

**L'APPROCHE DÉVELOPPÉE PAR LE CMI
POUR LA CONSTRUCTION DE TABLES
PROSPECTIVES SPÉCIFIQUES**

Julien TOMAS ^{α *} – Frédéric PLANCHET ^{α †}

^α ISFA - Laboratoire SAF [‡]

Résumé

Cette note de travail présente l'approche développée par le *Continuous Mortality Investigation* (CMI) pour la construction de tables de mortalité prospectives spécifiques à un organisme. Elle offre une présentation détaillée de la méthode *Mortality Projections Model* dont la dernière mise à jour date du 8 Février 2013. Cette approche consiste à appliquer une dérive de mortalité paramétrée par l'organisme à une table du moment issue de la population nationale ou transmise par l'entité.

*Contact: julien.tomas@univ-lyon1.fr

†Contact: frederic.planchet@univ-lyon1.fr.

‡Institut de Science Financière et d'Assurances - Université Claude Bernard Lyon 1 - 50 Avenue Tony Garnier
- 69366 Lyon - France

Sommaire

| | |
|--|----------|
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Le modèle de projection | 1 |
| 2.1 La structure du modèle | 1 |
| 2.2 Les paramètres associés au taux d'amélioration | 2 |
| 2.2.1 Les paramètres de la dérive à long terme | 2 |
| 2.2.2 Taux d'amélioration initiaux agrégées | 3 |
| 2.2.3 Les composantes de la dérive initiale | 3 |
| 2.3 Les paramètres associés à la convergence | 4 |
| 2.3.1 Les composantes de la période de convergence | 4 |
| 2.3.2 Proportion de convergence à mi-parcours | 5 |
| 3 Interpolation des facteurs de réductions et probabilités de décès projetées | 6 |
| 4 Outils de validation de la projection | 7 |
| Références | 7 |

1 Introduction

Le *Continuous Mortality Investigation* (CMI) est un organisme de recherche de l'Institut des Actuaire au Royaume-Uni. Cet organisme a été mis en place en 1924 et mène des recherches sur la mortalité et la morbidité. Il a vocation à produire les tables de mortalité prospectives utilisées par les compagnies d'assurance du Royaume-Uni et les membres de la profession actuarielle. Ces tables sont basées sur des données confidentielles transmises par les compagnies d'assurance vie couvrant la majorité du marché anglais. Depuis 2006, il effectue également des recherches sur la mortalité liée aux régimes de retraite au Royaume-Uni.

En 2009, le CMI a publié un modèle de projection de la mortalité, *Mortality Projections Model*, pour la construction des tables de mortalité prospectives spécifiques à un organisme, c.f. [Continuous Mortality Investigation \(2009a\)](#) and [Continuous Mortality Investigation \(2009b\)](#). Le but de ce modèle est de permettre à un organisme de produire une projection des taux annuels de mortalité adaptée selon ses caractéristiques. Le modèle :

- i. reflète l'expérience la plus récente sur les tendances de la mortalité, et
- ii. donne la possibilité à un organisme de modifier les projections pour les adapter selon son utilisation et son point de vue.

Le CMI met régulièrement à jour le modèle afin de prendre en compte l'expérience la plus récente. La dernière mise à jour date du 8 Février 2003, c.f. [Continuous Mortality Investigation \(2013a\)](#).

2 Le modèle de projection

Cette approche consiste à appliquer une dérive de mortalité définie par l'organisme à une table du moment issue de la population nationale ou transmise par l'entité.

2.1 La structure du modèle

Contrairement à des modèles stochastiques de mortalité, ajustés directement sur des données pertinentes et extrapolées afin d'obtenir une projection, le modèle proposé permet à l'organisme de définir les valeurs des paramètres qui contrôlent la projection selon son point de vue.

Ainsi le modèle produit une seule projection déterministe des taux de mortalité. La structure du modèle permet à l'organisme d'inclure :

- i. une table du moment, permettant de prendre en compte l'expérience la plus récente,
- ii. les taux initiaux d'amélioration de la mortalité, reflétant l'estimation de la dérive la plus récente,
- iii. les taux à long-terme d'amélioration de la mortalité, et
- iv. la vitesse et la forme de la convergence entre les taux initiaux et à long terme.

Les taux initiaux et à long-terme sont eux-même sous divisés en deux composantes : par *âge* et par *cohorte*. Ces composantes sont projetées séparément, par *âge* et par *année de naissance de la cohorte* et additionnées pour former la dérive totale.

La convergence entre la dérive initiale et à long-terme est définie (séparément par *âge* et par *cohorte*) par l'organisme selon la longueur de la convergence et la proportion de la convergence à mi-parcours.

Le modèle se base sur la projection des taux annuels d'amélioration de la mortalité, i.e. le rythme du changement des taux de mortalité. Plus précisément, le modèle suppose que la dérive récemment observée converge vers une dérive de long terme spécifiée par l'organisme.

C'est à dire que **dans le très court terme**, la meilleure estimation possible de la dérive est supposée être celle de l'expérience observée.

Alors que **dans le long terme**, les forces conduisant la dérive de mortalité peuvent varier de celle influençant l'amélioration actuelle. Par conséquent, la tendance à long terme est déterminée arbitrairement par l'organisme ou par des experts basant leur jugement sur l'analyse de la structure des taux d'amélioration de la mortalité et des causes l'influençant.

En conséquence, le poids relatif associé à l'expérience récemment observée diminue sur la période de projection par rapport à une vision à long terme plus subjective.

2.2 Les paramètres associés au taux d'amélioration

D'un point de vue pratique, le modèle est fourni sous la forme d'un document **excel**, cf. **Continuous Mortality Investigation (2013b)**, utilisable selon deux niveaux de complexité. Ces niveaux reflètent les besoins et ressources de l'organisme.

Le niveau *avancé* permet une grande flexibilité dans les projections générées alors que le niveau *par défaut* permet à l'organisme d'utiliser le modèle dans sa version simplifiée.

2.2.1 Les paramètres de la dérive à long terme

Les paramètres de la dérive à long terme sont les deux principaux paramètres du modèle. Ils sont :

- i. **la dérive de mortalité à long terme**. Il s'agit du rythme annuel de changement des taux de mortalité à long terme. Elle est sous-divisée en une composante *âge/période* et une composante *cohorte*. Elles s'additionnent pour former la dérive à long terme. La composante *âge/période* s'applique sur toute la tranche d'âge jusqu'à 90 ans (inclus). Pour les âges plus élevés, la dérive pour chaque année calendaire est supposée diminuer linéairement de 90 ans jusqu'à atteindre 0 à 120 ans et est nulle pour les âges supérieurs à 120 ans. La composante *cohorte* est supposée, par défaut, être nulle à long terme, signifiant que l'influence de l'année de naissance actuelle se dissipe sur la période de projection.
- ii. **une constante additionnelle affectant les taux annuels d'amélioration**. Ce paramètre permet à l'organisme d'incorporer un degré de prudence (ou un ajustement approprié) à la projection. Il s'applique de façon identique à toute la tranche d'âge et pour chaque année calendaire.

2.2.2 Taux d'amélioration initiaux agrégées

La dérive de mortalité agrégée, *par défaut*, a été obtenue en ajustant un modèle de p -spline sur les probabilités conditionnelles de décès de la population nationale (de l'Angleterre et du Pays de Galles en l'occurrence) pour la tranche d'âge 18-102 ans sur la période 1961-2011. Du fait des effets de bordures, les deux dernières années calendaires 2011 et 2010 ne sont pas retenues. Ainsi la dérive actuelle est celle calculée pour l'année calendaire 2009, cf. Figure 1, où le taux d'amélioration par âge $t_{x,2009} = 1 - (q_{x,2009}/q_{x,2008})$. En conséquence la première année de projection est 2010.

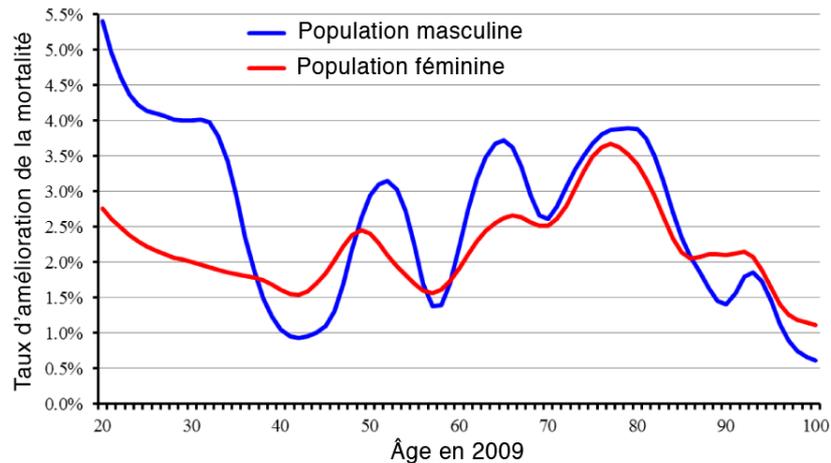


FIGURE 1: Dérive de mortalité agrégée *par défaut* par âge et par sexe.
Source : [Continuous Mortality Investigation \(2013a\)](#).

2.2.3 Les composantes de la dérive initiale

Une deuxième approche proposée par le CMI consiste à sous-diviser les taux d'amélioration initiaux en une composante influencée par l'âge et l'année calendaire, et une autre influencée par l'année de naissance de la cohorte. Celles-ci s'additionnent pour former la dérive initiale.

Les composantes ont été obtenues en appliquant un modèle Âge-Période-Cohorte, cf. [Continuous Mortality Investigation \(2013a\)](#).

Figure 2 présente la composante *âge/période* de la dérive initiale *par défaut* par âge et par sexe.

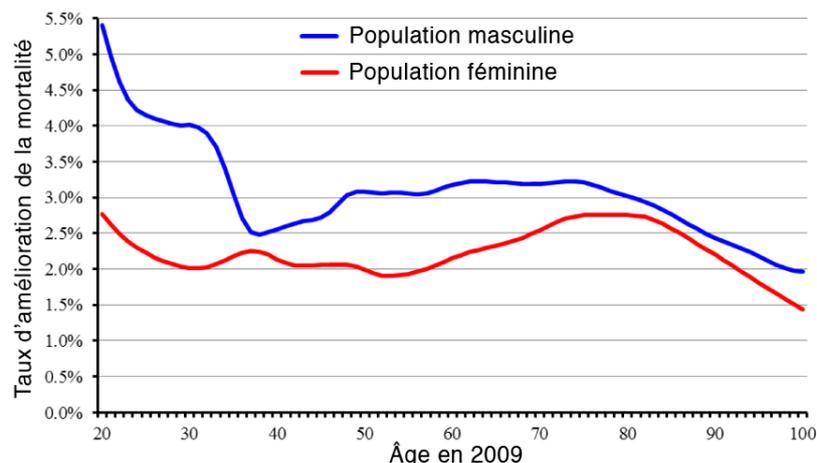


FIGURE 2: Composante *âge/période* de la dérive initiale *par défaut* par âge et par sexe.
Source : [Continuous Mortality Investigation \(2013a\)](#).

Figure 3 présente la composante *cohorte* de la dérive initial *par défaut* par année de naissance et par sexe.

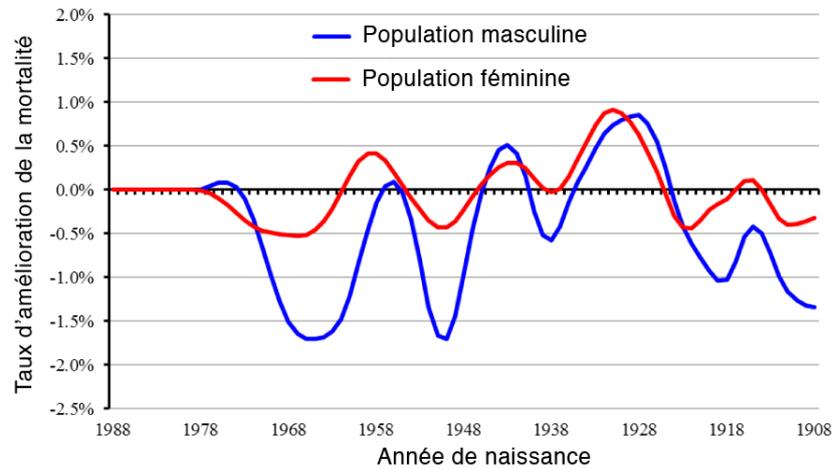


FIGURE 3: Composante *cohorte* de la dérive initiale *par défaut* par année de naissance et par sexe.
Source : [Continuous Mortality Investigation \(2013a\)](#).

2.3 Les paramètres associés à la convergence

Le modèle suppose que la dérive initiale de la mortalité converge vers la dérive à long terme spécifiée par l'organisme. La convergence est contrôlée par deux ensemble de paramètres :

- i. la période de convergence (limitée à 50 années), et
- ii. la proportion de convergence restante à mi-parcours.

2.3.1 Les composantes de la période de convergence

Il est possible de dissocier la convergence de la dérive de mortalité selon ses composantes. Les composantes *âge/période* et *cohorte* de la dérive initiale convergent vers les composantes *âge/période* et *cohorte* à long terme sur la période de convergence laquelle peut varier selon l'âge individuel afin de représenter une convergence plus ou moins rapide vers les taux d'amélioration à long terme.

Le CMI considère que les recherches menées à ce jour justifient une certaine variation dans la période de convergence, par âge et par année de la naissance de cohorte, et celles-ci peuvent être représentées par une structure relativement simple et quelque peu subjective. Du fait de la faible sensibilité des résultats aux variations de ces paramètres, le CMI a conclu qu'il était raisonnable d'offrir un ensemble de valeurs par défaut. Elles sont :

Composante *âge/période* La valeur *par défaut* de la période de convergence est de 10 années pour les âges de 50 ans et moins, augmentant d'une année pour chaque année entre 50 et 60 ans, de 20 années pour les âges jusqu'à 80 ans, diminuant d'une année pour chaque année jusqu'à 95 ans et de 5 ans pour les âges supérieurs à 95 ans.

Ceci illustre que les caractéristiques de l'amélioration de la mortalité liées à l'*âge/période* pour les jeunes adultes ont tendance à changer de décennie en décennie. Toutefois, pour les âges de 60 à 80 ans où quelques causes majeures de décès prédominent, il est plus vraisemblable d'avoir un changement sur une longue durée et il n'apparaît pas de limite dans l'amélioration de la mortalité associée aux progrès réalisés en matière de maladies circulatoires. Aux grands âges, il semble approprié d'utiliser une période de convergence courte, en accord avec le concept général des taux d'amélioration tendant vers 0 assez rapidement après 100 ans.

Composante *cohorte* La valeur *par défaut* de la période de convergence est de 5 années pour les années de naissance inférieures à 1910, augmentant d'une année pour chaque année de naissance de la cohorte jusqu'à 1948 et de 40 années pour les années de naissance supérieures à 1948.

Ceci illustre que les caractéristiques de l'amélioration de la mortalité liées à la *cohorte* ont tendance à être de longue durée, mais suppose un fléchissement après 100 ans. Les périodes de convergences sont plafonnées à 40 années en partie à cause des problèmes liés aux cohortes d'âges jeunes et la projection d'une cohorte faiblement peuplée.

Comme nous pouvons le voir à la Figure 4, les périodes *par défaut* de convergence ne sont pas différenciées selon le sexe. Pour la composante *cohorte*, l'axe horizontal montre l'âge atteint en 2009.

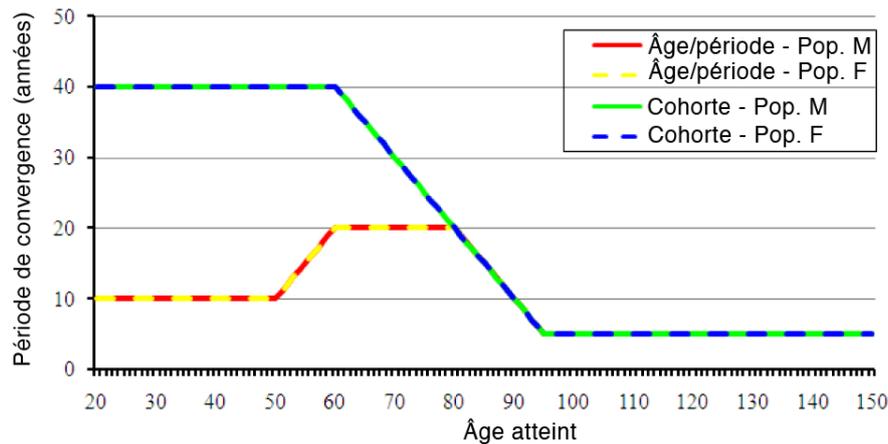


FIGURE 4: Valeurs *par défaut* de la période de convergence.

Source : [Continuous Mortality Investigation \(2009c\)](#) et [Continuous Mortality Investigation \(2013a\)](#).

2.3.2 Proportion de convergence à mi-parcours

Le forme de la convergence à chaque âge peut être modifiée de façon à influencer la trajectoire initiale des améliorations de la mortalité sur la période de projection. Ceci est obtenu en spécifiant la proportion entre la dérive initiale et à long terme à mi-parcours de la période de convergence.

La proportion du poids associé à la dérive initiale est déterminer indépendamment pour chaque âge et année de naissance par en ajustant les polynômes cubiques en fonction du temps, $f(t)$, tel que :

- i. $f(0) = 1$ où $t = 0$ au début de la période de projection,
- ii. $f(T) = 0$ où T est la longueur de la période de convergence (en années pleines),
- iii. $f(\frac{1}{2}T) = \rho$, la proportion de convergence restante à mi-parcours,
- iv. La dérivée première de $f(t)$ à T est nulle, i.e. $f'(T) = 0$.

Soit $\tau = \frac{t}{T}$, de façon à avoir $\tau = 1$ à la fin de la période de convergence et $f(\tau) = \alpha\tau^3 + \beta\tau^2 + \gamma\tau + \delta$. Les contraintes **i** à **iv** donne le système d'équations simultanées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \delta = \rho \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array} \right. , \text{ qui entraine } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 8\rho - 2 \\ \beta = 5 - 16\rho \\ \gamma = 8\rho - 4 \\ \delta = 1 \end{array} \right.$$

Cela permet de donner un point maximum aux taux d'amélioration initiaux au début de la période de projection ainsi qu'à la dérive à long terme à la fin de la période de convergence.

La trajectoire de convergence est lisse, passant par le niveau sélectionné à mi-parcours et décroissant harmonieusement à long terme.

Cependant, le modèle ne prend pas en compte les taux d'amélioration avant le début de la projection et la transition entre la dérive historique et projetée ne peut ne pas être lisse.

Sélectionner une proportion relativement élevée peut générer une dérive projetée qui augmente initialement avant de diminuer vers un taux moyen à long terme.

L'organisme a ainsi la possibilité de générer des scénarios dans lesquels la dérive s'accélère à court terme, avant de ralentir à long terme.

La Figure 5 illustre comment la forme de la convergence peut être modifiée en pratique, avec une dérive initiale de 2 % par âge convergeant vers 1 % par âge sur une période de 40 ans.

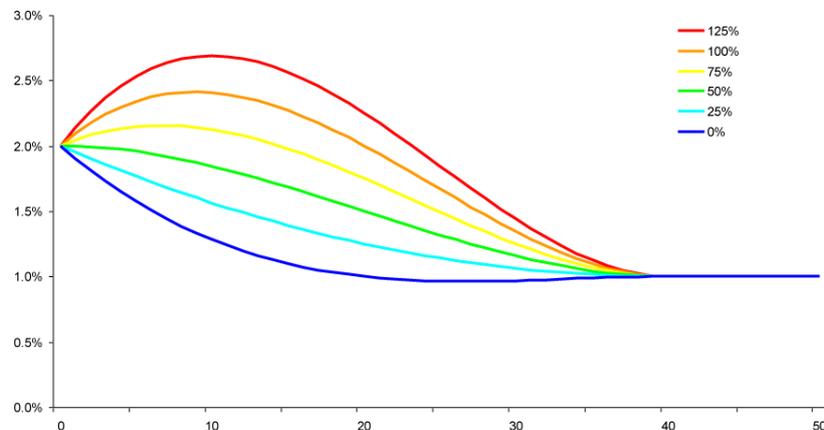


FIGURE 5: Illustration de la forme de la convergence selon plusieurs scénarios de convergence à mi-parcours. Source : [Continuous Mortality Investigation \(2009a\)](#).

Par défaut, la proportion de convergence pour tous les âges et années de naissance est de 50 %, en conséquence, la composante *âge/période* ou *cohorte* de la dérive projetée à mi-parcours sera la moyenne entre la dérive initiale et à long terme. Comme notée à la Section 2.2.1, la composante *cohorte* des taux d'amélioration à long terme est fixée à 0 par défaut.

3 Interpolation des facteurs de réductions et probabilités de décès projetées

Le choix de la table du moment détermine l'année de départ des facteurs de réductions de mortalité actuels et projetés. Ils débutent à 100 % pour l'année (des taux d'amélioration) effective de la table du moment. Ainsi les probabilités de décès conditionnelles projetées sont obtenues selon :

$$\hat{q}_{x,t} = q_{x,0} \times \frac{RF_{x,t}}{RF_{x,0}},$$

où $q_{x,0}$ est le taux de mortalité de la table du moment pour l'âge x , $RF_{x,t}$ est le facteur de réduction cumulé pour l'âge x à la date t et $RF_{x,0}$ celui à la date associée à la table du moment.

Les facteurs de réduction sont interpolés de façon géométrique pour obtenir les valeurs à la date t . Par exemple, imaginons que l'on dispose des taux initiaux d'amélioration de mortalité au 01/01/2009, que la table du moment date du 01/09/2002 et que l'on souhaite disposer de la projection au 01/07/2012. Dans ce cas, le facteur de réduction de mortalité $RF_{65,01/09/02}$ est obtenu en interpolant entre $RF_{65,01/01/02}$ et $RF_{65,01/01/03}$:

$$RF_{65,01/09/02} = 100\% \times \left(\frac{RF_{65,01/01/03}}{100\%} \right)^{0.67},$$

sachant que 01/09/2002 correspond à 0.67 d'une année (243 jours) après le 01/01/2002. De même, $RF_{65,01/07/12}$ est obtenu en interpolant entre $RF_{65,01/01/12}$ et $RF_{65,01/01/13}$:

$$RF_{65,01/07/12} = RF_{65,01/01/12} \times \left(\frac{RF_{65,01/01/13}}{RF_{65,01/01/12}} \right)^{0.50},$$

vu que 01/07/2012 correspond à une demi année après le 01/01/2012. Ainsi

$$\widehat{q}_{65,01/07/12} = q_{65,01/09/02} \times \frac{RF_{65,01/07/12}}{RF_{65,01/09/02}}.$$

4 Outils de validation de la projection

En conjonction du modèle, il est possible d'obtenir une série de graphiques permettant de juger et de valider la projection. On note :

- i.** Les graphiques concernant les taux d'amélioration de la mortalité
 - i.i.** par année calendaire pour une sélection d'âges,
 - i.ii.** par âge atteint pour une sélection d'années calendaire,
 - i.iii.** par année calendaire pour une sélection d'année de naissance des cohortes,
 - i.iv.** par année de naissance d'une cohorte pour une sélection d'années calendaire
- ii.** Les graphiques présentant les taux de mortalité projetés,
 - ii.i.** $\widehat{q}_{x,t}$ par âge atteint x pour une sélection d'année calendaire t ,
 - ii.ii.** $\text{logit}(\widehat{m}_{x,t})$ (taux centraux de mortalité) par âge atteint x pour une sélection d'années calendaire t .
- iii.** Les graphiques présentant les espérances de vie projetées,
 - iii.i.** espérance de vie de la cohorte par années calendaires pour une sélection d'âges,
 - iii.ii.** espérance de vie de la période par années calendaires pour une sélection d'âges.
- iv.** Les graphiques représentant l'accroissement annuel de l'espérances de vie,
 - iv.i.** l'accroissement de l'espérance de vie de la cohorte par années calendaires pour une sélection d'âges,
 - iv.ii.** l'accroissement de l'espérance de vie de la période par années calendaires pour une sélection d'âges.
- v.** Les graphiques représentant les probabilités de survie projetées
 - v.i.** par cohorte,
 - v.ii.** par période.

Enfin, il est possible d'obtenir les valeurs des annuités correspondantes obtenues par le modèle, et un modèle *par défaut* où certain paramètres sont fixés arbitrairement afin de juger de leur sensibilité. Néanmoins, le CMI ne propose aucun cadre permettant la justification des choix effectués par l'organisme.

Références

Continuous Mortality Investigation. 2009a, «A prototype mortality projections model : Part one - an outline of the proposed approach», Working Paper 38, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries. [Disponible ici](#).

Continuous Mortality Investigation. 2009b, «A prototype mortality projections model : Part two – detailed analysis», Working Paper 39, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries. [Disponible ici](#).

Continuous Mortality Investigation. 2009c, «User guide for the CMI mortality projections model, CMI 2009», Guide d'utilisateur, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries. [Disponible ici](#).

Continuous Mortality Investigation. 2013a, «CMI mortality projections model, CMI 2012», Working Paper 63, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries. [Disponible ici](#).

Continuous Mortality Investigation. 2013b, «CMI mortality projections model, CMI 2012», Microsoft Excel file, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries. [Disponible ici](#).