

TABLE DES MATIÈRES

Préface	1
Introduction	3
Chapitre 1 Présentation générale	7
1. Introduction.....	7
1.1. Points de repères historiques.....	7
1.2. Particularités des données de durée	8
1.3. Modèles statistiques.....	9
2. Représentation d'une distribution de survie.....	9
2.1. Fonction de survie.....	9
2.2. Survie conditionnelle	10
2.3. Fonction de hasard.....	10
2.4. Cas des variables discrètes.....	11
3. Lois paramétriques usuelles.....	13
3.1. Modèle exponentiel	14
3.2. Modèle de Weibull	14
3.3. Modèle gamma	17
3.4. Modèle de Gompertz-Makeham	19
4. Modèles composites.....	21
4.1. Mélanges de lois	21
4.2. Modèles à hasard proportionnel.....	23
4.3. Transformations croissantes de la durée	25
4.4. Modèles à causes de sortie multiples.....	25
4.5. Modèles à choc commun	26
5. Introduction à la prise en compte de censure et de troncature	27
5.1. Censure de type I : censure fixe.....	27
5.2. Censure de type II : « arrêt au r-ième décès ».....	27
5.3. Censure de type III : censure aléatoire.....	28
5.4. Troncature.....	28
Chapitre 2 Modèles paramétriques et semi-paramétriques	29
1. Prise en compte de censure dans les modèles de durée.....	29
1.1. Censure de type I : censure fixe.....	29
1.2. Censure de type II : « arrêt au r-ième décès ».....	32
1.3. Censure de type III : censure aléatoire.....	34
1.4. Prise en compte de covariables.....	35
1.5. Troncature.....	36
2. Estimation du maximum de vraisemblance dans un modèle censuré	36
2.1. Application de la méthode du maximum de vraisemblance	38
2.2. Écritures particulières aux modèles de durée.....	40
2.3. Modèles à hasard proportionnel.....	40

2.4. Algorithmes numériques de maximisation de la vraisemblance.....	49
3. Tests fondés sur la vraisemblance.....	51
3.1. Rapport des maxima de vraisemblance.....	51
3.2. Test de Wald.....	52
3.3. Test du score.....	52
4. Cas pratique : le modèle Weibull.....	52
4.1. Omission des données censurées.....	53
4.2. Intégration des données censurées.....	54
4.3. Illustration numérique.....	55
5. Exercices.....	57
Chapitre 3 Modèles non paramétriques	59
1. Introduction.....	59
1.1. Généralités.....	59
1.2. Notations.....	60
2. Modèles de durée et processus ponctuels.....	60
3. Estimateurs non paramétriques dans les modèles de durée.....	63
3.1. Estimateur de Nelson-Aalen du taux de hasard cumulé.....	64
3.2. Estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie.....	67
4. Comparaison d'échantillons : approche non paramétrique.....	75
4.1. Rappel : principe des tests de rang.....	75
4.2. Adaptation des tests de rang au cas censuré.....	76
4.3. Approche par les processus ponctuels.....	79
5. Exercices.....	81
Chapitre 4 Processus poissonniens et files d'attente.....	85
1. Processus de Poisson.....	85
1.1. Définition et premières propriétés.....	85
1.2. Lien avec la loi de Poisson.....	86
1.3. Apparition de la loi exponentielle.....	88
1.4. Distribution des sauts d'un processus de Poisson.....	88
1.5. Martingales associées au processus de Poisson.....	90
1.6. Processus de Poisson non homogène.....	92
2. Rappels sur les processus markoviens.....	93
2.1. Chaînes de Markov en temps discret.....	93
2.2. Chaînes de Markov en temps continu.....	96
2.3. Processus de naissance et de mort.....	97
3. Introduction aux files d'attente.....	99
3.1. Définition.....	99
3.2. Classification des files d'attente.....	100
3.3. File M/M/1.....	100
3.4. File M/G/1.....	102
Chapitre 5 Méthodes de lissage et d'ajustement.....	107
1. Introduction.....	107
1.1. Régularité et précision.....	107
1.2. Les différentes approches.....	108

1.3. Définitions et notations.....	108
2. Méthodes d'ajustement paramétrique	109
2.1. Ajustement à une loi continue	109
2.2. Lissage par splines.....	109
2.3. Interpolations à jonctions lisses	111
3. Méthodes de lissage non paramétrique	113
3.1. Moyennes mobiles.....	113
3.2. Méthode de Whittaker-Henderson.....	114
3.3. Lissages bayésiens.....	119
4. Validation de l'ajustement	121
4.1. Test du Chi-deux.....	121
4.2. Test des changements de signe	122
Chapitre 6 Analyse de la mortalité.....	123
1. Introduction.....	123
1.1. Contexte réglementaire.....	123
1.2. Différents types de tables de mortalité.....	123
2. Analyse de la mortalité	125
2.1. Notations.....	125
2.2. Diagramme de Lexis.....	127
2.3. Mortalité longitudinale et mortalité transversale	130
2.4. Répartition des décès dans l'année	132
2.5. Indicateurs synthétiques du niveau de la mortalité	133
3. Décès au premier instant d'atteinte d'un seuil par un processus.....	135
3.1. Présentation du modèle.....	136
3.2. Estimation des paramètres	136
4. Quelques indicateurs.....	137
4.1. Données générales	137
4.2. Impact du tabagisme	138
Chapitre 7 Construction de tables de mortalité d'expérience	143
1. Construction de tables du moment.....	143
1.1. Ajustement par maximum de vraisemblance discret	145
1.2. Exemple : modèle de Makeham.....	146
1.3. Ajustement des taux bruts sur la base des logits.....	149
1.4. Utilisation d'une référence externe.....	152
1.5. Approches spécifiques	153
1.6. Intervalles de confiance pour les taux bruts.....	154
1.7. Fermeture de la table	156
2. Tables prospectives.....	157
2.1. Méthode de Lee-Carter.....	158
2.2. Modèle log-Poisson	164
2.3. Modèles log-linéaires.....	168
2.4. Utilisation des séries chronologiques.....	170
2.5. Modèles à référence externe	171
3. Critères de validation du modèle	172
3.1. Fidélité aux données	172
3.2. Stabilité des estimations.....	173

3.3. Capacité prospective	174
Chapitre 8 Estimation du maintien en arrêt de travail	175
1. Introduction.....	175
1.1. Contexte général	175
1.2. Notations.....	176
1.3. Principales tables à estimer.....	177
2. Modélisation du maintien en arrêt de travail.....	178
2.1. Approche standard	178
2.2. Modèles bidimensionnels	179
3. Application	186
3.1. Présentation des données	187
3.2. Estimation des taux bruts	187
3.3. Ajustement par splines.....	189
3.4. Comparaison avec d'autres méthodes.....	191
3.5. Une approche alternative	192
3.6. Calcul d'un barème de provisionnement	194
Chapitre 9 Modèles stochastiques de mortalité.....	199
1. Introduction.....	199
1.1. Modélisation classique de la mortalité.....	199
1.2. Modèles stochastiques	201
2. Modélisation du processus d'intensité	205
2.1. Cadre général	205
2.2. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	206
2.3. Processus de Feller (CIR)	208
2.4. Estimation des paramètres	212
3. Un modèle simple de mortalité stochastique	213
4. Risque systématique de mortalité pour un régime de rentes	214
4.1. Mise en place	215
4.2. Cas d'une mortalité déterministe	216
4.3. Cas d'une mortalité stochastique	220
4.4. Conclusion	228
Annexe 1 : Correction des exercices.....	229
1. Modèles paramétriques	229
2. Modèles non-paramétriques.....	236
Annexe 2 : Transformées de Laplace usuelles.....	245
Annexe 2 : Textes réglementaires.....	246
Annexe 3 : comparaison des modèles de Lee-Carter et de Poisson	248

Annexe 4 : Méthodes de calcul des taux bruts de sortie	249
1. Estimateur de Kaplan Meier	249
1.1. Références.....	249
1.2. Mode de calcul.....	249
1.3. Contexte d'utilisation	250
1.4. Exemple	251
2. Estimateur actuariel	252
2.1. Références.....	252
2.2. Mode de calcul.....	252
2.2. Calculs.....	252
2.3. Contexte d'utilisation	253
3. Estimateur binomial.....	253
3.1. Mode de calcul.....	253
3.2. Contexte d'utilisation	254
4. Estimateur des moments de Hoem.....	254
4.1. Mode de calcul.....	254
4.2. Contexte d'utilisation	255
5. Quotient partiel	255
5.1. Références.....	255
6. Avantages et inconvénients des méthodes	257
7. Récapitulatif des formules	258
Formules	259
Abbreviations et symboles utilisés	260
Bibliographie	261
Table des matières	267