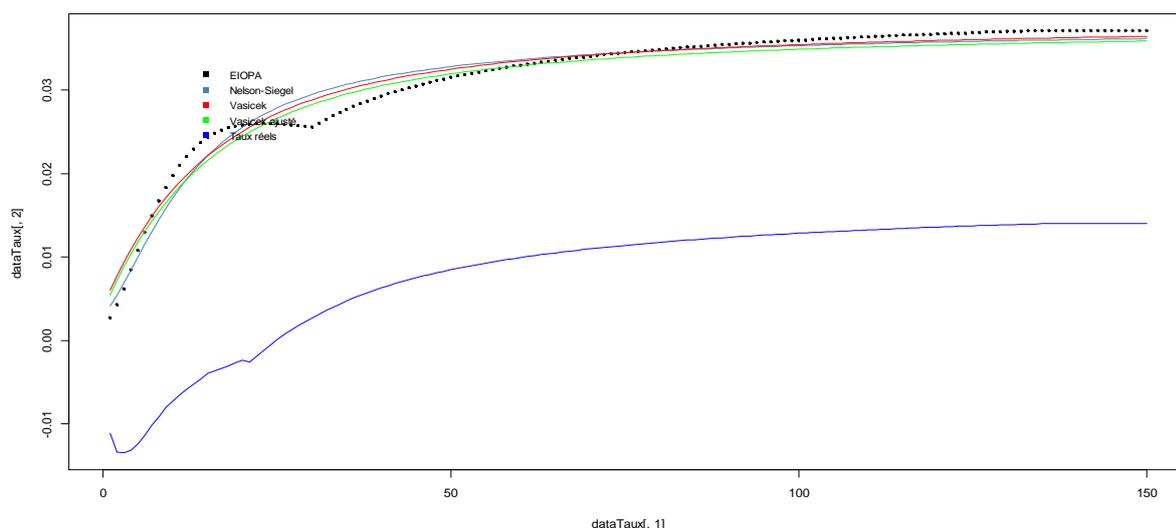
soit identique avec les  $P_n(0, j)$  de la courbe EIOPA et ces mêmes coefficients issus du modèle de Vasicek ; pour cela on ajoute un « *spread* d'ajustement » aux taux ZC issus du modèle de Vasicek. Ce *spread* est déterminé en 0 et supposé constant au cours de la projection<sup>16</sup>.

À titre d'illustration, avec la courbe EIOPA au 31/12/2012 comme courbe de référence, on obtient les ajustements suivants :

---

<sup>16</sup> D'un point de vue théorique on pourrait utiliser le modèle de Vasicek généralisé pour utiliser la courbe EIOPA comme une donnée, mais en pratique comme ce modèle repose sur le courbe des taux *forward* instantanés et que celle-ci n'est pas connue et devrait être approximée à partir des taux annuels, le grain en termes de précision serait modeste au regard de la perte associée à l'augmentation de complexité du modèle.

**Fig. 5 : Représentations du taux sans risque**



On peut noter que le *spread* d'ajustement calibré sur des données réelles est en pratique quasi nul et que donc l'ajustement par le modèle de Vasicek fournit une représentation de bonne qualité pour calculer des valeurs actuelles.

## 8.2. Récapitulatif des paramètres

Les données du modèle sont constituées des données « ligne à ligne » du *model point* pour le calcul des flux espérés (y compris rachats structurels et hors revalorisation), soit  $E^{P^a}(P_j)$  pour les prestations et  $E^{P^a}(C_j)$  pour les cotisations.

### 8.2.1. Paramètres du générateur de scénarios économiques

Les paramètres du générateur de scénarios économiques se compose d'une part de paramètres associés aux définitions des structures de prix (les paramètres associés à l'ajustement par le modèle de Nelson-Siegel de la structure par termes des taux d'intérêt) et de paramètres associés au processus de déformation de ces structures de prix. On en déduit la liste suivante, présentée par classe d'actifs :

- Le modèle d'ajustement et de décomposition de la structure par termes est une version simplifiée du modèle proposé dans BONNIN et *al.* [2010], qui décrit les paramètres et les procédures d'estimation associées. L'estimation des paramètres se fait en deux temps, à partir d'un historique de courbes de taux sans risque :
  - On calcule d'abord à chaque date les paramètres  $r_t$ ,  $l_t$  et  $c_t$  qui minimisent une fonction d'écart entre les valeurs modélisées des taux et les valeurs observés. On pourra fixer  $l_0$  en référence à l'UFR proposé par l'EIOPA par souci de cohérence entre la courbe ajustée par Nelson-Siegel et la courbe fournie par l'EIOPA pour les maturités longues.
  - On utilise la chronique ainsi construite des paramètres  $r_t$ ,  $l_t$  et  $c_t$  pour estimer les paramètres des processus stochastiques d'Ornstein-Uhlenbeck. En l'absence de sauts pour le processus de taux courts, la méthode d'estimation est standard.

- La détermination de l'inflation repose sur le taux court réel initial et sur le paramètre  $\beta$  de répartition des variations de taux nominal entre taux réels et inflation. Ce paramètre peut être estimé par une régression linéaire, sa valeur se trouve usuellement entre 60 % et 70 %.
- Le modèle pour le *spread* nécessite en premier lieu la détermination de l'obligation synthétique qui résume le portefeuille et la mesure de son écart de prix par rapport à une obligation ZC « sans risque »,  $D_0$  puis de la valeur initiale  $s_0$  et des paramètres de la diffusion du *spread*  $ds(t) = k \times (s_\infty - s(t))dt + \sigma_s dW_s(t)$ . La valeur initiale du *spread* est calibrée sur le *spread* moyen du portefeuille obligataire, les paramètres  $k$  et  $s_\infty$  et  $\sigma_s$  sont calibrés sur une série historique de *spreads* de notation comparable à celle du portefeuille obligataire.
- Enfin, le risque « actions » requiert les paramètres de dérive  $\mu_A$  et de volatilité  $\sigma_A$ . La prime de risque actions fera l'objet d'une hypothèse ou d'une estimation à dire d'experts (par exemple issu d'une référence Bloomberg).

### 8.2.2. Paramètres de calcul des coefficients d'actualisation

Ce module s'appuie sur les paramètres suivants :

- Le taux technique  $i$  de la rente ;
- Le paramètre  $\lambda$  définissant la part de l'inflation totale affectée en revalorisation ; ce paramètre peut être calibré de manière à recalculer la valeur du *best estimate* de prestations issu du modèle avec les résultats du pilier1.
- $\beta$ , le coefficient de répartition des variations de taux nominal entre variations de taux réel et variations d'inflation ;
- Les valeurs initiales des taux courts réel et nominal,  $R_r(0,1)$  et  $r_0$  ;
- Les paramètres de la dynamique  $dr_t = a(r_\infty - r_t)dt + \sigma dW_t$  du taux court nominal sous la probabilité risque neutre, soit  $a$ ,  $r_\infty$  et  $\sigma$ .

Le calcul des coefficients requiert également la spécification de l'horizon maximal de projection  $H$  et du nombre de simulations pour le calcul par Monte-Carlo,  $N$ .

### 8.2.3. Paramètre de calcul du correctif de rachats conjoncturels

Ce module nécessite la détermination de quatre paramètres :

- $\mu$ , le taux de rachat structurel de base, directement observé ; on utilise ici  $\mu = 2\%$ .
- $\beta$ , la sensibilité des rachats à la variation de la sous-performance. Il s'agit du paramètre le plus délicat à estimer. En présence de taux garantis significatifs, il pourrait être estimé par la différence entre taux de rachats pour différents taux garantis ; on retient ici  $\beta = 2\%$ .
- $\sigma_A$ , la volatilité de la sous-performance ; en première approximation ce paramètre peut être estimé comme une proportion de la volatilité économique de l'actif, dépendant du niveau de lissage comptable. Pour un paramètre de lissage de 20 %, ce ratio peut être estimé en ordre de grandeur à  $(0,2 / 0,8)^{1/2}$  soit 50 %.

- $\gamma$ , le rapport entre le *best estimate* et la provision mathématique, directement issu des calculs pilier I. Dans l'exemple présenté,  $\gamma = 85\%$ .