

CONSTRUCTION ET VALIDATION DES RÉFÉRENCES DE MORTALITÉ DE PLACE

Julien TOMAS ^{α *} Frédéric PLANCHET ^{α †}

^α ISFA - Laboratoire SAF [‡]

Résumé

Cette note de travail présente les réflexions méthodologiques et pratiques concernant la construction et la validation de référence de mortalité prospectives *best estimate* de place. A partir de données issues de portefeuilles transmis par 15 organismes participants, nous construisons des tables de mortalité de référence par sexe résumant l'expérience des ces portefeuilles. Nous analysons les divergences observées entre les surfaces de mortalité générées par les différents modèles. Nous considérons deux méthodes pour graduer et extrapoler les surfaces. La première est une méthode non-paramétrique de vraisemblance locale permettant la construction d'une table « du moment » puis l'application à cette table des dérives directement calculées sur les tables de référence. La deuxième est une approche paramétrique avec un positionnement à l'aide de la fonction logistique. Des tests et marqueurs résumant les distributions des durées de vie sont utilisés pour mesurer l'impact du choix du modèle et valider la table finale.

*Contact: julien.tomas@univ-lyon1.fr

†Contact: frederic.planchet@univ-lyon1.fr.

[‡]Institut de Science Financière et d'Assurances - Université Claude Bernard Lyon 1 - 50 Avenue Tony Garnier - 69366 Lyon - France

Sommaire

1 Introduction	1
2 Notations, hypothèses, données et approches	2
2.1 Notations	2
2.2 Hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux	2
2.3 Les données	2
2.4 Les tables de référence externes	3
2.5 Les approches	5
3 Comparaison de la mortalité observée et ajustée	9
3.1 Comparaison graphique des ajustements	9
3.2 Comparaison graphique des décès prédits et observés	12
3.3 Tests et quantités pour comparer les ajustements	13
4 Fermeture des tables et comparaison des tendances d'évolution	15
4.1 Fermeture des tables	15
4.2 Comparaison des espérances de vie	16
4.3 Plausibilité et cohérence des tendances d'évolution	18
5 Conclusion	21
Références	22
A Annexes	25
A.1 Les modèles linéaires généralisés	25
A.2 Ajustement non-paramétrique par vraisemblance locale	25
A.3 Ajustement non-paramétrique par p -splines	28
A.4 Formules des quantités employées pour comparer les ajustements	29
A.5 Test des signes	29
A.6 Comparaison des forces de mortalité par année calendaire	30
A.7 Comparaison des résidus	32
A.8 Comparaison des décès observés et ajustés	36

1 Introduction

L'objectif de cette note de travail est de présenter les réflexions méthodologiques et pratiques concernant la construction et la validation des tables de mortalité d'expérience par sexe. Nous pouvons nous appuyer sur une base de données issues de portefeuilles transmis par 15 organismes participants dont les modalités de construction et les caractéristiques de base sont décrites dans la note II1291-09 v1.1. Nous emploierons deux méthodes. La première est la construction d'une table « du moment » sur la base des données disponibles puis l'application à cette table des dérivés directement calculées sur des tables de référence. La deuxième est l'ajustement de la surface de mortalité par un modèle relationnel où le positionnement est effectué à l'aide de la fonction logistique. Ces méthodologies sont brièvement introduites dans la note II1291-10 v1.0. Nous analysons les divergences observées entre les surfaces de mortalité générées par les différents modèles, à savoir le choix de la méthode d'ajustement ainsi que de la référence d'évolution tendancielle. Des tests sont mis en oeuvre pour comparer les ajustements obtenus et des marqueurs résumant les distributions des durées de vie sont utilisés pour mesurer l'impact du choix du modèle et valider la table finale.

Cette note est organisée de la manière suivante. La section 2 présente de façon précise les notations et hypothèses employées par la suite. Elle décrit aussi brièvement les données et approches proposées. La section 3 couvre la comparaison des modèles par des tests et quantités résumant l'ajustement des surfaces de mortalité. La section 4 confronte les tendances d'évolution obtenues par des marqueurs résumant les distributions des durées de vie et valide la table finale. Enfin, la section 5 présente les conclusions de cette étude.

2 Notations, hypothèses, données et approches

2.1 Notations

Nous analysons la force de mortalité (ou fonction de hasard) comme une fonction de l'âge atteint x et de l'année calendaire t . La force de mortalité à l'âge atteint x pour l'année calendaire t est notée $\varphi_x(t)$. On note $D_{x,t}$ le nombre de décès enregistrés à l'âge atteint x durant l'année calendaire t d'une exposition au risque $E_{x,t}$ qui mesure le temps durant lequel les individus sont exposés au risque de décès. Il s'agit de la durée totale vécue par ces individus durant la période d'observation.

2.2 Hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux

Nous supposons que les forces de mortalité sont constantes par morceaux entre les âges et années entiers, $\varphi_{x+\tau}(t+\xi) = \varphi_x(t)$ for $0 \leq \tau < 1$ and $0 \leq \xi < 1$.

On note par $p_x(t)$ la probabilité qu'un individu âgé x durant l'année calendaire t atteigne l'âge $x+1$, et par $q_x(t) = 1 - p_x(t)$ la probabilité correspondante de décès. La durée de vie résiduelle espérée d'un individu atteignant l'âge x durant l'année calendaire t est noté par $e_x(t)$.

Sous l'hypothèse de forces de mortalité constantes par morceaux, nous avons pour chaque âge entier x et année calendaire t ,

$$p_x(t) = \exp(-\varphi_x(t)) \Leftrightarrow \varphi_x(t) = -\log(p_x(t)).$$

2.3 Les données

Les données proviennent de portefeuilles transmis par 15 organismes. Les modalités de construction de la base et ses caractéristiques principales sont décrites dans la note III291-09 v1.1. Les Tables 1 et 2 résumant les statistiques observées des données masculines et féminines respectivement. La période d'observation totale retenue s'étend du 01/01/2007 au 31/12/2011.

Ces tables montrent que nous faisons face à deux difficultés. D'une part, la période d'observation exploitable est relativement restreinte, s'étalant sur 5 ans. D'autre part, la structure de l'hétérogénéité change au cours du temps, du fait que les portefeuilles ne sont pas observés sur la même période. Cela peut induire un impact sur l'estimation des tendance de mortalité et idéalement nous devrions conserver la même structure d'hétérogénéité.

En agrégeant les portefeuilles, nous recherchons ainsi un équilibre entre la constitution d'un historique relativement large et une situation où l'hétérogénéité serait stable.

Portefeuilles	Âge moyen à l'entrée	Âge moyen à la sortie	Exposition moyenne	Âge moyen au décès	Période d'observation	
					Début	Fin
P1	38.96	39.74	2.77	68.81	01/01/2007	31/12/2011
P2	69.30	73.35	4.05	80.34	01/01/2007	31/12/2011
P3	40.16	43.10	2.94	71.77	01/01/2007	31/12/2010
P4	37.50	41.13	3.63	54.08	01/01/2007	31/12/2011
P5	36.90	39.10	2.20	59.31	01/01/2007	31/12/2011
P6	48.65	52.27	3.62	82.46	01/01/2007	31/12/2010
P7	66.65	71.29	4.64	73.69	01/01/2007	31/12/2011
P8	67.51	71.38	3.86	80.73	01/01/2007	13/04/2004
P9	45.97	49.60	3.62	73.18	01/01/2007	30/06/2011
P10	62.97	67.64	4.67	79.78	01/01/2007	31/12/2011
P11	37.96	39.89	1.92	57.44	01/01/2009	30/06/2011
P12	38.89	42.00	3.11	56.44	01/01/2007	31/12/2011
P13	37.05	39.20	2.15	57.41	01/01/2007	31/12/2011
P14	43.06	46.94	3.89	71.08	01/01/2007	31/12/2011
P15	50.20	54.23	4.04	72.38	01/01/2007	31/12/2011

TABLE 1: Statistiques observées par portefeuille pour la population masculine.

Portefeuilles	Âge moyen à l'entrée	Âge moyen à la sortie	Exposition moyenne	Âge moyen au décès	Période d'observation	
					Début	Fin
P1	35.75	38.43	2.69	75.43	01/01/2007	31/12/2011
P2	68.08	71.94	3.86	82.25	01/01/2007	31/12/2011
P3	35.32	38.02	2.70	72.37	01/01/2007	31/12/2010
P4	34.43	37.85	3.42	54.20	01/01/2007	31/12/2011
P5	36.75	39.01	2.25	55.04	01/01/2007	31/12/2011
P6	62.53	66.18	3.66	87.82	01/01/2007	31/12/2010
P7	66.54	71.07	4.53	81.19	01/01/2007	31/12/2011
P8	70.22	74.17	3.96	84.93	01/01/2007	13/04/2004
P9	45.63	49.20	3.55	74.91	01/01/2007	30/06/2011
P10	64.43	69.21	4.78	80.87	01/01/2007	31/12/2011
P11	37.99	39.91	1.92	58.81	01/01/2009	30/06/2011
P12	37.42	40.21	2.78	58.81	01/01/2007	31/12/2011
P13	35.24	37.85	2.61	49.45	01/01/2007	31/12/2011
P14	43.94	47.71	3.77	75.53	01/01/2007	31/12/2011
P15	52.35	56.36	4.01	80.13	01/01/2007	31/12/2011

TABLE 2: Statistiques observées par portefeuille pour la population féminine.

Par la suite nous agrégeons les portefeuilles par âge atteint x et année calendaire t . La plage d'âges retenue $[30 - 95]$ est motivée par la diminution observée des forces de mortalité après 95 ans qui nous semble irréaliste et révèle une insuffisance des données.

Les Figures 1 et 2 présentent les surfaces de mortalité observées des données agrégées pour les populations masculine et féminine respectivement pour la plage d'âges et période d'observation retenue.

2.4 Les tables de référence externes

La profondeur limitée de l'historique disponible ne permet pas d'envisager la détection d'une tendance présentant des garanties suffisantes de fiabilité. En conséquence, la tendance doit être reprise d'une référence externe. Nous considérons pour cela deux tables prospectives, la table INSEE 2060 et la table TGH/F 05.

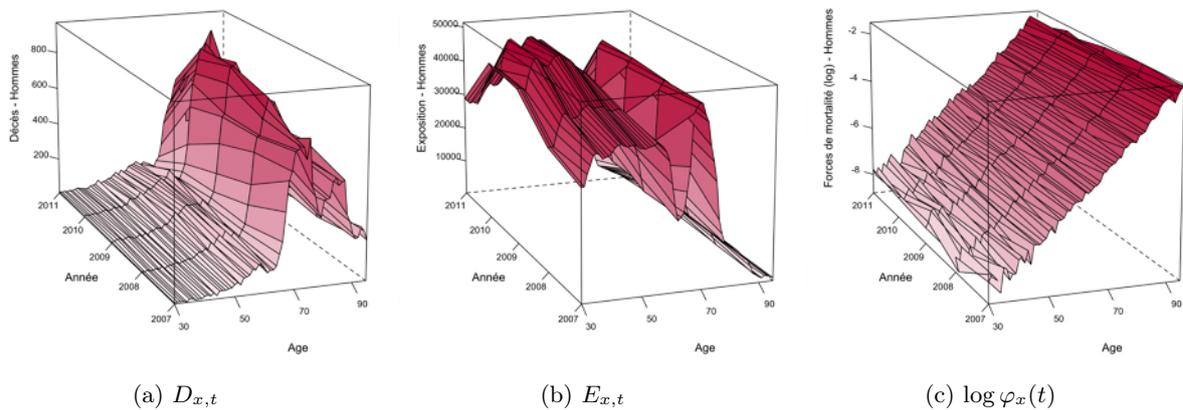


FIGURE 1: Surfaces de mortalité observées des données agrégées, population masculine.

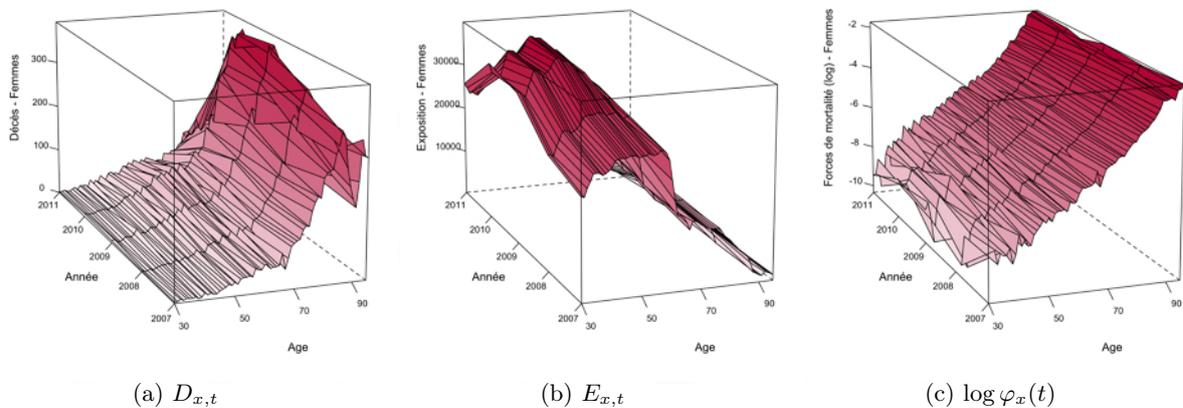


FIGURE 2: Surfaces de mortalité observées des données agrégées, population féminine.

Table INSEE. Il s'agit de la projection démographique nationale de la population française sur la période 2007 – 2060 fournie par l'INSEE, [Blanpain and Chardon \(2010\)](#). Ces projections sont basées sur des hypothèses concernant la fertilité, la mortalité et les migrations. Nous avons choisi le scénario médian parmi 27 scénarios. Le scénario médian est basé sur l'hypothèse que jusqu'en 2060 le taux de fertilité reste à un taux élevé (1.95). La diminution de la mortalité par genre et âge donné est plus important pour les hommes après 85 ans. L'hypothèse de base de la migration consiste à projeter une immigration net annuelle constante de 100 000 individus.

Ces tables par sexe comportent de fortes variations aux âges élevés qui nous semblent inappropriées pour la détection des tendances d'évolution de la mortalité, comme le montrent les forces de mortalité brutes issues des tables INSEE, Figures 3 et 4, pour la population masculine et féminine respectivement.

En conséquence, nous ajustons la surface de mortalité à l'aide du modèle non-paramétrique des p -splines afin de faire ressortir les caractéristiques de mortalité que nous supposons relativement régulières. L'essentiel du matériel de la méthodologie des p -splines ainsi que les caractéristiques des lissages sont présentés en Annexe A.3. Les surfaces ajustées sont exposées Figures 3b et 4b pour la population masculine et féminine respectivement. Nous avons testé leur régularité en calculant le ratio $\varphi_x(t+1)/\varphi_x(t)$, Figures 3c et 4c. Nous constatons que les courbes, pour un âge atteint x fixé, sont relativement lisses, ne suggérant aucune cassure dans les dérives de mortalité.

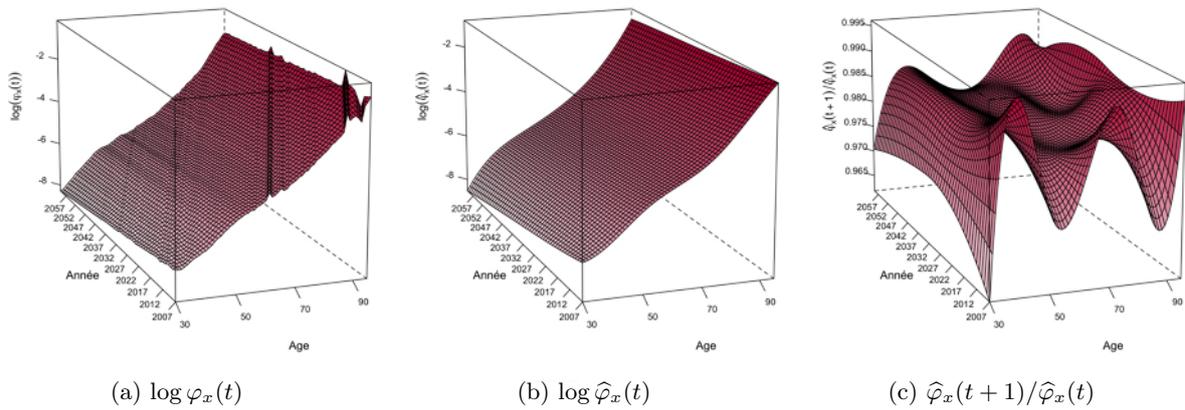


FIGURE 3: Surfaces issues de la table prospective INSEE, population masculine.

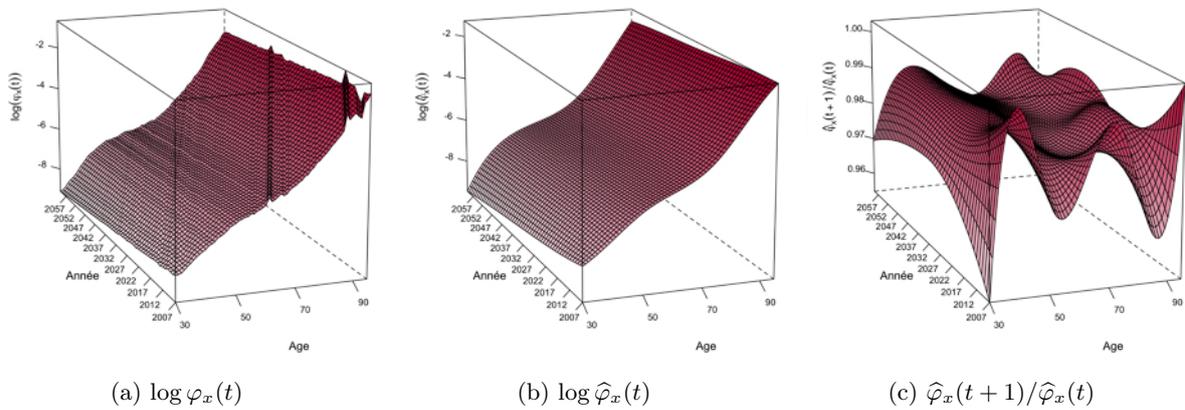


FIGURE 4: Surfaces issues de la table prospective INSEE, population féminine.

Table TGH/F05. La deuxième table de référence externe est la table TGH/F 05, construite pour le marché de l’assurance français, fournie par l’Institut des Actuaire, [Planchet \(2006\)](#). Originellement, cette table est générationnelle et couvre la période 1900–2005. Nous la retraitions pour nos besoins de façon à couvrir la période 2007–2035. Nous utilisons le modèle non-paramétrique des p -splines pour ajuster la mortalité observée et extrapoler la table jusqu’en 2060.

Les Figures 5 et 6 présentent les forces de mortalité brutes issues des tables TGH05 et TGF05. Les surfaces ajustées et prolongées sont exposées dans les Figures 5b et 6b pour la population masculine et féminine respectivement. Les Figures 5c et 6c confrontent les dérivées $\varphi_x(t+1)/\varphi_x(t)$. Nous observons que les dérivées pour un âge x fixé sont relativement linéaires, n’indiquant aucune cassure dans les tendances d’évolution de la mortalité.

2.5 Les approches

En termes de méthodes d’ajustement, de nombreux choix sont *a priori* possibles. Voir par exemple [Tomas and Planchet \(2013a\)](#) et [Tomas and Planchet \(2013b\)](#). La note de cadrage II1291-10 v1.0 incite à se tourner vers des approches simples pour obtenir une robustesse des ajustements.

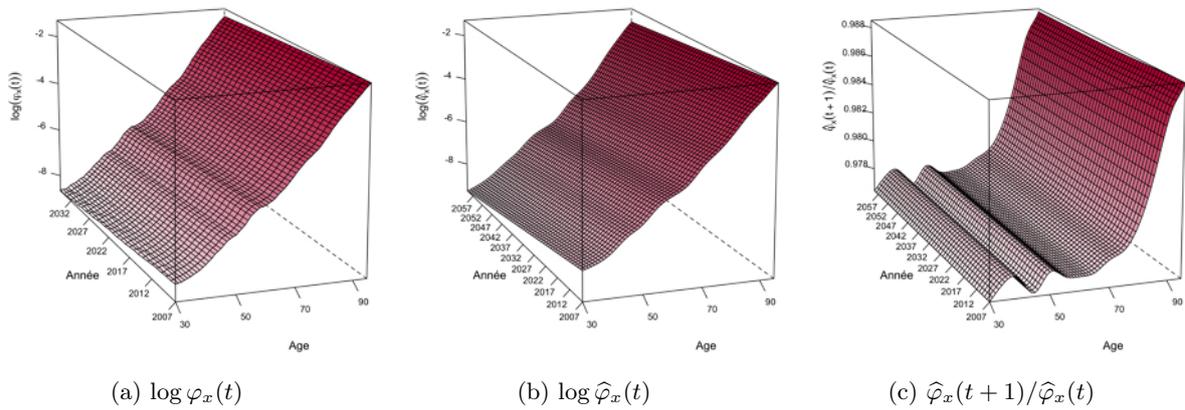


FIGURE 5: Surfaces issues de la table TGH05, population masculine.

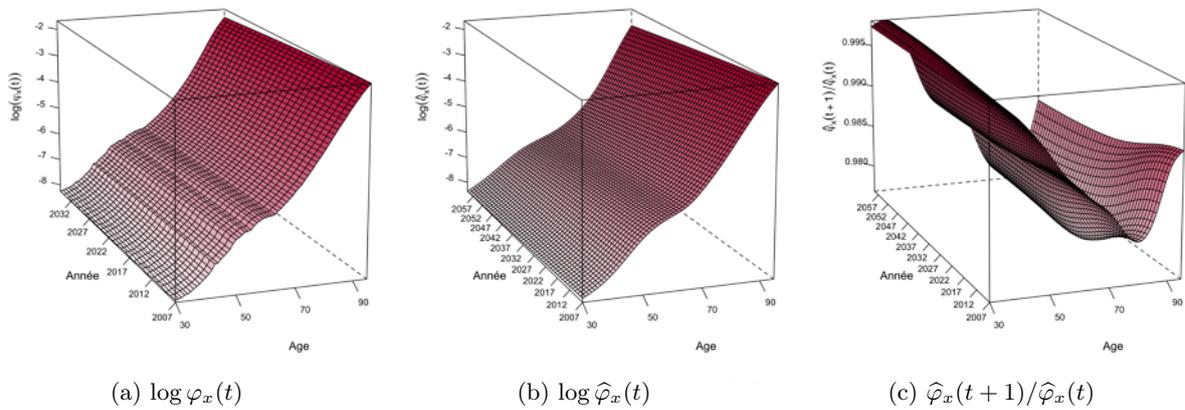


FIGURE 6: Surfaces issues de la table TGF05, population féminine.

Deux approches apparaissent ici envisageables :

Méthode 1. La construction d'une table « du moment » sur la base des données agrégées puis l'application à cette table des dérivés directement calculées sur les tables de référence.

Méthode 2. L'ajustement de la surface de mortalité par un modèle relationnel où le positionnement est effectué à l'aide de la fonction logistique.

Méthode 1. Afin de construire une table « du moment », nous agrégeons la surface de mortalité par âge atteint x . Avec les notations de la Section 2.1 et l'hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux introduite à la section 2.2, la vraisemblance devient

$$\mathcal{L}(\varphi_x) = \exp(-E_x \varphi_x)(\varphi_x)^{D_x}.$$

La log-vraisemblance associée est

$$\ell(\varphi_x) = \log \mathcal{L}(\varphi_x) = -E_x \varphi_x + D_x \log \varphi_x.$$

Comme dans [Gschlössl et al. \(2011\)](#), maximiser la log-vraisemblance $\ell(\varphi_x)$ donne $\hat{\varphi}_x = D_x/E_x$ qui coïncide avec le taux central de mortalité \hat{m}_x . Il est alors évident que la vraisemblance $\ell(\varphi_x)$ est proportionnelle à la vraisemblance d'un modèle de Poisson basée sur

$$D_x \sim \text{Poisson}(E_x \varphi_x), \quad (1)$$

et il est donc équivalent de travailler sur la base de la *vraie* vraisemblance ou sur la base de la vraisemblance d'un modèle de Poisson. Ainsi, sous l'hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux entre des valeurs entières de x , nous considérons (1) pour utiliser le cadre des modèles linéaires généralisés¹.

Notre première approche est un modèle non-paramétrique endogène,

$$D_x \sim \text{Poisson}(E_x \exp(\psi(x))),$$

où la fonction ψ est une fonction lisse non-spécifiée de l'âge atteint x , appliqué à la table « du moment ».

Le rôle des modèles linéaires généralisés est celui d'un modèle *en arrière plan* qui est ajusté localement. Nous considérons la méthode de vraisemblance locale pour estimer la fonction lisse $\psi(x)$. Les méthodes de vraisemblance locale pour l'ajustement des tables de mortalité ont été appliquées par [Delwarde et al. \(2004\)](#), [Debón et al. \(2006\)](#) et plus récemment par [Gschlössl et al. \(2011\)](#). Nous renvoyons à [Tomas \(2013, Ch.3\)](#) pour une description exhaustive de la technique et à [Tomas and Planchet \(2013a\)](#) pour une application au lissage multidimensionnel. L'essentiel du matériel des méthodes de vraisemblance locale est présenté en Annexe [A.2](#).

Une fois la table du moment ajustée, on applique les dérivées directement calculées sur les tables de référence INSEE et TGH/F 05. Il convient alors de choisir quelle année calendaire t sera utilisée pour obtenir les dérivées $\varphi_x(t+1)/\varphi_x(t)$. Nous calculons des quantités résumant la qualité de l'ajustement. Les Tables [3](#) et [4](#) donnent la déviance, χ^2 , R^2 , $MAPE$ et SMR , pour les populations masculine et féminine respectivement. Les équations (7), (8), (9), (10) et (11) définissant ces quantités sont présentées en Annexes [A.4](#) et [A.5](#).

	INSEE					TGH/F 05				
	2007	2008	2009	2010	2011	2007	2008	2009	2010	2011
Deviance	879.57	793.30	763.20	786.45	860.76	881.15	784.69	752.03	784.51	883.55
χ^2	950.81	843.90	798.49	810.22	875.51	953.64	836.65	787.10	805.12	890.85
R^2	0.9753	0.9774	0.9782	0.9779	0.9766	0.9778	0.9784	0.9786	0.9783	0.9774
$MAPE$ (%)	12.39	12.17	12.25	13.33	12.99	12.33	12.15	12.31	12.82	13.67
SMR	1.0351	1.0177	1.0007	0.9839	0.9675	1.0410	1.0205	1.0005	0.9808	0.9615

TABLE 3: Comparaison entre les années calendaires utilisées pour calculer les dérivées, population masculine

1. Le cadre de travail des modèles linéaires généralisés, présenté en Annexe [A.1](#), est aussi utilisé par les méthodes p -splines.

	INSEE					TGH/F 05				
	2007	2008	2009	2010	2011	2007	2008	2009	2010	2011
Deviance	668.27	608.71	585.24	593.94	631.37	595.27	573.41	565.02	570.49	590.33
χ^2	725.477	649.76	613.70	612.18	640.82	636.79	607.50	592.46	591.88	606.07
R ²	0.9582	0.9616	0.9639	0.9652	0.9656	0.9635	0.9646	0.9653	0.9658	0.9660
MAPE (%)	19.43	19.46	19.79	20.28	20.93	19.36	19.401	19.55	19.77	20.09
SMR	1.0443	1.0225	1.0016	0.9817	0.9626	1.0318	1.0172	1.0027	0.9884	0.9741

TABLE 4: Comparaison entre les années calendaires utilisées pour calculer les dérivés, population féminine

Pour la population masculine, le choix de l'année calendaire t est clair. Nous choisissons l'année 2009 pour calculer les dérivés issues des tables INSEE et TGH/F 05. Ce choix produit la déviance et χ^2 les plus faibles, et le plus grand R^2 . De plus, le SMR est le plus proche de 1. Pour la population féminine, le choix est moins évident, les quantités donnant des résultats divergents. Néanmoins, on sélectionne l'année 2009 ayant la plus faible déviance et un SMR plus proche de 1.

Méthode 2. Notre deuxième approche est un modèle semi-paramétrique relationnel des probabilités conditionnelles de décès où le positionnement est effectué à l'aide de la fonction logistique. En pratique ces probabilités conditionnelles de décès sont approchées par les taux centraux de mortalité. Sous l'hypothèse des forces de mortalité constante par morceaux, section 2.2, les taux centraux de mortalité correspondent aux forces de mortalité. Ainsi le modèle s'écrit,

$$\text{logit } \varphi_x(t) = \gamma + \delta \text{logit } \varphi_x^{\text{ref}}(t) + \epsilon_{x,t}.$$

où $\epsilon_{x,t}$ est le terme d'erreur et $\varphi_x^{\text{ref}}(t)$ fait référence aux tables INSEE et TGH/F 05. Les logits des forces de mortalité brutes sont ajustés sur les logits des forces of mortalité de la table de référence. L'estimation est effectuée par une minimisation de la distance pondérée par l'exposition entre les forces de mortalité observées et estimées,

$$\sum |E_{x,t} \times (\varphi_x(t) - \hat{\varphi}_x(t))|.$$

Le modèle semi-paramétrique relationnel a l'avantage d'intégrer l'estimation et l'extrapolation des tendances de mortalité. Nous renvoyons à [Planchet and Thérond \(2011, Ch.7\)](#) pour plus de détails.

La table 5 résume nos approches :

Modèle	Formules	Table de référence	Méthode d'estimation	
			Vrais. locale	Max. de vrais..
M1	$D_x \sim \text{Poisson}(E_x \exp(f(x)))$ et dérivés calculées sur les tables de référence avec l'année alendaire $t = 2009$.	INSEE TGH/F05	M1.INSEE M1.TG05	
M2	$\text{logit } \varphi_x(t) = \gamma + \delta \text{logit } \varphi_x^{\text{ref}}(t) + \epsilon_{x,t}$	INSEE TGH/F05		M2.INSEE M2.TG05

TABLE 5: Description des modèles et méthodes d'estimation envisagés.

Fermeture des tables. Les actuaires et démographes ont développé des techniques variées pour compléter les tables de mortalité aux âges élevés. On peut mentionner, entre autres, les travaux de [Kannisto et al. \(1994\)](#), [Thatcher \(1999\)](#) et [Lindbergson \(2001\)](#). Dans cette étude, nous utilisons une méthode simple et efficace proposée par [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#). Cette approche s'appuie sur les probabilités annuelles de décès ajustées² et introduit deux contraintes de fermeture des tables de mortalité.

Elle consiste à ajuster par les moindres carrés ordinaires le modèle log-quadratique,

$$\log \hat{q}_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \epsilon_x(t) \quad (2)$$

avec $\epsilon_x(t)$ i.i.d suivant une loi Normal(0, σ^2), séparément pour chaque année calendaire t , ($t = 2007, \dots, 2060$) et aux âges x^* . Deux contraintes sont imposées :

- i. Premièrement, une contrainte de fermeture,

$$q_{130}(t) = 1, \text{ pour tout } t.$$

Même si la durée de vie humaine ne semble approcher aucune fixe limite imposée par des facteurs biologiques ou autres, il semble raisonnable de retenir l'hypothèse que l'âge limite de fin de vie de 130 ne sera pas dépassé.

- ii. Deuxièmement, une contrainte d'inflexion,

$$\frac{\partial}{\partial x} q_x(t)|_{x=130} = 0, \text{ pour tout } t.$$

Ces contraintes imposent à la courbe de mortalité une concavité au grands âges en plus de l'existence d'une tangente au point $x = 130$ ans. Elles entraînent la relation suivante entre les a_t , b_t et c_t pour chaque année calendaire t :

$$a_t + b_t x + c_t x^2 = c_t (130 - x)^2,$$

pour $x = x_t^*, x_t^* + 1, \dots$ et $t = 2007, \dots, 2060$. Les c_t sont estimés sur les séries $\{\hat{q}_x(t), x = x_t^*, x_t^* + 1, \dots\}$ de l'année calendaire t à partir de l'équation (2) et des contraintes imposées.

3 Comparaison de la mortalité observée et ajustée

Nous avons ajusté les surfaces de mortalité masculine et féminine avec les modèles présentés dans la Table 5. Les Sections 3.1 et 3.2 nous permettent de visualiser les similarités et différences entre les surfaces ajustées par les modèles.

3.1 Comparaison graphique des ajustements

Les Figures 7a et 7b présentent les ajustements avec une échelle logarithmique pour la plage d'âges 30-95 sur l'année 2009 pour la population masculine et féminine respectivement. Les ajustements pour les années 2007-2011 sont présentés en annexes, Figures 19 et 20.

À titre de comparaison, nous avons inclus les ajustement obtenus par les tables INSEE et TGH/F05. La table INSEE sur-estime fortement les forces de mortalité pour la population masculine et féminine, phénomène signalé dans la note II1291-09 v1.1. A contrario, la table TGH/F05 propose un ajustement relativement adéquat pour la population masculine et sur-estime légèrement les forces de mortalité jusqu'à 65 ans pour la population féminine.

2. Pour rappel, sous l'hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux, $\hat{q}_x(t) = 1 - \exp(1 - \hat{\varphi}_x(t))$

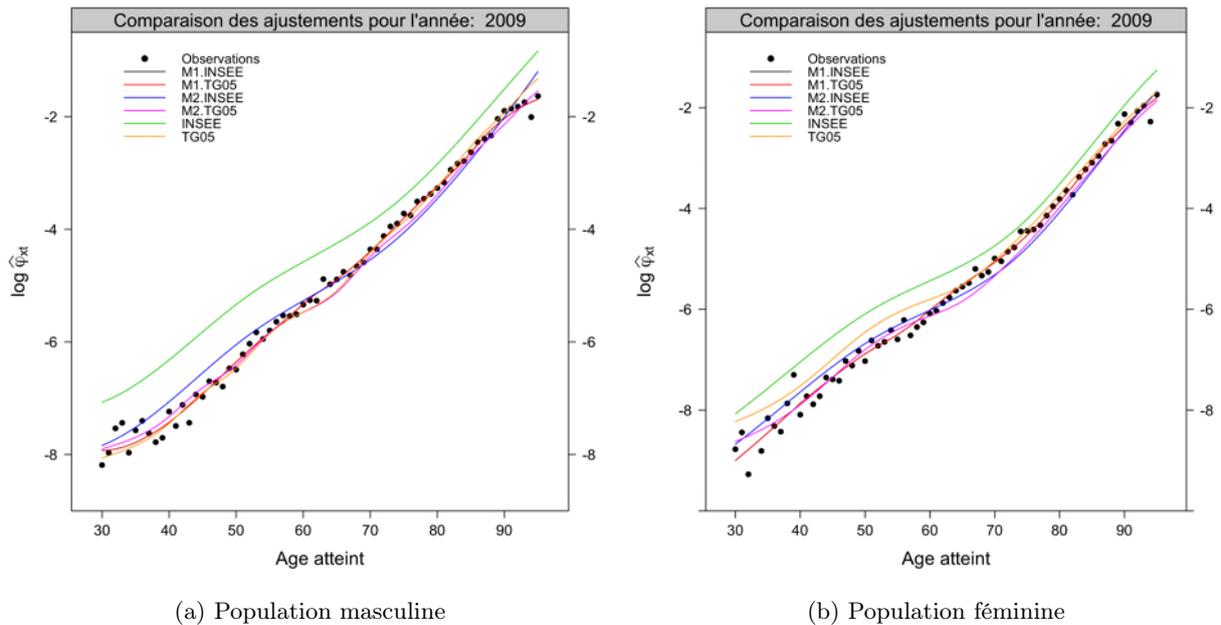


FIGURE 7: Comparaison des forces de mortalité pour l'année 2009.

Les modèles semi-paramétriques relationnels ont tendance à sous-estimer les forces de mortalité au-delà de 65 ans quelle que soit la population. Le modèle M2.INSEE, se positionnant sur la table INSEE, a tendance à sur-estimer les forces de mortalité au dessous de 65 ans, alors qu'un positionnement sur la table TGH/F05, modèle M2.TG05, ajuste convenablement les forces de mortalité pour la plage d'âges [30 – 65]. Les modèles non-paramétriques endogènes M1.INSEE et M1.TG05 proposent l'ajustement le plus satisfaisant. Ils sont confondus pour l'année 2009, année de référence pour le calcul de la dérive et ne diffèrent légèrement que par les tendances d'évolution de la mortalité dérivées des tables sous-jacentes, Figures 19 et 20.

En parallèle de la représentation graphique des ajustements, nous devons étudier les graphiques des résidus. Dans le cas des modèles linéaires généralisés, on note

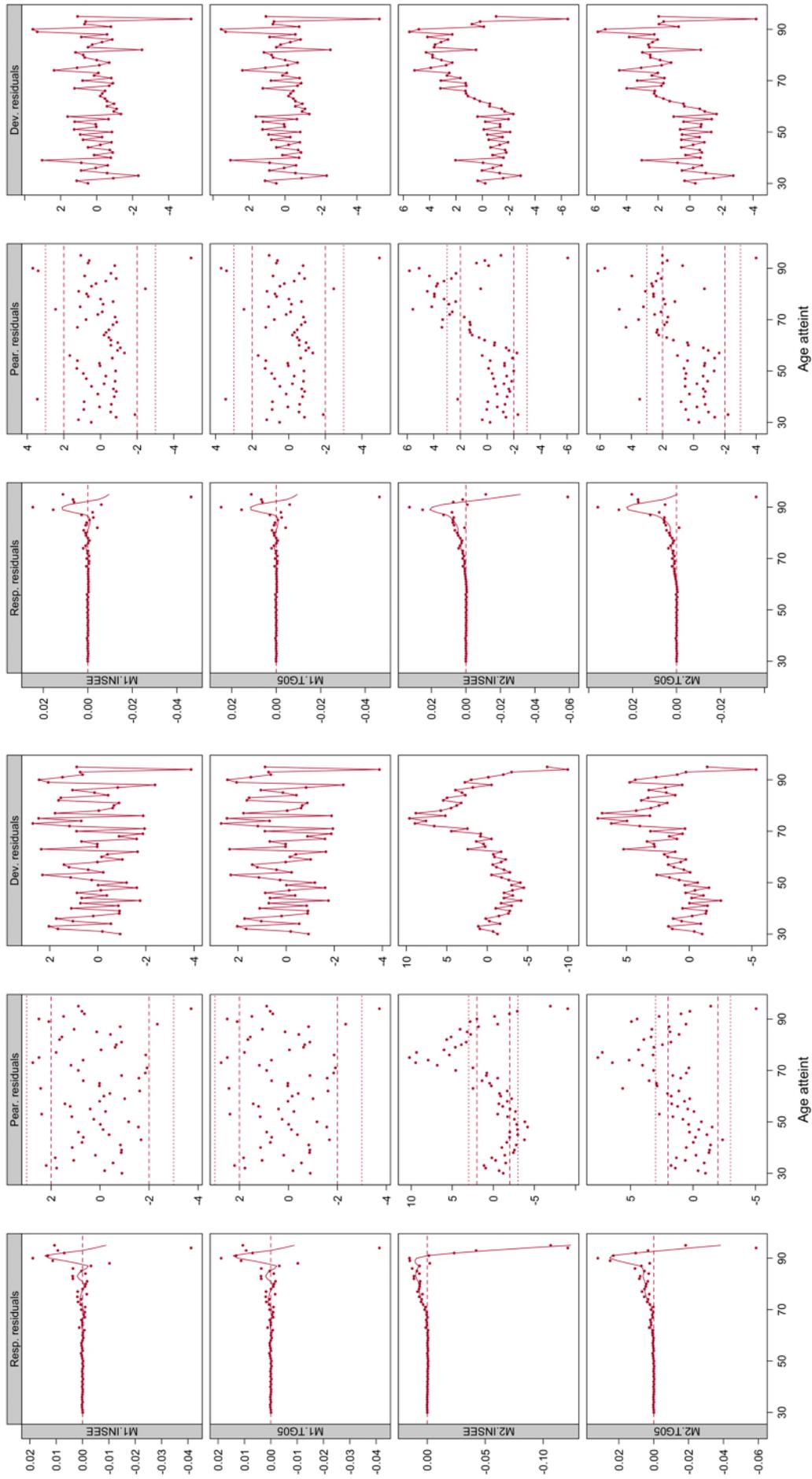
Résidus de la réponse $r_{x,t} = \varphi_x(t) - \hat{\varphi}_x(t)$;

Résidus de Pearson $r_{x,t} = (D_{x,t} - E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t)) / \sqrt{\text{Var}[E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t)]}$;

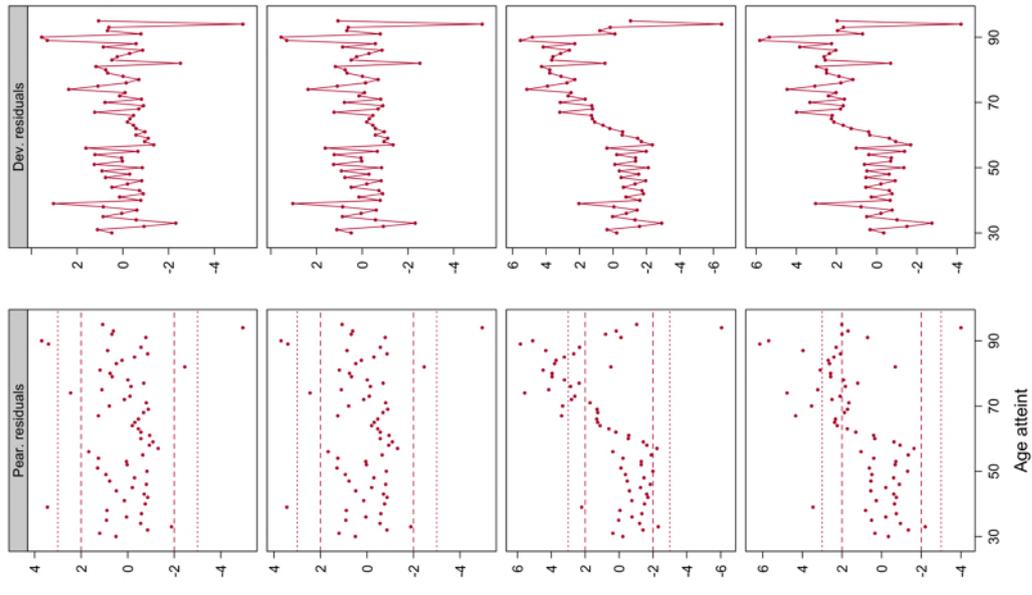
Résidus de la déviance $r_{x,t} = \text{signe}(D_{x,t} - E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t)) \times \sqrt{\text{Déviance}_{x,t}}$, où la déviance est définie par l'équation (7), en Annexe A.4.

Les graphiques des résidus des quatre modèles pour l'année 2009 sont présentés en Figure 8. Les résidus pour les années 2007, 2008, 2010 et 2011 sont présentés en Annexes, Figures 21, 22, 23 et 24 respectivement. Ces représentations graphiques des résidus fournissent un diagnostic intéressant qui complète la visualisation des ajustements.

L'objet est de déterminer si de grands résidus correspondent à des caractéristiques présentes dans les données qui ont été modélisées de façon inappropriée. Ces diagnostics peuvent montrer un ajustement local inadapté et nous avons l'opportunité de juger ce manque d'ajustement sur la base de nos connaissances sur l'origine des données et sur la performance de la méthode d'ajustement. En conséquence, si un modèle ajuste correctement les données, aucune tendance forte ne devrait apparaître dans les résidus de la réponse et de Pearson. De plus, si les résidus de la déviance présentent plusieurs résidus successifs ayant le même signe cela indique que les données ont été sur-lissées.



(a) Population masculine



(b) Population féminine

FIGURE 8: Comparaison des résidus pour l'année 2009.

Les résidus sont relativement similaires pour les modèles M1.INSEE, M1.TG05 et M2.INSEE, M2.TG05, mais différent selon le type de modèle envisagé, non-paramétrique endogène ou semi-paramétrique relationnel.

Nous avons surimposé une courbe *loess*³ sur les résidus de la réponse afin de visualiser l'écart entre les observations et nos ajustements. En réduisant le bruit, notre attention est plus rapidement portée sur des caractéristiques qui ont été manquées ou ajustées de façon inappropriée. Ici la procédure n'est pas de juger si la courbe surimposée sur les résidus de la réponse est plate. Une droite veut simplement dire qu'aucun manque d'ajustement systématique et reproductible n'a été détecté. L'ajustement peut très bien être très volatile et proche d'une interpolation, signalé par une variance incorrectement élevée.

Que ce soit pour la population masculine ou féminine, les résidus de la réponse des modèles M2.INSEE et M2.TG05 présentent une tendance beaucoup plus forte aux âges élevés (> 65 ans) que les modèles M1.INSEE, M1.TG05, indiquant un ajustement inapproprié dans cette région.

Cette tendance se remarque également dans les résidus de Pearson où nous observons une sur-estimation des forces de mortalité jusqu'à 65 ans et une sous-estimation nette au-delà. À l'opposé, les résidus de Pearson des modèles M1.INSEE, M1.TG05 ne présentent aucune tendance et sont principalement dans l'intervalle $[-2, 2]$, lesquels indiquent que les modèles capturent de façon adéquate la variabilité des données.

Enfin, ces remarques se retrouvent dans les résidus de la déviance. Nous observons que les résidus de la déviance pour les modèles M2.INSEE et M2.TG05 présentent des résidus successifs ayant tous le même signe au-delà de 65 ans. Cela illustre que les forces de mortalité sont sur-lissées localement. Comme le signe est positif, les modèles M2.INSEE et M2.TG05 sous-estiment fortement les forces de mortalité au-delà de 65 ans. De plus on remarque que les résidus de la déviance obtenus par le modèle M2.INSEE présentent plusieurs résidus successifs ayant un signe négatif en dessous de 65 ans. Ceci indique que ce modèle sur-estime fortement les forces de mortalité sur cette plage d'âges. Les modèles M1.INSEE et M1.TG05 présentent, au contraire, des résidus de la déviance s'articulant relativement correctement autour de 0.

3.2 Comparaison graphique des décès prédits et observés

Les Figures 9a et 9b comparent les décès observés et ajustés pour la plage d'âges 30-95 sur l'année 2009 pour la population masculine et féminine respectivement. Les comparaisons pour les années 2007-2011 sont présentées en annexes, Figures 25 et 26.

À titre d'information, nous avons inclus les décès ajustés par la TGH/F05. Les décès ajustés de la table INSEE sur-estiment fortement les décès observés pour la population masculine et féminine et ne sont pas présentés dans les Figures 9, 25 et 26. Nous rejoignons naturellement les conclusions de la section 3.1 obtenues en comparant les ajustements. Les décès ajustés de la table TGH/F05 sous-estiment sensiblement les décès observés de la population masculine pour la plage d'âges $[55 - 75]$ et sur-estiment de manière perceptible ceux de la population féminine.

3. *Loess*, proposée à l'origine par Cleveland (1979) et développée par Cleveland and Devlin (1988), désigne une méthode également connue comme la régression polynomiale locale pondérée. À chaque point un polynôme de faible degré est ajusté au sein d'un sous ensemble des données (appelé aussi fenêtre d'observation) dans le voisinage du point à estimer. Le polynôme est ajusté avec la méthode des moindres carrés pondérés, accordant plus de poids aux points proches du point à estimer et moins de poids aux points plus éloignés. L'ajustement est alors répété pour chaque point à estimer.

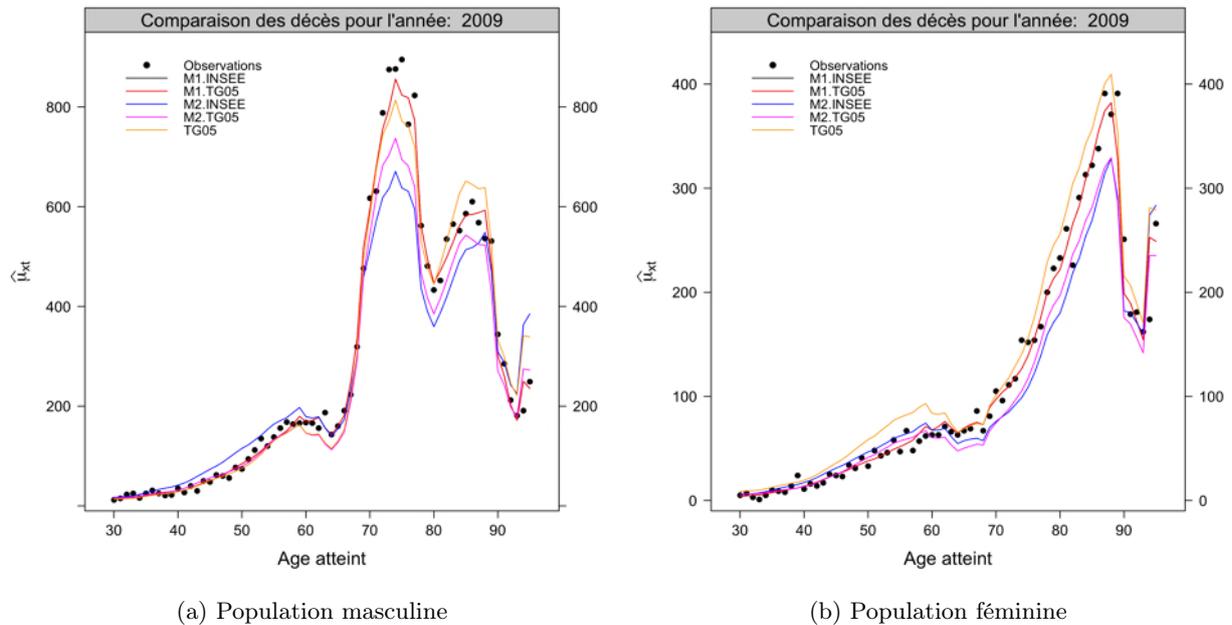


FIGURE 9: Comparaison entre les décès observés et ajustés pour l'année 2009.

Les modèles semi-paramétriques relationnels, M2.INSEE et M2.TG05, sous-estiment clairement les décès au-delà de 65 ans quelle que soit la population. Le modèle M2.INSEE sur-estiment les décès observés au dessous de 65 ans, alors que le modèle M2.TG05, ajuste relativement convenablement les décès sur cette plage d'âges pour les deux populations.

Les modèles non-paramétriques endogènes M1.INSEE et M1.TG05 proposent une fois de plus l'ajustement le plus satisfaisant. Ils sont, par construction, confondus pour l'année 2009, Figure 9, année de référence pour le calcul de la dérive et ne diffèrent que très légèrement pour les autres années, Figures 25 et 26.

3.3 Tests et quantités pour comparer les ajustements

Nous continuons la comparaisons des ajustements en appliquant le test des signes et en calculant le χ^2 , équation (8), proposées par Forfar *et al.* (1988, p.56-58) et Debón *et al.* (2006, p.231). Nous avons aussi obtenu le *MAPE*, équation (10), et R^2 , équation (9), utilisés dans Felipe *et al.* (2002). En addition, nous avons calculé le SMR, rapport entre le nombre de décès observés et ajustés, équation (11) et la déviance, équation (7).

Nous comparons les forces de mortalité brutes aux séries graduées pour voir si les approches entraînent un ajustement similaire. Les Tables 6 et 7 présentent les résultats pour la population masculine et féminine respectivement.

Comme mentionné à la section 3.1, nous remarquons clairement que les modèles M1.INSEE, M1.TG05 et M2.INSEE, M2.TG05 présentent des résultats analogues et diffèrent selon le type d'approche envisagée, non-paramétrique endogène ou semi-paramétrique relationnel. Que ce soit pour la population masculine ou féminine, la table INSEE est clairement inappropriée. Il est intéressant de noter que la table TGH/F05 donne de meilleurs résultats pour la population masculine que les modèles semi-paramétriques relationnels M2.INSEE et M2.TG05, mais reste toutefois inadaptée.

		M1.INSEE	M1.TG05	M2.INSEE	M2.TG05	INSEE	TG05
Déviance		763.20	752.03	4112.09	2161.32	32629.60	1669.81
Résidus standardisés	> 2	54	55	177	125	330	101
	> 3	20	17	108	74	323	56
Test des signes	+(-)	161(169)	160(170)	145(185)	222(108)	NA(NA)	188(142)
	p-value	0.7	0.6204	0.0316	3.33e - 10	NA	0.0131
Test des runs	Nbre de runs	135	139	50	79	NA	110
	Valeur	-3.41	-2.93	-13.50	-8.68	NA	-6.16
	p-value	6.50e - 4	0.0030	6.66e - 39	3.91e - 18	NA	7.19e - 10
χ^2		798.49	787.10	4432.32	2395.25	29007.14	1831.42
R ²		0.9782	0.9787	0.7984	0.9550	0	0.8681
MAPE (%)		12.25	12.31	27.85	16.64	125.21	15.39
SMR - 1 (%)		1.0007	1.0005	1.1135	1.1133	0.5796	0.9976

TABLE 6: Comparaison entre les ajustements, population masculine.

		M1.INSEE	M1.TG05	M2.INSEE	M2.TG05	INSEE	TG05
Déviance		585.24	565.02	1636.50	1344.17	8178.90	1563.66
Résidus standardisés	> 2	36	32	118	103	294	110
	> 3	12	11	57	50	237	40
Test des signes	+(-)	158(172)	160(170)	183(147)	221(109)	NA(NA)	47(287)
	p-value	0.4743	0.6204	0.0539	6.88e - 10	NA	< 2.2e - 16
Test des runs	Nbre de runs	142	144	68	90	NA	51
	Valeur	-2.83	-2.63	-11.11	-7.35	NA	-7.03
	p-value	0.0045	0.0084	2.14e - 28	1.91e - 13	NA	2.07e - 12
χ^2		613.70	592.46	1757.40	1503.79	7365.04	1421.85
R ²		0.9639	0.9653	0.9431	0.9471	0.5405	0.9563
MAPE (%)		19.79	19.55	32.39	27.12	100.82	46.26
SMR		1.0016	1.0027	1.1106	1.1362	0.6482	0.8757

TABLE 7: Comparaison entre les ajustements, population féminine.

Entre les modèles semi-paramétriques relationnels et de manière générale, M2.TG05 présente des résultats plus avantageux que M2.INSEE. Le modèle M2.TG05 a une plus faible déviance, χ^2 et MAPE, ainsi qu'un R² plus large. Le nombre de runs est aussi plus important et le nombre de résidus standardisés excédant les limites 2 et 3 est plus faible pour la population masculine et féminine. Néanmoins ces deux modèles demeurent inappropriés.

Les modèles non-paramétriques endogènes étant les plus flexibles, produisent les résultats les plus satisfaisants. Ils seront donc retenus par la suite. Concernant la population féminine, le modèle M1.TG05 présente la plus faible déviance, χ^2 et MAPE, ainsi que le nombre le plus faible de résidus standardisés

supérieurs à 2. Il exhibe, entre autre, le plus large R^2 , et la valeur la plus élevée au test des signes et au nombre de *runs*. Concernant la population masculine, M1.TG05 conserve le plus large R^2 et nombre de *runs*, et la plus faible déviance et χ^2 . De plus il présente le SMR le plus proche de 1. Cependant, M1.INSEE donne le plus faible *MAPE*, le nombre le plus faible de résidus standardisés supérieurs à 2 et également la valeur la plus élevée au test des signes. Le choix entre les ajustements *M1.INSEE* et *M1.TG05* sera affiné, par la suite, en comparant les tendances d'évolution de la mortalité (niveau et la vitesse d'amélioration entre les modèles). On s'interrogera aussi sur la plausibilité et la cohérence avec les tendances historiques observées.

Les tests et quantités effectués dans les Tables 6 et 7 présentent les forces et faiblesses de chaque approche pour ajuster la mortalité observée. Le choix entre les modèles est partiellement une question de jugement et dépend de l'objectif pour laquelle la table de mortalité prospective est construite. Il appartient aux utilisateurs potentiels de la table de décider des poids à mettre sur les différents critères. Toutefois, au regard du large éventail des critères de sélection présentés dans les Tables 6 et 7, nous pouvons éliminer certains modèles. Nous avons vu que les modèles non-paramétriques endogènes, du fait de leur plus grande flexibilité, assurent un bon ajustement. En conséquence, nous pouvons écarter les modèles semi-paramétriques relationnels. On retient dans la suite de cette étude les ajustements M1. Il reste alors à décider la table à retenir pour la dérive tendancielle des forces de mortalité.

4 Fermeture des tables et comparaison des tendances d'évolution

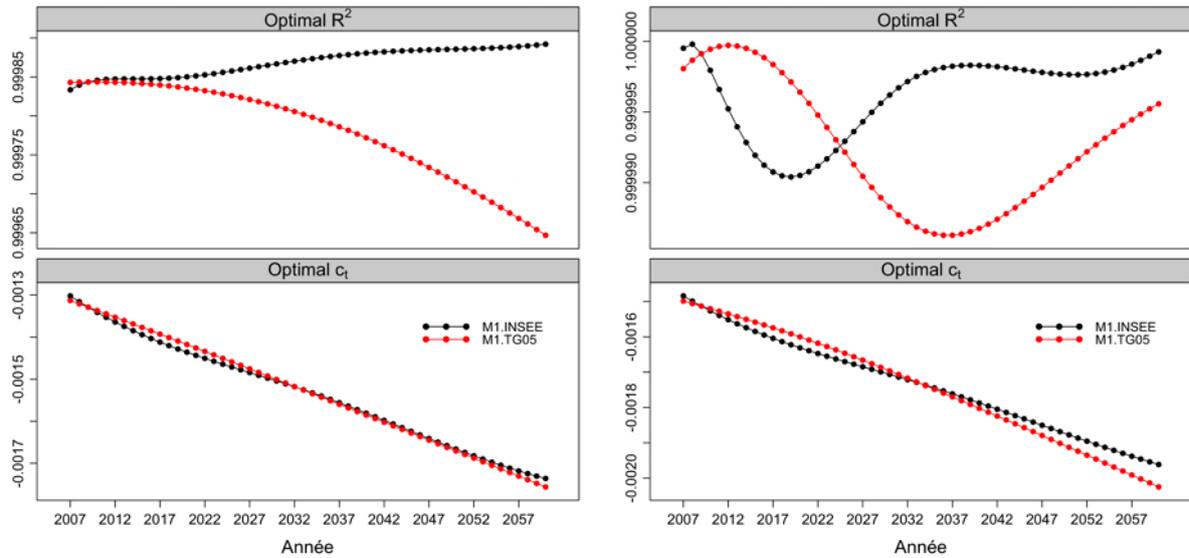
Compte tenu de l'insuffisance des données au-delà de 95 ans, nous n'avons pas d'information valide pour dériver la mortalité aux âges élevés. On doit donc se tourner vers une méthode permettant une projection de la mortalité au-delà de 95 ans afin de compléter les tables. Nous comparons les espérances de vie résiduelles calculées sur les tables reconstruites pour décider de la dérive tendancielle à retenir.

4.1 Fermeture des tables

Nous appliquons l'approche proposée par [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#) présentée à la section 2.5. Nous ajustons la régression quadratique contrainte (2). L'âge optimal de départ x^* est sélectionné sur la plage d'âges [75 – 89]. Il se révèle être 84 et 86 pour la population masculine et féminine respectivement. Le R^2 correspondant aux modèles de régression ajustés (2) ainsi que les paramètres de régression c_t estimés sont présentés Figures 10a et 10b pour la population masculine et féminine respectivement.

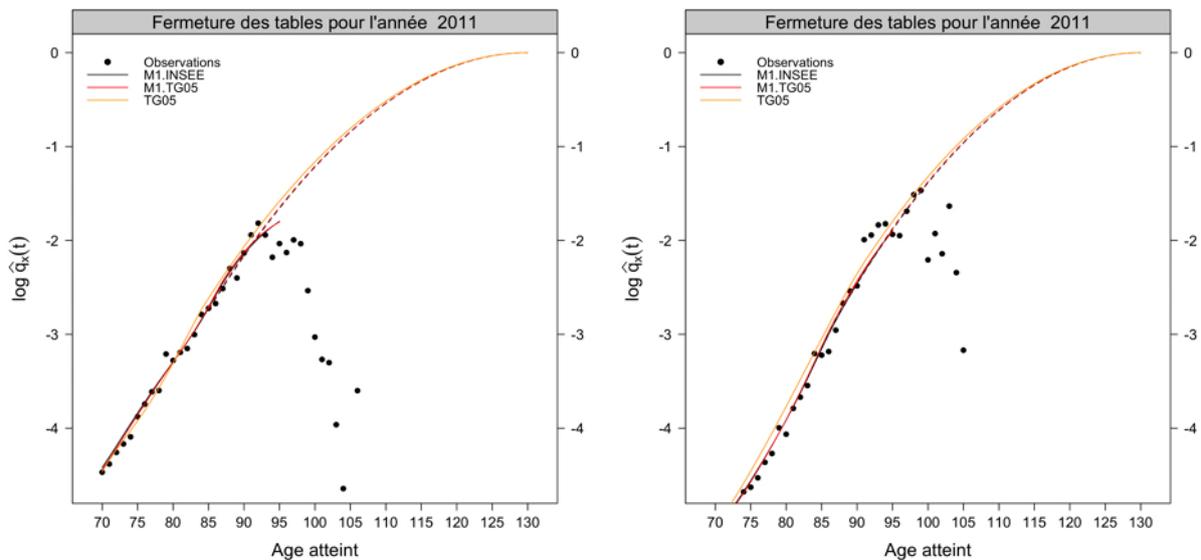
Le modèle (2) capture plus de 99.9 % de la variance des probabilités de décès aux âges élevés, cf. Figures 10a et 10b panel haut, pour les deux populations. Le paramètre de régression \hat{c}_t décroît de façon relativement linéaire avec l'année calendaire, cf. Figures 10a et 10b panel bas. Cet indicateur présente les tendances d'évolution de la mortalité aux grands âges et diffère sensiblement selon les dérives INSEE et TGH/F05 appliquées. Le niveau de mortalité de M1.INSEE est inférieur jusqu'à 2032 environ. Au delà, les dérives issues des tables TGH/F05 induisent une amélioration plus rapide de l'espérance de vie aux âges élevés pour la population masculine et féminine.

Nous conservons les $\hat{q}_x(t)$ originaux pour les âges inférieurs 85 ans pour la population masculine et 87 ans pour la population féminine, et nous remplaçons les probabilités annuelles de décès au-delà pour les valeurs ajustées provenant de la régression quadratique contrainte (2). Les résultats de l'approche proposée par [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#), pour l'année calendaire 2011, appliquée aux modèles non-paramétriques endogènes, sont exposés dans les Figures 11a et 11b pour la population masculine et féminine respectivement. À titre d'information, nous avons ajouté l'ajustement donné pour la table TGH/F05.



(a) Population masculine

(b) Population féminine

 FIGURE 10: R^2 et paramètres de régression c_t estimés.


(a) Population masculine

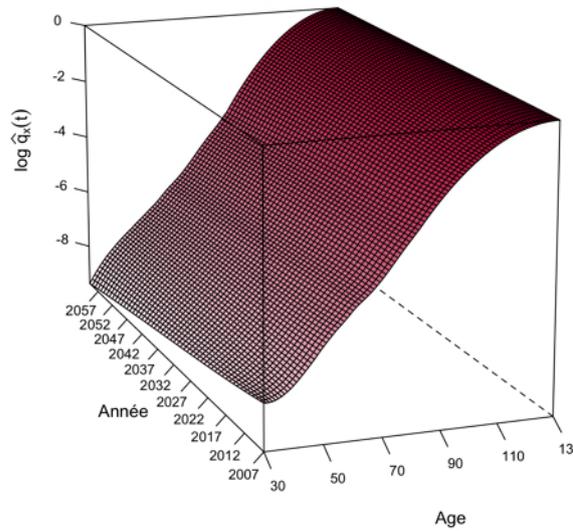
(b) Population féminine

FIGURE 11: Comparaison entre les fermetures des tables pour l'année 2011.

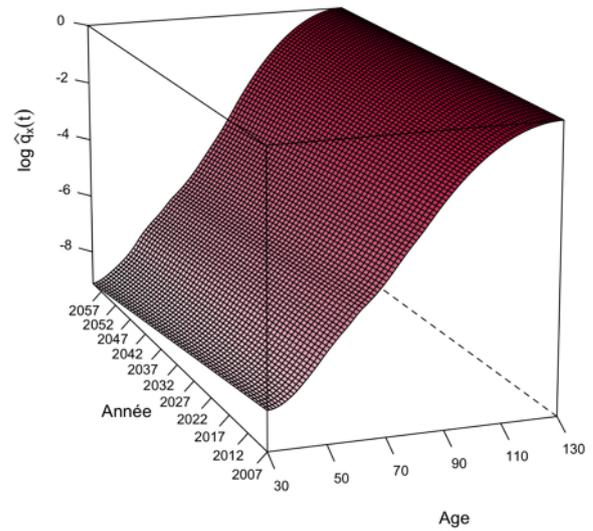
Les Figures 12 et 13 présentent les surfaces de mortalité reconstruites (probabilités annuelles de décès, échelle logarithmique) issues des modèles non-paramétriques endogènes pour la population masculine et féminine respectivement.

4.2 Comparaison des espérances de vie

Les Figures 14a et 14b présentent le rapport entre les espérances de vie résiduelles partielles observées et ajustées pour la population masculine et féminine respectivement pour le modèle M1.INSEE. Leurs équivalents pour le modèle M1.TG05 ne diffèrent que très légèrement et ne sont pas exposés.

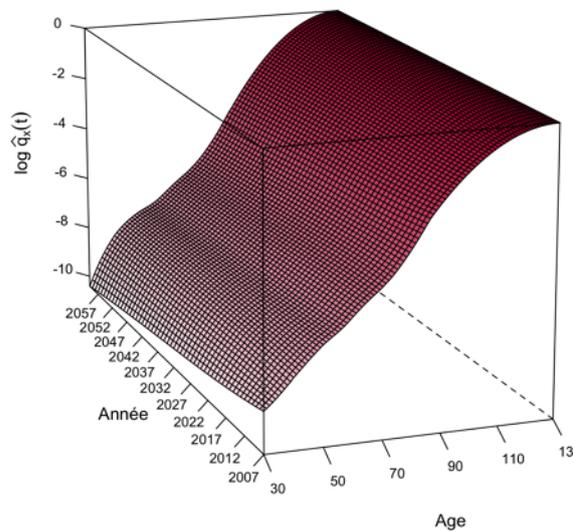


(a) M1.INSEE

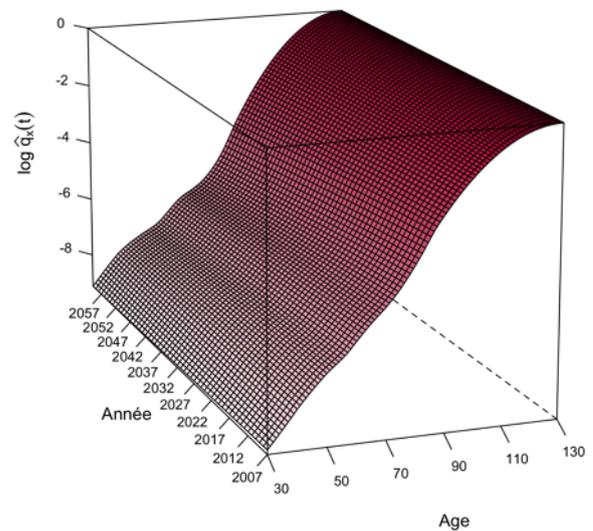


(b) M1.TG05

FIGURE 12: Surfaces de mortalité reconstruites, population masculine.



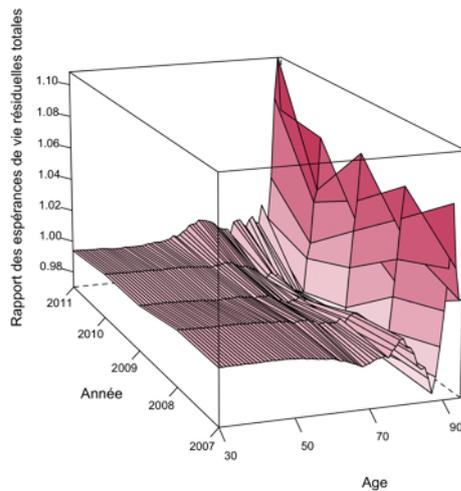
(a) M1.INSEE



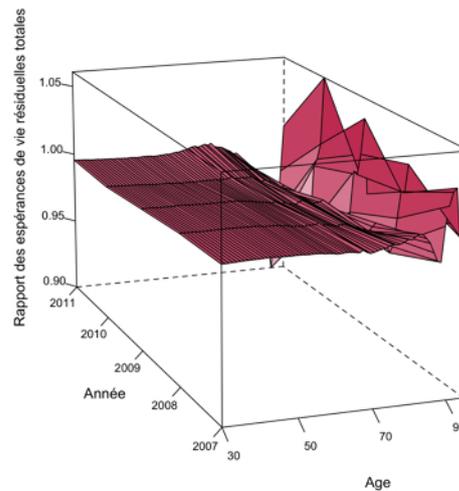
(b) M1.TG05

FIGURE 13: Surfaces de mortalité reconstruites, population féminine.

Les espérance de vie résiduelles partielles issues du modèle M1.INSEE jusqu'à 80 ans sont légèrement supérieures ($< 1\%$) à celles calculées à partir des données brutes quelle que soit la population. De 80 à 90 ans, le modèle sur-estime les espérances de vie résiduelle totale de l'ordre de 3% par rapport à leurs équivalents observés tandis qu'il les sous-estime ($< 10\%$) de 90 à 95 ans.



(a) Population masculine



(b) Population féminine

FIGURE 14: Comparaison des espérances de vie résiduelles partielles observées et ajustées pour le modèle M1.INSEE.

La figure 15 présente des comparaisons entre les espérances de vie partielles générationnelles calculées sur 5 ans sur les tables extrapolées et complétées. Les Figures 15a et 15b comparent les espérances de vie partielles générationnelles entre les deux modèles M1.INSEE et M1.TG05 pour la population masculine et féminine respectivement. Les modèles donnent des résultats relativement équivalents de 30 à 80 ans. Au delà, les écarts augmentent avec l'année calendaire et l'âge atteint.

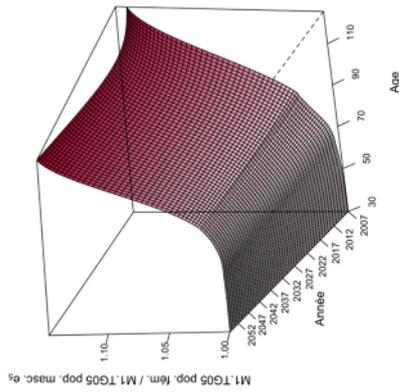
La différence relative n'excède toutefois pas 3 % quelle que soit la population. Néanmoins, les modèles divergent selon le niveau et la vitesse de l'amélioration des espérances de vie. Conformément aux Figures 10a et 10b, nous constatons que M1.INSEE induit une amélioration de la mortalité aux âges élevés jusqu'à 2032. Au delà, la relation est inversée et M1.TG05 présente des espérances de vie supérieures.

Les Figures 15c et 15d confrontent l'évolution des tendances de mortalité entre les populations féminines et masculines pour les modèles M1.INSEE et M1.TG05 respectivement. L' écart entre les deux populations diminue sensiblement avec l'année calendaire pour le modèle dont les dérivés sont calculées sur la table prospective INSEE. Alors que l'écart induit par le modèle M1.TG05 décroît jusqu'à 2020 et augmente par la suite pour les âges élevés.

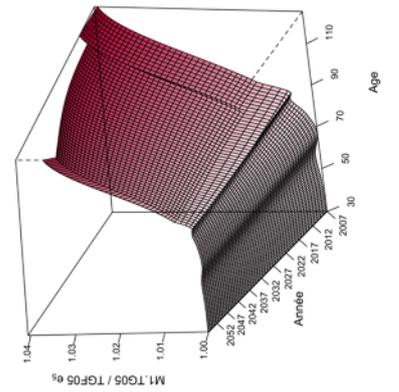
Les Figures 15e et 15f, et 15g et 15h, examinent l'évolution de la mortalité entre les modèles et la table TGH/F05 pour la population masculine et féminine. De manière générale, l'évolution de la mortalité est relativement similaire jusqu'à 70 ans. Au-delà, quelle que soit la population considérée, les modèles prédisent une amélioration de l'espérance de vie avec l'âge plus importante que la table TGH/F05, avec des écarts à 100 ans de l'ordre de 4 % avec le modèle M1.INSEE, et 3 % avec le modèle M1.TG05.

4.3 Plausibilité et cohérence des tendances d'évolution

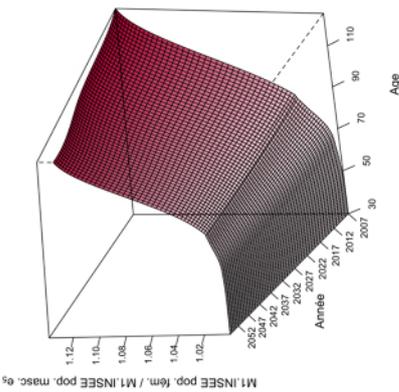
Figures 16 et 17 comparent les tendances d'évolution des espérances de vie résiduelles totales pour les âges 60, 75 et 80 pour la population masculine et féminine respectivement. À titre d'information, les tendances d'évolution issues des tables TGH/F05 ont été ajoutées.



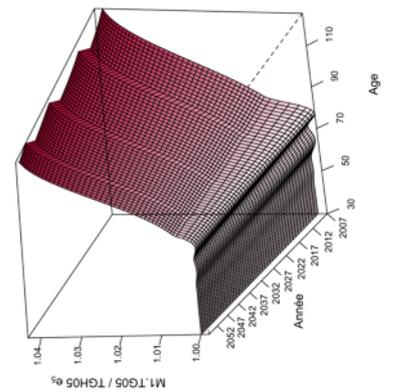
(d) Population féminine / masculine ,
M1.TG05



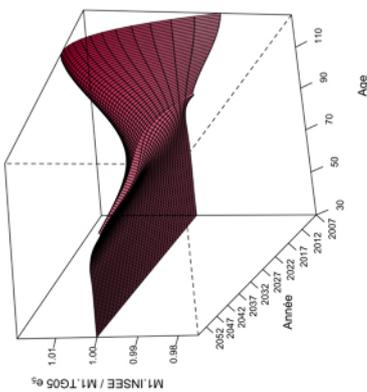
(h) M1.TG05 / TGF05, population féminine



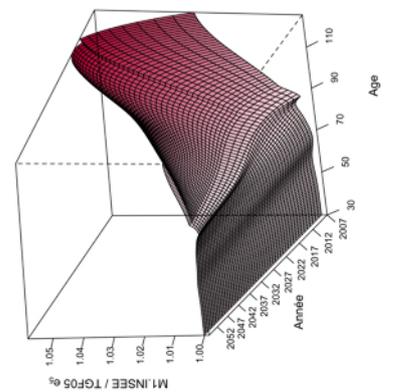
(c) Population féminine / masculine,
M1.INSEE



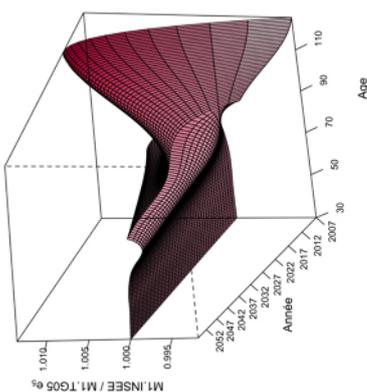
(g) M1.TG05 / TGH05, population masculine



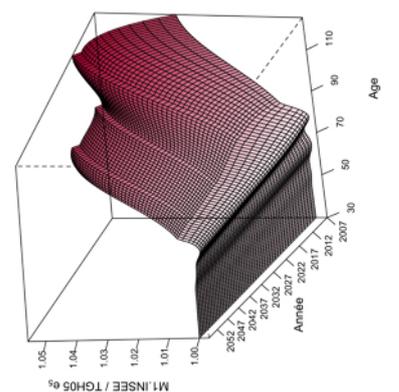
(b) M1.INSEE / M1.TG05, population féminine



(f) M1.INSEE / TGF05, population féminine



(a) M1.INSEE / M1.TG05, population masculine



(e) M1.INSEE / TGH05, population masculine

FIGURE 15: Comparaison des espérances de vie partielles générationnelles sur 5 ans, e_5 .

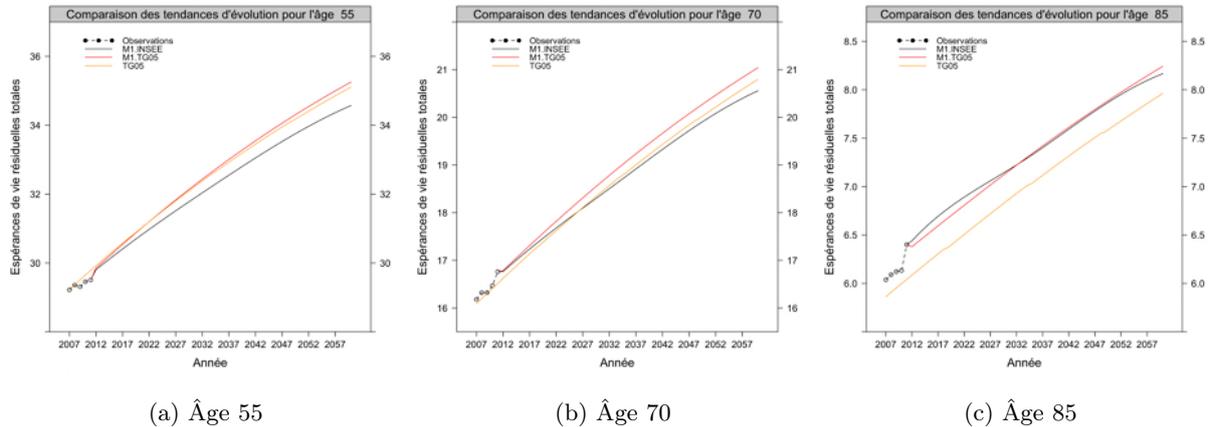


FIGURE 16: Comparaison des tendances d'évolution des espérances de vie résiduelles totales par âge, population masculine

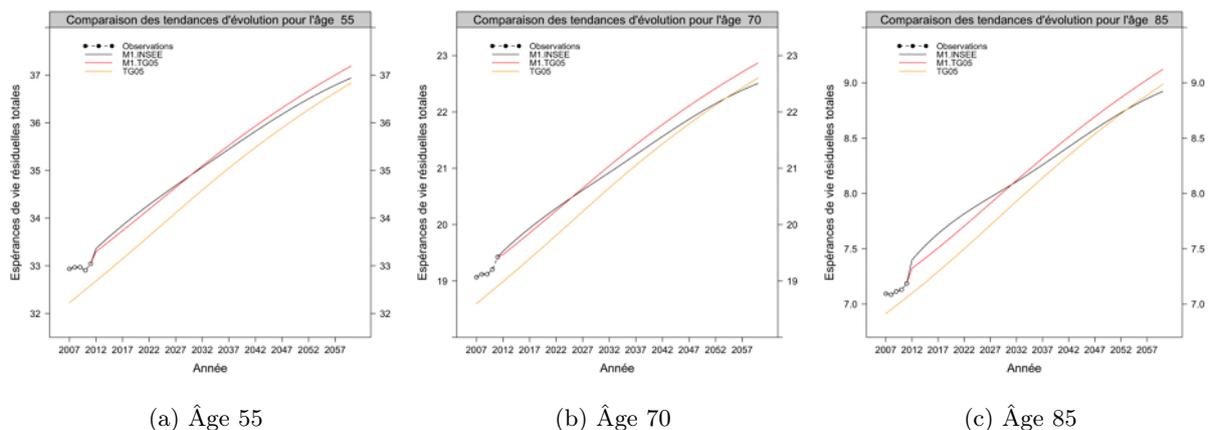


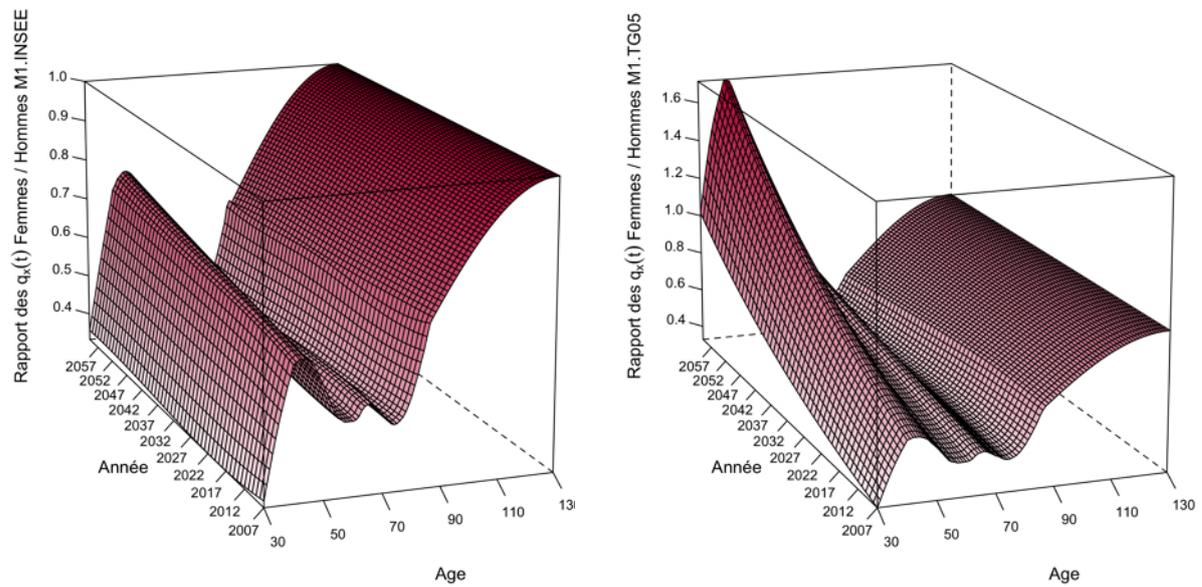
FIGURE 17: Comparaison des tendances d'évolution des espérances de vie résiduelles partielles par âge, population féminine

On s'aperçoit que quels que soient les âges considérés, les espérances de vie résiduelles partielles issues des modèles M1.TG05 et M1.INSEE suivent convenablement les tendances d'évolutions de la mortalité calculées à partir des données brutes.

Les espérances de vie résiduelles partielles calculées à partir des tables extrapolées et complétées issues du modèle M1.INSEE sont supérieures pour les deux populations aux âges élevés jusqu'à environ 2032 comme le montrent les Figures 16c et 17c. Au delà, le modèle M1.TG05 induit une amélioration plus rapide de la mortalité avec l'année calendaire, caractéristique que nous avons vue avec les figures 10a et 10b.

Les Figures 18a et 18b présentent le rapport des probabilités conditionnelles de décès entre les populations féminine et masculine pour les modèles M1.INSEE et M1.TG05 respectivement.

Quels que soient les âges, le rapport entre les probabilités conditionnelles de décès féminine et masculine obtenues par le modèle M1.INSEE, Figure 18a, tend à se rapprocher de 1, signe que la mortalité masculine s'améliore plus rapidement que la mortalité féminine.



(a) M1.INSEE

(b) M1.TG05

FIGURE 18: Rapport des probabilités conditionnelles de décès, Pop. féminine / Pop. masculine.

De façon plus problématique, pour les âges inférieurs à 70 ans, le rapport entre les probabilités conditionnelles de décès féminine et masculine obtenues par le modèle M1.TG05 est supérieur à 1, Figure 18b. Cela signifie que à l’horizon 2060, les probabilités conditionnelles de décès féminines sont supérieures à leur homologues masculines. Or on observe sur la population nationale qu’à 50 ans les hommes meurent deux fois plus souvent que les femmes, comme le souligne récemment [Le Bras \(2013, p.18\)](#). En conséquence, notre choix se porte sur le modèle non-paramétrique endogène M1.INSEE dont les projections des probabilités conditionnelles de décès apparaissent plus cohérentes.

5 Conclusion

Nous avons illustré, dans cette étude, les réflexions méthodologiques et pratiques concernant la construction et la validation des tables de mortalité d’expérience par sexe. Nous nous sommes appuyé sur une base de données issues de portefeuilles transmis par 15 organismes participants.

Nous avons employé deux méthodes. La première est la construction d’une table « du moment » par un modèle non-paramétrique endogène, puis l’application à cette table des dérivées directement calculées sur les tables de référence. La deuxième est l’ajustement de la surface de mortalité par un modèle semi-paramétrique relationnel où le positionnements est effectué à l’aide de la fonction logistique.

Le modèle proposé par [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#) a été utilisé afin de compléter les tables jusqu’à un âge de fin de vie fixé à 130 ans.

Nous avons analysé les divergences entre les surfaces de mortalité générées par les différents modèles, à savoir le choix de la méthode d’ajustement ainsi que de la référence d’évolution. Des tests et quantités résumant les écarts entre l’ajustement et les observations ont été utilisés pour comparer les forces et faiblesses de chaque approche. Le choix entre les modèles est partiellement une question de jugement

et dépend de l'objectif pour laquelle la table de mortalité prospective est construite. Il appartient aux utilisateurs potentiels de la table de décider des poids à affecter aux différents critères. Néanmoins, au vu du large éventail des critères de sélection présentés, nous avons pu éliminer certains modèles. Les modèles non-paramétriques endogènes, du fait de leur grande flexibilité, assurent un bon ajustement de la mortalité observée. En conséquence, nous avons écarté les modèles semi-paramétriques relationnels.

Nous avons, par la suite, comparé les tendances d'évolution de la mortalité en confrontant les espérances de vie générationnelles partielle sur 5 ans et périodiques résiduelles, calculées avec les différents modèles. Les modèles diffèrent selon le niveau et la vitesse de l'amélioration des espérances de vie. De façon plus problématique, nous avons remarqué que à l'horizon 2060, le modèle non-paramétrique endogène dont la dérive a été calculée à partir de la table TGH/F05 induit des probabilités conditionnelles de décès féminines supérieures à leurs homologues masculines.

Au regard de ces comparaisons, nous avons décidé de retenir le modèle non-paramétrique endogène dont la dérive a été calculée à partir de la table INSEE. Notre choix a été conduit par l'équilibre entre l'ajustement de la mortalité passée par le modèle et la plausibilité des tendances d'évolution de la mortalité produites.

Références

- Blanpain, N. and Chardon, O. (2010). Projections de populations 2007-2060 pour la France métropolitaine : méthode et principaux résultats. Série des Documents de Travail de la direction des statistiques Démographiques et Sociales F1008, Institut National de la Statistique et des Études Économiques.
- Camarda, C. G. (2008). *Smoothing methods for the analysis of mortality development*. Ph.D. thesis, Universidad Carlos III de Madrid.
- Cleveland, W. S. (1979). Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, **74**(368), 829–836.
- Cleveland, W. S. and Devlin, S. J. (1988). Locally weighted regression : An approach to regression analysis by local fitting. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 596–610.
- Copas, J. B. and Haberman, S. (1983). Non-parametric graduation using kernel methods. *Journal of the Institute of Actuaries*, **110**, 135–156.
- Currie, I. D. and Durbán, M. (2002). Flexible smoothing with p -splines : a unified approach. *Statistical Modelling*, **2**(333-349).
- Currie, I. D., Durbán, M., and Eilers, P. H. C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling*, **4**, 279–298.
- Currie, I. D., Durbán, M., and Eilers, P. H. C. (2006). Generalized linear array models with applications to multidimensional smoothing. *Journal of the Royal Statistical Society*, **68**(Part 2), 259–280.
- de Boor, C. (2001). *A practical guide to splines*. New York : Springer Verlag, (revised ed.) edition.
- Debón, A., Montes, F., and Sala, R. (2006). A comparison of nonparametric methods in the graduation of mortality : Application to data from the Valencia region (Spain). *International statistical Review*, **74**(2), 215–233.
- Delwarde, A., Kachkhidze, D., Olie, L., and Denuit, M. (2004). Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie. *Bulletin Français d'Actuariat*, **6**(12), 77–102.

- Denuit, M. and Goderniaux, A. C. (2005). Closing and projecting life tables using log-linear models. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, (1), 29–48.
- Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1996). Flexible smoothing with b -splines and penalties. *Statistical Science*, **11**(2), 89–102.
- Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (2002). Generalized linear additive smooth structures. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **11**(4), 758–783.
- Fan, J., Farman, M., and Gijbels, I. (1998). Local maximum likelihood estimation and inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, **60**(3), 591–608.
- Felipe, A., Guillén, M., and Pérez-Marín, A. (2002). Recent mortality trends in the Spanish population. *British Actuarial Journal*, **8**(4), 757–786.
- Forfar, D., McCutcheon, J., and Wilkie, A. (1988). On graduation by mathematical formula. *Journal of the Institute of Actuaries*, **115**(part I(459)), 643–652.
- Gavin, J. B., Haberman, S., and Verrall, R. J. (1993). Moving weighted graduation using kernel estimation. *Insurance : Mathematics & Economics*, **12**(2), 113–126.
- Gschlössl, S., Schoenmaekers, P., and Denuit, M. (2011). Risk classification in life insurance : methodology and case study. *European Actuarial Journal*, **1**(1), 23–41.
- Haberman, S. and Renshaw, A. E. (1996). Generalized linear models and actuarial science. *Journal of the Royal Statistical Society*, **45**(4), 407–436.
- Kannisto, V., Lauritsen, J., Thatcher, A. R., and Vaupel, J. W. (1994). Reductions in mortality at advanced ages : Several decades of evidence from 27 countries. *Population and Development Review*, **20**(4), 793–810.
- Kirkby, J. G. and Currie, I. D. (2010). Smooth models of mortality with period shocks. *Statistical Modelling*, **10**(2), 177–196.
- Le Bras, H. (2013). Etre un homme est une maladie génétique. *Le Point*, **2122**, 18.
- Lindbergson, M. (2001). Mortality among the elderly in sweden 1988–1997. *Scandinavian Actuarial Journal*, (1), 79–94.
- Loader, C. R. (1996). Local likelihood density estimation. *The Annals of Statistics*, **24**(4), 1602–1618.
- Loader, C. R. (1999). *Local Regression and Likelihood*. Statistics and Computing Series. New York : Springer Verlag.
- Marx, B. D. and Eilers, P. H. C. (1998). Direct generalized additive smoothing with penalized likelihood. *Computational Statistics & Data Analysis*, **28**, 193–209.
- McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*, volume 37 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Boca Raton : Chapman & Hall / CRC Press, second edition.
- Nelder, J. A. and Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society*, **135**, 370–384.
- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**(3), 1065–1076.
- Planchet, F. (2006). Tables de mortalité d’expérience pour les portefeuilles de rentiers (tables TGH05 et TGF05). Technical report, Institut des Actuaire.

- Planchet, F. and Thérond, P. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles*. Assurance Audit Actuariat. Economica Paris.
- Planchet, F. and Winter, P. (2007). L'utilisation des splines bidimensionnels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail. *Bulletin Français d'Actuariat*, **13**(7), 83–106.
- Renshaw, A. E. (1991). Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models. *Journal of Institute of Actuaries*, **118**, 295–312.
- Richards, S. J., Kirkby, J. G., and Currie, I. D. (2006). The importance of year of birth in two dimensional mortality data. *British Actuarial Journal*, **12**(1), 5.
- Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, **27**(3), 832–837.
- Thatcher, A. R. (1999). The long term pattern of adult mortality and the highest attained age. *Journal of the Royal Statistical Society*, **162**, 5–44.
- Tibshirani, R. J. and Hastie, T. J. (1987). Local likelihood estimation. *Journal of the American Statistical Association*, **82**(398), 559–567.
- Tomas, J. (2013). *Quantifying biometric life insurance risks with non-parametric methods*. Ph.D. thesis, Amsterdam School of Economics Research Institute.
- Tomas, J. and Planchet, F. (2013a). Multidimensional smoothing by adaptive local kernel-weighted log-likelihood with application to long-term care insurance. *Insurance : Mathematics & Economics*, **52**(3), 573–589.
- Tomas, J. and Planchet, F. (2013b). Prospective mortality tables : taking heterogeneity into account. *Cahiers de Recherche de l'ISFA*, **2013**(5), 1–33.

A Annexes

A.1 Les modèles linéaires généralisés

Durant les trente dernières années l'utilisation des modèles linéaires généralisés (Nelder and Wedderburn (1972)) a reçu beaucoup d'attention depuis les applications de McCullagh and Nelder (1989). Les modèles linéaires généralisés sont idéalement adaptés à l'analyse de données non normales que l'on rencontre typiquement lorsque l'on s'intéresse à des sujets relatifs à l'assurance.

La modélisation diffère des modèles linéaires gaussiens par deux aspects. La distribution de la variable dépendante est choisie dans la famille exponentielle et n'est donc pas spécifiquement Normale mais peut-être explicitement non-Normale et une transformation de l'espérance de la variable dépendante est linéairement liée aux variables explicatives. Ces modèles possèdent 3 caractéristiques :

- i. Un élément aléatoire qui établit que les observations sont des variables aléatoires indépendantes $Y_i, i = 1, \dots, n$ avec une densité appartenant à la famille exponentielle linéaire.
- ii. Un élément systématique qui attribut à chaque observation un prédicateur linéaire η_i .
- iii. Un troisième éléments qui connecte les deux premiers : μ_i l'espérance de Y_i est lié au prédicateur linéaire η_i par une fonction de lien.

Les modèles linéaires généralisés s'appliquent à toute distribution appartenant à la famille exponentielle linéaire, i.e. lorsque la variable dépendante Y_i a une loi de probabilité de la forme

$$f_Y(y_i; \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\},$$

pour des fonctions a , b et c spécifique. Les fonctions a et c telles que $a(\phi) = \phi$ et $c = c(y_i, \phi)$. Le paramètre θ_i est appelé paramètre naturel (ou canonique) et ϕ est le paramètre de dispersion. Pour un modèle de Poisson, les paramètres sont exposés dans la Table 8.

Distribution de y_i	θ_i	$a(\phi)$	$b(\theta_i)$	$c(y_i, \phi)$	$\mathbb{E}[Y_i]$	$\mathbb{V}[\mu_i] = \frac{\mathbb{V}[Y_i]}{a(\phi)}$
Poisson(μ_i)	$\ln(\mu_i)$	1	$\exp(\theta_i)$	$-\log y_i!$	μ_i	μ_i

TABLE 8: Loi de Poisson appartenant à la famille de dispersion exponentielle

La fonction inconnue $\mu_i = \mathbb{E}[Y_i|x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, est lié au prédicateur linéaire η_i par une fonction de lien $g()$ monotone et différentiable

$$g(\mu_i) = \eta_i \Leftrightarrow \mu_i = g^{-1}(\eta_i).$$

La fonction de lien est dite canonique lorsque $\theta_i = \eta_i$, où θ_i est le paramètre canonique. La fonction de lien canonique assure donc que $g(\mu_i) = \theta_i$ et $g^{-1} = b'()$ (puisque $\mu_i = b'(\theta_i)$). Pour un modèle de Poisson, on a $\eta_i = \log(\mu_i)$.

Les modèles linéaires généralisés ont été présentés de façon extensive pour l'ajustement de la mortalité par Renshaw (1991) et complétés par Haberman and Renshaw (1996).

A.2 Ajustement non-paramétrique par vraisemblance locale

La modélisation non-paramétrique offre un outil flexible dans l'analyse de la relation. Comme les méthodes paramétriques, elle est susceptible de donner des estimations biaisées, mais de telle sorte qu'il est possible d'équilibrer une augmentation du biais avec une diminution de la variation d'échantillonnage.

Les modèles linéaires généralisés font l'hypothèse que θ_i a une forme paramétrique spécifique, e.g.

$$\theta_i = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}, \quad \text{où } \mathbf{x} = (1, x_i, \dots, x_i^p)^T, \quad \text{et } \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_p)^T.$$

L'approche de la vraisemblance locale ne fait plus l'hypothèse que θ_i a une forme paramétrique rigide. On suppose que θ_i est une fonction lisse non spécifiée $\psi(x_i)$ qui a $(p+1)$ dérivées continues au point x_i . L'idée est d'ajuster un modèle polynomial de degré p à l'intérieur d'une fenêtre d'observation.

La relation entre les forces de mortalité et l'âge atteint peut être modélisée par

$$\varphi_i = \psi(x_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

où ψ est une fonction de régression inconnue et ϵ_i un terme d'erreur représentant les erreurs aléatoires dans les observations ou variations qui ne sont pas incluses dans les x_i . Le but de toute régression est de fournir une analyse raisonnable de la fonction de réponse inconnue ψ .

Chaque force de mortalité est liée étroitement à ses voisines. Les observations φ_j dans le voisinage de φ_i contiennent de l'information à propos de la valeur de ψ à x_i . On suppose que les forces de la nature opèrent graduellement et leurs effets deviennent visibles de façon continue et non par des sauts brusques. Cela implique que les observations φ_j , dans le voisinage d'un point x_i , peuvent être utilisées pour augmenter l'information que nous avons à x_i et une estimation améliorée de φ_i peut être obtenue en lissant les estimations individuelles φ_j . Ainsi la mortalité n'est pas résumée en un petit nombre de paramètres mais décrite par les n forces de mortalité.

Les approches de vraisemblance locale sont originaires des méthodes à noyaux introduites par Rosenblatt (1956) et Parzen (1962). Voir Copas and Haberman (1983) et Gavin *et al.* (1993) pour les applications actuarielles des méthodes à noyaux. Tibshirani and Hastie (1987) ont introduit la procédure de vraisemblance locale, et ont étendu le domaine des méthodes de lissage à d'autres distributions que gaussienne par Loader (1996), Fan *et al.* (1998) et Loader (1999).

En suivant l'approche prise par Tibshirani and Hastie (1987), nous appliquons les modèles de vraisemblance locale aux données pour lesquelles leur relation peut être exprimée à travers une fonction de vraisemblance. On suppose que nous avons n réalisations indépendantes y_1, y_2, \dots, y_n de la variable aléatoire Y avec

$$Y_i \sim f(Y|\theta(x_i)), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n,$$

où $f(\cdot|\theta(x_i))$ est une fonction de densité appartenant à la famille de dispersion exponentielle et $\theta(x_i)$ est une fonction lisse non-spécifiée $\psi(x_i)$. Pour un point x_j dans le voisinage de x_i , on calcule une approximation de $\psi(x_j)$ via une expansion de Taylor par un polynôme de degré p :

$$\psi(x_j) \approx \psi(x_i) + \psi'(x_i)(x_j - x_i) + \dots + \frac{\psi^{(p)}(x_i)}{p!}(x_j - x_i)^p \equiv \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta},$$

où $\mathbf{x} = (1, x_j - x_i, \dots, (x_j - x_i)^p)^T$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_p)^T$, avec $\beta_v = \psi^{(v)}(x_i)/v!$, $v = 0, 1, \dots, p$.

La contribution à la log-vraisemblance, pour des points (x_j, y_j) dans le voisinage de x_i , est notée par $l(y_j, \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})$. De plus, elle est pondérée par w_j , où $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_p)^T$, et

$$w_j = \begin{cases} W(|x_j - x_i|/h) & \text{if } |x_j - x_i|/h \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $W(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2)I(|u| \leq 1)$ est la fonction de poids Epanechnikov⁴ et $h = (\lambda - 1)/2$, λ étant la fenêtre d'observation. On obtient la log-vraisemblance locale :

$$L(\beta|\lambda, x_i) = \sum_{j=1}^n l(y_j, \mathbf{x}^T \beta) w_j. \quad (3)$$

Maximiser la log-vraisemblance locale (3) par rapport à β donne les vecteurs des estimateurs $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_p)^T$. Les estimateurs $\psi^{(v)}(x_i)$, $v = 0, 1, \dots, p$, sont donnés par $\hat{\psi}^{(v)}(x_i) = v! \hat{\beta}_v$. Ainsi le rôle des modèles généralisés est celui d'un modèle *en arrière plan* qui est ajusté à l'intérieur d'une fenêtre d'observation dont la localisation s'effectue au travers de la fonction de poids.

Lorsque que l'on modélise des données d'expérience issues de l'assurance vie, on souhaite généralement prendre en compte les expositions dans l'écriture du modèle. Spécifiquement, on cherche une estimation lisse des forces de mortalité observées et avec l'équation (1) le prédicateur linéaire η_j peut être écrit comme

$$\eta_j = \log(\mathbb{E}[Y|X = x_j]) = \log(\mu_j) = \log(E_j \varphi_j) = \log(E_j) + \log(\varphi_j)$$

Le terme E_j est appelé l'*offset*.

La sélection des paramètres de lissage (la fenêtre d'observation λ et le degré du polynôme p) est un compromis entre deux objectifs : L'élimination des irrégularités, et l'ajustement désiré dans la progression des forces de mortalité. Cela souligne l'importance de d'une investigation poussée comme condition d'un jugement fiable. En pratique on va choisir les paramètres de lissage pour équilibrer le compromis entre le biais et la variance. Pour trouver une telle constellation, la stratégie est d'évaluer un nombre d'ajustements *candidats* et d'utiliser un critère pour sélectionner parmi les ajustements celui qui aura le score le plus faible. Dans cette étude, nous avons utilisé le *Akaike information criterion (AIC)* basé sur la déviance, définie plus bas, équation (7),

$$AIC = \sum \text{Déviance} + 2v,$$

où v sont les degrés de liberté. En conjonction, on a examiné les graphiques des résidus, section 3.1.

Les méthodes de vraisemblance locale combinent d'excellentes propriétés théoriques avec simplicité et flexibilité. Elle est très adaptable, et est également pratique sur le plan statistique, voir Tomas (2013, Ch3.) pour une présentation exhaustive des approches. Les méthodes de vraisemblance locale pour l'ajustement des tables de mortalité ont été appliquées par Delwarde *et al.* (2004), Debón *et al.* (2006) et plus récemment par Gschlössl *et al.* (2011).

Nous avons utilisé la vraisemblance locale pour ajuster la table « du moment », méthode 1. La Table 9 présente les paramètres de lissage.

Tables	AIC	Degré de liberté	λ	p
Pop. masculine	102.74	4.55	17	2
Pop. féminine	98.71	3.82	21	2

TABLE 9: Paramètres de lissage associé à la vraisemblance locale pour le lissage des tables « du moment ».

4. D'autres choix sont possibles, néanmoins la fonction de poids n'a que peu d'importance dans l'équilibre biais-variance par rapport à la longueur de la fenêtre d'observation λ et le degré d'approximation p .

A.3 Ajustement non-paramétrique par p -splines

Nous présentons ici l'essentiel du matériel sur les p -splines pour les données de comptage, une description de la méthode des p -splines est disponible dans l'étude de référence de [Eilers and Marx \(1996\)](#), et aussi bien dans [Marx and Eilers \(1998\)](#), [Eilers and Marx \(2002\)](#), et [Currie and Durbán \(2002\)](#). [Currie et al. \(2006\)](#) présentent une étude extensive de la méthodologie. Des applications couvrant la mortalité se trouvent dans [Currie et al. \(2004\)](#), [Richards et al. \(2006\)](#), [Camarda \(2008\)](#), [Kirkby and Currie \(2010\)](#) et [Tomas and Planchet \(2013a\)](#). [Planchet and Winter \(2007\)](#) utilisent le même cadre de travail pour une application concernant le maintien arrê de travail.

Supposons que les données peuvent être arrangées selon un vecteur colonne, $\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Soit $\mathbf{B}_x = \mathbf{B}(x)$ and $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}(t)$, les matrices de régression de dimensions $n_x \times k_x$ and $n_t \times k_t$, de B -splines basé sur l'âge atteint et l'année calendaire respectivement, avec k dénotant le nombre de noeuds internes. De manière spécifique, les B -splines sont des courbes en cloche composées de polynômes lisses joints entre eux. Pour notre étude, nous avons utilisé des polynôme de degré 3. Les positions sur l'axe horizontal où les polynômes sont joints sont appelés des noeuds. On utilise des noeuds espacés de façon égale. Le nombre de colonnes de \mathbf{B}_x et \mathbf{B}_t sont liés au nombre de noeuds choisis pour les B -splines. Voir [de Boor \(2001\)](#) pour plus de détails sur les B -splines.

La matrice de régression pour un modèle de 2 dimensions est le produit de Kronecker

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_u \otimes \mathbf{B}_v$$

La matrice \mathbf{B} a un vecteur de coefficients de régression associés \mathbf{a} de longueur $k_x k_t$. Comme dans le cadre des modèles linéaires généralisés, le prédicateur linéaire $\boldsymbol{\eta}$ est lié à l'espérance de \mathbf{y} par une fonction de lien $g(\cdot)$.

$$\boldsymbol{\eta} = g(\mathbb{E}[\mathbf{y}]) = \log(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{B} \mathbf{a} = (\mathbf{B}_u \otimes \mathbf{B}_v) \mathbf{a}, \quad (4)$$

Les éléments de \mathbf{a} peuvent être réarrangés en une $k_x \times k_t$ matrice \mathbf{A} où $\mathbf{a} = \text{vec}(\mathbf{A})$. Les colonnes et lignes de \mathbf{A} sont alors données par $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_x)$ et $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t)$. Ainsi, au lieu de d'écrire l'équation (4) comme un vecteur, on peut la réécrire

$$\log(\mathbb{E}[\mathbf{y}]) = \log(\mathbf{M}) = \mathbf{B}_x \mathbf{A} \mathbf{B}_t^T. \quad (5)$$

la log-vraisemblance pénalisée qui doit être maximisé peut être comme

$$\ell^* = \ell(\mathbf{a}; \mathbf{B}, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}. \quad (6)$$

où $\ell(\mathbf{a}; \mathbf{B}, \mathbf{y})$ est la log-vraisemblance usuelle d'un modèle linéaire généralisé et \mathbf{P} est le terme de pénalité. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Currie et al. \(2004\)](#).

Maximiser l'équation (6) donne les équations de vraisemblance pénalisée

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}) = \mathbf{P} \mathbf{a},$$

qui peuvent être résolues avec une version pénalisée des moindres carrées itérativement pondérés utilisés dans le cadre des modèles linéaires généralisés. On peut vouloir prendre en compte l'exposition lorsque que l'on modèle des données de mortalité. Le prédicateur linéaire $\boldsymbol{\eta}$ s'écrit alors

$$\boldsymbol{\eta} = g(\mathbb{E}[\mathbf{y}]) = \log(\boldsymbol{\mu}) = \log(\mathbf{e}) + \log(\boldsymbol{\varphi}) = \log(\mathbf{e}) + \mathbf{B} \mathbf{a} = \log(\mathbf{e}) + (\mathbf{B}_u \otimes \mathbf{B}_v) \mathbf{a},$$

où \mathbf{e} dénote le vecteur des expositions.

Pour les méthodes de p -splines, nous avons utilisé le *Bayesian information criterion* (BIC) qui pénalise lourdement la complexité du modèle particulièrement lorsque n est grand,

$$BIC = \sum_{i=1}^n D(y_i, (\theta(\hat{\mu}_i))) + \log(n) v.$$

où v sont les degrés de liberté. Pour notre étude, les tables de référence externes INSEE et TG/F05 sont ajustées par un modèle de p -splines. La Table 10 résume les caractéristiques des lissages.

Tables	BIC	Déviante	Degré de liberté	λ_x	λ_t	k_x	k_t
INSEE masculine	69915.87	69673.29	29.65	10000	100	3	2
INSEE féminine	77794.4	77551.93	29.64	10000	100	3	2
TGH05	799.89	574.97	29.76	3.16	100000	13	5
TGF05	399.17	196.54	26.81	31.62	31622.77	13	5

TABLE 10: Paramètres des modèles p -splines pour le lissage des tables externes.

A.4 Formules des quantités employées pour comparer les ajustements

Pour un modèle de Poisson, la déviance est

$$\text{Déviance}_{x,t} = 2 \left(D_{x,t} \log(D_{x,t}/E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t)) - (D_{x,t} - E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t)) \right).$$

$$\text{Déviance totale} = \sum_{(x,t)} \text{Déviance}_{x,t}. \quad (7)$$

$$\chi^2 = \sum_{(x,t)} \frac{(D_{x,t} - E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t))^2}{E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t) (1 - \hat{\varphi}_x(t))}. \quad (8)$$

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t} - \hat{\varphi}_x(t))^2}{\left(\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t} - (\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t})/n) \right)^2} \right), \quad (9)$$

où n est le nombre d'observations.

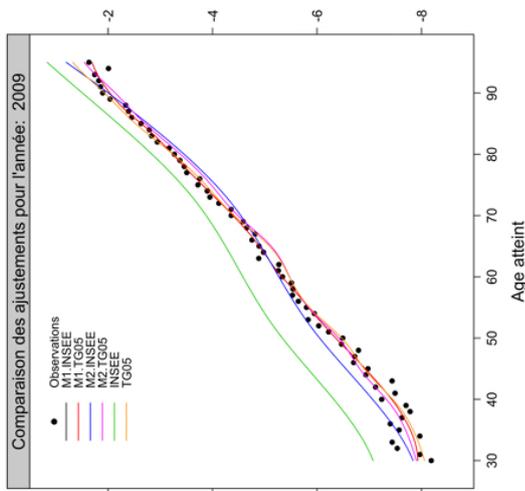
$$MAPE = \frac{\sum_{(x,t)} |(D_{x,t}/E_{x,t} - \hat{\varphi}_x(t))/(D_{x,t}/E_{x,t})|}{\sum_{(x,t)} D_{x,t}} \times 100. \quad (10)$$

$$SMR = \frac{\sum_{(x,t)} D_{x,t}}{\sum_{(x,t)} E_{x,t} \hat{\varphi}_x(t)}. \quad (11)$$

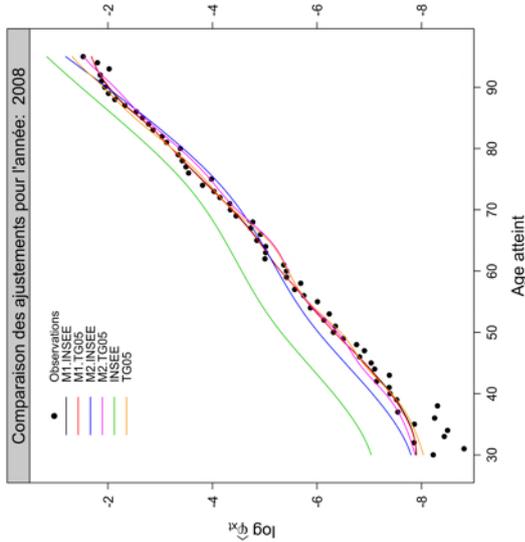
A.5 Test des signes

Il s'agit d'un test non-paramétrique qui examine la fréquence des changements de signes (ou *run*) des différences entre les forces de mortalité observées et ajustées. Un *run* est défini comme une série de signes similaires.

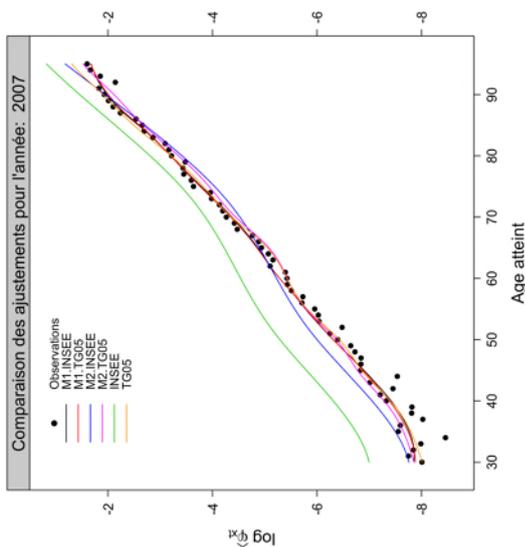
L'hypothèse nulle peut s'écrire, $\mathbb{P}[+] = \mathbb{P}[-] = 1/2$ où $\mathbb{P}[+]$ et $\mathbb{P}[-]$ sont les probabilités d'observer une différence positive et négative respectivement. Lorsque l'hypothèse nulle est vraie et pour n paires d'observations, le nombre de différences positives (ou négatives) est une variable binomiale de paramètres $1/2$ et n , où n est le nombre d'observations. Le test permet de comparer, grâce à cette distribution, le nombre observé de signes positifs (ou négatifs) et le nombre attendu $n/2$.



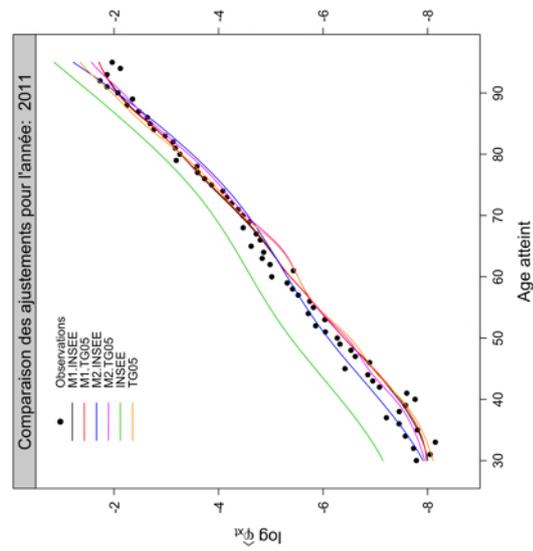
(a) Année 2007



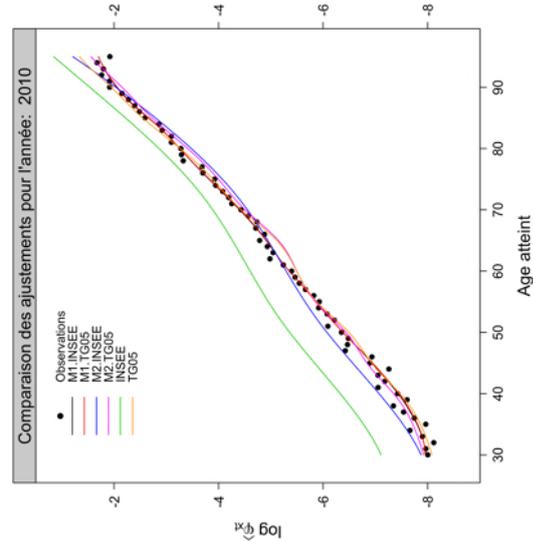
(b) Année 2008



(c) Année 2009

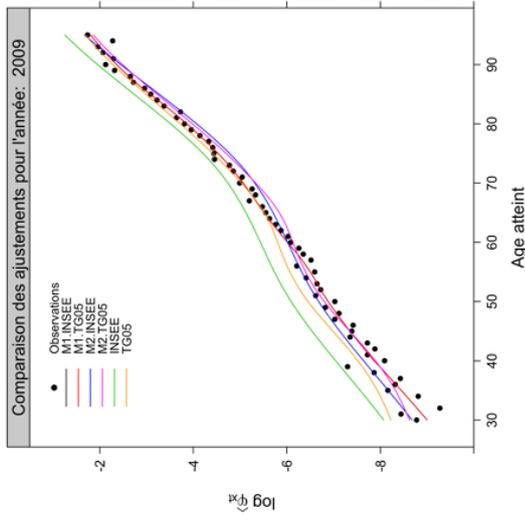


(d) Année 2010

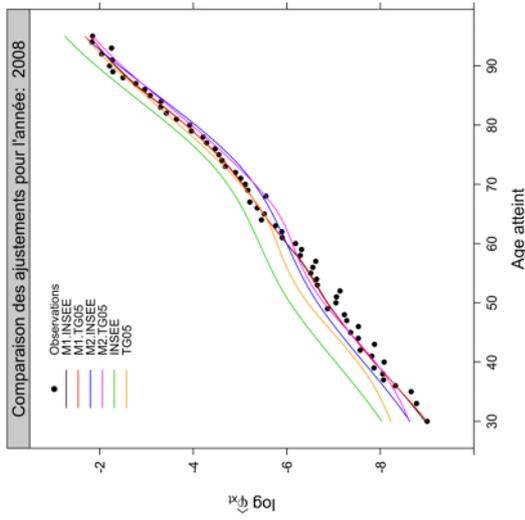


(e) Année 2011

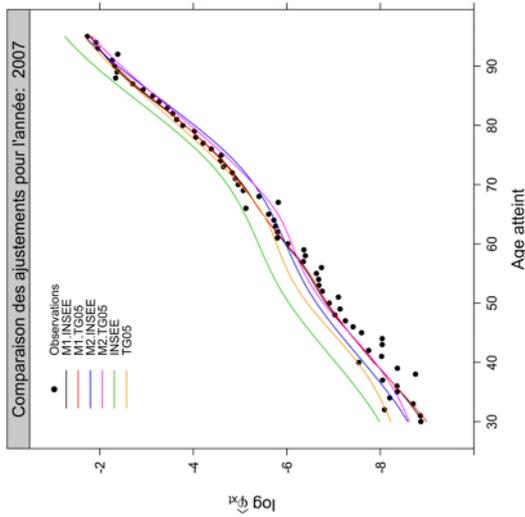
FIGURE 19: Comparaison des forces de mortalité par année calendaire, échelle logarithmique, population masculine.



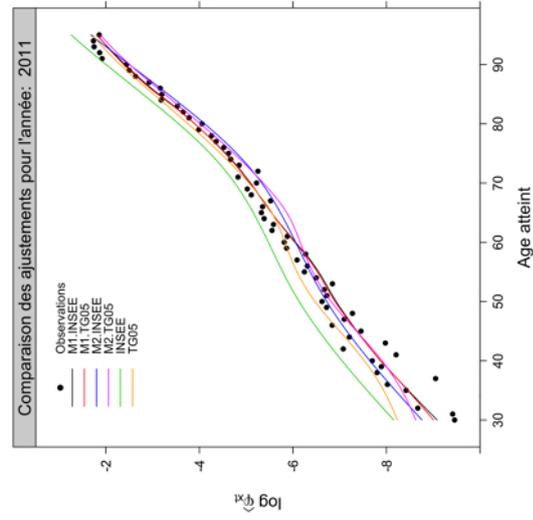
(a) Année 2007



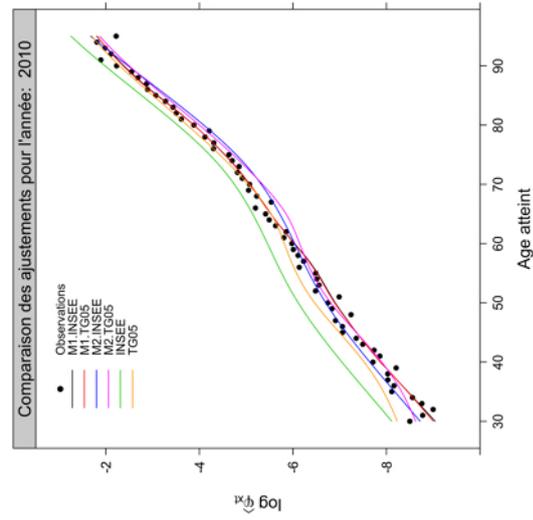
(b) Année 2008



(c) Année 2009

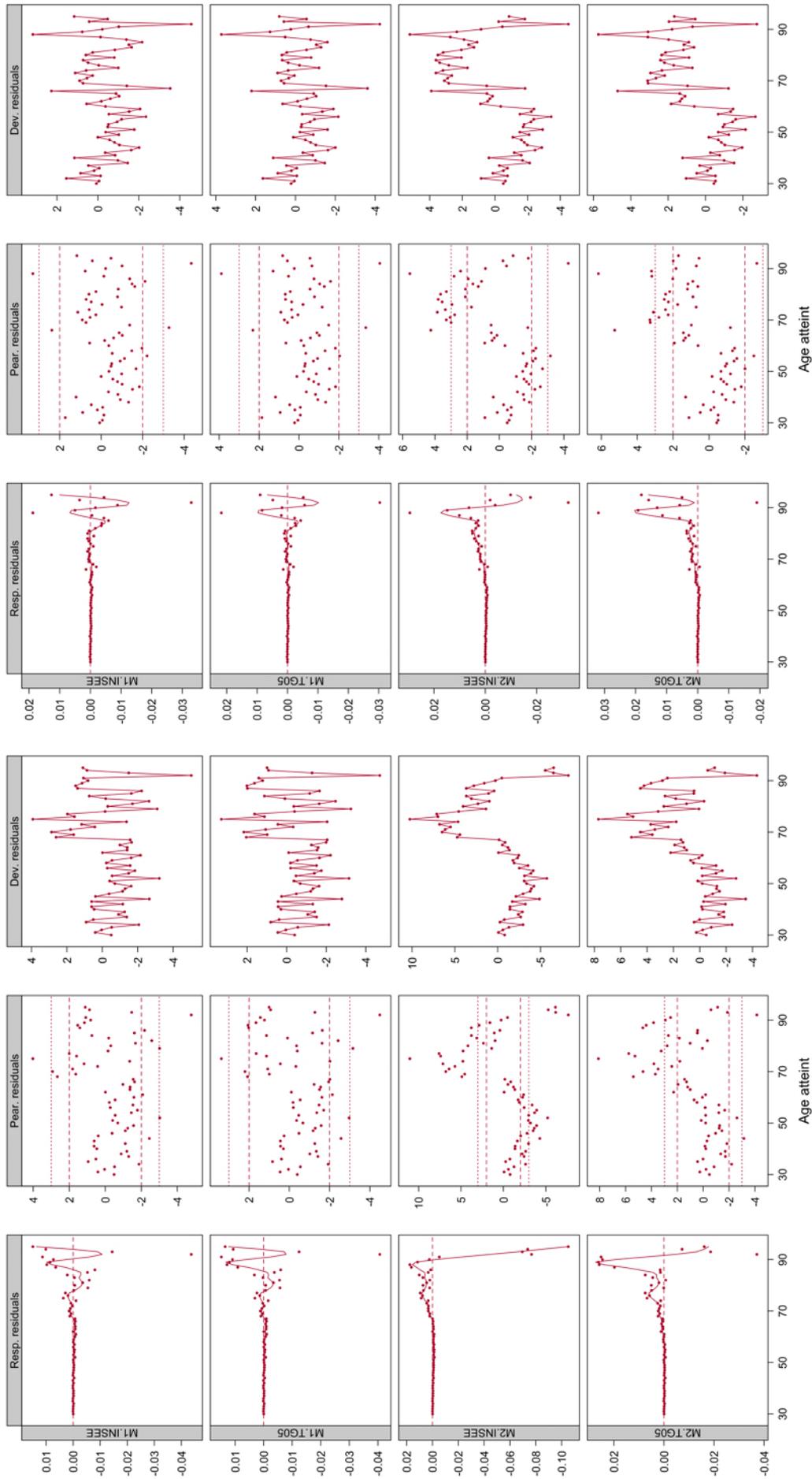


(d) Année 2010

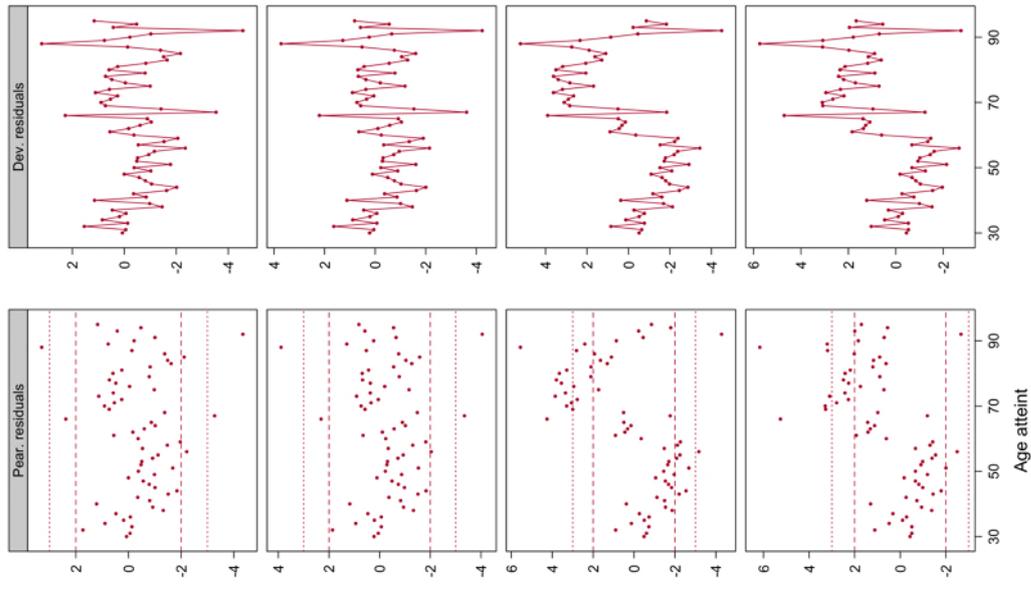


(e) Année 2011

FIGURE 20: Comparaison des forces de mortalité par année calendaire, échelle logarithmique, population féminine.

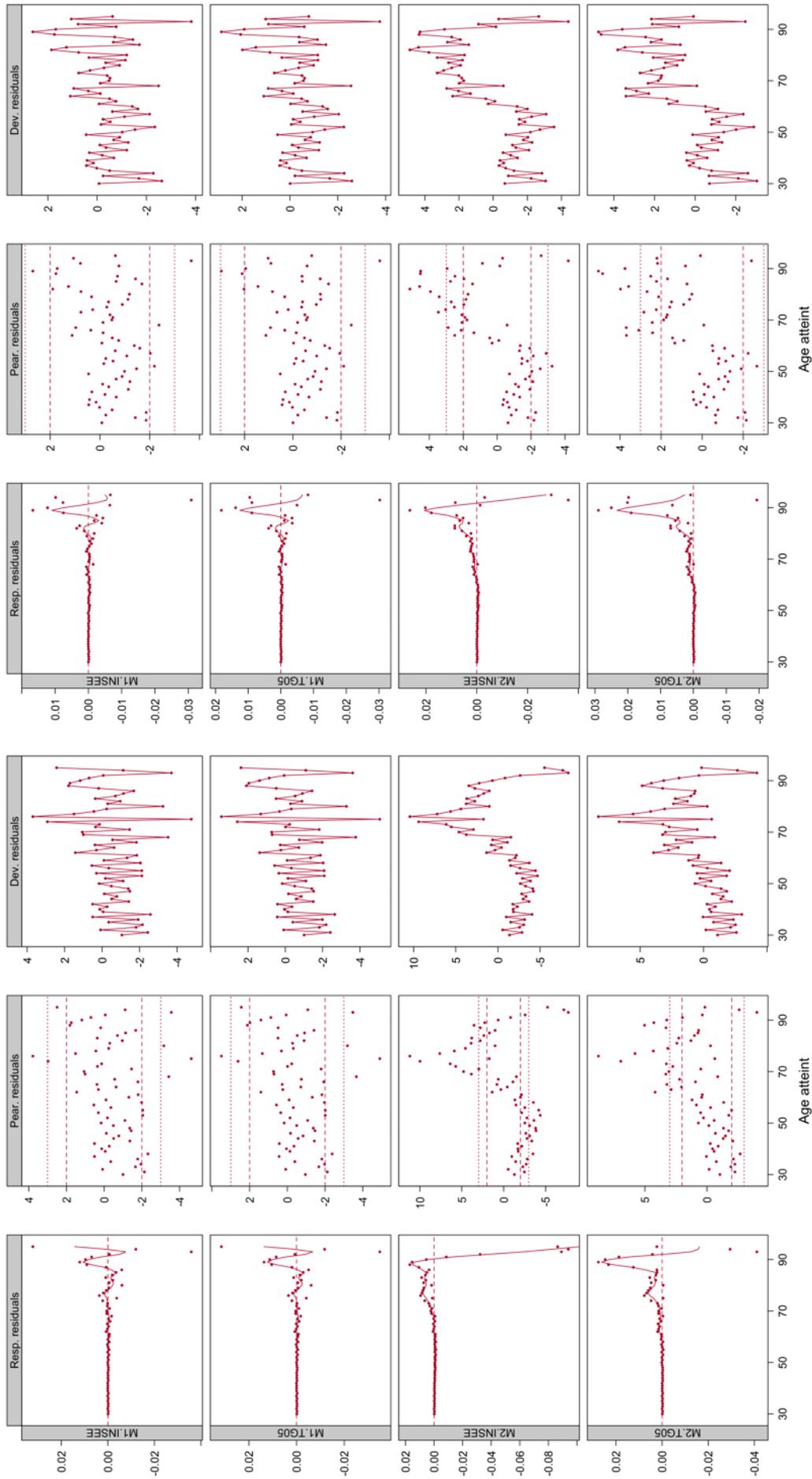


(a) Population masculine

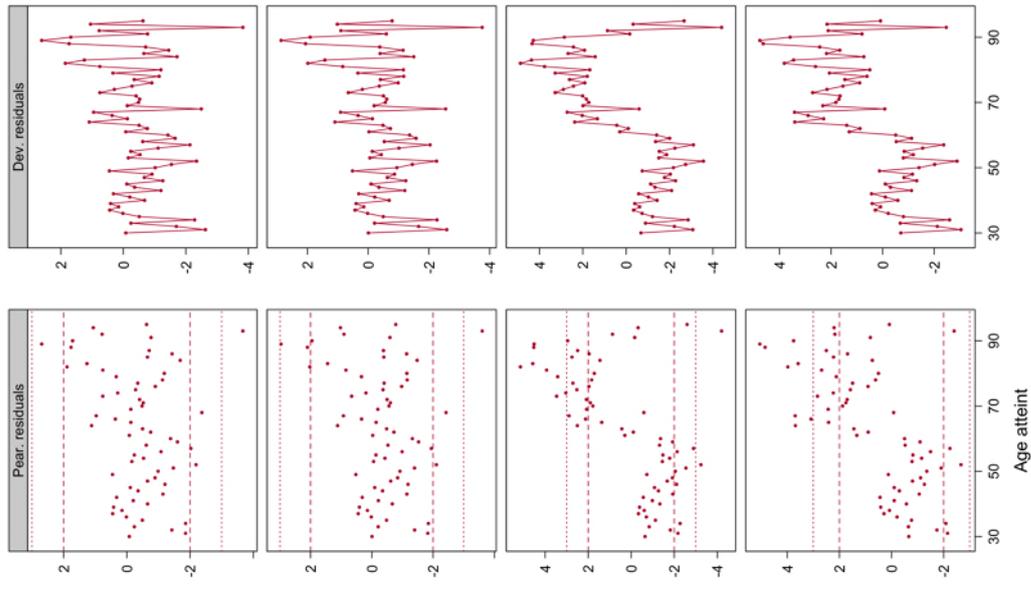


(b) Population féminine

FIGURE 21: Comparaison des résidus pour l'année 2007.

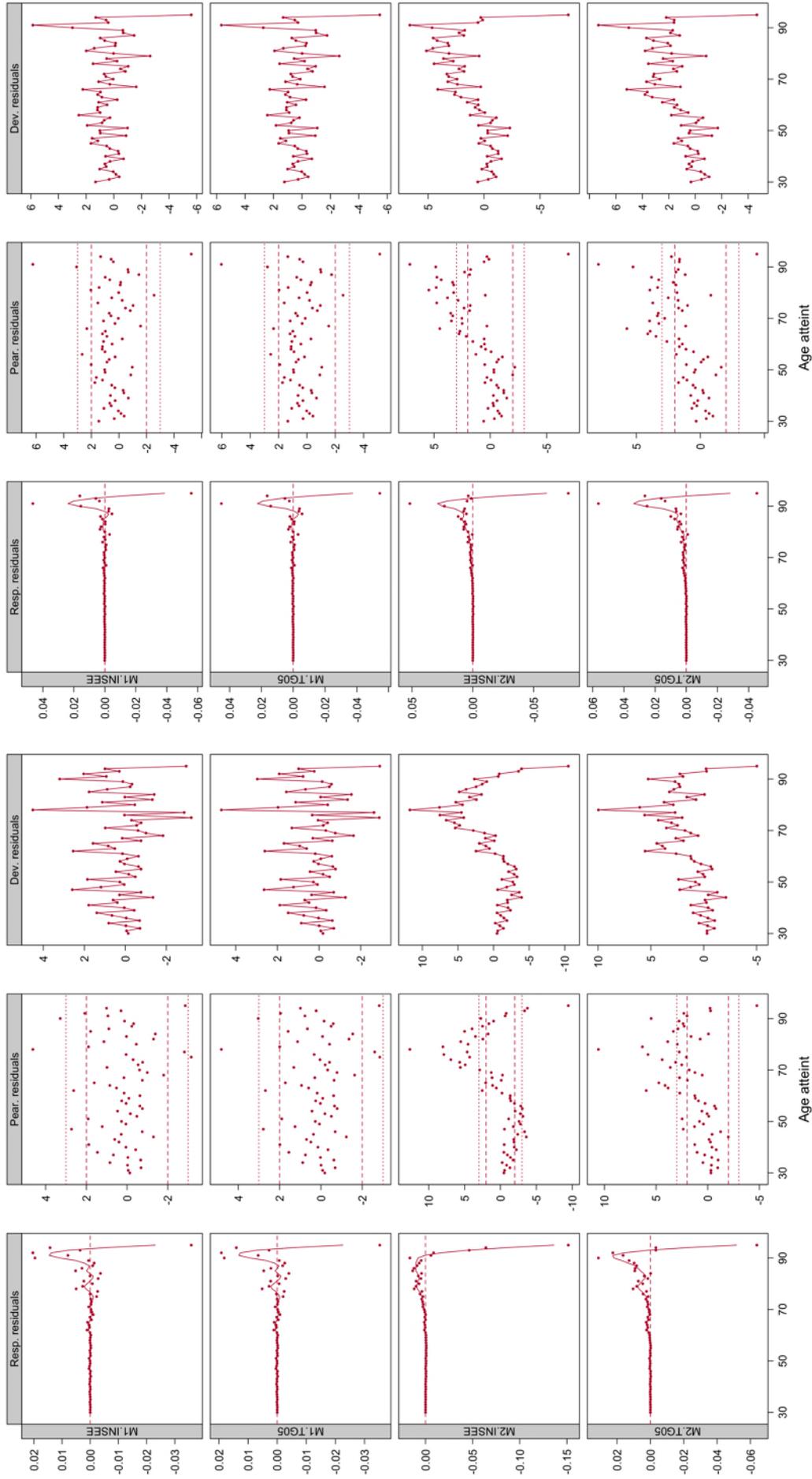


(a) Population masculine

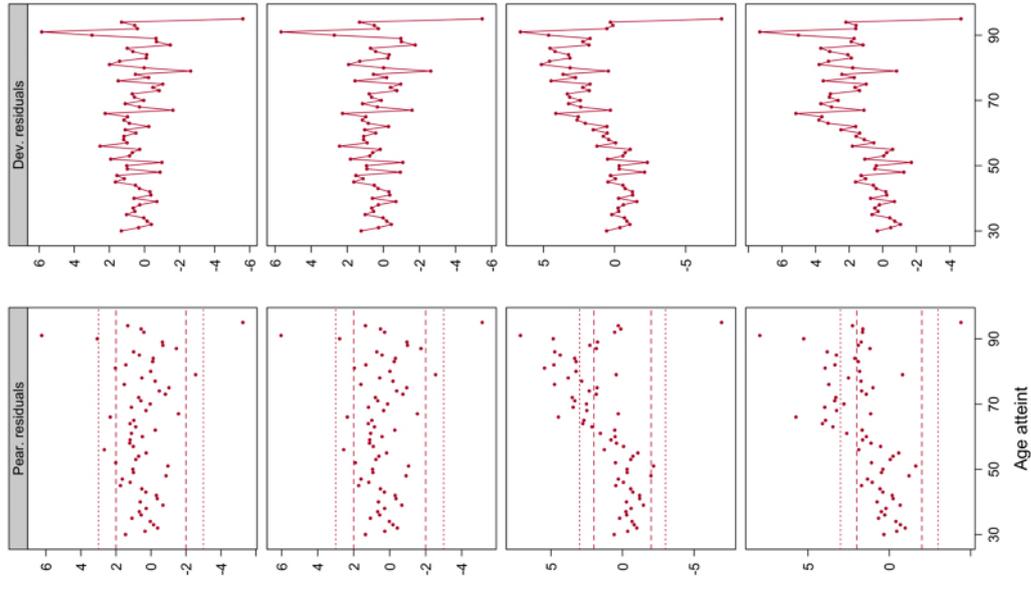


(b) Population féminine

FIGURE 22: Comparaison des résidus pour l'année 2008.

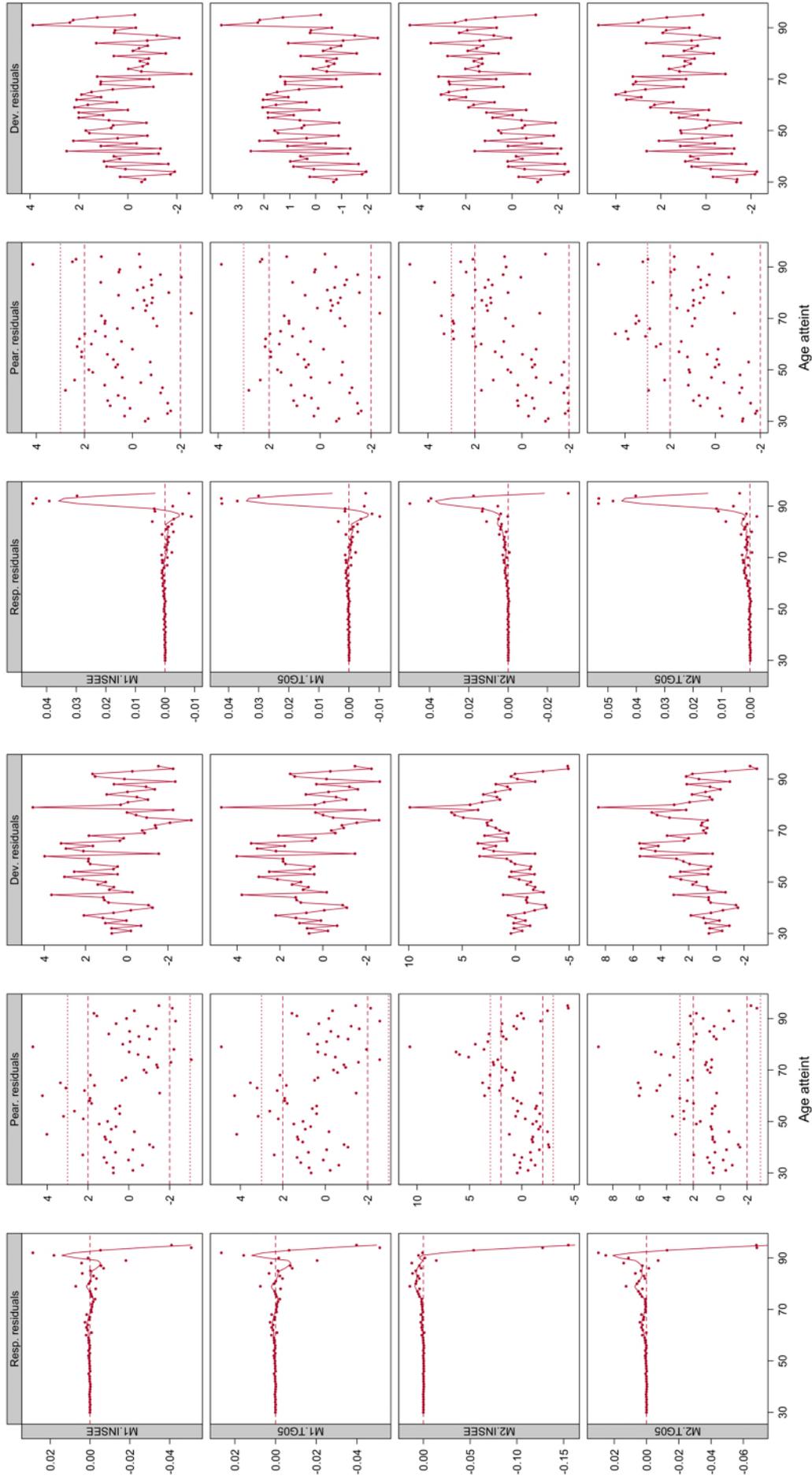


(a) Population masculine

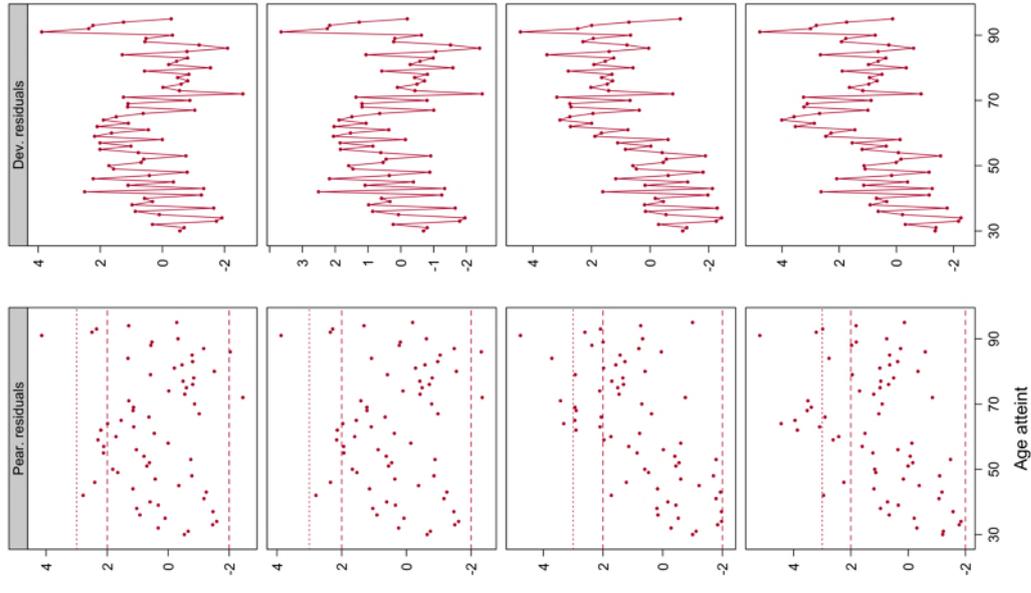


(b) Population féminine

FIGURE 23: Comparaison des résidus pour l'année 2010.

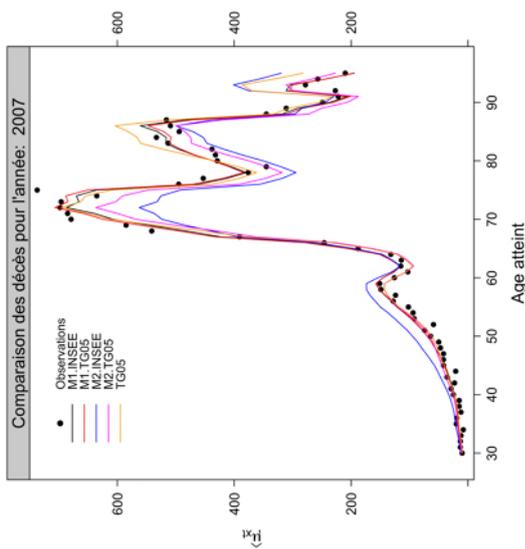


(a) Population masculine

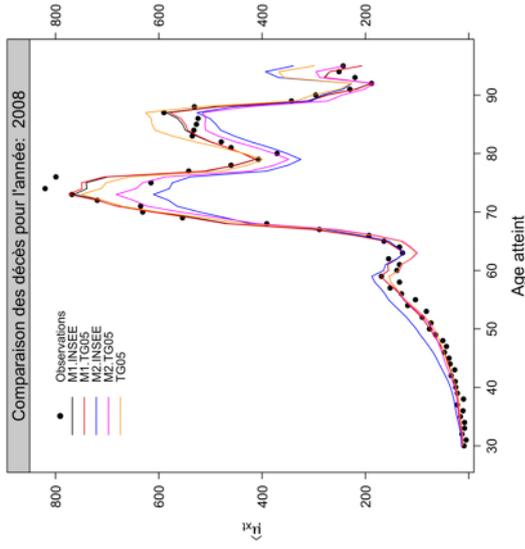


(b) Population féminine

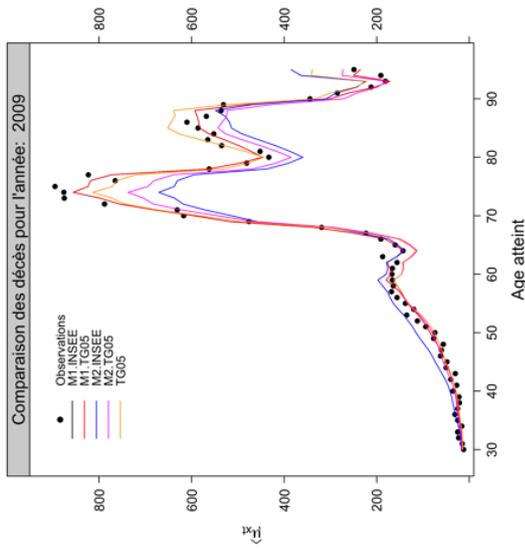
FIGURE 24: Comparaison des résidus pour l'année 2011.



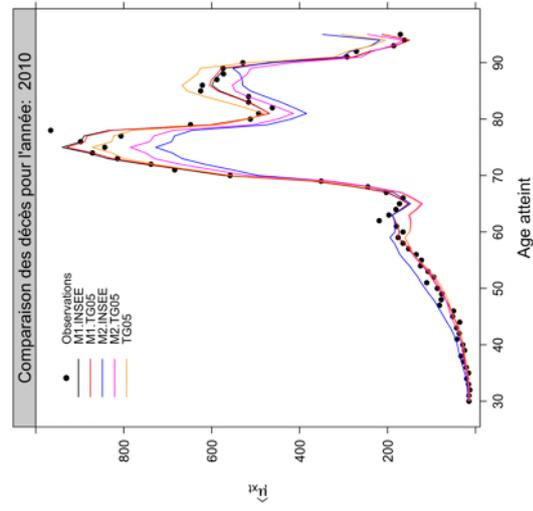
(a) Année 2007



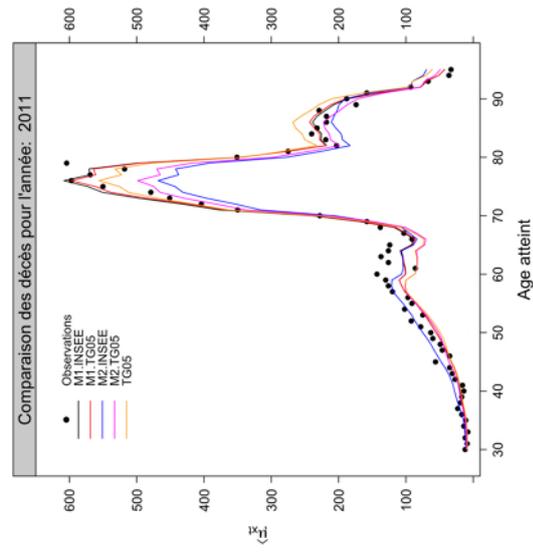
(b) Année 2008



(c) Année 2009

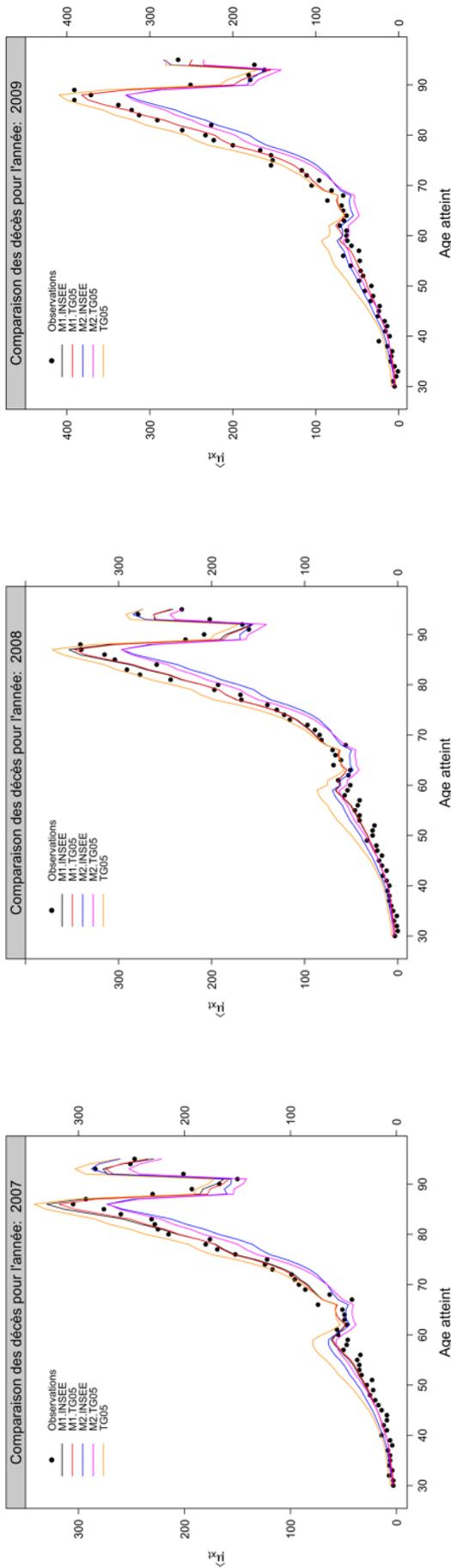


(d) Année 2010

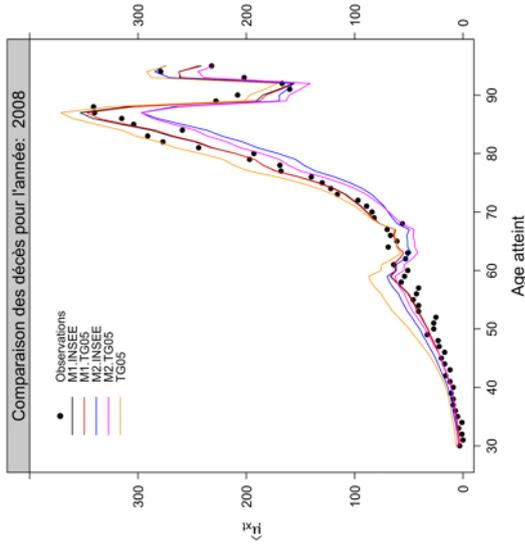


(e) Année 2011

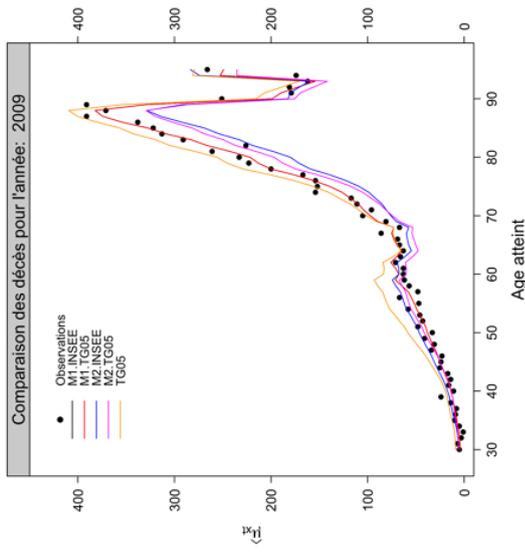
FIGURE 25: Comparaison des décès observés et ajustés, population masculine.



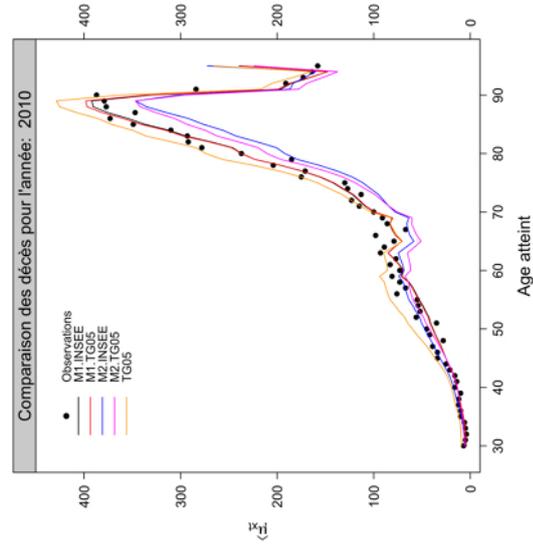
(a) Année 2007



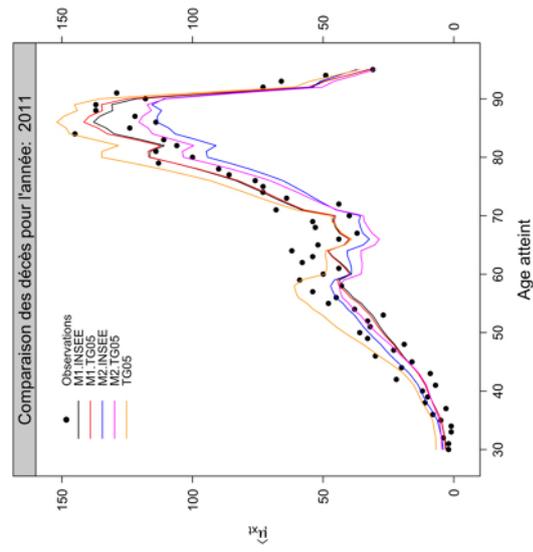
(b) Année 2008



(c) Année 2009



(d) Année 2010



(e) Année 2011

FIGURE 26: Comparaison des décès observés et ajustés, population féminine.